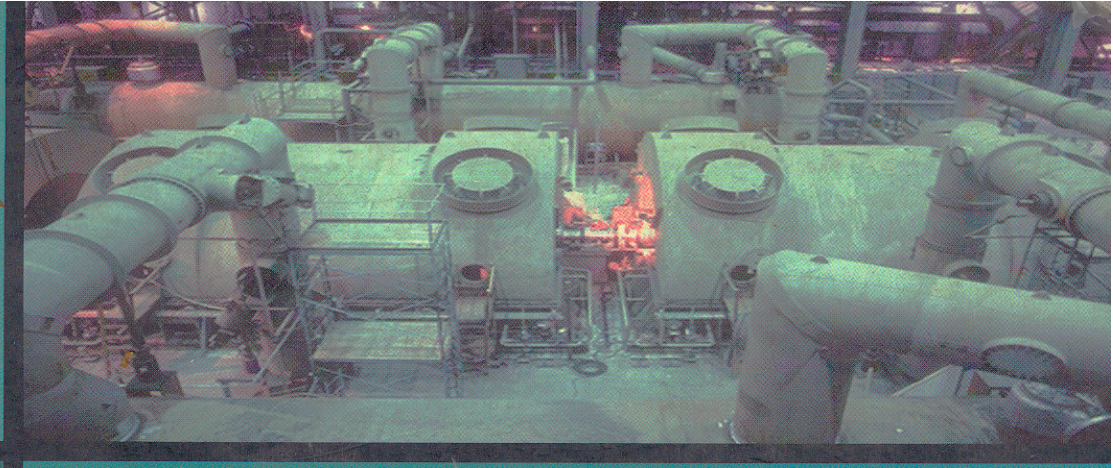


Procesos de transporte y operaciones unitarias

3a Edición

C. J. Geankoplis

CECSA

PROCESOS DE TRANSPORTE Y OPERACIONES UNITARIAS

Christie J. Geankoplis
University of Minnesota

TERCERA EDICIÓN
MÉXICO, 1998

COMPAÑÍA EDITORIAL CONTINENTAL, S.A. DE C.V.
MÉXICO

Contenido

Prefacio xiii

PARTE 1
PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DE PROCESOS DE TRANSPORTE DE MOMENTO LINEAL, DE CALOR Y DE MASA 1

***Capitulo* 1 Introducción a los principios de ingeniería y sus unidades** 3

1.1 Clasificación de las operaciones unitarias y los procesos de transporte 3
1.2 El sistema (SI) de unidades fundamentales usado en este texto y otros sistemas de unidades 5
1.3 Métodos para expresar temperaturas y composiciones 7
1.4 Leyes de los gases y presión de vapor 10
1.5 Conservación de la masa y balances de materia 13
1.6 Unidades de energía y calor 17
1.7 Conservación de energía y balances de calor 23
1.8 Métodos matemáticos, gráficos y numéricos 29

***Capitulo 2* Principios de transferencia de momento lineal y balances globales** 38

2.1 Introducción 38
2.2 Estática de fluidos 39
2.3 Ecuación general de transporte molecular para transferencia de momento lineal, calor y masa 47
2.4 Viscosidad de los fluidos 52
2.5 Tipos de flujo de fluidos y número de Reynolds 56
2.6 Balance total de masa y ecuación de continuidad 59
2.7 Balance global de energía 66
2.8 Balance general de momento lineal 80
2.9 Balance de momento lineal en el recinto y perfil de velocidades en flujo laminar 90
2.10 Ecuaciones de diseño para flujo laminar y turbulento en tuberías 96
2.11 Flujo compresible de gases 115

Capítulo 3 **Principios de la transferencia de momento lineal y aplicaciones** 130

3.1 Flujo alrededor de objetos inmersos y lechos empacados y fluidizados 130
3.2 Medición del flujo de fluidos 145
3.3 Bombas y equipo para manejar gases 152
3.4 Agitación y mezclado de fluidos y necesidades de potencia 161
3.5 Fluidos no newtonianos 174
3.6 Ecuaciones diferenciales de continuidad 186
3.7 Ecuación diferencial de transferencia de momento lineal o de movimiento 193
3.8 Uso de las ecuaciones diferenciales de movimiento y continuidad 199
3.9 Otros métodos para la resolución de ecuaciones diferenciales de movimiento 209
3.10 Flujo de capa límite y turbulencia 215
3.11 Análisis dimensional de la transferencia de momento lineal 228

Capítulo 4 **Principios de transferencia de calor en estado estacionario** 241

4.1 Introducción y mecanismos de la transferencia de calor 241
4.2 Transferencia de calor por conducción 247
4.3 Conducción a través de sólidos en serie 251
4.4 Conducción de estado estacionario y factores de forma 263
4.5 Transferencia de calor por convección forzada dentro de tuberias 265
4.6 Transferencia de calor por convección forzada en el exterior de diferentes geometrias 279
4.7 Transferencia de calor en convección natural 285
4.8 Ebullición y condensación 292
4.9 Intercambiadores de calor 301
4.10 Introducción a la transferencia de calor por radiación 310
4.11 Principios avanzados de transferencia de calor por radiación 316
4.12 Transferencia de calor en fluidos no newtonianos 333
4.13 Casos especiales de coeficientes de transferencia de calor 336
4.14 Análisis dimensional en la transferencia de calor 345
4.15 Métodos numéricos para la conducción en estado estacionario en dos dimensiones 348

Capítulo 5 **Principios de transferencia de calor en estado no estacionario** 368

5.1 Deducción de la ecuación básica 368
5.2 Caso simplificado de sistemas con resistencia interna despreciable 370
5.3 Conducción del calor en estado no estacionario en diversas geometrías 373
5.4 Métodos numéricos de diferencia finita para conducción en estado no estacionario 390
5.5 Enfriamiento y congelación de alimentos y materiales biológicos 401
5.6 Ecuación diferencial de cambio de energía 407
5.7 Flujo de capa límite y turbulencia en la transferencia de calor 413

Capítulo 6 **Principios de transferencia de masa** 425

6.1 Introducción a la transferencia de masa y difusión 425
6.2 Difusión molecular en gases 430
6.3 Difusión molecular en líquidos 444

6.4 Difusión molecular en soluciones y geles biológicos 450
6.5 Difusión molecular en sólidos 455
6.6 Métodos numéricos para la difusión molecular en estado estacionario en dos dimensiones 461

Capítulo 7 **Principios de transferencia de masa en estado no estacionario y por convección** 474

7.1 Difusión de estado no estacionario 474
7.2 Coeficientes de transferencia convectiva de masa 481
7.3 Coeficientes de transferencia de masa para diversas geometrías 487
7.4 Transferencia de masa a suspensiones de partículas pequeñas 503
7.5 Difusión molecular más convección y reacción química 506
7.6 Difusión de gases en sólidos porosos y capilares 517
7.7 Métodos numéricos para difusión molecular en estado no estacionario 524
7.8 Análisis dimensional en la transferencia de masa 530
7.9 Flujo de capa límite y turbulencia en la transferencia de masa 532

PARTE 2
OPERACIONES UNITARIAS 545

Capítulo 8 **Evaporación** 545

8.1 Introducción 545
8.2 Tipos de equipos de evaporación y métodos de operación 547
8.3 Coeficientes totales de transferencia de calor en evaporadores 551
8.4 Métodos de cálculo para evaporadores de un solo efecto 553
8.5 Métodos de cálculo para evaporadores de efecto múltiple 560
8.6 Condensadores para evaporadores 569
8.7 Evaporación de materiales biológicos 571
8.8 Evaporación mediante recompresión de vapor 572

Capítulo 9 **Secado de materiales de proceso** 579

9.1 Introducción y métodos de secado 579
9.2 Equipo para secado 580
9.3 Presión de vapor del agua y humedad 584
9.4 Contenido de humedad de equilibrio de los materiales 593
9.5 Curvas de velocidad de secado 596
9.6 Métodos para calcular el periodo de secado de velocidad constante 601
9.7 Métodos para calcular el periodo de secado de velocidad decreciente 606
9.8 Transferencia de calor por combinación de convección, radiación y conducción, durante el periodo de velocidad constante 609
9.9 Secado por difusión y flujo capilar durante el periodo de velocidad decreciente
9.10 Ecuaciones para diversos tipos de secadores 619
9.11 Liofilización de materiales biológicos 630
9.12 Procesamiento térmico en estado no estacionario y esterilización de materiales biológicos 634

Capítulo 10 **Procesos de separación gas-líquido por etapas y continuos** 650

10.1 Tipos de procesos y métodos de separación 650
10.2 Relaciones de equilibrio entre fases 652
10.3 Contacto de equilibrio en una y en múltiples etapas 653
10.4 Transferencia de masa entre fases 661
10.5 Procesos continuos de humidifícación 670
10.6 Absorción en torres empacadas y de platos 679
10.7 Absorción de mezclas concentradas en torres empacadas 698
10.8 Estimación de los coeficientes de transferencia de masa para torres empacadas 703

Capítulo 11 **Procesos de separación vapor-líquido** 712

11.1 Relaciones de equilibrio vapor-líquido 712
11.2 Contacto de equilibrio de una sola etapa para un sistema vapor-líquido 715
11.3 Métodos simples de destilación 716
11.4 Destilación con reflujo y el método de McCabe-Thiele 722
11.5 Eficiencias de los platos en la destilación y la absorción 740
11.6 Destilación fraccionada con el método de entalpía-concentración 743
11.7 Destilación de mezclas multicomponentes 753

Capítulo 12 **Procesos de separación liquido-líquido y sólido-fluido** 773

12.1 Introducción a los procesos de adsorción 773
12.2 Adsorción por lotes 776
12.3 Diseño de columnas de adsorción de lecho fijo 777
12.4 Procesos de intercambio de iones 784
12.5 Procesos de extracción líquido-líquido en una sola etapa
12.6 Equipo para extracción líquido-líquido 791
12.7 Extracción a continua contracorriente en etapas múltiples 794
12.8 Introducción y equipo para lixiviación líquido-sólido 800
12.9 Relaciones de equilibrio y lixiviación en una sola etapa 807
12.10 Lixiviación a contracorriente en etapas múltiples 810
12.11 Introducción y equipo de cristalización 815
12.12 Teoría de la cristalización 822

Capítulo 13 **Procesos de separación a través de una membrana** 833

13.1 Introducción y tipos de procesos de separación a través de las membranas 833
13.2 Procesos de membrana de permeación de líquidos o diálisis 834
13.3 Procesos a través de una membrana para permeación de gases 838
13.4 Modelo de mezcla completa para la separación de gases por medio de membranas 844
13.5 Modelo de mezcla completa para mezclas multicomponentes 850
13.6 Modelo de flujo cruzado para la separación de gases por membranas 853
13.7 Modelo de flujo a contracorriente para la separación de gases a través de membranas 860

13.8 Efectos de las variables de proceso en la separación de gases a través de membranas 863
13.9 Procesos a través de una membrana de ósmosis inversa 865
13.10 Aplicaciones, equipo y modelos para ósmosis inversa 871
13.11 Procesos a través de una membrana de ultrafiltración 875

Capitulo **14** **Procesos de separación físicos-mecánicos** 884

14.1 Introducción y clasificación de los procesos de separación físico-mecánicos 884
14.2 Filtración en la separación sólido-líquido 885
14.3 Precipitación y sedimentación en la separación partícula-fluido 900
14.4 Procesos de separación por centrifugación 915
14.5 Reducción mecánica de tamaño 928

APÉNDICES

Apéndice A.l Constantes fundamentales y factores de conversión 939
Apéndice A.2 Propiedades físicas del agua 943
Apéndice A.3 Propiedades físicas de compuestos inorgánicos y orgánicos 953
Apéndice A.4 Propiedades fisicas de materiales alimenticios y biológicos 978
Apéndice A.5 Propiedades de tuberías, ductos y tamices 981

Notación 984

Índice 993

Prefacio

En esta tercera edición, los objetivos principales y el formato de las ediciones primera y segunda no han variado. Las secciones sobre transferencia de momento lineal se han ampliado en gran medida, sobre todo las que se refieren a las ecuaciones diferenciales de la transferencia de momento lineal. Esto permite ahora cubrir por completo los procesos de transferencia de momento lineal, de calor y de masa. Por otra parte, a las secciones de operaciones unitarias se les agregaron una sección sobre adsorción y un capítulo ampliado sobre los procesos a través de membrana.

En los últimos años, el campo de la ingenieria química relacionado con los cambios físicos y fisicoquímicos de materiales orgánicos e inorgánicos y, hasta cierto punto también, de los materiales biológicos, se ha ido mezclando con otras áreas de la ingenieria de procesos. Entre éstas están la ingeniería sanitaria o de tratamiento de aguas de desperdicio (ingeniería civil) y la bioingenieria. Todos estos campos utilizan los principios de momento lineal, transporte de masas y de calor, y operaciones unitarias en sus procesos,

Tradicionalmente, la mayoría de los ingenieros toman cursos en los que estudian la transferencia de momento lineal o el flujo de fluidos y la transferencia de calor. El estudio de la transferencia de masas se ha limitado casi siempre a los ingenieros químicos. Sin embargo, recientemente se ha visto que los ingenieros de otras especialidades tienen interés en la transferencia de masas de gases, líquidos y sólidos.

Puesto que el ingeniero químico de la actualidad debe estudiar muchos temas, resulta necesario proporcionar una introducción más unificada a los procesos de transporte de momento lineal (dinámica de fluidos), calor y transferencia de masas, y a las aplicaciones de operaciones unitarias. En este texto, se estudian primero los principios de los procesos de transferencia o transporte, para pasar después a las operaciones unitarias. Para lograr esto, el libro se divide en dos partes principales.

PARTE 1: Principiosfindamentales de procesos de transporte de momento lineal, de calor y de masa

Esta parte, que estudia los principios fundamentales, incluye los siguientes capítulos: 1, Introducción a los principios y unidades de la ingeniería; 2. Principios de transferencia de momento lineal y balances globales; 3. Principios de transferencia de momento lineal y aplicaciones; 4. Principios de

transferencia de calor en estado estacionario; 5. Principios de transferencia de calor estado no estacionario; 6. Principios de transferencia de masa; 7. Principios de la transferencia de masa convectiva y en estado no estacionario.

PARTE 2: Operaciones unitarias

Esta parte, dedicada a las aplicaciones, cubre las siguientes operaciones unitarias: 8. Evaporación; 9. Secado de materiales de proceso; 10. Procesos de separación gas-líquido por etapas y continuos (humidificación, absorción); **11.** Procesos de separación vapor-líquido (destilación); 12. Procesos de separación líquido-líquido y líquido-sólido por etapas y continuos (adsorción, intercambio iónico, extracción, lixiviación, cristalización); 13. Procesos de separación de membrana (diálisis, separación de gases, ósmosis inversa, ultrafiltración); 14. Procesos de separación mecánico-físicos (filtración, sedimentación, separación centrifuga, reducción de tamaño mecánico).

En el capítulo 1 se repasan algunos principios elementales de ingeniería, métodos gráficos y matemáticos, leyes de física y química, balances de materia y balances de calor. Muchos estudiantes, en especial los de ingeniería química, están ya familiarizados con la mayoría de estos principios y pueden omitir algunas partes del capítulo o su totalidad.

Algunos temas relacionados con los procesos de materiales biológicos, pueden omitirse a discreción del estudiante o del profesor; por ejemplo, las secciones 2.10, 3.10,4.4,4.8, 5.4, 5.8, 6.7 y 7.11. El texto incluye más de 170 problemas de ejemplos y más de 380 problemas para ser resueltos por el estudiante. Algunos de estos últimos de estudio se relacionan con sistemas biológicos y fueron incluidos para los lectores especialmente interesados en esta área.

Una de las características específicas de este libro es la división de cada capítulo en secciones elementales y secciones de temas selectos. En las secciones elementales (que aparecen al principio de cada capítulo) se estudian los principios fundamentales necesarios para una comprensión adecuada de los temas. Después, y dependiendo de las necesidades del lector o el profesor, pueden estudiarse diversos temas selectos. Por ejemplo, en el capítulo 2, las secciones 2.1 a 2.5 cubren los principios básicos y las secciones 2.6 a 2.13, identificadas como temas selectos, abarcan temas especializados o estudios avanzados de los principios básicos. Un caso típico son las secciones 2.6 (tema selecto) "Flujo compresible de gases" y la 2.10 (tema selecto) "Fluidos no newtonianos", que por lo general se omiten en el estudio elemental de los principios básicos. La totalidad del texto se basa en este tipo de distribución de los temas de estudio.

Este libro puede usarse para un curso formal, recomendándose entonces los siguientes planes, en todos los cuales puede incluirse o no el capítulo 1.

1. Estudio de los principios de transferencia de momento lineal, de calor y de masa, y de las operaciones unitarias. **En este** plan se estudia la mayor parte del texto que cubre los principios de los procesos de transporte en la parte 1 y de las operaciones unitarias en la parte 2. Además, se puede incluir, si así se desea, varios temas selectos. Este plan puede aplicarse en especial a la ingeniería química y a otros campos de la ingeniería de procesos en curso de un año al nivel de los cuatro últimos semestres de licenciatura.

2. Estudio de los principios de transferencia de momento lineal, de calor y de masa , y de operaciones unitarias selectas. Sólo se cubren las secciones elementales de la parte 1 (los capítulos de principios 2, 3,4 y 5), además de temas selectos de operaciones unitarias en la parte II aplicables a la especialización considerada para un curso de un semestre. Los estudiantes de ingeniería de tratamiento de aguas de desperdicio, ingeniería de procesos de alimentos y procesos metalúrgicos, pueden adoptar este plan.

3. Estudio de los principios de transferencia de momento lineal, de calor y de masa. El propósito de este plan para un curso de un semestre o un trimestre es el de obtener una comprensión básica de los procesos de transporte de transferencia de momento lineal, calor y masa. Esto implica el estudio de las secciones elementales y de temas selectos de los capítulos dedicados a los principios: 2, 3,4 y 5 en la parte 1, omitiendo la parte 2, es decir, los capítulos de aplicaciones de las operaciones unitarias.

4. Estudio de las operaciones unitarias. Si el estudiante ya ha tomado cursos de principios de transferencia de momento lineal, de calor y de masa, los capítulos 2, 3 , 4 y 5 pueden omitirse y estudiarse solamente los correspondientes a operaciones unitarias de la parte II en un curso de un semestre o un trimestre. Este plan puede ser útil para ingenieros químicos y otras especialidades.

5. Estudio de transferencia de masa. Para estudiantes de ingeniería química o mecánica que han tomado cursos de transferencia de momento lineal y de calor, así como para los que sólo desean adquirir conocimientos generales de transferencia de masa en un semestre o un trimestre, se recomienda estudiar los capítulos 5 y 8. Los capítulos 7, 9 y 10 pueden cubrirse o no, dependiendo de los requerimientos del estudiante.

La comunidad científica ya ha adoptado el sistema de unidades internacional SI *(Systéme Internationale d 'Unités)* y el cambio se ha efectuado con gran rapidez. Debido a ello, este libro utiliza el sistema de unidades SI para ecuaciones, problemas de ejemplo y problemas de estudio. Sin embargo, las ecuaciones más importantes del texto se expresan en un sistema doble de unidades, SI e inglés, cuando ambos difieren. Algunos problemas de ejemplo y de estudio también se expresan en unidades inglesas, para aquellos que desean utilizar este sistema.

Christie J. Geankoplis

PARTE 1

Principios fundamentales de procesos de transporte de momento lineal de calor y de masa

CAPÍTULO 1

Introducción a los principios de ingenieria y sus unidades

1.1 CLASIFICACIÓN DE LAS OPERACIONES UNITARIAS Y LOS PROCESOS DE TRANSPORTE

CAPÍTULO 1

Introducción a los principios de ingenieria y sus unidades

1.1 CLASIFICACIÓN DE LAS OPERACIONES UNITARIAS Y LOS PROCESOS DE TRANSPORTE

l.lA Introducción

En las industrias de procesos químicos y físicos, así como en las de procesos biológicos y de alimentos, existen muchas semejanzas en cuanto a la forma en que los materiales de entrada o de alimentación se modifican o se procesan para obtener los materiales finales de productos químicos o biológicos. Es posible considerar estos procesos químicos, físicos o biológicos, aparentemente distintos, y clasificarlos en una serie de etapas individuales y diferentes llamadas *operaciones unitarias.* Estas operaciones unitarias son comunes a todos los tipos de industrias de proceso.

Por ejemplo, la operación unitaria conocida como *destilación* se usa para purificar o separar alcohol en la industria de las bebidas y también para separar los hidrocarburos en la industria del petróleo. El secado de granos y otros alimentos es similar al secado de maderas, precipitados filtrados y estopa de rayón.

La operación unitaria *absorción* se presenta en la absorción de oxigeno del aire en los procesos de fermentación o en una planta de tratamiento de aguas, así como en la absorción de hidrógeno gaseoso en un proceso de hidrogenación líquida de aceites.

La evaporación de sahnueras en la industria química es similar a la evaporación de soluciones de azúcar en la industria alimenticia. La sedimentación de sólidos en suspensiones en las industrias de tratamiento de aguas y minería, es una operación similar. El flujo de hidrocarburos líquidos en refinerías de petróleo y el flujo de leche en una planta de productos lácteos se llevan a cabo de manera semejante.

Las operaciones unitarias estudian principalmente la transferencia y los cambios de energía, la transferencia y los cambios de materiales que se llevan a cabo por medios físicos, pero también por medios fisicoquímicos. A continuación se describen las operaciones unitarias importantes que se cubren en este libro, y que corresponden a aquellas que se pueden combinar en diversas secuencias en un proceso.

l.lB Clasificación de las operaciones unitarias

1. *Flujo de fluidos.* Estudia los principios que determinan el flujo y transporte de cualquier fluido de un punto a otro.

2. *Transferencia de calor.* Esta operación unitaria concierne a los principios que gobiernan la acumulación y transferencia de calor y de energía de un lugar a otro.
3. *Evaporación.* Éste es un caso especial de transferencia de calor, que estudia la evaporación de un disolvente volátil (como el agua), de un soluto no volátil como la sal o cualquier otro tipo de material en solución.
4. *Secado.* Separación de líquidos volátiles casi siempre agua de los materiales sólidos.
5. *Destilación.* Separación de los componentes de una mezcla líquida por medio de la ebullición basada en las diferencias de presión de vapor.
6. *Absorción.* En este proceso se separa un componente gaseoso de una corriente por tratamiento con un líquido.
7. *Separación de membrana.* Este proceso implica separar un soluto de un fluido mediante la difusión de este soluto de un líquido o gas, a través de la barrera de una membrana semipermeable, a otro fluido.
8. *Extracción líquido-líquido.* En este caso, el soluto de una solución líquida se separa poniéndolo en contacto con otro disolvente líquido que es relativamente inmiscible en la solución.
9. *Adsorción.* En este proceso, un componente de una corriente líquida o gaseosa es retirado y adsorbido por un adsorbente sólido.
10. *Lixiviación líquido-sólido.* Consiste en el tratamiento de un sólido finamente molido con un líquido que disuelve y extrae un soluto contenido en el sólido.
11. *Cristalización. Se* refiere a la extracción de un soluto, como la sal, de una solución por precipitación de dicho soluto.
12. *Separaciones físico-mecánicas.* Implica la separación de sólidos, líquidos o gases por medios mecánicos, tales como filtración, sedimentación o reducción de tamaño, que por lo general se clasifican como operaciones unitarias individuales.

Muchas de estas operaciones unitarias tienen ciertos principios básicos o fundamentales comunes. Por ejemplo, el mecanismo de difusión o de transferencia de masa se presenta en el secado, absorción, destilación y cristalización. La transferencia de calor es común al secado, la destilación, la evaporación, etc. Por lo tanto, es conveniente establecer la siguiente clasificación más fundamental de los procesos de transporte o de transferencia.

l.lC Procesos fundamentales de transporte

1. *Transferencia de momento lineal. Se* refiere a la que se presenta en los materiales en movimiento, como en operaciones unitarias de flujo de fluidos, sedimentación y mezclado.
2. *Transferencia de calor.* En este proceso fundamental se considera como tal a la transferencia de calor que pasa de un lugar a otro; se presenta en las operaciones unitarias de transferencia de calor, secado, evaporación, destilación y otras.
3. *Transferencia de masa.* En este caso se transfiere masa de una fase a otra fase diferente; el mecanismo básico es el mismo, ya sea que las fases sean gaseosas, sólidas o líquidas. Este proceso incluye destilación, absorción, extracción líquido-líquido, separación por membranas, adsorción y lixiviación.

l.lD Contenido de las partes 1 y 2

Este texto está constituido por dos partes:

Parte 1: Principios fundamentales de los procesos de transporte de momento lineal, de calor

y de masa. Estos principios fundamentales se estudian con detalle en los capítulos 1-7 para proporcionar las bases de las operaciones unitarias.

Parte 2: Operaciones unitarias. En esta parte del texto se estudian las diversas operaciones unitarias y sus aplicaciones en las áreas de proceso.

Existen varios principios elementales de ingeniería, técnicas matemáticas y leyes de física y química que son fundamentales para el estudio de los principios de transferencia de momento lineal, calor y masa y de las operaciones unitarias, Todo ello se repasa en este primer capítulo. Muchos lectores, en especial los ingenieros químicos, agrícolas, civiles y los químicos, probablemente conocerán ya estos principios y técnicas y pueden omitir este capítulo.

Los problemas de estudio al final de cada capítulo están distribuidos por secciones y cada una de ellas corresponde al numero de una determinada sección del capítulo.

1.2 EL SISTEMA SI DE UNIDADES FUNDAMENTALES USADO EN ESTE TEXTO Y OTROS SISTEMAS DE UNIDADES

Existen tres sistemas de unidades fundamentales empleados actualmente en la ciencia y la ingeniería. El primero y más importante es el *sistema SI* (Systeme International d'unités), cuyas tres unidades básicas son el metro (m), el kilogramo (kg) y el segundo (s).

Los *otros* son el *sistema inglés:* pie (ft) · libra (lb) · segundo *(s) o sistemapls (fps); y el sistema* centímetro (cm) · gramo *(g)* · segundo *(s), o sistema cgs.*

En la actualidad se ha adoptado ya el sistema SI de manera oficial para usarse en ingeniería y las ciencias, aunque los sistemas inglés y cgs todavía tienen bastante aceptación. Muchos de los datos químicos y físicos, así como las ecuaciones empíricas, están expresados en estos dos sistemas. Por tanto, el ingeniero no sólo debe conocer a la perfección el sistema SI, sino además poseer cierto grado de familiarización con los otros dos sistemas.

1.2A El sistema de unidades SI

Las unidades fundamentales del sistema SI son como sigue: la unidad de longitud es el metro (m); la de tiempo es el segundo (s); la de masa es el kilogramo (kg); la de temperatura es el Kelvin (K); y la de un elemento es el kilogramo mol (kg mol). Las unidades restantes se derivan de estas cantidades.

La unidad de fuerza es el newton (N), que se define como

$$1 \text{ newton (N)} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$$

La unidad básica de trabajo, energía o calor es el newton-metro, o joule (J):

$$1 \text{ joule (J)} = 1 \text{ newton} \cdot \text{m (N . m)} = 1 \text{ kg . } \text{m}^2/\text{s}^2$$

La potencia se mide en joule/s o watts (W):

$$1 \text{ joule/s (J/s)} = 1 \text{ watt (W)}$$

La unidad de presión es el newton/m^2 o Pascal (Pa):

$$1 \text{ newton/m}^2 \text{ (N/m}^2\text{)} = 1 \text{ Pascal (Pa)}$$

La presión en atmósferas (atm) no es una unidad estándar del sistema SI, pero se usa en la etapa de transición. La aceleración de la gravedad se define como:

$$1\ g = 9.80665\ m/s^2$$

Algunos de los prefijos para múltiplos de las unidades básicas son: giga (G) = 10^9, mega (M) = 10^6, kilo (k) = 10^3, centi (c) = 10^{-2}, mili (m) = 10^{-3}, micro (μ) = 10^{-6} y nano (n) = 10^{-9}. El prefijo c es poco usual.

Las temperaturas se definen en Kelvins (K), como unidad estándar del sistema SI. Sin embargo, en la práctica se usa mucho la escala Celsius (°C) que se define como

$$t\ °C = T(K) - 273.15$$

Nótese que 1 °C = 1 K cuando se trata de diferencias de temperatura,

$$\Delta t\ °C = \Delta T\ K$$

La unidad estándar de tiempo preferible es el segundo (s), pero también puede expresarse en unidades no decimales de minutos (min), horas (h) o días (d).

1.2B El sistema de unidades cgs

El sistema cgs se relaciona con el sistema SI como sigue:

1 g masa (g) = 1 x 10^{-3} kg masa (kg)

1 cm = 1 x 10^{-2} m

1 dina = 1 g · cm/s^2 = 1 x 10^{-5} newton (N)

1 erg = 1 dina . cm = 1 x 10^{-7} joule (J)

La aceleración estándar de la gravedad es

$$g = 980.665\ cm/s^2$$

1.2C El sistema inglés de unidades (pls)

La equivalencia entre el sistema inglés y el SI es como sigue:

1 lb masa (Ib,) = 0.45359 kg

1 pie = 0.30480 m

1 lb fuerza (lb_f) = 4.4482 newtons (N)

1 pie . lb_f = 1.35582 newton . m (N *m) = 1.35582 joules (J)

$$1\ \text{lb/pulg}^2\ \text{abs} = 6.89476 \times 10^3\ \text{newton/m}^2\ (\text{N/m}^2)$$

$$1.8\ ^\circ\text{F} = 1\ \text{K} = 1\ ^\circ\text{C}\ \text{(centígrado o Celsius)}$$

$$g = 32.174\ \text{pie/s}^2$$

El factor de proporcionalidad para la ley de Newton es

$$g_c = 32.174\ \text{pie} \cdot \text{lb}_m/\text{lb}_f \cdot \text{s}^2$$

El factor g_c en unidades SI y cgs es 1.0 y se omite.

En el apéndice A. 1 se incluyen tablas de factores de conversión para los tres sistemas, además, en varias secciones de este texto aparecen ejemplos del uso de estas relaciones.

Este texto usa el sistema SI como conjunto primario de unidades para ecuaciones, problemas de ejemplo y de estudio. Sin embargo, las ecuaciones importantes que se deducen en el texto se expresan en dos sistemas de unidades, SI e ingles, cuando las ecuaciones difieren. Algunos problemas de ejemplo y de estudio también usan unidades inglesas. En algunos casos, las etapas intermedias y las respuestas de los problemas de ejemplo también se expresan en unidades del sistema inglés.

1.2D Ecuaciones dimensionalmente homogéneas y con unidades congruentes

Una ecuación dimensionalmente homogénea es aquella en la cual todos los términos tienen el mismo tipo de unidades. Estas unidades pueden ser las básicas o derivadas (por ejemplo, kg/s^2 . m o Pa). Esta clase de ecuaciones puede usarse con cualquier sistema de unidades siempre y cuando se utilicen idénticas unidades básicas o derivadas en toda la ecuación. (No se requieren factores de conversión cuando se emplean unidades congruentes.)

El lector debe ser cuidadoso en el uso de ecuaciones, comprobando siempre su homogeneidad dimensional. Para proceder así, primero se selecciona un sistema de unidades (SI, inglés, etc.). Después, se incluyen las unidades de cada término y se comprueba su equivalencia luego de cancelar las que sean iguales en cada término

1.3 MÉTODOS PARA EXPRESAR TEMPERATURAS Y COMPOSICIONES

1.3A Temperatura

Existen dos escalas de temperatura comunes en las industrias química y biológica. Ellas son grados Fahrenheit (°F) y Celsius (°C). Es muy frecuente que se necesite obtener valores equivalentes de una escala a la otra. Ambas usan el punto de congelación y el punto de ebullición del agua a 1 atmósfera de presión como patrones. Las temperaturas también se expresan en grados K absolutos (sistema SI) o grados Rankine (°R) en vez de °Co °F. La tabla 1.3-1 muestra las equivalencias de estas cuatro escalas de temperaturas.

La diferencia entre el punto de ebullición del agua y el punto de fusión del hielo a 1 atm es 100 °C o 180 °F. Por lo tanto, un cambio de 1.8 |°F es igual a un cambio de 1 °C. En general, el valor de -273.15 °C se redondea a -273.2 °C y el de -459.7 °F a -460 °F. Para convertir de una escala a otra pueden usarse las siguientes ecuaciones:

TABLA 1.3- 1. *Escalas de temperatura y equivalencias*

	Centígrada	*Fahrenheit*	*Kelvin*	*Rankine*	*Celsius*
Agua en ebullición	100 °C	212 °F	373.15 K	671.7 °R	100 °C
Fusión del hielo	0 °C	32 °F	273.15 K	491.7 °R	0 °C
Cero absoluto	-273.15 °C	-459.7 °F	OK	0 °R	-273.15 °C

$$°F = 32 + 1.8(°C) \tag{1.3-1}$$

$$°C = \frac{1}{1.8}(°F - 32) \tag{1.3-2}$$

$$°R = °F + 460 \tag{1.3-3}$$

$$K = °C + 273.15 \tag{1.3-4}$$

1.3B Unidades molares y unidades de peso y masa

Existen muchos métodos para expresar las composiciones de gases, líquidos y sólidos. Uno de los más útiles es el de las unidades molares, pues las reacciones químicas y las leyes de los gases resultan más simples al expresarlas en unidades molares. Un mol de una sustancia pura se define como la cantidad de dicha sustancia cuya masa es numéricamente igual a su peso molecular. De esta manera, 1 kg mol de metano, CH_4, contiene 16.04 kg. También, 1.0 lb mol contiene 16.04 lb_m.

La fracción mol de una determinada sustancia es el número de moles de dicha sustancia dividido entre el número total de moles. De la misma forma, la fracción en peso o en masa es la masa de la sustancia dividida entre la masa total. Estas dos composiciones que se aplican por igual a gases, líquidos y sólidos, pueden expresarse como sigue para el componente A de una mezcla:

$$x_A \text{ (fracción mol de A)} = \frac{\text{moles de A}}{\text{moles totales}} \tag{1.3-5}$$

$$w_A \text{ (fracción en masa o en peso de } A) = \frac{\text{masa de } A}{\text{masa total}} \tag{1.3-6}$$

EJEMPLO 1.3-1. Fracción mol y en masa o en peso de una sustancia

Un recipiente contiene 50 g de agua (B) y 50 g de NaOH *(A)*. Calcule la fracción en peso y la fracción mol de NaOH. Calcule también el valor lb_m para NaOH *(A)* y H_2O *(B)*.

Solución: Tomando como base el cálculo 50 + 50 o 100 g de solución, se determinan los siguientes datos:

Componente G		*Fracción en peso*	*Peso molecular*	*Gramos Mol*	*Fracción mol*
H_2O (*B*)	*50.0*	$\frac{50}{100} = 0500$ '	18.02	$\frac{50.0}{18.02} = 2.78$	$\frac{2.78}{4.03} = 0.690$
NaOH *(A)*	50.0	$\frac{50}{100} = 0500$.	40.0	$\frac{50.0}{40.0} = 1.25$	$\frac{1.25}{4.03} = 0310$.
Total	100.0	1.00		4.03	1.000

Por consiguiente, $x_A = 0.3\ 10$ y $x_B = 0.690$ y $x_A + x_B = 0.310 + 0.690 = 1.00$. Además, $w_A + w_B = 0.500 + 0.500 = 1.00$. Para calcular lb_m de cada componente, en el apéndice A.l se ve que el factor de conversión es 453.6 g por 1 lb_m. Usando esto,

$$\text{lb masa de } A = \frac{50g\ A}{453.6\ g\ A / lb_m A} = 0.1102\ lb_m\ A$$

Nótese que los gramos de *A* en el numerador se cancelan con los gramos de *A* en el denominador, quedando lb_m de *A* en el numerador. Siempre debe tomarse la precaución de incluir todas las unidades de la ecuación y cancelar las que aparezcan en el numerador y en el denominador. De la misma manera se obtiene el valor 0.1102 lb_m de *B (0.0500* kg de *B).*

Los análisis de sólidos y líquidos generalmente se expresan como fracción en peso o en masa o porcentaje en peso, y los gases en porcentaje o fracción mol. A menos que se indique lo contrario, se supondrá que los análisis de sólidos y líquidos están expresados en fracción peso (masa) o porcentaje, y los correspondientes a los gases en fracción mol o porcentaje.

1.3C Unidades de concentración para líquidos

En general, cuando un líquido se mezcla con otro en el que sea miscible, los volúmenes no son aditivos. Por consiguiente, las composiciones de los líquidos no suelen expresarse en porcentaje en volumen sino como porcentaje en peso o molar. Otra forma conveniente de expresar las concentraciones de los componentes de una solución es la *molaridad,* que se define como el número de g mol de un componente por litro de solución. Otros de los métodos expresan en kg/m^3, g/l, g/cm^3, lb mol/pie^3, lb_m/pie^3 y lb_m/galón. Todas estas medidas de concentración dependen de la temperatura, por lo que es necesario especificarla.

El método más común para expresar la concentración total por unidad de volumen es la densidad, kg/m^3, g/cm^3 o lb_m/pie^3. Por ejemplo, la densidad del agua a 277.2 K (4 "C) es 1000 kg/m^3 o 62.43 lb_m/pie^3. Algunas veces la densidad de una solución se expresa como densidad relativa (peso específico), que se define como la densidad de la solución a una temperatura específica, dividida entre la densidad de una sustancia de referencia a esa temperatura. Si la sustancia de referencia es el agua a 277.2 K, la densidad relativa (peso específico) y la densidad de una sustancia son numéricamente iguales.

1.4 LEYES DE LOS GASES Y PRESIÓN DE VAPOR

1.4A Presión

Existen muchas formas para expresar la presión ejercida por un fluido o un sistema . Una *presión absoluta* de 1.00 atm es equivalente a 760 mm de Hg a 0 “C, 29.921 pulg de Hg, 0.760 m de Hg, 14.696 Ib fuerza por pulgada cuadrada (lb/pulg^2 abs), *o 33.90* pies de agua a 4 “C. La *presión manométrica* es la presión por encima de la presión absoluta. De esta manera, una presión manométrica de 2 1.5 Ib por pulgada cuadrada (*lb/pulg*^{2}) es igual a 2 1.5 + 14.7 (redondeando) o 36.2 lb/pulg^2 abs. En unidades SI, 1 lb/pulg^2 abs = 6.89476 x 10^3 pascales (Pa) = 6.89476 x 10^3 newtons/m^2. Además, 1 atm = 1.01325 x 10^5 Pa.

En algunos casos, en especial cuando se trata de evaporación, puede expresarse la presión como pulgadas de vacío de mercurio. Esto significa la presión en pulgadas de mercurio medida “por debajo” de la presión barométrica absoluta. Por ejemplo, una lectura de 25.4 pulg de vacío de Hg es 29.92 - 25.4, o 4.52 pulg de Hg de presión ‘absoluta. (Las conversiones de unidades de presión pueden buscarse en el apéndice A. 1.)

1.4B Ley de los gases ideales

Un *gas ideal* se define como aquel que obedece a leyes simples. Además, las moléculas gaseosas de un gas ideal se consideran como esferas rígidas que no ocupan volumen por sí mismas y que no se afectan mutuamente. Ningún gas real obedece estas leyes con exactitud, pero a temperaturas y presiones normales de pocas atmósferas, la ley de los gases ideales proporciona respuestas con bastante aproximación. Por consiguiente, esta ley tiene una precisión suficiente para los cálculos de ingeniería.

La *ley de los gases ideales* de Boyle indica que el volumen de un gas es directamente proporcional a la temperatura absoluta e inversamente proporcional a la presión absoluta. Esto se expresa como

$$pV = nRT \tag{1.4-1}$$

donde p es la presión absoluta en N/m^2, *Ves* el volumen del gas en m^3, n es el número de kg mol de gas, T es la temperatura absoluta en K, y *R es* la constante de la ley de los gases y tiene un valor de 8314.3 kg · m^2/kg mol . s^2 · K. Cuando el volumen se expresa en pie^3, n en Ib mol y *Ten* °R. el valor de R es 0.7302 pie^3 atm/lb mol *°R. Para unidades cgs (véase el apéndice A. l), V = cm^3, T = *K, R = 82.057* cm^3 · atm/g mol *K y n = g mol.

Para comparar diferentes cantidades de gases, *las condiciones estándar de temperatura y presión* (abreviadas TPE o CE) se definen arbitrariamente como 101.325 kPa (1.0 atm) abs y 273.15 K (0 “C). En estas condiciones, los volúmenes son

$$\text{volumen de 1.0 kg mol (CE)} = 22.414 \text{ m}^3$$

$$\text{volumen de 1.0 g mol (CE)} = 22.414 \text{ litros} = 22\,414 \text{ cm}^3$$

$$\text{volumen de 1.0 lb mol (CE)} = 359.05 \text{ pies}^3$$

EJEMPLO 1.4-I. Constante de la ley de los gases

Calcule el valor de la constante de la ley de los gases, R, cuando la presión está en lb/pulg^2 abs, las moles en lb moles, el volumen en pie^3 y la temperatura en °R. Repita para unidades SI.

Solución: En condiciones estándar, $p = 14.7\ \text{lb/pulg}^2$ abs, $V = 359\ \text{pies}^3$ y $T = 460 + 32 = 492$ °R (273.15 K). Sustituyendo en la ecuación (1.4-l) $n = 1.0$ lb mol y despejando R,

$$R = \frac{pV}{nT} = \frac{(14.7\ \text{lb/pulg}^2\ \text{abs})(359\ \text{pie}^3)}{(1.0\ \text{lb mol})(492\ ^\circ\text{R})} = 10.73\ \frac{\text{pie}^3 \cdot \text{lb/pulg}^2\ \text{abs}}{\text{lb mol}\ ^\circ\text{R}}$$

$$R = \frac{pV}{nT} = \frac{(1.01325 \times 10^5\ \text{Pa})(22.414\ \text{m}^3)}{(1.0\ \text{kg mol})(273.15\ \text{K})} = 8314\ \frac{\text{m}^3 \cdot \text{Pa}}{\text{kg mol} \cdot \text{K}}$$

De la ecuación (1.4-l) puede obtenerse una relación muy útil para n moles de gas en condiciones p_1, V_1, T_1 y para condiciones p_2, V_2, T_2. Sustituyendo en la ecuación (1.4-l),

$$p_1V_1 = nRT_1$$

$$p_2V_2 = nRT_2$$

Al combinar se obtiene

$$\frac{p_1V_1}{p_2V_2} = \frac{T_1}{T_2} \tag{1.4-2}$$

1.4C Mezclas de gases ideales

La ley *de Dalton* para mezclas de gases ideales enuncia que la presión total de una mezcla de gases es igual a la suma de las presiones parciales individuales:

$$P = p_A + p_B + p_C + \ldots \tag{1.4-3}$$

donde P es la presión total y p_A, p_B, p_C, . . . son las presiones parciales de los componentes A, *B*, *C*, . . . de la mezcla.

Puesto que el número de moles de un componente es proporcional a su presión parcial, la fracción mol de un componente es

$$x_A = \frac{p_A}{P} = \frac{p_A}{p_A + p_B + p_C + \ldots} \tag{1.4-4}$$

La fracción volumen es igual a la fracción mol. Las mezclas de gases casi siempre se expresan en términos de fracciones mol y no de fracciones en peso. Para cálculos de ingeniería, la ley de Dalton tiene la suficiente precisión para usarla en mezclas reales a presiones totales de pocas atmósferas.

EJEMPLO 1.4-2. Composición de una mezcla gaseosa

Una mezcla gaseosa contiene los siguientes componentes y presiones parciales: CO_2, 75 mm de Hg; CO, 50 mm de Hg; N_2, 595 mm de Hg; O_2, 26 mm de Hg. Calcule la presión total y la composición en fracciones mol.

Solución: Sustituyendo en la ecuación (1.4-3),

$$P = p_A + p_B + p_C + p_D = 75 + 50 + 595 + 26 = 746 \text{ mm Hg}$$

La fracción mol de CO_2 se obtiene mediante la ecuación (1.4-4)

$$x_A(CO_2) = \frac{p_A}{p} = \frac{75}{746} = 0.101$$

De la misma manera, las fracciones mol de CO, N_2 y O_2 son 0.067, 0.797 y 0.035, respectivamente.

1.4D Presión de vapor y punto de ebullición de los líquidos

Cuando un líquido se introduce en un recipiente cerrado, las moléculas de dicho líquido se evaporan en el espacio por encima de él y lo llenan por completo. Después de un tiempo se establece un equilibrio. Este vapor ejerce una presión al igual que un gas y a esta presión se le puede llamar presión *de vapor* del líquido. El valor de la presión de vapor es independiente de la cantidad de líquido en el recipiente siempre y cuando haya algo de líquido presente.

Si un gas inerte como el aire también está presente en el espacio del vapor, su efecto sobre la presión de vapor es muy bajo. En general, el efecto de la presión total sobre la presión de vapor puede considerarse como despreciable para presiones de unas cuantas atmósferas.

La presión de vapor de un líquido aumenta notablemente al elevarse la temperatura. Por ejemplo, en los datos del agua del apéndice A.2, se ve que la presión de vapor a 50 °C es 12.333 kPa (92.5 1 mm de Hg). A 100 °C, la presión de vapor aumenta en alto grado a un valor de 101.325 kPa (760 mm de Hg).

El *punto de ebullición* de un líquido se define como la temperatura a la cual la presión de vapor del líquido es igual a la presión total. Por lo tanto, si la presión atmosférica total es de 760 mm de Hg, el agua hierve a 100 "C. En la cumbre de una montana alta, donde la presión es considerablemente más baja, el agua hierve a temperaturas inferiores a 100 °C.

Una gráfica de la presión de vapor P_A de un líquido en función de la temperatura no produce una linea recta sino una curva. Sm embargo, para intervalos de temperatura moderados, una gráfica de log P_A en función de l/T es casi una línea recta, cuya expresión corresponde a

$$\log P_A = m\left(\frac{1}{T}\right) + b \qquad \textbf{(1.4-5)}$$

donde *m* es la pendiente, *b* es una constante para el líquido A y *T es* la temperatura en K.

1.5 CONSERVACIÓN DE LA MASA Y BALANCES DE MATERIA

1.5A Conservación de la masa

Una de las leyes básicas de física *es* la *ley de la conservación de la masa.* Esta ley, expresada en forma simple, enuncia que la masa no puede crearse ni destruirse (excluyendo, por supuesto, las reacciones nucleares o atómicas). Por consiguiente, la masa (o el peso) total de todos los materiales que intervienen en el proceso debe ser igual a la de todos los materiales que salen del mismo, más la masa de los materiales que se acumulan o permanecen en el proceso.

$$\text{entradas} = \text{salidas} + \text{acumulación} \qquad \textbf{(1.5-1)}$$

En la mayoría de los casos no se presenta acumulación de materiales en el proceso, por lo que las entradas son iguales a las salidas. Expresado en otras palabras, " lo que entra debe salir". A este tipo de sistema se le llama *proceso en estado estacionario.*

$$\text{entradas} = \text{salidas (estado estacionario)} \qquad \textbf{(1.5-2)}$$

1.5B Balances simples de materia

En esta sección se estudiarán balances simples de materia (en peso o en masa) en diversos procesos en estado estable sin que se verifique una reacción química. Podemos usar unidades kg, lb_m, mol, Ib, g, kg mol, etc., para estos balances. Conviene recordar la necesidad de ser congruentes y no mezclar varios tipos de unidades en los balances. Cuando intervienen reacciones químicas en los balances (tal como sucede en la sección 1 .5D), deben usarse unidades de kg mol, pues las ecuaciones químicas relacionan moles reaccionantes. En la sección 2.6 se estudiarán con más detalle los balances totales de masa y en la sección 3.6, los balances diferenciales de masa.

Para resolver un problema de balance de materia es aconsejable proceder mediante una serie de etapas definidas, tal como se explican a continuación:

1. *Trácese un diagrama simple del proceso.* Este puede ser un diagrama de bloques que muestre simplemente la corriente de entrada con una flecha apuntando hacia dentro y la corriente de salida con una flecha apuntando hacia fuera. Inclúyanse en cada flecha composiciones, cantidades, temperaturas y otros detalles de la corriente. Todos los datos pertinentes deben quedar incluidos en este diagrama.
2. *Escríbanse las ecuaciones químicas involucradas (si las hay).*
3. *Selecciónese una base para* el *cálculo.* En la mayoría de los casos, el problema concierne a la cantidad específica de una de las corrientes del proceso, que es la que se selecciona como base.
4. *Procédase al balance de materia.* Las flechas hacia dentro del proceso significarán entradas y las que van hacia fuera, salidas. El balance puede ser un balance total de material, como en la ecuación (1.52), o un balance de cada componente presente (cuando no se verifican reacciones químicas).

Los procesos típicos en los que no hay una reacción química son, entre otros, secado, evaporación, dilución de soluciones, destilación, extracción, y puedenmanejarse por medio de balances de materia con incógnitas y resolviendo posteriormente las ecuaciones para despejar dichas incógnitas.

EJEMPLO 1.5-1. Concentración de jugo de naranja

En el proceso de concentración de jugo de naranja, el zumo recién extraído y filtrado que contiene 7.08% de sólidos en peso, se alimenta a un evaporador al vacío. En el evaporador se extrae agua y el contenido de sólidos aumenta al 58% en peso. Para una entrada de 1000 kg/h, calcule la cantidad de las corrientes de jugo concentrado y agua de salida.

Solución: Siguiendo las cuatro etapas descritas, se traza un diagrama de flujo del proceso (etapa 1) en la figura 1.5-1. Note que la letra *W* representa la cantidad desconocida o incógnita de agua y C es la cantidad de jugo concentrado.

No hay reacciones químicas (etapa 2). Base: 1000 kg/h de jugo de entrada (etapa 3). Para llevar a cabo los balances de materia (etapa 4), se procede a un balance total de materia usando la ecuación (1.5-2).

$$1000 = w + c \tag{1.5-3}$$

Esto produce una ecuación con dos incógnitas. Por lo tanto, se hace un balance de componentes con base en el sólido:

$$1000\left(\frac{7.08}{100}\right) = W(0) + C\left(\frac{58}{100}\right) \tag{1.5-4}$$

Para resolver estas ecuaciones, primero se despeja C en la ecuación (1.5-4) pues *W* desaparece. Se obtiene C = 122.1 kg/h de jugo concentrado.

Sustituyendo el valor de C en la ecuación (1.5-3),

$$1000 = w + 122.1$$

se obtiene que *W* = 877.9 kg/h de agua.

Para comprobar los cálculos, puede escribirse un balance del componente agua.

$$lOOO\left(\frac{100 - 7.08}{100}\right) = 877.9 + 122.1\left(\frac{100 - 58}{100}\right) \tag{1.5-5}$$

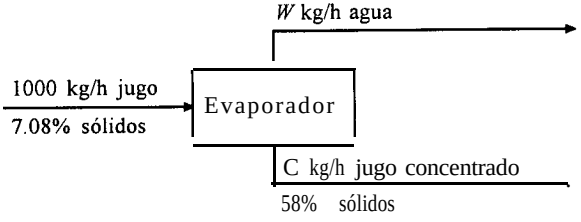


FIGURA *1.5-l. Diagrama de flujo del proceso para el ejemplo 1.5-I*

Al resolver,

$$929.2 = 877.9 + 51.3 = 929.2$$

En el ejemplo 1.5-1 solo intervino un proceso. Muchas veces se presentan varios procesos en serie, en cuyo caso puede llevarse a cabo un balance por separado de cada proceso y un balance para la totalidad del proceso general.

1.5C Balance de materia y recirculación

En algunas ocasiones se presentan casos en los que hay una recirculación o retroalimentación de parte del producto a la corriente de alimentación. Por ejemplo, en una planta de tratamiento de aguas, parte de los lodos activados de un tanque de sedimentación se recirculan al tanque de aereación donde se trata el líquido. En algunas operaciones de secado de alimentos, la humedad del aire de entrada se controla recirculando parte del aire húmedo y caliente que sale del secador. En las reacciones químicas, el material que no reaccionó en el reactor puede separarse del producto final y volver a alimentarse al reactor.

EJEMPLO 1.5-2. Cristalización y recirculación de KNO_3

En un proceso que produce KNO_3, el evaporador se alimenta con 1000 kg/h de una solución que contiene 20% de KNO_3 de sólidos en peso y se concentra a 422 K para obtener una solución de KNO_3 al 50% de sólidos en peso. Esta solución se alimenta a un cristalizador a 311 K, donde se obtienen cristales de KNO_3 al 96% de sólidos en peso. La solución saturada que contiene 37.5% de KNO_3 de sólidos en peso se recircula al evaporador. Calcule la cantidad de corriente de recirculación R en kg/h y la corriente de salida de cristales P en kg/h.

Solución: En la figura 1.5-2 se muestra el diagrama de flujo. Como base del cálculo usaremos 1000 kg/h de alimentación original. No se verifican reacciones químicas. Podemos efectuar un balance general de la totalidad del proceso para el KNO_3 y obtener directamente el valor de P,

$$1000(0.20) = W(0) + P(0.96) \qquad (1.5\text{-}6)$$

$$P = 208.3 \text{ kg cristales/h}$$

Para calcular la corriente de recirculación, podemos llevar a cabo un balance con respecto al evaporador o al cristalizador. Efectuando el balance en el cristalizador sólo existen dos incógnitas, S y R y se obtiene que

$$S = R + 208.3 \qquad (1.5\text{-}7)$$

Para el balance de KNO_3 en el cristalizador,

$$S(0.50) = R(0.375) + 208.3(0.96) \qquad (1.5\text{-}8)$$

Sustituyendo el valor de S de la ecuación (1.5-7) en la (1.5-8) y despejando: R = 766.6 kg, recirculando/h y S = 974.9 kg/h.

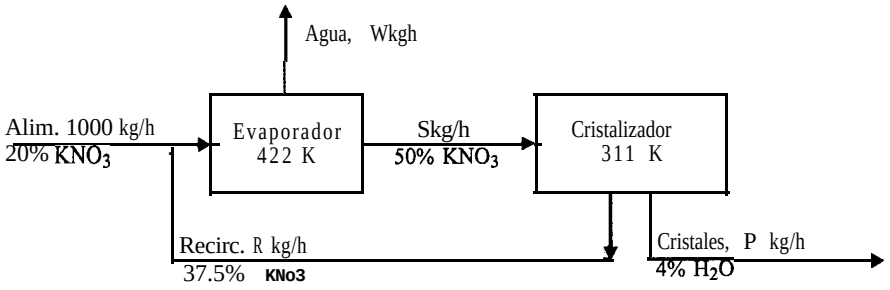


FIGURA 1.5-2. ***Diagrama de flujo para el proceso del ejemplo 1.5-2.***

1.5D Balances de materia y reacciones químicas

En muchos casos, los materiales que entran a un proceso toman parte en una reacción química, por lo que los materiales de salida son diferentes de los de entrada. En estos casos suele ser conveniente llevar a cabo un balance molar y no de peso para cada componente individual, tal como kg mol de H_2 o kg átomo de H, kg mol de ion CO_3^-, kg mol de $CaCO_3$, kg átomo de Na^+, kg mol de N_2, etcétera. Por ejemplo, en la combustión de CH_4 con aire, se pueden efectuar balances de kg mol de H_2, C, O_2 o N_2.

EJEMPLO 1.5-3. Combustión de un gas combustible

Un gas combustible que contiene 3.1 mol % de H_2, 27.2% CO, 5.6% de CO_2, 0.5% de O_2 y 63.6% de N_2, se quema con 20% de exceso de aire (esto es, aire sobrante con respecto al que es necesario para una combustión completa hasta CO_2 y H_2O). La combustión del CO sólo se completa al 98%. Para 100 kg de gas combustible, calcule los moles de cada componente en el gas de salida.

Solución: Primero se traza el diagrama de flujo del proceso (Fig. 1.5-3). En el diagrama se muestran los componentes del gas de salida. Si A son los moles de aire y *F* los moles de gas de combustión, el diagrama queda completo. Las reacciones químicas son

$$CO + \tfrac{1}{2} O_2 \rightarrow CO_2 \tag{1.5-9}$$

$$H_2 + \tfrac{1}{2} O_2 \rightarrow H_2O \tag{1.5-10}$$

La contabilidad del total de moles de O_2 en el gas combustible es:

$$\text{moles de } O_2 \text{ en el gas combustible} = (\tfrac{1}{2})\ 27.2\ (CO) + 5.6\ (CO_2) + 0.5\ (O_2)$$
$$= \text{moles de } O_2$$

Para que todo el H_2 se transforme en H_2O, la ecuación (1.5-10) indica que se necesita $\frac{1}{2}$ mol de O_2 por 1 mol de H_2, o $3.1(\frac{1}{2}) = 1.55$ moles totales de O_2. Con base en la ecuación (1.5-9), para la combustión completa del CO se necesitan $27.2\ (\frac{1}{2}) = 13.6$ moles de O_2. Por lo tanto, la cantidad teórica de O_2 que se debe usar es

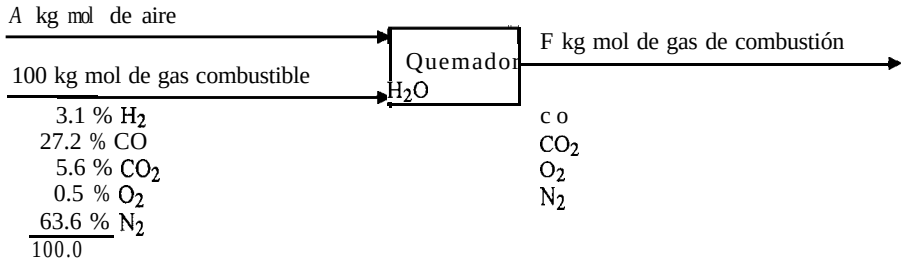


FIGURA 1.5-3. *Diagrama de flujo del proceso para el ejemplo 1.5-3.*

moles de O_2 teóricamente necesarios = 1.55 + 13.6 - 0.5 (en el gas combustible)

= 14.65 moles de O_2

Para un exceso de 20% se añaden 1.2 (14.65) o 17.58 moles de O_2. Puesto que el aire contiene 79 moles % de N_2, la cantidad que se añade de éste es (79/21) (17.58) o 66.1 moles de N_2.

Para calcular los moles en el gas de combustión final, todo el H_2 produce H_2O; esto es, 3.1 moles de H_2O. En el caso del CO, hay un 2.0% que no reacciona. Por consiguiente, quedarán sin quemarse 0.02 (27.2) o 0.54 mol de CO.

El balance total de carbono es el siguiente: moles de entrada de C = 27.2 + 5.6 = 32.8 moles de C. En el gas de combustión de salida, 0.54 mol estará como CO y el resto, 32.8 - 0.54 = 32.26 moles como CO_2.

Para calcular los moles de salida de O_2, se procede a un balance general de O_2.

O_2 de entrada = 19.7 (en el gas combustible) + 17.58 (en el aire) = 37.28 moles de O_2

O_2 de salida = (3.1/2) (en el agua) + (0.54/2) (en el CO) = 32.26 (en el CO_2) + O_2 libre

Igualando las entradas y salidas de O_2, el O_2 libre que queda = 3.2 moles de O_2. Para el balance de N_2, la salida = 63.6 (en el gas combustible) + 66.1 (ene1 aire), o 129.70 moles de N_2. El gas de combustión de salida contiene 3.10 moles de H_2O, 0.54 mol de CO, 32.26 moles de CO_2, 3.20 moles de O_2 y 129.7 moles de N_2.

En las reacciones químicas con diversos reactivos, el reactivo limitante se define como el compuesto que está presente en cantidad de menor que la necesaria para que reaccione estequiométricamente con los otros reactivos, De esta manera, el porcentaje de terminación de una reacción es la cantidad de reactivo limitante que se ha transformado, dividida entre la cantidad presente al principio, multiplicada por 100.

1.6 UNIDADES DE ENERGÍA Y CALOR

1.6A Joules, Calorías y Btus

Los balances de energía de un proceso se elaboran de manera similar a los correspondientes para procesos químicos y biológicos. Casi siempre una gran parte de la energía que entra a un sistema

o sale del mismo, está en forma de calor. Antes de elaborar estos balances de energía, es necesario comprender los diversos tipos de unidades para la energía y el calor.

En el sistema SI, la energía se expresa en joules (J) o kilojoules (kJ). La energía también se expresa en btu, abreviatura de "British thermal units" (unidades térmicas inglesas) o en cal (calorías). La caloría gramo (abreviada cal) se define como la cantidad de calor necesaria para calentar 1.0 g de agua 1.0 °C (de 14.5 °C a 15.5 °C). Otra unidad es la kilocaloría, 1 kcal = 1000 cal. El btu se define como la cantidad de calor necesaria para aumentar 1 °F la temperatura de 1 lb de agua. Por tanto, con base en el apéndice A. 1,

$$1 \text{ btu} = 252.16 \text{ cal} = 1.05506 \text{ kJ} \qquad \textbf{(1.6-1)}$$

1.6B. Capacidad calorífica

La *capacidad calorífica* de una sustancia se define como la cantidad de calor necesaria para aumentar su temperatura un grado. Puede expresarse para 1 g, 1 lb, 1 g mol , 1 kg mol o 1 Ib mol de sustancia. Por ejemplo, una capacidad calorífica expresada en unidades SI es J/kg mol · K: en otras unidades es cal/g °C, cal/g mol . °C, kcal/kg mol · °C, btu/lb_m *°F o btu/lb mol *"F.

Se puede demostrar que el valor numérico de la capacidad calorífica es el mismo en unidades de masa y unidades molares. Es decir,

$$1.0 \text{ cal/g } {}^*{}^\circ\text{C} = 1.0 \text{ btu/lb, } . \ ^\circ\text{F} \qquad \textbf{(1.6-2)}$$

$$1.0 \text{ cal/g mol } \cdot \text{"C} = 1.0 \text{ btu/lb mol } {}^*{}^\circ\text{F} \qquad \textbf{(1.6-3)}$$

Por ejemplo, para comprobar esto, supóngase que una sustancia tiene una capacidad calorífica de 0.8 btu/lb_m . °F. La conversión se obtiene tomando 1.8 °F por 1 °C o 1 K, 252.16 cal por 1 btu y 453.6 g por 1 lb_m, de la siguiente manera:

$$\text{Capacidad calorífica } \left(\frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot {}^\circ\text{C}}\right) = \left(0.8 \frac{\text{btu}}{\text{lb}_m \cdot {}^\circ\text{F}}\right)\left(252.16 \frac{\text{cal}}{\text{btu}}\right)\left(\frac{1}{453.6 \text{ g / lb}_m}\right)\left(1.8 \frac{{}^\circ\text{F}}{{}^\circ\text{C}}\right)$$

$$= 08 \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot {}^\circ\text{C}}$$

Las capacidades caloríficas de los gases (también conocidas como *calores específicos* a presión constante, c_p, están en función de la temperatura y, para cálculos de ingeniería puede suponerse que son 'independientes de la presión cuando se trata de pocas atmósferas. En la gran mayoría de los problemas de ingeniería el interés radica en determinar la cantidad de calor que se requiere para calentar un gas de una temperatura t_1 a otra t_2. Puesto que el valor de c_p varía con la temperatura, es necesario integrar o bien usar un valor promedio adecuado de c_{pm}. Existen datos experimentales de estos valores medios para una T_1 de 298 K o 25 °C (77 "F) y diversos valores de T_2 (como los que se muestran en la tabla 1.6-1) a 10 1.325 kPa de presión o menos, con el valor de c_{pm} expresado en kJ/kg mol *K, a diferentes valores de T_2 en K o °C.

TABLA **1.6-1.** *Capacidades caloríficas molares medias de gases entre 298 y TK (25 y T "C) a 101.325 kPa o menos (unidades SI: cp = kJ/kg mol K)*

T(K)	T°C	H_2	N_2	CO	Aire	0_2	H_2O	CO_2	CH_4	SO_2
298	25	28.86	29.14	29.16	29.19	29.38	33.59	37.20	35.8	39.9
373	100	28.99	29.19	29.24	29.29	29.66	33.85	38.73	37.6	41.2
473	200	29.13	29.29	29.38	29.40	30.07	34.24	40.62	40.3	42.9
573	300	29.18	29.46	29.60	29.61	30.53	34.39	42.32	43.1	44.5
673	400	29.23	29.68	29.88	29.94	31.01	35.21	43.80	45.9	45.8
773	500	29.29	29.97	30.19	30.25	31.46	35.75	45.12	48.8	47.0
873	600	29.35	30.27	30.52	30.56	31.89	36.33	46.28	51.4	47.9
973	700	29.44	30.56	30.84	30.87	32.26	36.91	47.32	54.0	48.8
1073	800	29.56	30.85	31.16	31.18	32.62	37.53	48.27	56.4	49.6
1173	900	29.63	31.16	31.49	31.48	32.97	38.14	49.15	58.8	50.3
1273	1000	29.84	31.43	31.77	31.79	33.25	38.71	49.91	61.0	50.9
1473	1200	30.18	31.97	32.30	32.32	33.78	39.88	51.29	64.9	51.9
1673	1400	30.51	32.40	32.73	32.76	34.19	40.90	52.34		

Capacidades caloríficas molares medias de gases entre 2.5 y T °C a 1 atm de presión o menos (unidades del sistema inglés: c_p = btu/lb mol °F)

T°C	H_2	N_2	CO	Aire	O_2	NO	H_2O	CO_2	HCl	CI_2	CH_4	SO_2	C_2H_4	SO3	C_2H_6
25	6.894	6.961	6.965	6.972	7.017	7.134	8.024	8.884	6.96	8.12	8.55	9.54	10.45	12.11	12.63
100	6.924	6.972	6.983	6.996	7.083	7.144	8.084	9.251	6.97	8.24	8.98	9.85	11.35	12.84	13.76
200	6.957	6.996	7.017	7.021	7.181	7.224	8.177	9.701	6.98	8.37	9.62	10.25	12.53	13.74	15.27
300	6.970	7.036	7.070	7.073	7.293	7,252	8.215	10.108	7.00	8.48	10.29	10.62	13.65	14.54	16.72
400	6.982	7.089	7.136	7.152	7,406	7.301	8.409	10.462	7.02	8.55	10.97	10 94	14.67	15.22	18.11
500	6.995	7.159	7.210	7.225	7.515	7,389	8.539	10.776	7.06	8.61	11.65	11.22	15.60	15.82	19.39
600	7.01 1	7.229	7,289	7.299	7.616	7.470	8,678	11.053	7.10	8.66	12.27	11.45	16.45	16.33	20.58
700	7.032	7.298	7.365	7,374	7.706	7.549	8.816	11.303	7.15	8.70	12.90	11.66	17.22	16.77	21.68
SOQ	7.060	7.369	7.443	7.447	7.792	7.630	8.963	11.53	7.21	8.73	13.48	11.84	17.95	17.17	22.72
900	7.076	7.443	7.521	7.520	7.874	7.708	9.109	11.74	7.27	8.77	14.04	12.01	18.63	17.52	23.69
1000	7.128	7.507	7.587	7.593	7.941	7.773	9.246	11.92	7.33	8.80	14.56	12.15	19.23	17.86	24.56
1100	7.169	7.574	7.653	7.660	8.009	7.839	9.389	12.10	7.39	8.82	15.04	12.28	19.81	18.17	25.40
1200	7.209	7.635	7.714	7.719	8.068	7.898	9.524	12.25	7.45	8.94	15.49	12.39	20.33	18.44	26.15
1300	7.252	7.692	7.772	7.778	8.123	7,952	9.66	12.39							
1400	7.288	7.738	7.818	7.824	8.166	7,994	9.77	12.50							
1500	7.326	7.786	7.866	7.873	8.203	8.039	9.89	12.69							
1600	7.386	7.844	7.922	7.929	8,269	8.092	9.95	12.75							
1700	7.421	7.879	7.958	7.965	8.305	8.124	10.13	12.70							
1800	7.467	7.924	8.001	8.010	8.349	8.164	10.24	12.94							
1900	7.505	7.957	8.033	8.043	8.383	8.192	10.34	13.01							
2000	7.548	7.994	8.069	8.081	8.423	8.225	10.43	13.10							
2100	7.588	8.028	8.101	8.115	8.460	8.255	10.52	13.17							
2200	7.624	8.054	8.127	8.144	8.491	8.277	10.61	13.24							

Referencia: 0. A. Hougen, K. W. Watson y R. A. Ragatz. *Chemical Process Principles*, Parte 1, 2a. ed., Nueva York, John Wiley and Sons, Inc,. 1954. Con permiso.

EJEMPLO 1.64. Calentamiento de N_2 gaseoso

Una cierta cantidad de N_2 gaseoso a 1 atm de presión se calienta en un intercambiador de calor. Calcule la cantidad de calor necesario expresado en J, para calentar 3.0 g mol de N_2 en los siguientes intervalos de temperatura:

a) 298-673 K (25-400 °C)
b) 298-1123 K (25-850 "C)
c) 673-1123 K (400-850 "C)

Solución: Para el inciso a), la tabla 1.6-1 muestra los valores de c_{pm} a 1 atm de presión o menos, que pueden usarse hasta varias atmósferas. Para N_2 a 673 K, c_{pm} = 29.68 kJ/kg mol *K o 29.68 J/g mol *K. Ésta es la capacidad calorífica media para el intervalo 298-673 K.

$$\text{calor necesario} = \text{M g mol}\left(c_{pm}\frac{\text{J}}{\text{g mol . K}}\right)(T_2 - T_1)\text{K} \qquad (1.6\text{-}4)$$

Sustituyendo los valores conocidos,

$$\text{calor necesario} = (3.0)\ (29.68)\ (673 - 298) = 33390\ \text{J}$$

Para el inciso b), el valor de c_{pm} a 1123 K (obtenido por interpolación lineal entre 1073 y 1173 K) es 31.00 J/g mol *K.

$$\text{calor necesario} = 3.0\ (3\ 1.00)\ (\text{ll}23 - 298) = 76725\ \text{J}$$

Para el inciso c), no existe capacidad de calor media para el intervalo 673-l 123 K. Sin embargo, se puede utilizar el calor requerido para calentar el gas de 298 a 673 K en el inciso a) y restarlo del inciso b), lo cual incluye que el calor pase de 298 a 673 K, más 673 hasta 1123 K.

$$\text{calor necesario (673 - 1123 K)} = \text{calor necesario (298 - 1123 K)} - \text{calor necesario (298-673)} \qquad (1.6\text{-}5)$$

Sustituyendo los valores apropiados en la ecuación (1.6-5),

$$\text{calor necesario} = 76725 - 33390 = 43335\ \text{J}$$

Al calentar una mezcla gaseosa, el calor total requerido se determina calculando primero el calor necesario para cada componente individual y sumando los resultados.

Las capacidades caloríficas de sólidos y líquidos también dependen de la temperatura y son independientes de la presión. Los valores pueden encontrarse en los apéndices A.2, Propiedades físicas del agua; A.3, Propiedades físicas de compuestos inorgánicos y orgánicos; y A.4, Propiedades físicas de alimentos y materiales biológicos, En las referencias (Pl) pueden obtenerse datos adicionales.

EJEMPLO 1.6-2. Calentamiento de leche

En un intercambiador de calor se calienta leche entera de vaca (4536 kg/h) de 4.4 °C a 54.4 °C, usando agua caliente. ¿Cuánto calor se necesita?

Solución: En el apéndice A.4 se ve que la capacidad calorífica de la leche entera de vaca es 3.85 kJ/kg . K. La elevación de la temperatura es AT = (54.4 - 4.4) °C = 50 K.

$$\text{calor necesario} = (4536\ \text{kg/h})\ (3.85\ \text{kJ/kg . K})\ (1/3600\ \text{h/s})\ (50\ \text{K}) = 242.5\ \text{kW}$$

La entalpía, H, de una sustancia en J/kg representa la suma de la energía interna más el término presión-volumen. Cuando no hay reacción y se trata de un proceso a presión constante y un cambio de temperatura, la variación de calor que se calcula con la ecuación (1.6-4) es la diferencia de entalpía, AH, de la sustancia, con respecto a la temperatura dada o punto base. En otras unidades, H = btu/lb, o cal/g.

1.6C Calor latente y tablas de vapor

Cuando una sustancia cambia de fase se producen cambios de calor relativamente considerables a temperatura constante. Por ejemplo, el hielo a 0 °C y 1 atm de presión puede absorber 6014.4 kJ/kg mol. A este cambio de entalpía se le llama *calor latente de fusión.* Los valores similares para otros compuestos pueden encontrarse en manuales (Pl, Wl).

Cuando una fase líquida pasa a fase vapor con su presión de vapor a temperatura constante, se debe agregar cierta cantidad de calor que recibe el nombre de *calor latente de vaporización.* Diversos manuales contienen valores y tabulaciones de los calores latentes de vaporización. Para el agua a 25 °C y una presión de 23.75 mm de Hg, el calor latente es 44 020 kJ/kg mol. Por consiguiente, el efecto de la presión puede despreciarse para cálculos de ingeniería. Sin embargo, el efecto de la temperatura sobre el calor latente del agua es bastante considerable; además, el efecto de la presión sobre la capacidad calorífica del agua líquida es pequeño y puede despreciarse.

Puesto que el agua es una sustancia muy común, sus propiedades termodinámicas se han recopilado en tablas de vapor que aparecen en el apéndice A.2 en unidades SI y del sistema inglés.

EJEMPLO 1.6-3. Uso de las tablas de vapor

Determine los cambios de entalpía (esto es, las cantidades de calor que deben añadirse) en cada uno de los siguientes casos en unidades SI y del sistema inglés.

a) Calentamiento de 1 kg (Ib,) de agua: de 21.11 °C (70 °F) a 60 °C (140 °F) a 101.325 kPa (latm) de presión.
b) Calentamiento de 1 kg (Ib,) de agua: 21, ll °C (70 "F) a 115.6 °C (240 "F) y vaporización a 172.2 kPa (24.97 lb/pulg^2 abs).
c) Vaporización de 1 kg (Ib,) de agua a 115.6 °C (240 °F) y 172.2 kPa (24.97 lb/pulg2 abs).

Solución: En el inciso a), el efecto de la presión sobre la entalpía del agua líquida es despreciable. Del apéndice A.2,

$$Ha\ 21.11\ °\text{C} = 88.60\ \text{kJ/kg}\ \text{o a}\ 70\ °\text{F} = 38.09\ \text{btu/lb},$$

$$Ha\ 60\ °\text{C} = 251.13\ \text{kJ/kg}\ \text{o a}\ 140\ °\text{F} = 107.96\ \text{btu/lb}_m$$

$$\text{cambio de } H = \Delta H = 251.13 - 88.60 = 162.53 \text{ kJ/kg}$$

$$= 107.96 - 38.09 = 69.87 \text{ btu/lb}_m$$

En el inciso b), la entalpía a 115.6 °C (240 "F) y 172.2 kPa (24.97 lb/pulg^2 abs) de vapor saturado es 2699.9 kJ/kg o 1160.7 btu/lb_m,

$$\text{cambio de } H = \Delta H = 2699.9 - 88.60 = 2611.3 \text{ kJ/kg}$$

$$= 1160.7 - 38.09 = 1122.6 \text{ btu/lb}_m$$

El calor latente del agua a 115.6 °C (240 °F) en el inciso c) es

$$2699.9 - 484.9 = 2215.0 \text{ kJ/kg}$$

$$1160.7 - 208.44 = 952.26 \text{ btu/lb}_m$$

1.6D Calor de reacción

Cuando se verifican reacciones químicas, éstas siempre van acompañadas de efectos caloríficos. Al conjunto de estos fenómenos de cambio de energía se le llama *termoquímica.* Por ejemplo, cuando se neutraliza HCl con NaOH se desprende calor y la reacción es exotérmica. En las reacciones endotérmicas se absorbe calor. Este calor de reacción depende de la naturaleza química de cada reactivo y cada producto y de sus estados físicos.

Para poder comparar valores, el calor de reacción estándar, AH°, se define como la variación de entalpía cuando 1 kg mol reacciona a una presión de 101.325 kPa a temperatura de 298 K (25 "C). Por ejemplo, el valor de AH° en la reacción

$$H_2(g) + \tfrac{1}{2} O_2(g) \rightarrow H_2O(l) \qquad \textbf{(1.6-6)}$$

es -285.840 x 103 kJ/kg mol o -68.3 17 kcal/g mol. La reacción es exotérmica y el valor es negativo, pues se pierde entalpía. En este caso, el H_2 gaseoso reacciona con el O_2 gaseoso para producir agua líquida, todo a 298 K (25 "C).

Dependiendo del tipo de reacción, AH° recibe nombres especiales. Cuando se forma un producto a partir de sus elementos, como en la ecuación (1.6-6), a ΔH^0 se le llama *calor de formación* del agua, ΔH_f^0. A la combustión del CH_4 formando CO_2 y H_2O, se le llama *calor de combustión,* AH,". (En el apéndice A.3 se incluyen valores de ΔH_c^0.)

EJEMPLO 1.6-4. Combustión de carbono

Un total de 10.0 g mol de grafito se queman en un calorímetro a 298 K y 1 atm. La combustión es incompleta y el 90% del C se transforma en CO_2 y el 10% en CO. ¿Cuál es la variación total de entalpía en kJ y kcal?

Solución: En el apéndice A.3 se determina que ΔH_c^0 para el C al transformarse en CO_2 es -393.513 x 10 kJ/kg mol o -94.0518 kcal/g mol, y para la conversión en CO es -110.523 x 10^3 kg/kg mol o -26.4157 kcal/g mol. Puesto que se forman 9 moles de CO_2 y 1 mol de CO,

$$\text{AH total} = 9(-393.513) + 1(-110.523) = -3652 \text{ kJ}$$

$$= 9(-94.0518) + 1(-26.4157) = -872.9 \text{ kcal}$$

Cuando se dispone de una tabla de calores de formación de compuestos, ΔH_f^0, el calor normal de la reacción ΔH^0, puede calcularse mediante la expresión

$$\Delta H^0 = \sum \Delta H^0_{f(\text{productos})} - \sum \Delta H^0_{f(\text{reactivos})} \qquad \textbf{(1.6-7)}$$

En el apéndice A.3 se muestra una tabla con algunos valores de ΔH_f. Para tablas más completas es necesario consultar otros manuales (H1, P1, S 1).

EJEMPLO 1.6-5. Reacción del metano

Calcule el calor normal de reacción, ΔH^0, en kJ a 298 K para la siguiente reacción de 1 kg mol de CH_4 a 101.32 kPa y 208 K:

$$CH_4(g) + H_2O(l) \rightarrow CO(g) + 3H_2(g)$$

Solución: Del apéndice A.3 se obtienen los siguientes calores estándar de formación a 298 K:

	ΔH_f^0 (kJ/kg mol)
$CH_4(g)$	-74.848×10^3
$H_2O(l)$	-285.840×10^3
$CO(g)$	-110.523×10^3
$H_2(g)$	0

Nótese que, por definición, ΔH_f^0 es cero para todos los elementos. Sustituyendo en la ecuación (1.6-7),

$$\Delta H^0 = [-110.523 \times 10^3 - 3(0)] - (-74.848 \times 10^3 - 285.840 \times 10^3)$$

$$= +250.165 \times 10^3 \text{ kJ/kg mol (endotérmica)}$$

1.7 CONSERVACIÓN DE ENERGÍA Y BALANCES DE CALOR

1.7A Conservación de energía

Para llevar a cabo los balances de materia se usó la ley de conservación de la masa, la cual indica que la masa que entra al sistema es igual a la que sale más la acumulada en el proceso. De manera similar se puede enunciar la ley *de conservación de la energía,* la cual postula que toda la energía

que entra a un proceso es igual a la que sale más la que queda en el proceso. En esta sección se incluyen varios balances de energía elementales. En las secciones 2.7 y 5.6 se consideraran otros más complicados.

La energía puede manifestarse de varias maneras. Algunas de sus formas más comunes son la entalpía, la energía eléctrica, la energía química (en términos de la AH de la reacción), la energía cinética, la energía potencial, el trabajo y el flujo de calor.

En muchos casos de ingeniería de proceso, que casi siempre se llevan a cabo a presión constante, la energía eléctrica, la energía potencial y el trabajo, no están presentes o resultan despreciables. De esta manera, sólo es necesario tomar en cuenta la entalpía de los materiales (a presión constante), la energía normal de la reacción química (ΔH^0) a 25 °C, y el calor añadido o extraído. A esto se le llama *balance de calor.*

1.7B Balances de calor

Para establecer un balance de calor en estado estable se usan métodos similares a los aplicados en los balances de material. La energía o calor que entra a un proceso con los materiales alimentados, más la energía neta que se añade al proceso, es igual a la energía de salida de los materiales. Expresando esto de forma matemática,

$$\sum H_R + (-\Delta H^0_{298}) + q = \sum H_p \qquad \textbf{(1.7-1)}$$

donde $\sum H_R$ es la suma de las entalpías de todos los materiales que entran al proceso de reacción con respecto al estado de referencia para el calor normal de reacción a 298 K y 101.32 kPa. Si la temperatura de entrada es superior a 298 K, esta suma será positiva. ΔH^0_{298} = calor normal de reacción a 298 K y 101.32 kPa. La reacción aporta calor al proceso, por lo que el signo negativo de ΔH^0_{298} se considera como entrada positiva de calor para una reacción exotérmica. q = energía neta o calor añadido al sistema. Si el sistema desprende calor, este término será negativo. $\sum H_p$ = suma de entalpías de todos los materiales de salida con respecto al estado normal de referencia a 298 K (25 °C).

Adviértase que si los materiales de entrada a un proceso están por debajo de 298 K, $\sum H_R$ será negativa. Es necesario tomar precauciones para no confundir los signos de los términos en la ecuación (1.7-1). Si no se produce una reacción química entonces hay un simple calentamiento, enfriamiento o cambio de fase. El uso de la ecuación (1.7-l) se ilustrará con diversos ejemplos. Por conveniencia, para el cálculo es costumbre llamar a los términos del lado izquierdo de la ecuación (1.7-1) términos de entrada, y a los de la derecha, términos de salida.

EJEMPLO 1.7-l. Calentamiento de un medio de fermentación

Un medio de fermentación líquido a 30 °C se bombea a velocidad de 2000 kglh a través de un calentador, donde su temperatura se eleva a 70 °C bajo presión. El agua caliente de desperdicio que se usa para el calentamiento entra a 95 °C y sale a 85 "C. La capacidad calorífica promedio del medio de fermentación es 4.06 kJ/kg . K, y la del agua, 4.21 kJ/kg · K (apéndice A.2). Las corrientes de fermentación y de agua de desperdicio están separadas por una superficie metálica a través de la cual se transfiere el calor y que impide la mezcla física de ambas. Establezca un balance de calor completo para el sistema. Calcule el flujo del agua y la cantidad de calor añadida al medio de fermentación; suponiendo que no hay perdidas en el sistema. En la figura 1.7-1 se muestra el flujo del proceso.

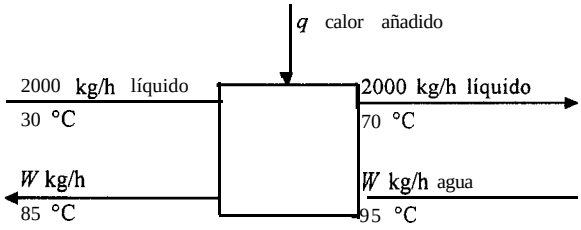


FIGURA 1.7-1. *Diagrama de flujo del proceso para el ejemplo 1.7-l.*

Solución: Es conveniente usar el estado normal de referencia a 298 K (25 "C) como base para el cálculo de las diversas entalpías. De acuerdo con la ecuación (1.7-1), los términos de la expresión son los siguientes:

Términos de entrada. $\sum H_R$ de las entalpías de las dos corrientes con respecto a 298 K (25 "C) (nótese que At = 30 – 25 °C = 5 °C = 5 K):

$$H \text{ (líquido)} = (2000 \text{ kg/h}) (4.06 \text{ kJ/kg . K}) (5 \text{ K})$$

$$= 4.060 \ 10^4 \text{ kJ/h}$$

$$H \text{ (agua)} = W(4.21) (95 - 25) = 2.947 \times 10^2 W \text{ kJ/h} \qquad (W = \text{kg/h})$$

$$(-\Delta H^0_{298}) = 0 \qquad \text{(puesto que no hay reacción química)}$$

$$q = 0 \qquad \text{(puesto que no hay adición o pérdida de calor)}$$

Términos de salida. $\sum H_p$ de las dos corrientes con respecto a 298 K (25 °C):

$$H(\text{líquido}) = 2000(4.06) (70 - 25) = 3.65 \times 10^5 \text{ kJ/h}$$

$$H(\text{agua}) = W(4.21) (85 - 25) = 2.526 \times 10^2 W \text{ kJ/h}$$

Igualando entradas y salidas en la ecuación (1.7-1) y despejando W,

$$4.060 \times 10^4 + 2.947 \times 10^2 W = 3.654 \times 10^5 + 2.526 \times 10^2 W$$

$$W = 7720 \text{ kg/h de flujo de agua}$$

La cantidad de calor que se ha agregado al medio de fermentación es simplemente la diferencia de las entalpías de los líquidos de salida y entrada:

$$H \text{ (líquido de salida)} - H \text{ (líquido de entrada)} = 3.654 \times 10^5 - 4.060 \times 10^4$$

$$= 3.248 \times 10^5 \text{ kJ/h} \ (90.25 \text{ kW})$$

Obsérvese en este ejemplo que, puesto que se supuso que las capacidades caloríficas son constantes, se podría haber escrito un balance más simple como éste:

calor que gana el líquido = calor que pierde el agua

$$2000(4.06)(70 - 30) = W(4.21)(95 - 85)$$

Entonces, al resolver la expresión, $W = 7720$ kg/h. Este balance simple produce buenos resultados cuando c_p es constante; sin embargo, cuando el valor varía con la temperatura y el material es un gas, sólo se dispone de valores de c_{pm} entre 298 K (25 "C) y t K y el método simple no puede usarse sin obtener nuevos valores de c_{pm} a diversos intervalos de temperatura.

EJEMPLO 1.7-2 Balances de calor y de materia en una combustión

El gas de desperdicio de un proceso de 1000 g mol/h de CO a 473 K se quema a 1 atm de presión en un horno usando aire a 373 K. La combustión es completa y se usa 90% de exceso de aire. El gas de combustión de salida está a 1273 K. Calcule el calor extraído en el horno.

Solución: Primero se traza el diagrama de flujo del proceso en la figura 1.7-2 y después se procede a hacer un balance de materia:

$$CO(g) + \tfrac{1}{2}O_2(g) \rightarrow CO_2(g)$$

$$\Delta H^0_{298} = -282 \times 10^3 \text{ kJ/kg mol}$$

(del apéndice A.3)

moles CO = 1000 g mol/h = moles CO_2

= 1.00 kg mol/h

moles de O_2 teóricamente necesarias = f(l.OO) = 0.500 kg mol/h

moles de O_2 que en realidad se añaden = 0.500(1.9) = 0.950 kg mol/h

$$\text{moles de } N_2 \text{ añadido} = 0.950\ \frac{0.79}{0.21} = 3.570 \text{ kg mol /h}$$

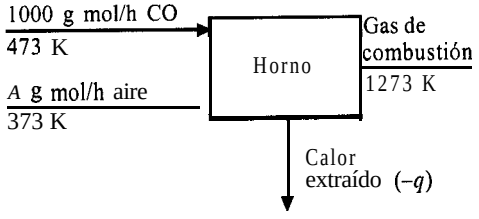


FIGURA 1.7-2. *Diagrama de flujo del proceso del ejemplo 1.7-2.*

aireañadido = 0.950 + 3.570 = 4.520 kg mol/h = A

O_2 en el gas de combustión de salida = añadido − usado

= *0.950 − 0.500 = 0.450* kg mol/h

CO_2 en el gas de combustión de salida = 1.00 kg mol/h

N_2 en el gas de combustión de salida = 3.570 kg mol/h

Para el balance de calor con respecto al estado normal a 298 K, se usa la ecuación (1.7-1).

Términos de entrada

$$H(\text{CO}) = 1.00(c_{pm})(473 - 298) = 1.00(29.38)(473 - 298) = 5142 \text{ kJ/h}$$

(El valor de 29.38 kJ/kg mol . K para c_{pm} del CO entre 298 y 473 K se obtiene de la tabla 1.6-1.)

$$H(\text{aire}) = 4.520(c_{pm})(373 - 298) = 4.520(29.29)(373 - 298) = 9929 \text{ kJ/h}$$

q = calor añadido, kJ/h

(Esto dará aquí un valor negativo, indicativo de que se extrae calor).

$$-\Delta H^0_{298} = -(-282.989 \times 10^3 \text{ kJ/kg mol})(1.00 \text{ kg mol/h}) = 282\,990 \text{ kJ/h}$$

Términos de salida

$$H(\text{CO}_2) = 1.00(c_{pm})(1273 - 298) = 1.00(49.91)(1273 - 298) = 48660 \text{ kJ/h}$$

$$H(\text{O}_2) = 0.450(c_{pm})(1273 - 298) = 0.450(33.25)(1273 - 298) = 14590 \text{ kJ/h}$$

$$H(\text{N}_2) = 3.570(c_{pm})(1273 - 298) = 3.570(31.43)(1273 - 298) = 109400 \text{ kJ/h}$$

Igualando entradas y salidas y despejando q,

$$5142 + 9929 + q + 282990 = 48660 + 14590 + 109400$$

$$q = -125411 \text{ kJ/h}$$

Por lo tanto, se extrae calor: -34837 W.

Con mucha frecuencia, cuando se verifican reacciones químicas en el proceso y las capacidades caloríficas varían con la temperatura, la solución del problema puede obtenerse por aproximaciones sucesivas si se desconoce la temperatura final.

EJEMPLO 1.7-3. Oxidación de lactosa

En muchos procesos bioquímicos se usa lactosa como nutrimento, la cual se oxida como sigue:

$$C_{12}H_{22}O_{11}(s) + 12O_2(g) \rightarrow 12CO_2(g) + 11H_2O(l)$$

El calor de combustión, ΔH_c^0, según el apéndice A.3 a 25 °C es -5648.8 x 103 J/g mol. Calcule el calor de la oxidación completa (combustión) a 37 °C, que es la temperatura de la mayoría de las reacciones bioquímicas. El c_{pm} de la lactosa sólida es 1.20 J/g · K, y su peso molecular es 342.3 g masa/g mol.

Solución: Este problema puede considerarse como un balance de calor común. Primero se traza el diagrama de la figura 1.7-3, después se selecciona la temperatura base de 25 °C y se calculan las entalpías de entrada y salida. La diferencia de temperatura es At = (37 − 25) °C = (37 − 25) K.

Términos de entrada

$$H(\text{lactosa}) = (342.3 \text{ g}) \left(c_{pm} \frac{\text{J}}{\text{g} \cdot \text{K}} \right) (37 \quad 25)\text{K} = 342.3 \ (1.20)(37 - 25)$$

$$= 4929 \text{ J}$$

$$H(O_2 \text{ gas}) = (12 \text{ g mol}) \left(c_{pm} \frac{\text{J}}{\text{g mol} \cdot \text{K}} \right) (37 - 25)\text{K}$$

$$= 12(29.38)(37 - 25) = 4230 \text{ J}$$

(El c_{pm} del O_2 se obtiene de la tabla 1.6-1.)

$$-\Delta H_{25}^0 = - (-5648.8 \text{ x } 10^3)$$

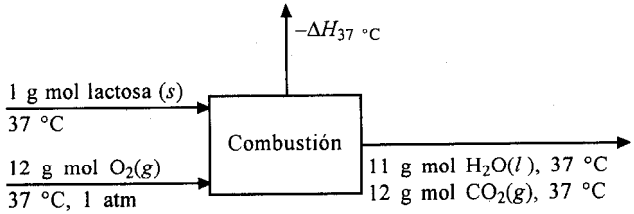


FIGURA 1.7-3. *Diagrama de flujo del proceso del ejemplo 1.7-3.*

Términos de salida

$$H(\mathrm{H_2O}\ \text{líquida}) = 1\,1(\ 18.02\ \mathrm{g})\left(c_{pm}\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{g}\cdot\mathrm{K}}\right)(37 - 25)\mathrm{K}$$

$$= 11(18.02)(4.18)(37 - 25) = 9943\ \mathrm{J}$$

(El c_{pm} del agua líquida se obtuvo del apéndice A.2.)

$$H(\mathrm{CO_2\ gas}) = (12\ \mathrm{g\ mol})\left(c_{pm}\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{g\ mol}\cdot\mathrm{K}}\right)(37 - 25)\mathrm{K}$$

$$= 12(37.45)(37 - 25) = 5393\ \mathrm{J}$$

(El c_{pm} del CO_2 se obtiene de la tabla 1.6-1.)

$\Delta H_{37\ °C}$:
Estableciendo entradas = salidas y resolviendo,

$$4929 + 4230 + 568.8 \times 10^3 = 9943 + 5393 - \Delta H_{37\ °C}$$

$$\Delta H_{37\ °C} = -5642.6 \times 10^3\ \mathrm{J/g\ mol} = \Delta H_{310\mathrm{K}}$$

1.8 MÉTODOS MATEMÁTICOS, GRÁFICOS Y NUMÉRICOS

1.8A Integración gráfica

En algunos casos, la función matemática f (x) que se tiene que integrar es muy compleja y no se puede proceder analíticamente. En otros casos, la función se ha obtenido con datos experimentales y no se cuenta con una ecuación matemática que represente los datos y que pueda integrarse por métodos analíticos. En estas circunstancias se aplica la integración gráfica.

La integración entre los límites $x = a$ y $x = b$ puede representarse gráficamente tal como lo muestra la figura 1.8-1. La gráfica es una curva de $y = f(x)$ en función de x. El área bajo la curva $y = f(x)$ entre los límites $x = a$ y $x = b$ es igual a la integral. Esta área es igual a la suma de las áreas de los rectángulos, por lo que se escribe como sigue:

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 \qquad \textbf{(1.8-1)}$$

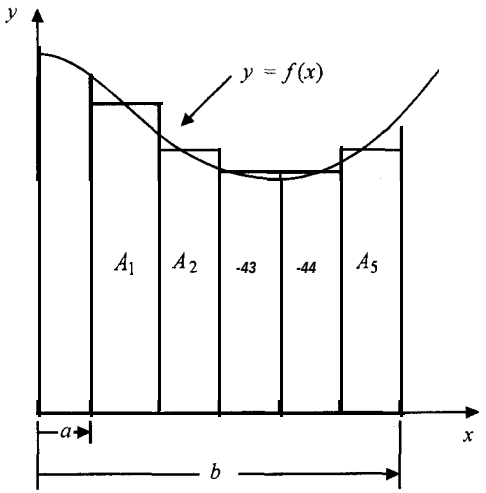


FIGURA 1.8-t. *Integración gráfica de* $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$.

1.8B Integración numérica y regla de Simpson

A menudo se desea o se necesita efectuar una integración numérica calculando el valor de una integral definida a partir de un conjunto de valores numéricos del integrando $f(x)$. Desde luego, esto puede hacerse gráficamente, pero si 'se tiene una gran cantidad de datos, es conveniente disponer de métodos numéricos adecuados para la computadora digital.

La integral que se va a evaluar es

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \qquad (1.8\text{-}2)$$

donde el intervalo es $b - a$. El método numérico que más se usa es la regla parabólica llamada *regla* de *Simpson.* Este método divide el intervalo total $b - a$ en un número par de subintervalos m, donde

$$m = \frac{b - a}{h} \qquad (1.8\text{-}3)$$

El valor de h, una constante, es el espaciamiento que se usa en x. Por tanto, aproximando f (x) por medio de una parábola en cada subintervalo, la regla de Simpson es

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f_0 + 4(f_1 + f_3 + f_5 + \cdots + f_{m-1}) + 2(f_2 + f_4 + f_6 + \cdots + f_{m-2}) + f_m\right] \qquad (1.8\text{-}4)$$

donde f_0 es el valor de f (x) en x = a, f_1 el valor de f (x) en x = x_1, ... f_m el valor de f (x) en x = b. El lector deberá. advertir que m debe ser un número par y los incrementos deben estar igualmente espaciados. Este método es muy adecuado para computadoras digitales.

PROBLEMAS

1.2-1. ***Temperatura de un proceso químico.*** Se determina que la temperatura de un proceso químico es 353.2 K. ¿Cuál es la temperatura en °F, °C y °R?

Respuesta: 176 °F, 80 °C, 636 °R

1.2-2. Temperaturapara el proceso de ahumado de carne. En el proceso de ahumado de carne para salchicha, aquélla llega a alcanzar una temperatura de 155 °F. Calcule esta temperatura en °C, K y °R.

1.3-1. ***Peso molecular del aire.*** En la mayoría de los cálculos de ingeniería se supone que el aire está constituido por 2 1 mol % de oxígeno y 79 mol % de nitrógeno. Calcule el peso molecular promedio.

Respuesta: 28.9 g masa/g mol, lb masa/lb mol o kg masa/kg mol.

1.3-2. ***Oxidación de CO y unidades molares.*** Una cierta cantidad de CO se oxida con O_2 para formar CO_2. ¿Cuántos kilogramos de CO_2 se obtendrán con 56 kg de CO? Calcule además los kilogramos de O_2 teóricamente necesarios para esta reacción, (Sugerencia: Escriba primero la ecuación química balanceada para obtener las moles de O_2 necesarias para 1.0 kg mol de CO. Después calcule los kilogramos mol de CO en 56 kg de este compuesto.)

Respuesta: 88.0 kg CO_2, 32.0 kg O_2

1.3-3. ***Composición de una mezcla gaseosa.*** Una mezcla gaseosa contiene 20 g de N_2, 83 g de O_2 y 45 g de CO_2. Calcule la composición en fracciones mol y el peso molecular promedio de la mezcla.

Respuesta: Peso molecular prom. = 34.1 g masa/g mol, 34.1 kg masa/kg mol

1.3-4. ***Composición de una solución de proteina.*** Una solución líquida contiene 1.15% en peso de una proteína, 0.27% en peso de KCl y el resto es agua. El peso molecular promedio de la proteína por permeación de gel es 525 000 g masa/g mol. Calcule las fracciones mol de los componentes en la solución.

1.3-5. ***Concentración de una solución de NaCl.*** Una solución acuosa de NaCl tiene 24% en peso de esta sal y su densidad es 1.178 g/cm^3 a 25 °C. Calcule lo siguiente:

a) Fracciones mol del NaCl y del agua.

b) Concentración del NaCl en g mol/l, lb$_m$/pie^3, lb$_m$/gal y kg/m^3.

1.4-1. ***Conversión de mediciones de presión en un secado por congelación.*** En la medición experimental del secado por congelación de carne de res, la cámara se mantiene a presión absoluta de 2.4 mm de Hg. Convierta esta presión a atm, pulg de agua a 4 °C, μm de Hg y Pa. (Sugerencia: Vea el apéndice A.l para los factores de conversión.)

Respuesta: 3.16 x 10^{-3} atm, 1.286 pulg H_2O, 2400 mm de Hg, 320 Pa

1.4-2. ***Compresión y enfriamiento de nitrógeno gaseoso.*** Un volumen de 65.0 pie^3 de N_2 gaseoso 90 °F y 29.0 lb/pulg^2 se comprime a 75 lb/pulg^2 y se enfría a 65 °F. Calcule el volumen final en pie^3 y la densidad final en lb$_m$/pie^3. *[Sugerencia:* Asegúrese de convertir primero las presiones a lb/pulg^2 abs y después a atm. Sustituya las condiciones originales en la ecuación (1.4-l) y obtenga n en libras mol.]

1.4-3. ***Composición y volumen de gases.*** Una mezcla de 0.13 g mol de NH_3, 1.27 g mol de N_2 y 0.025 g mol de vapor de H_2O, está contenida a una presión total de 830 mm de Hg y 323 K. Calcule lo siguiente:

a) Fracción mol de cada componente.

b) Presión parcial de cada componente en mm de Hg.

c) Volumen total de la mezcla en m^3 y pie^3.

1.4-4. ***Evaporación de un liquido orgánico sensible al calor.*** Un líquido orgánico se evapora de una solución líquida que contiene un bajo porcentaje de sólidos no volátiles disueltos. Puesto que el sólido es sensible al calor y puede volverse amarillento a temperaturas elevadas, es necesario evaporarlo al vacío. Si la presión absoluta más baja que puede obtenerse en el aparato es

12.0 mm de Hg, ¿cuál será la temperatura de evaporación en K? Se supondrá que la pequeña cantidad de sólidos no afecta la presión de vapor, que se expresa como sigue:

$$\log P_A = -2250 \frac{1}{0T} + 9.05$$

donde P_A está en mm de Hg y *Ten* K.

Respuesta: $T = 282.3$ K o 9.1 °C.

1 S-l. ***Evaporación de soluciones de azúcar de caña.*** Se está usando un evaporador para concentrar soluciones de azúcar de caña. Se evaporan 10000 kg/día de una solución que contiene 38% en peso de azúcar, obteniéndose una solución con 74% en peso. Calcule el peso de la solución obtenida y la cantidad de agua extraída.

Respuesta: 5135 kg/día de la solución al 74% en peso, 4865 kgldía de agua

1.5-2. ***Procesamiento de harina depescado.*** Algunos pescados se procesan como harina de pescado para usarse como proteínas suplementarias en alimentos. En el proceso empleado primero se extrae el aceite para obtener una pasta que contiene 80% en peso de agua y 20% en peso de harina seca . Esta pasta se procesa en secadores de tambor rotatorio para obtener un producto "seco" que contiene 40% en peso de agua. Finalmente, el producto se muele a grano fino y se empaca. Calcule la alimentación de pasta en kg/h necesaria para producir 1000 kg/h de harina "seca".

Respuesta: 3000 kglh de pasta

1.5-3. ***Secado de madera.*** Un lote de 100 kg de madera húmeda con 11% en peso de humedad, se seca hasta reducir el contenido de agua a 6.38 kg/1.0 kg de madera seca. ¿Cuál es el peso de madera "seca" y la cantidad de agua que se elimina?

1.54. ***Procesamiento de pulpa de madera.*** Una pulpa de madera húmeda contiene 68% en peso de agua. Después de secarla se determina que se ha eliminado el 55% de agua original de la pulpa. Calcule la composición de la pulpa "seca" y su peso para una alimentación de 1000 kg/min de pulpa húmeda.

1.5-5. ***Producción de jalea a partir de frutas maceradas en un proceso de dos etapas.*** En un proceso para fabricar jalea, la fruta macerada que tiene 14% en peso de sólidos solubles se mezcla con azúcar (1.22 kg azúcar/1 .OO kg de fruta) y pectina (0.0025 kg pectina/1 .OO kg de fruta). La mezcla resultante se evapora en una olla para producir una jalea con 67% en peso de sólidos solubles. Calcule, para una alimentación de 1000 kilogramos de fruta macerada, los kilogramos de mezcla obtenida, los kilogramos de agua evaporada y los kilogramos de jalea producida.

Respuesta: 2222.5 kg de mezcla, 189 kg de agua, 2033.5 kg de jalea

1.5-6. ***Secado de raíces de casave (tapioca).*** La harina de tapioca se usa en muchos países para hacer pan y productos similares. La harina se procesa secando los granos gruesos de la raíz de casave (que contienen 66% en peso de humedad) hasta reducirla al 5% y moliendo hasta finura de harina. ¿Cuántos kilogramos de granos deben secarse y qué cantidad de agua tiene que extraerse para producir 5000 kilogramos de harina por hora?

1.5-7. ***Procesamiento de frijol de soya en tres etapas.*** Una alimentación de 10000 kg de frijol de soya se procesa en una secuencia de tres etapas (El). La alimentación contiene 35% en peso de proteína, 27.1% en peso de carbohidratos, 9.4% en peso de fibras y cenizas, 10.5% en peso de humedad y 18.0% de aceite. En la primera etapa, los frijoles se maceran y se prensan para extraer el aceite, obteniéndose corrientes de aceite y de pasta prensada que todavía contiene 6% de aceite. (Suponga que no hay pérdidas de otros constituyentes en la corriente de aceite.) En la segunda etapa, la pasta prensada se trata con hexano para obtener una corriente de pasta de soya extraída que contiene 0.5% en peso de aceite y una corriente de aceite-hexano. Suponga que no sale hexano en el extracto de soya. Finalmente, en la última etapa se seca el extracto para obtener un producto con 8% en peso de humedad. Calcule:

a) Kilogramos de pasta de soya que salen de la primera etapa.
b) Kilogramos de pasta extraída obtenidos en la segunda etapa.
c) Kilogramos de pasta seca final y porcentaje en peso de proteína en el producto seco.

Respuesta: a) 8723 kg, b) 8241 kg, c) 7816 kg, 44.8% de proteínas

1.5-S. ***Recirculación en un secador.*** Un material sólido que contiene 15.0 en peso de humedad se seca hasta reducirlo a 7.0% en peso por medio de una corriente de aire caliente mezclada con aire de recirculación del secador. La corriente de aire no recirculado contiene 0.01 kg de agua/kg de aire seco, el aire de recirculación tiene 0.1 kg de agua/kg de aire seco y el aire mezclado contiene 0.03 kg de agua/kg de aire seco. Para una alimentación de 100 kg de sólidos/h al secador, calcule los kilogramos de aire seco/h de aire nuevo, los kilogramos de aire seco/h del aire de recirculación y los kg/h de producto "seco".

Respuesta: 95.6 kg/h de aire seco en el aire nuevo, 27.3 kg/h de aire en el aire de recirculación y 91.4 kg/h de producto "seco"

1.5-9. ***Cristalización y recirculación. Se*** desea producir 1000 kg/h de cristales de $Na_3PO_4.12H_2O$ a partir de una solución de alimentación que contiene 5.6% en peso de Na_3PO_4 y trazas de impurezas. La solución se evapora primero en un evaporador hasta obtener una concentración de 35% en peso y después se enfría a 293 K en un cristalizador, de donde se extraen los cristales hidratados y la solución madre. De cada 10 kg de licor madre se pierde 1 .0 kg para eliminar las impurezas y el resto se recircula al evaporador. La solubilidad del Na_3PO_4 a 293 K es 9.91% en peso. Calcule los kg/h de solución de alimentación y los kg/h de agua extraída.

Respuesta: 7 771 kg/h de alimentación, 6739 kg/h de agua

1.5-10. ***Evaporación y derivación en la concentración de jugo de naranja.*** En un proceso para concentrar 1000 kg de jugo de naranja recién obtenido, que contiene 12.5% en peso de sólidos, la maceración produce 800 kg de jugo filtrado y 200 kg de pulpa. El jugo filtrado se concentra en un evaporador al vacío para obtener una concentración del 58% de sólidos. Los 200 kg de pulpa se derivan extrayéndolos antes de entrar al evaporador y se mezclan con el jugo evaporado en un mezclador, para mejorar el sabor. Este jugo concentrado final contiene 42% en peso de sólidos. Calcule la concentración de sólidos en el jugo filtrado, los kg de jugo concentrado final y la concentración de sólidos en la pulpa que se deriva. (Sugerencia: Procédase primero a un balance total y después a un balance de sólidos en el proceso total. Después, hágase el balance en el evaporador y, finalmente, el balance en el mezclador.)

Respuesta: 34.2% en peso de sólidos en la pulpa.

1.5-11. ***Fabricación de acetileno.*** Para fabricar 6000 $pies^3$ de acetileno (CHCH) gaseoso a 70 °F y 750 mm de Hg, se usa carburo de calcio (CaC_2), que contiene 97% en peso de CaC_2 y 3% en peso de sólidos inertes y agua. La reacción es

$$CaC_2 + 2H_2O \rightarrow CHCH + Ca(OH)_2 \downarrow$$

La lechada final de cal contiene agua, sólidos inertes y $Ca(OH)_2$. En este producto, el porcentanje total en peso de sólidos constituidos por inertes y $Ca(OH)_2$ es 20%. ¿Cuántas libras de agua deben añadirse y cuantas libras de lechada final se obtienen? [Sugerencia: Use una base de 6000 pie^3 de gas y convierta a lb mol. Esto da 15.30 lb mol de C_2H_2, 15.30 lb mol de $Ca(OH)_2$ y 15.30 lb mol de CaC_2 añadido. Convierta libras mol de alimentación de CaC_2 a libras y calcule las libras de inertes. Las libras totales de sólidos en la lechada son, entonces, la suma de $Ca(OH)_2$ más los inertes. Al calcular el agua añadida, recuerde que la reacción consume una parte.]

Respuesta: 5200 lb (2359 kg) de agua añadida, 5815 lb (2638 kg) de lechada de cal.

1.5-12. ***Combustión de un combustible sólido.*** El análisis de un combustible reporta 74.0% en peso de C y 12.0% en peso de cenizas (inertes). Se añade aire para la combustión, obteniéndose

un gas de salida con 12.4% de CO_2, 1.2 de CO, 5.7 de O_2 y 80.7% de N_2. Calcule los kilogramos de combustible usado por cada 100 kg mol de gas de combustión de salida y los kilogramos mol de aire empleado. (Sugerencia: Calcule primero los moles de O_2 añadidos con el aire, usando el hecho de que el N_2 *en* este gas es igual al N_2 introducido con el aire. Después proceda a un balance de carbono para obtener un total de moles de C añadido.)

1.5-13. ***Combustión de coque.*** Un horno quema coque que contiene 81.0% en peso de C, 0.8% de H y el resto son cenizas inertes. El horno utiliza 60% de exceso de aire (con respecto al necesario para la combustión completa del C a CO_2 y del H a H_2O). Calcule los moles de todos los componentes en el gas de combustión de salida cuando sólo se transforma en CO_2 el 95% del carbono y el resto queda como CO.

1.5-14. ***Producción de formaldheído.*** El formaldehído (CH_2O) se obtiene por oxidación catalítica de vapor de metano1 puro y aire en un reactor. Los moles de este reactor son 63.1 de N_2, 13.4 de O_2, 5.9 de H_2O, 4.1 de CH_2O, 12.3 de CH_3OH y 1.2 de HCOOH. La reacción es

$$CH_3OH + \tfrac{1}{2}\,0, \rightarrow CH_2O + H_2O$$

Se verifica también una reacción secundaria:

$$CH_2O + \tfrac{1}{2}\,0, \rightarrow HCOOH$$

Calcule las alimentaciones de moles de metano1 y de aire y el porcentaje de conversión de metano1 en formaldehído.

Respuesta: 17.6 moles de CH_3OH, 79.8 moles de aire, 23.3% de conversión

1.6-1. ***Calentamiento de CO_2 gaseoso.*** Un total de 250 g de CO_2 gaseoso a 373 K se calienta a 623 K con una presión total de 101.32 kPa. Calcule la cantidad de calor necesario en cal, btu y kJ.

Respuesta: 15040 cal, 59.8 btu, 62.93 kJ

1.6-2. ***Calentamiento de una mezcla gaseosa.*** Una mezcla de 25 lb mol de N_2 y 75 lb mol de CH_4 se calienta de 400 °F a 800 °F a 1 atm de presión. Calcule la cantidad total de calor necesario en btu.

1.6-3. ***Temperaturafinal al calentarpuré de manzana.*** Una partida de 454 kg de puré de manzana a 10 °C se calienta en un intercambiador de calor por adición de 121 300 kJ. Calcule la temperatura de salida del producto. (Sugerencia: En el apéndice A.4 aparece el valor de la capacidad calorífica del puré de manzana a 32.8 °C . Suponga que es constante y úselo como c_{pm} promedio.)

Respuesta: 76.4 °C

1.6-4. ***Uso de las tablas de vapor.*** Por medio de las tablas de vapor, determine la variación de entalpía de 1 lb de agua en cada uno de los casos siguientes:

a) Calentamiento de agua líquida de 40 °F a 240 °F a 30 lb/pulg^2 abs. (Adviértase que puede despreciarse el efecto de la presión total del agua líquida sobre la entalpía.)

b) Calentamiento de agua líquida de 40 °F a 240 °F y vaporización a 240 °F y 24.97 lb/pulg^2 abs.

c) Enfriamiento y condensación de vapor saturado a 212 °F y 1 atm abs a un líquido a **60** "F.

d) Condensación de un vapor saturado a 212 °F y 1 atm abs.

Respuesta: a) 200.42 btu/lb_m, b) 1152.7 btu/lb_m, c) -1122.4 btu/lb_m, d) -970.3 btu/lb_m, -2256.9 kJ/kg.

1.6-5. ***Calentamiento y vaporización usando las tablas de vapor.*** Un flujo de 1000 kg/h de agua a 21.1 °C se calienta 110 °C con una presión total de 244.2 kPa en la primera etapa del proceso. En la segunda etapa a la misma presión se calienta el agua aún más, hasta que se vaporiza a su punto de ebullición. Calcule las variaciones totales de entalpía en la primera etapa y en ambas etapas.

1.6-6. ***Combustión de CH_4 y H_2.*** Para 100 g mol de una mezcla gaseosa de 75 moles % de CH_4 y 25 moles % de H_2, calcule el calor total de la combustión de la mezcla a 298 K y 101.32 kPa, suponiendo que la combustión es completa.

1.6-7. ***Calor de reacción a partir de calores de formación.*** Calcule el calor de la reacción.

$$4NH_3(g) + 5O_2(g) \rightarrow 4NO(g) + 6H_2O(g)$$

esto es, ΔH, a 298 K y 101.32 kPa para la reacción de 4 g mol de NH_3.

Respuesta: ΔH, calor de reacción = -904.7 kJ

1.7-1. ***Balance de calor y enfriamiento de leche.*** En el procesamiento de leche entera de vaca, se enfrían 4540 kg/h de 60 °C a 4.44 °C por medio de un refrigerante. Calcule el calor extraído de la leche.

Respuesta: Calor extraído de la leche = 269.6 kW

1.7-2. ***Calentamiento de petróleo con aire.*** Un flujo de 2200 lb_m/h de hidrocarburos petrolíferos a 100 °F entra a un intercambiador de calor, donde se calienta a 150 °F con aire. El aire caliente entra a 300 °F y sale a 200 °F. Calcule el total de lb mol de aire/h que se necesita. La capacidad calorífica media del petróleo procesado es 0.45 btu/lb_m °F.

Respuesta: 70.1 lb mol aire/h, 3 1.8 kg mol/h

1.7-3. ***Combustión de metano en un horno.*** Una corriente gaseosa de 10000 kg mol/h de CH_4 a 10 1.32 kPa y 373 K se quema en un horno usando aire a 3 13 K. La combustión es completa y se usa 50% de exceso de aire. El gas de combustión de salida está a 673 K. Calcule el calor consumido en el horno. (Sugerencia: Use una base de 298 K y agua líquida a 298 K. Las entradas serán como sigue: la entalpía del CH_4 a 373 K con respecto a 298; la entalpía del aire a 3 13 K con respecto a 298 K; $-\Delta H_c^0$, el calor de combustión del CH_4 a 298 K, con respecto al agua líquida y q, el calor añadido. Los términos de salida serán: las entalpías del CO_2, el O_2, el N_2 y el H_2O gaseosos a 673 K con respecto a 298 K; y el calor latente del vapor de H_2O a 298 K y 101.32 kPa según el apéndice A.2. Es necesario incluir este calor latente, pues la base del cálculo y de ΔH_c^0 es agua líquida.)

1.7-4. ***Precalentamiento de aire con vaporpara usarse en un secador.*** En un secador se va a usar una corriente de aire que está a 32.2 °C y que se debe calentar en un calentador de vapor a 65.5 "C. El flujo de aire es 1000 kg mol/h. La corriente de vapor entra al calentador saturada y a 148.9 °C, se condensa, se enfría y sale como líquido a 137.8 "C. Calcule la cantidad de vapor usado en kg/h.

Respuesta: 452 kg vapor/h

1.7-5. ***Enfriamiento de latas de sopa de patata después de un procesamiento térmico.*** Un total de 1500 latas de sopa de patata se someten a un proceso térmico en una retorta a 240 "F. Las latas se enfrían a 100 °F en la misma retorta antes de sacarlas por medio de agua fría, que entra a 75 °F y sale a 85 °F. Calcule las libras de agua de enfriamiento que se necesitan. Cada lata contiene 1 .O lb de sopa líquida y la lata metálica vacía pesa 0.16 lb. La capacidad calorífica media de la sopa es 0.94 $btu/lb_m \cdot °F$ y la del metal es 0.12 $btu/lb_m \cdot °F$. La cesta metálica que se usa para sostener las latas en la retorta pesa 3 50 lb y su capacidad calorífica es de 0.12 $btu/lb_m \cdot °F$. Suponga que la cesta metálica se enfría de 240 °F a 85 °F, que es la temperatura del agua de salida. La cantidad de calor que se pierde por las paredes de la

retorta al enfriar de 240 a 100 °F es 10000 btu. Las pérdidas de la retorta por radiación durante el enfriamiento son de 5000 btu.

Respuesta: 21320 lb de agua, 9670 kg

1.8-1. ***Integración gráfica y numérica con el método de Simpson.*** Se obtuvieron los siguientes datos experimentales de $y = f(x)$.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
0	100	0.4	53
0.1	75	0.5	60
0.2	60.5	0.6	72.5
0.3	53.5		

Se desea determinar la integral

$$A = \int_{x=0}^{x=0.6} f(x)\, dx$$

a) Resuélvala por integración gráfica.
b) Aplique el método numérico de Simpson.

Respuesta: a) $A = 38.55$, b) $A = 38.45$

1.8-2. ***Integración gráfica y numérica para obtener el flujo de aguas de desperdicio.*** La medición del flujo de aguas de desperdicio en un canal abierto produce los siguientes datos experimentales.

Tiempo (min)	Flujo (m^3/min)	Tiempo (min)	Flujo (m^3/min)
0	655	70	800
10	705	80	725
20	780	90	670
30	830	100	640
40	870	110	620
50	890	120	610
60	870		

a) Determine el flujo total en metros cúbicos para los primeros 60 min y también el total para 120 min, por integración gráfica.
b) Determine el flujo en 120 min usando el método numérico de Simpson.

Respuesta: a) 48640 m^3 para 60 min, 90390 m^3 para 120 min

REFERENCIAS

(Cl) CHARM, S. E. *The Fundamentals of Food Engineering,* 2a. ed., Westport, Conn.: Avi Publishing Co., Inc., 1971.

(El) EARLE, R. L. *Unit Operations in Food Processing,* Oxford: Pergamon Press, Inc., 1966.

(H1) **HOUGEN,** 0. A., Watson, K. M. y Ragatz, R. A. *Chemical Process Principles,* Parte 1, 2a. ed., Nueva York: John Wiley & Sons, Inc., 1954.

(01) OKOS, M. R., M. S. Tesis. Ohio State University, Columbus, Ohio, 1972.

(P1) **PERRY,** R. H. *y* Green, D. *Perry's Chemical Engineers' Handbook,* 6a. ed. Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1984.

(S1) **SOBER,** H. A. *Handbook of Biochemistry, Selected Data for Molecular Biology,* 2a. ed., Cleveland: Chemical Rubber Co., Inc., 1970.

(W1) WEAST, R. C. *y* Selby, *S.* M. *Handbook of Chemistry and Physics,* 48a. ed., Cleveland: Chemical Rubber Co., Inc., 1967-1968.

CAPÍTULO 2

Principios de transferencia de momento lineal y balances globales

2.1 INTRODUCCIÓN

El flujo y el comportamiento de los fluidos reviste gran importancia en muchas de las operaciones unitarias de ingeniería de procesos. Un fluido puede definirse como una sustancia que no resiste, de manera permanente, la deformación causada por una fuerza y, por tanto, cambia de forma. En este texto se considera que los gases, líquidos y vapores tienen las características de fluidos y que obedecen a muchas leyes comunes.

En las industrias de proceso, gran parte de los materiales están en forma de fluidos y deben almacenarse, manejarse, bombearse y procesarse, por lo que resulta necesario conocer los principios que gobiernan al flujo de fluidos y también los equipos utilizados. Los fluidos típicos son el agua, el aire, el CO_2, aceites, lechadas o suspensiones y jarabes espesos.

Si un fluido se ve poco afectado por los cambios de presión, *se* dice que es *incompresible.* La mayoría de los líquidos son incompresibles. Los gases se consideran como fluidos *compresibles.* Sin embargo, si los gases se sujetan a porcentajes pequeños de cambios de presión y temperatura, sus cambios de densidad serán poco considerables y se les puede clasificar entonces como fluidos incompresibles.

Como toda la materia física, un fluido está compuesto por un número extremadamente grande de moléculas por volumen unitario. Una teoría como la teoría cinética de los gases o la mecánica estadística trata el movimiento de las moléculas en términos de grupos estadísticos, y no de moléculas individuales. En ingeniería, lo que más interesa es el comportamiento en conjunto o macroscópico de un fluido, y no el comportamiento molecular individual o microscópico.

En la transferencia de momento lineal se trata el fluido como una distribución continua de materia o como un "continuo". Este tratamiento es válido cuando el volumen más pequeño de fluido contiene un número de moléculas lo bastante grande como para que el promedio estadístico sea significativo y las propiedades macroscópicas del fluido, como densidad, presión, etc., varíen poco o de manera continua de un punto a otro.

El estudio de la *transferencia de momento lineal, o mecánica de fluidos* como también se le llama, puede dividirse en dos ramas: *estática de fluidos*, o fluidos en reposo y *dinámica de fluidos*, o fluidos en movimiento. En la sección 2.2 se estudiará la estática de fluidos; en otras secciones de este capítulo y en el capítulo 3 se tratará la dinámica de fluidos. Puesto que en la dinámica de fluidos hay una transferencia de momento lineal, se usa con bastante frecuencia el término "transferencia de momento

lineal' ' 0 ' 'transporte' ' . Posteriormente se estudiará la relación entre la transferencia de momento lineal y la transferencia de calor y masa.

2.2 ESTÁTICA DE FLUIDOS

2.2A Fuerza, unidades y dimensiones

En un fluido estático, una de las propiedades importantes es la presión del fluido. La presión es la fuerza superficial ejercida por un fluido sobre las paredes del recipiente que lo contiene. Además, se tiene presión en cualquier punto del volumen de un fluido.

Para comprender la *presión,* que se define como la fuerza desarrollada por unidad de área, es necesario estudiar primero la ley básica de Newton. La ecuación para el cálculo de la fuerza ejercida por una masa sujeta a la influencia de la gravedad es

$$F = mg \quad \text{(Unidades SI)}$$
$$F = \frac{mg}{g_c} \quad \text{(Unidades del sistema inglés)} \qquad \textbf{(2.2-l)}$$

donde en unidades SI, F es la fuerza ejercida en newtons N (kg . m/s^2), m es la masa en kg y g es la aceleración normal de la gravedad, 9.80665 m/s^2.

En unidades del sistema inglés, F está en lb_f, m en lb_m, g es 32.1740 pie/s^2 y g_c (un factor de conversión gravitacional) es 32.174 lb_m . pie $/lb_f \cdot s^2$. El uso del factor de conversión g_c significa que g/g_c tiene un valor de 1.0 lb_f/lb_m y que 1 lb_m resulta convenientemente igual a 1 lb_f. Por lo general, cuando se expresan unidades de presión se omite la palabra "fuerza" y simplemente se pone $lb/pulg^2$ en vez de $lb_f/pulg^2$. Cuando la masa m está dada en g masa, F es g fuerza, g = 980.665 cm/s^2 y g_c = 980.665 g masa $\cdot$ cm/g fuerza $\cdot$ s^2. Sin embargo, rara vez se usan las unidades g fuerza.

Otro sistema de unidades común para la ecuación (2.2-l) es aquel en el que se omite g_c y la fuerza *(F = mg)* se da como lb_m . pie/s^2, que recibe el nombre de *poundal.* De esta manera la acción de la gravedad sobre 1 lb_m dará una fuerza de 32.174 poundals ($lb_m \cdot pie/s^2$). Si se usa 1 g masa, la fuerza *(F = mg)* se expresa en términos de dinas (g $\cdot$ cm/s^2). Éste es el sistema de unidades centímetro-gramo-segundo (cgs).

Los factores de conversión para diferentes unidades de fuerza o fuerza por unidad de área (presión), están dados en el apéndice A-l. Nótese que siempre, en el sistema SI, y usualmente en el sistema cgs, el término g_c no se emplea.

EJEMPLO 2.2-l. Unidades y dimensiones de fuerza

Calcule la fuerza desarrollada por 3 lb masa en términos de:

a) Lb fuerza (unidades del sistema inglés)
b) Dinas (unidades cgs)
c) Newtons (unidades SI)

Solución: Para el inciso a) usando la ecuación (2.2-1),

$$F\,(\text{fuerza}) = m\,\frac{g}{g_c} = (3\ lb_m)\left(32.174\ \frac{pie}{s^2}\right)\left(\frac{1}{32.174\ \frac{lb_m\ .\ pie}{lb_f\ .\ s^2}}\right) = lb \text{ fuerza } (lb_f)$$

Para el inciso b),

$$F = mg = (3 \text{ lb},)(45359 \frac{\text{g}}{\text{lb}_\text{m}})\left(980.665 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}\right)$$

$$= 1.\ 332 \times 10^6 \frac{\text{g} \cdot \text{cm}}{\text{s}^2} = 1.332 \times 10^6 \text{ dina}$$

Como otra alternativa para el inciso b), y usando el apéndice A. 1,

$$1 \text{ dina} = 2.2481 \cdot 10^{-6} \text{ lb}_\text{f}$$

$$F = (3 \text{ lb}_\text{f})\left(\frac{1}{2.2481 \times 10^{-6} \text{ lb}_\text{f}/\text{dina}}\right) = 1.332 \times 10^6 \text{ dina}$$

Para calcular **newtons** en el inciso c),

$$F = mg = \left(3 \text{ lb}_\text{m} \times \frac{1 \text{ kg}}{2.2046 \text{ lb}_\text{m}}\right)(\quad 9.80665;)$$

$$= 13.32 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} = 13.32 \text{ N}$$

Como alternativa, usando los valores del apéndice A. 1,

$$1 \frac{\text{g} \cdot \text{cm}}{\text{s}^2} \text{ (dina)} = 10^{-5} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} \text{ (newton)}$$

$$F = (1.332 \times 10^6 \text{ dina})\left(10^{-5} \frac{\text{newton}}{\text{dina}}\right) = 13.32 \text{ N}$$

2.2B Presión en un fluido

Puesto que la ecuación (2.2-l) expresa la fuerza ejercida por una masa sometida a la acción de la gravedad, la fuerza desarrollada por una masa de fluido sobre su área de apoyo o **fuerza/unidad** de área (presión) también se obtiene con esta ecuación. En la figura 2.2-l se muestra la columna estacionaria de un fluido de altura h_2 m y una sección transversal de área constante A m^2, donde $A = A_0 = A_1 = A_2$. La presión por encima del fluido es P_0 N/m^2, es decir, podría ser la presión de la atmósfera que lo rodea. En cualquier punto del fluido, digamos h_1, éste debe soportar todo el fluido que esta por encima de dicho punto. Se puede demostrar que en cualquier punto de un fluido inmóvil o estático, las fuerzas son iguales en todas las direcciones. Además, para un fluido en reposo, la **fuerza/unidad** de **área** o presión es igual en todos los puntos auna misma altura. Por ejemplo, a una distancia h_1 del nivel superior, la presión es igual en todos los puntos del área de corte transversal A_1.

Se mostrará el uso de la ecuación (2.2-l) para calcular la presión en diferentes puntos verticales en la figura 2.2-l. La masa total del fluido para altura h_2 y densidad ρ kg/m^3 es

$$\text{kg totales de fluido} = (h_2 \text{ m})(A \text{ m}^2)(\rho \text{ kg/m}^3) = h_2 A \rho \text{ kg} \qquad (2.2\text{-}2)$$

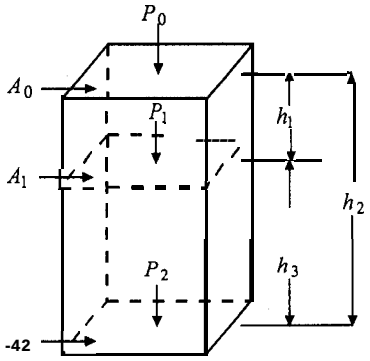


FIGURA 2.2-1. *Presión en un fluido estático*

Al sustituir en la ecuación (2.2-2), la fuerza total F del fluido sobre el área A_1, debida únicamente al fluido es

$$F = (h_2 A \rho \text{ kg})(g \text{ m/s}^2) = h_2 A \rho g \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} \text{ (N)} \qquad (2.2\text{-}3)$$

La presión P se define como la fuerza /unidad de área:

$$P = \frac{F}{A} = (h_2 A \rho g)\frac{1}{A} = h_2 \rho g \text{ N/m}^2 \text{ o Pa} \qquad (2.2\text{-}4)$$

Ésta es la presión sobre A_2 debida a la masa de fluido que está encima. Sin embargo, para obtener la presión total P_2 sobre A_2, debe añadirse la presión P_0 que soporta todo el líquido.

$$P_2 = h_2 \rho g + P_0 \text{ N/m}^2 \text{ o Pa} \qquad (2.2\text{-}5)$$

La ecuación (2.2-5) es la expresión fundamental para calcular la presión de un fluido a cualquier profundidad. Para calcular P_1,

$$P_1 = h_1 \rho g + P_0 \qquad (2.2\text{-}6)$$

La diferencia de presión entre los puntos 2 y 1 es

$$P_2 - P_1 = (h_2 \rho g + P_0) - (h_1 \rho g + P_0) = (h_2 - h_1)\, pg \quad \text{(Unidades SI)} \qquad (2.2\text{-}7)$$

$$P_2 - P_1 = (h_2 - h_1)\rho \frac{g}{g_c} \quad \text{(Unidades del sistema inglés)}$$

Puesto que lo que determina la presión en un fluido es la altura vertical del mismo, la forma del recipiente no afecta la presión. Por ejemplo, en la figura 2.2-2, la presión P_1 en el fondo de los tres recipientes es igual y equivale a $h_1 \rho g + P_0$.

EJEMPLO 2.2-2. Presión en un tanque de almacenamiento

Un gran tanque de almacenamiento contiene petróleo de una densidad igual a 917 kg/m^3 (0.9 17 g/cm^3). El tanque tiene una altura de 3.66 m (12.0 pies) y está abierto a la atmósfera

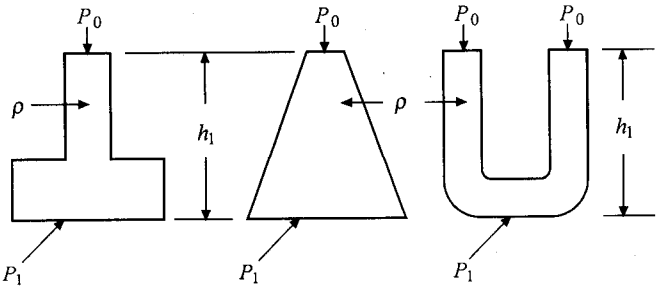


FIGURA 2.2-2. *Presiones en recipientes de diversas formas.*

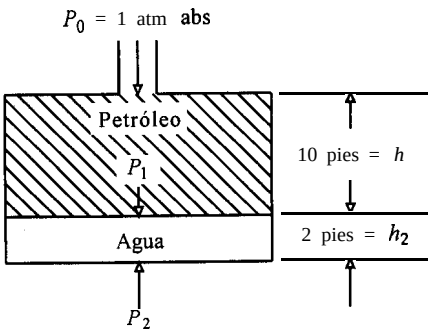


FIGURA 2.2-3. *Tanque de almacenamiento del ejemplo 2.2-2.*

con una presión de 1 atm abs en la superficie. El tanque está lleno de petróleo a una profundidad de 3.05 m (10 pies) y también contiene 0.61 m (2.0 pies) de agua en la parte inferior. Calcule la presión en Pa y en psia a 3.05 m de la superficie y en el fondo del tanque. También calcule la presión manométrica del fondo del tanque.

Solución: Primero se hace un diagrama del tanque, como el que se muestra en la figura 2.2-3. La presión P_0 = 1 atm abs = 14.696 psia (del apéndice 1). También,

$$P_0 = 1.01325 \times 10^5 \text{ Pa}$$

Con base en la ecuación (2.2-6), se usan primero unidades del sistema inglés y después SI.

$$P_1 = h_1\rho_{pet}\frac{g}{g_c} + P_0 = (10 \text{ pies})\left(0917 \text{ x } 62.43\frac{\text{lb}_m}{\text{pie}^3}\right)\left(10\frac{\text{lb}_f}{\text{lb}_m}\right)\left(\frac{1}{144 \text{ pu lg}^2/\text{pie}^2}\right) +$$

$$14.696 \text{ lb}_f/\text{pulg}^2 = 18.68 \text{ lb/pulg}^2 \text{ abs}$$

$$P_1 = h_1\rho_{pet}\, g + P_0 = (3.05 \text{ m})\left(917\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)\left(9.8066\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) + 1.0132 \times 10^5$$

$$= 1.287 \times 10^5 \text{ Pa}$$

Para calcular P_2 en el fondo del tanque, $\rho_{agua} = 1.00\ g/cm^3$ y

$$P_2 = h_2\rho_{agua}\frac{g}{g_c} + P_1 = (2.0)(1.00 \times 62.43)(1.0)\left(\frac{1}{144}\right) + 18.68$$

$$= 19.55\ lb/pulg^2\ abs$$

$$= h_2\rho_{agua}\, g + P_1 = (0.61)(1000)(9.8066) + 1.287 \times 10^5$$

$$= 1.347 \times 10^5\ Pa$$

La presión manométrica en el fondo es igual a la presión absoluta P_2 menos 1 atm:

$$P_{man} = 19.95\ lb/pulg^2\ abs - 14.696\ lb/pulg^2\ abs = 4.85\ lb/pulg^2\ man$$

2.2C Carga de un fluido

Las presiones se expresan en diversas unidades, como $lb/pulg^2$ abs, dinas/cm^2 y newtons/m^2, y otras más que aparecen en el apéndice A.l. Sin embargo, también es común expresar presiones en términos de carga en metros o pies de un cierto fluido. Esta carga o altura en m o pies de un fluido es aquella que ejerce la misma presión que las presiones que representa. Usando la ecuación (2.2-4) que relaciona la presión P y la altura h de un fluido, al despejar h, que es la carga en m,

$$h\ (\text{carga}) = \frac{P}{\rho g}\ \text{m} \qquad \text{(SI)}$$

$$h = \frac{Pg_c}{\rho g}\ \text{pies} \qquad \text{(Unidades del sistema inglés)} \tag{2.2-8}$$

EJEMPLO 2.2-3. Conversión depresión a carga de un fluido

Considerando que la presión de 1 atm normal es 101.325 kN/m^2 (Apéndice A. 1), procédase a lo siguiente:

a) Transfórmese esta presión a carga en m de agua a 4 "C.
b) Transfórmese esta presión a carga en m de Hg a 0 "C.

Solución: Para el inciso a), la densidad del agua a 4 "C, de acuerdo con el apéndice A.2 es 1.000 g/cm^3. Con respecto al apéndice A.1, una densidad de 1.000 g/cm^3 es igual a 1000 kg/m^3. Sustituyendo estos valores en la ecuación (2.2-8),

$$h(\text{carga}) = \frac{P}{\rho g} = \frac{101.325 \times 10^3}{(1000)(9.80665)}$$

$$= 10.33\ \text{m de agua a 4 °C}$$

Para el inciso b), la densidad del Hg (Apéndice A.l) es 13.5955 g/cm^3. Para presiones P iguales de diferentes fluidos, la ecuación (2.2-8) puede reordenarse como sigue:

$$P = \rho_{Hg}h_{Hg}g = \rho_{H_2O}h_{H_2O}g \tag{2.2-9}$$

Despejando h_{Hg} en la ecuación (2.2-9) y sustituyendo los valores conocidos:

$$h_{Hg}\ (\text{carga}) = \frac{\rho_{H_2O}}{\rho_{Hg}}h_{H_2O} = \left(\frac{1.000}{13.5955}\right)(10.33) = 0.760\ \text{m Hg}$$

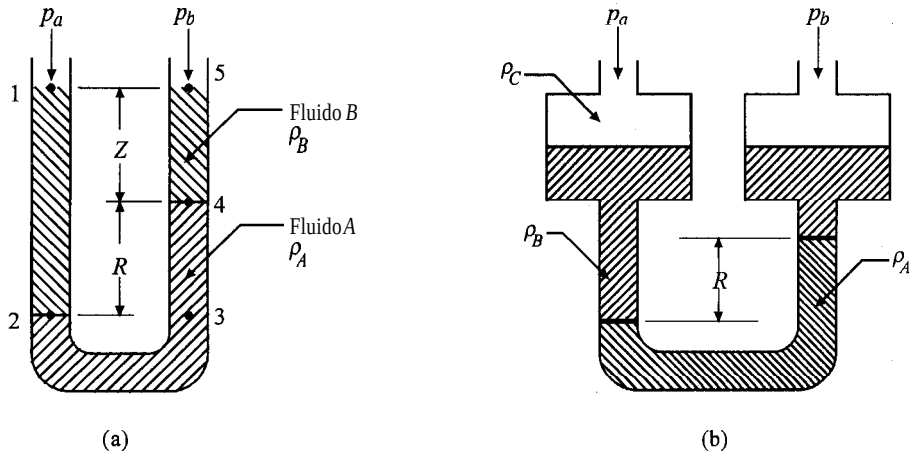


FIGURA 2.2-4. *Manómetros para medir diferencias de presión: a) de tubo en U; b) de tubo en U de dos fluidos.*

2.2D Dispositivos para medir la presión y las diferencias de presión

En las plantas químicas y de otro tipo de procesos industriales con frecuencia es importante medir y controlar la presión en un recipiente o proceso, o el nivel de líquido en un recipiente. Además, como fluyen muchos fluidos en un conducto o tubería, es necesario medir la velocidad con la que se desplaza el fluido. Muchos de esos medidores de flujo dependen de dispositivos para medir una presión o una diferencia de presión. En los párrafos siguientes se consideran algunos dispositivos comunes.

1. Manómetro de tubo en U simple. El manómetro de tubo en U se muestra en la figura 2.2-4a. La presión p_a N/m^2 se ejerce sobre un brazo del tubo en Uy p_b en el otro brazo. Ambas presiones p_a y p_b pueden ser derivaciones de presión de un medidor de fluidos, o p_a puede ser una derivación de presión y p_b la presión atmosférica. La parte superior del manómetro está llena con el líquido B que tiene una densidad de ρ_B kg/m^3 y la parte inferior contiene un fluido A más denso, que tiene una densidad de ρ_A kg/m^3. El líquido A es inmiscible con el B. Para deducir la relación entre p_a y p_b, p_a *es* la presión *en* el punto 1 *y* p_b *en* el punto 5. La presión *en* el *punto* 2 es

$$P2 = Pa + (Z + R)\,\rho_B g \text{ N/m}^2 \tag{2.2-10}$$

donde R es la lectura de un manómetro en m. La presión en el punto 3 debe ser igual a la de 2 debido a los principios de hidrostática

$$P3 = P2 \tag{2.2-11}$$

La presión en el punto 3 también es igual a lo siguiente:

$$p_3 = p_b + Z\,\rho_B g + R\rho_A g \tag{2.2-12}$$

Al igualar la ecuación (2.2-10) con la (2.2-12) y al despejar se obtiene

$$p_a + (Z + R)\rho_B g = p_b + Z\rho_B g + R\rho_A g \tag{2.2-13}$$

$$p_a - p_b = R(\rho_A - \rho_B)g \qquad \text{(SI)}$$

$$P_a - P_b = R(\rho_A - \rho_B)\frac{g}{g_c} \qquad \text{(Unidades del sistema inglés)} \tag{2.2-14}$$

El lector notará que la distancia Z no aparece en el resultado final, como tampoco las dimensiones del tubo, siempre y cuando p_a y p_b se midan en el mismo plano horizontal.

EJEMPLO 2.2-4. Diferencia de presión en un manómetro

Un manómetro como el que se muestra en la figura 2.2-4a se usa para medir la carga o la caída de presión a través de un medidor de flujo. El fluido más pesado es el mercurio, con una densidad de 13.6 g/cm^3 y el fluido de la parte superior es agua, con una densidad de 1 .OO g/cm^3. La lectura en el manómetro es R = 32.7 cm. Calcule la diferencia de presión en N/m^2 usando unidades del SI.

Solución: Al convertir R en m,

$$R = \frac{32.7}{100} = 0.327\,\text{m}$$

Al convertir también ρ_A y ρ_B en kg/m^3 y al sustituir en la ecuación (2.2-14),

$$p_a - p_b = R(\rho_A - \rho_B)g = (0.327\ \text{m})[(13.6 - 1.0)(1000\ \text{kg/m}^3)](9.8066\ \text{m/s}^2)$$
$$= 4.040 \times 10^4\ \text{N/m}^2\ (5.85\ \text{lb/pulg}^2\ \text{abs})$$

2. *Tubo en U de dos fluidos.* En la figura 2.2-4b se muestra un tubo en U de dos fluidos, que es un dispositivo sensible para medir pequeñas cargas o diferencia; de presión. Sea A m^2 el área de corte transversal de cada uno de los depósitos grandes y a m , el área de la sección transversal de cada uno de los tubos que forman la U. Al proceder y hacer un balance de presión para el tubo en U,

$$p_a - p_b = (R - R_0)\left(\rho_A - \rho_B + \frac{a}{A}\rho_B - \frac{a}{A}\rho_C\right)g \tag{2.2-15}$$

donde R_0 es la lectura cuando $p_a = p_b$, R es la lectura real, ρ_A es la densidad del fluido más pesado y ρ_B la del fluido más ligero. Por lo general, a/A se hace lo suficientemente pequeño como para ser insignificante, y también R_0 se suele ajustar a cero; entonces,

$$p_a - p_b = R(\rho_A - \rho_B)g \qquad \text{(SI)}$$

$$P_a - P_b = R(\rho_A - \rho_B)\frac{g}{g_c} \qquad \text{(Unidades del sistema inglés)} \tag{2.2-16}$$

Si ρ_A y ρ_B están cerca una de otra, la lectura de R se amplifica.

EJEMPLO 2.2-S. Medición de la presión en un recipiente

El manómetro de un tubo en U de la figura 2.2-5a se usa para medir la presión p_A en un recipiente que contiene un líquido cuya densidad es ρ_A. Deduzca la ecuación que relaciona la presión p_A con la lectura del manómetro como se muestra.

Solución: En el punto 2, la presión es

$$p_2 = \text{Patm} + h_2\rho_B g \text{ N/m}^2 \tag{2.2-17}$$

En el punto 1, la presión es

$$P_I = P_A + h_1\rho_A g \tag{2.2-18}$$

Al igualar $p_1 = p_2$ por los principios de hidrostática, y reordenando,

$$P_A = p_{atm} + h_2\rho_B g - h_1\rho_A g \tag{2.2-19}$$

Otro ejemplo de un manómetro de tubo en U se muestra en la figura 2.2-5b. Este dispositivo se usa en este caso para medir la diferencia de presión entre dos recipientes.

3. Manómetro de presión de Bourdon. Aunque los manómetros se usan para medir presiones, el dispositivo más común para medir presiones es el manómetro mecánico de tubo de Bourdon. Un tubo hueco enroscado del manómetro tiende a enderezarse cuando está sujeto a una presión interna, y el grado de enderezamiento depende de la diferencia entre las presiones interna y externa. El tubo está conectado a un indicador en un cuadrante calibrado.

4. Separador por gravedad de dos líquidos inmiscibles. En la figura 2.2-6 se muestra un separador (decantador) por gravedad continuo para la separación de dos líquidos inmiscibles, *A* (líquido pesado) y *B* (líquido ligero). La mezcla de alimentación de los dos líquidos entra por un extremo del recipiente separador y los líquidos fluyen lentamente hacia el otro extremo, y se separan en dos capas distintas. Cada líquido fluye por un tubo de rebosamiento separado, como se muestra. Suponiendo que la resistencia por fricción al flujo por parte de los líquidos es esencialmente despreciable, se pueden usar los principios de la estática de fluidos para analizar su funcionamento.

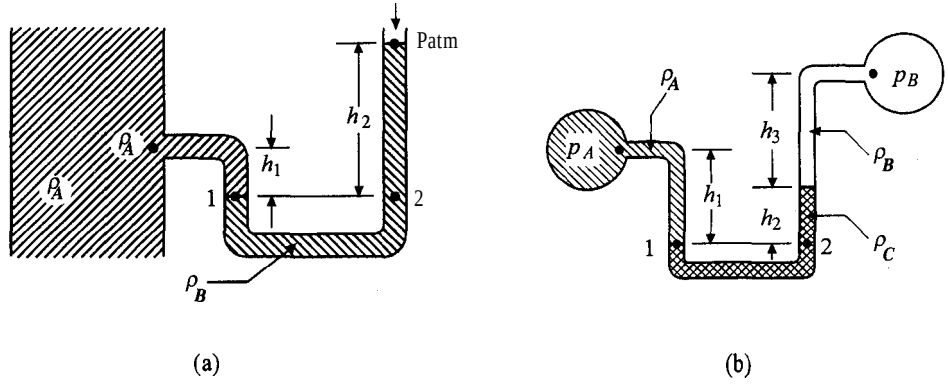


FIGURA *2.2-5. Medidas de la presión en recipientes: a) medida de la presión en un recipiente, b) medida de la presión diferencial.*

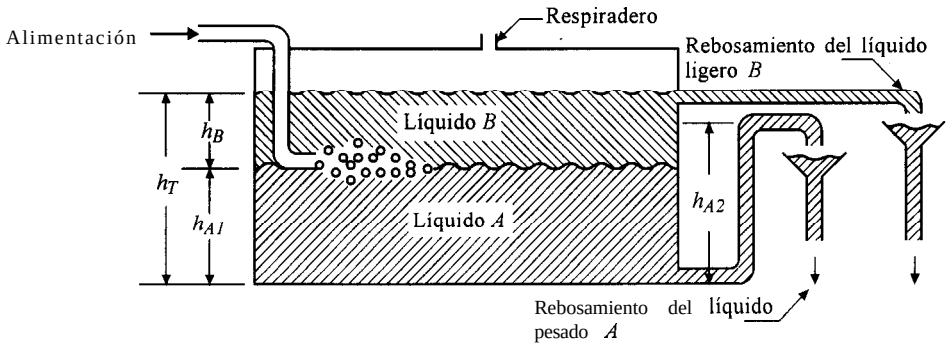


FIGURA *2.24. Separador por gravedad atmosférico continuo para líquidos inmiscibles*

En la figura 2.2-6, la profundidad de la capa del líquido pesado A es h_{A1} m y la B es h_g. La profundidad total es $h_T = h_{A1} + h_B$ y está determinada por la posición del tubo de rebosamiento para B. El líquido pesado A se descarga por el sifón de rebosamiento h_{A2} m sobre el fondo del recipiente. Éste y los tubos de rebosamiento están abiertos a la atmósfera. Un balance hidrostático da

$$h_B \rho_B g + h_{A1} \rho_A g = h_{A2} \rho_A g \qquad \textbf{(2.2-20)}$$

Al sustituir $h_B = h_T - h_{A1}$ en la ecuación (2.2-20) y despejando h_{A1},

$$h_{A1} = \frac{h_{A2} - h_T \rho_B / \rho_A}{1 - \rho_B / \rho_A} \qquad \textbf{(2.2-21)}$$

Esto muestra que la posición de la interfaz o altura h_{A1} depende de la razón de las densidades de los dos líquidos y de las elevaciones h_{A2} y h_T de los dos tubos de rebosamiento. Normalmente, la altura h_{A2} es movible y el nivel de la interfaz puede ajustarse.

2.3 ECUACIÓN GENERAL DE TRANSPORTE MOLECULAR PARA TRANSFERENCIA DE MOMENTO LINEAL, CALOR Y MASA

2.3A Ecuación general de transporte molecular y balance general de propiedades

1. Introducción a los procesos de transporte. En los procesos de transporte molecular, lo que nos ocupa en general es la transferencia o desplazamiento de una propiedad o entidad dada mediante el movimiento molecular a través de un sistema o medio que puede ser un fluido (gas o líquido) o un sólido. Esta propiedad que se transfiere puede ser masa, energía térmica (calor) o momento lineal. Cada molécula de un sistema tiene una cantidad determinada de la masa, energía térmica o momento lineal asociada a ella, Cuando existe una diferencia de concentración de cualquiera de esas propiedades de una región a otra adyacente, ocurre un transporte neto de esa propiedad. En los fluidos diluidos, como los gases, donde las moléculas están relativamente alejadas entre sí, la velocidad de transporte de la propiedad será relativamente alta puesto que hay pocas moléculas presentes para bloquear el transporte o para interactuar. En fluidos densos, como los líquidos, las moléculas están

próximas entre sí y el transporte o la difusión se realiza con mas lentitud. En los sólidos, las moléculas están empacadas mas estrechamente que en los líquidos y la migración molecular es aun más restringida.

2. Ecuación general de transporte molecular. Los tres procesos de transporte molecular de momento lineal, calor o energía térmica y de masa se caracterizan, en un sentido elemental, por el mismo tipo general de ecuación de transporte. Primero se debe notar lo siguiente:

$$\text{velocidad del proceso de transporte} = \frac{\text{fuerza impulsora}}{\text{resistencia}} \qquad (2.3\text{-}1)$$

Esta ecuación establece algo que es bastante obvio: que se necesita una fuerza impulsora para vencer una resistencia a fin de transportar una propiedad. Se parece a la ley de Ohm en electricidad, donde la magnitud del flujo de la electricidad es proporcional a la caída del voltaje (fuerza impulsora) e inversamente proporcional a la resistencia.

Podemos formalizar la ecuación 2.3-l escribiendo una ecuación como la que sigue para el transporte molecular o la difusión de una propiedad.

$$\psi_z = -\delta \frac{d\Gamma}{dz} \qquad \textbf{(2.3-2)}$$

donde ψ_z se define como el flujo de la propiedad, es decir, como la cantidad de ésta que se transfiere, por unidad de tiempo, a través de una sección transversal unitaria perpendicular a la dirección z del flujo, en cantidad de propiedads . m^2. δ es una constante de proporcionalidad llamada difusividad en m^2/s, Γ es la concentración de la propiedad en cantidad de propiedad/m^3 y z es la distancia en la dirección del flujo en m.

Si el proceso ocurre en estado estacionario, el flujo ψ_z es constante. Reordenando la ecuación (2.3-2) e integrando,

$$\psi_z \int_{z_1}^{z_2} dz = -\delta \int_{\Gamma_1}^{\Gamma_2} \text{ta--} \qquad (2.3\text{-}3)$$

$$\psi_z = \frac{\delta(\Gamma_1 - \Gamma_2)}{z_2 - z_1} \qquad (2.3\text{-}4)$$

En la figura 2.3-l se muestra una gráfica de la concentración Γ en función de z, y es una línea recta. Como el flujo va en la dirección de 1 a 2 de concentración decreciente, la pendiente $d\Gamma/dz$ es negativa, y el signo negativo de la ecuación (2.3-2) da un flujo positivo en la dirección 1 a 2. En la sección 2.3B se demostrará que las ecuaciones especializadas para la transferencia de momento lineal, calor y masa son iguales que la ecuación (2.3-4) para la transferencia general de propiedades.

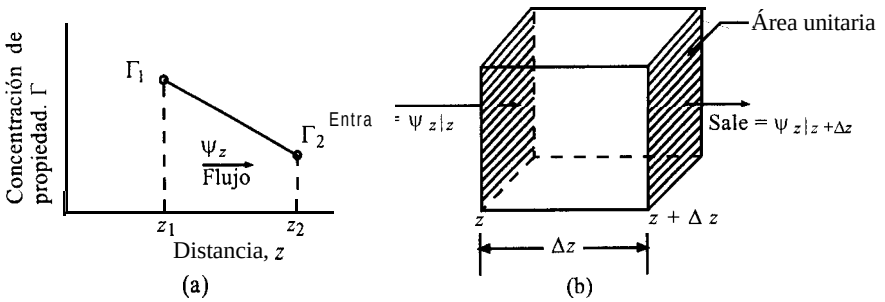


FIGURA 2.3-l *Transporte molecular de una propiednd: a) gráfica de la concentración en función de la distancia para el estado estacionario, b) balance general de propiedades en estado no estacionario.*

EJEMPLO 2.3-l. Transporte molecular de una propiedad en estado estacionario

Se esta transportando una propiedad por difusión a través de un fluido en estado estacionario. En un punto 1 determinado, la concentración es de 1.37×10^{-2} cantidad de propiedad/m^3 y 0.72×10^{-2} en el punto 2 a una distancia $z_2 = 0.40$ m. La difusividad $\delta = 0.013$ m^2/s y el área de corte transversal es constante.

a) Calcule el flujo.
b) Deduzca la ecuación para Γ como función de la distancia.
c) Calcule Γ en el punto medio de la trayectoria.

Solución: Para el inciso a), sustituyendo en la ecuación (2.3-4),

$$\psi_z = \frac{\delta(\Gamma_1 - \Gamma_2)}{z_2 - z_1} = \frac{(0.013)(1.37 \times 10^{-2} - 0.72 \times 10^{-2})}{0.40 - 0}$$

$$= 2.113 \times 10^{-4} \text{ cantidad de propiedad/s . } m^2$$

Para el inciso b), integrando la ecuación (2.3-2) entre Γ_1 y Γ y z_1 y z y reordenando,

$$\psi_z \int_{z_1}^{z} dz = -\delta \int_{\Gamma_1}^{\Gamma} d\Gamma \qquad \textbf{(2.3-5)}$$

$$\Gamma = \Gamma_1 + \frac{\psi_z}{\delta}(z_1 - z) \qquad (2.3\text{-}6)$$

Para el inciso c), usando el punto medio z = 0.20 m y sustituyendo en la ecuación (2.3-6),

$$\Gamma = 1.37 \times 10^{-2} + \frac{2.113 \times 10^{-4}}{0.013}(0 - 0.2)$$

$$= 1.045 \times 10^{-2} \text{ cantidad de propiedad/} m^3$$

3. Balance general de propiedadpara estado estacionario. Al calcular las velocidades de transporte en un sistema usando la ecuación de transporte molecular (2.3-2), es necesario tomar en cuenta la cantidad de esta propiedad que se transporta en todo el sistema. Esto se hace escribiendo una ecuación general de balance o conservación para la propiedad (momento lineal, energía térmica o masa) en estado no estacionario. Se empieza por escribir una ecuación sólo para la dirección z, que indica toda la propiedad que entra por transporte molecular, la que sale, la que se genera y la que se acumula en un sistema como el que se muestra en la figura 2.3-1b, que es un elemento de volumen $\Delta z(1) m^3$ fijo en el espacio.

$$\begin{pmatrix}\text{tasa de propiedad}\\ \text{que entra}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{tasa de generación}\\ \text{de propiedad}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\text{tasa de propiedad}\\ \text{que sale}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{tasa de acumulación}\\ \text{de propiedad}\end{pmatrix} \qquad (2.3\text{-}7)$$

La velocidad de entrada es $(\psi_{z|z}) \cdot 1$ cantidad de propiedad/s, y la velocidad de salida es $(\psi_{z|z + \Delta z}) \cdot 1$, donde el área de corte transversal es 1 .O m^2. La velocidad de generación de la propiedad es $R(\Delta z \cdot 1)$, donde R es la velocidad de generación de propiedad/s . m^3. El término para la acumulación es

$$\text{velocidad de acumulación de propiedad} = \frac{\partial \Gamma}{\partial t} (Az \cdot 1) \qquad (2.3\text{-}S)$$

Al sustituir los diferentes términos en la ecuación (2.3-7),

$$(\psi_{z|z}) \cdot 1 + R(\Delta z \cdot 1) = (\psi_{z|z + \Delta z}) \cdot 1 + \frac{\partial \Gamma}{\partial t} (\Delta z \cdot 1) \qquad (2.3\text{-}9)$$

Al dividir entre Az y dejando que Az llegue a cero,

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \frac{\partial \psi_z}{\partial z} R \qquad (2.3\text{-}10)$$

Al sustituir ψ_z de la ecuación (2.3-2) en la ecuación (2.3-10) y suponiendo que ∂ es constante,

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} - \partial \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial z^2} = R \qquad (2.3\text{-}11)$$

En el caso de que no haya generación,

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} - \partial \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial z^2} \qquad (2.3\text{-}12)$$

Esta última ecuación relaciona la concentración de la propiedad Γ con la posición z y el tiempo t.

Las ecuaciones (2.3-l 1) y (2.3-12) son ecuaciones generales para la conservación de momento lineal, energía térmica, o masa, y se usaran en muchas secciones de este libro. Las ecuaciones sólo consideran aquí el transporte molecular que ocurre, y no otros mecanismos de transporte como la convección, por ejemplo, que se tratarán cuando se deduzcan en secciones posteriores de esta obra las ecuaciones de conservación específicas para momento lineal, energía, o masa.

2.3B Introducción al transporte molecular

La teoría cinética de los gases da una buena interpretación física del movimiento de las moléculas individuales en los fluidos. Debido a su energía cinética, las moléculas están en un rápido movimiento aleatorio, y a menudo chocan unas con otras. El transporte molecular o la difusión molecular de una propiedad como el momento lineal, el calor, o la masa, se lleva a cabo en un fluido gracias a esos movimientos aleatorios de las moléculas individuales. Cada molécula individual que contiene la propiedad que se transfiere se mueve al azar en todas direcciones, y se producen flujos en todas direcciones. Por lo tanto, si existe un gradiente de concentración de la propiedad, habrá un flujo neto de la propiedad desde la concentración alta hasta la baja. Esto sucede porque se difunde el mismo número de moléculas en todos sentidos entre las regiones de alta y baja concentración.

1. Transporte de momento lineal y la ley de Newton. Cuando un fluido fluye en la dirección x en forma paralela a una superficie sólida, existe un gradiente de velocidad donde la velocidad v_x en la dirección x disminuye al acercarse a la superficie en la dirección z. El fluido tiene un momento lineal con dirección x y su concentración es $v_x\rho$ momento lineal/m^3, donde el momento lineal tiene unidades de kg . m/s. Así, las unidades de $v_x\rho$ son (kg . m/s)/m^3. Debido a la difusión aleatoria de las moléculas, existe un intercambio de moléculas en la dirección z, moviéndose igual número de ellas en cada dirección (direcciones + z y $-z$) entre la capa de moléculas que se mueve mas rápido y la capa adyacente más lenta. Por lo tanto, el momento lineal con dirección x se ha transferido en la dirección z desde la capa que se mueve más rápido hacia la que lo hace más lentamente. La ecuación para este transporte de momento lineal es similar a la ecuación (2.3-2) y es la ley de Newton de la viscosidad escrita como sigue para una densidad ρ constante:

$$\tau_{zx} = -\nu \frac{d(v_x\rho)}{dz} \tag{2.3-13}$$

donde τ_{zx} es el flujo de momento lineal con dirección x en la dirección z (kg . m/s)/s · m^2; v es μ/ρ, la difusividad de momento lineal en m^2/s; z es la dirección de transporte o difusión en m; ρ es la densidad en kg/m^3, y μ es la viscosidad en kg/m · s.

2. Transporte de calor y ley de Fourier. La ley de Fourier para el transporte molecular de calor o la conducción de calor en un fluido o sólido puede escribirse como sigue para una densidad ρ constante y una capacidad calorífica c_p.

$$\frac{q_z}{A} = -\alpha \frac{d(pc_pT)}{dz} \tag{2.3-14}$$

donde q_z/A es el flujo de calor en J/s . m^2, α es la difusividad térmica en m^2/s y $\rho c_p T$ *es* la concentración de calor o energía térmica en J/m^3. Cuando hay un gradiente de temperatura en un fluido, se difunden igual número de moléculas en todas direcciones entre la región caliente y la más fría. De esta manera se transfiere la energía en la dirección z.

3. Transporte de masa y la ley de Fick . La ley de Fick para el transporte molecular de masa en un fluido o en un sólido para una concentración total constante del fluido es

$$J^*_{Az} = -D_{AB} \frac{dc_A}{dz} \tag{2.3-15}$$

donde J^*_{Az} es el flujo de A en kg mol A/s · m^2, D_{AB} es la difusividad molecular de la molécula A en B en m^2/s, y c_A es la concentración de A en kg mol A/m^3. Del mismo modo que con el transporte de momento lineal y de calor, donde existe un gradiente de concentración en un fluido, se difundirán igual número de moléculas en todas direcciones entre las regiones de alta y de baja concentración, y ocurrirá un flujo neto de masa.

Por consiguiente, las ecuaciones (2.3-13), (2.3-14) y (2.3-15) para la transferencia de momento lineal, de calor y de masa son similares entre sí y a la ecuación general de transporte molecular (2.3-2). Todas estas ecuaciones tienen un flujo en el lado izquierdo, una difusividad en m^2/s y la derivada de la concentración con respecto a la distancia. Las tres ecuaciones de transporte molecular son matemáticamente idénticas, por lo que se dice que tienen analogía o similitud entre sí. Pero debe resaltarse que, aunque existe una analogía matemática, los mecanismos físicos reales que ocurren

pueden ser completamente diferentes. Por ejemplo, en la transferencia de masa con frecuencia se transportan dos componentes mediante un movimiento relativo entre uno y otro. En el transporte de calor en un sólido, las moléculas están relativamente estacionarias y el transporte es realizado principalmente por los electrones. El transporte de momento lineal puede ocurrir por varios tipos de mecanismos. Algunas consideraciones más detalladas sobre los procesos de transporte de momento lineal, de energía y de masa se presentan en lo que resta de este capítulo y en los siguientes.

2.4 VISCOSIDAD DE LOS FLUIDOS

2.4A La ley de Newton y la viscosidad

Cuando un fluido fluye a través de un canal cerrado, esto es, una tubería o entre dos placas planas, se representan dos tipos de flujo, dependiendo de la velocidad de dicho fluido. A velocidades bajas, el fluido tiende a fluir sin mezclado lateral y las capas adyacentes se resbalan unas sobre las otras como los naipes de una baraja. En este caso no hay corrientes cruzadas perpendiculares a la dirección del flujo, ni tampoco remolinos de fluido. A este régimen o tipo de flujo se le llama *flujo laminar*. A velocidades más altas se forman remolinos, lo que conduce a un mezclado lateral. Esto se llama *flujo* turbulento. En esta sección nos limitaremos a estudiar el flujo laminar.

Con respecto a la viscosidad, un fluido puede diferenciarse de un sólido por su comportamiento cuando se somete a un esfuerzo (fuerza por unidad de área) o fuerza aplicada. Un sólido elástico se deforma en una magnitud proporcional similar al esfuerzo aplicado. Sin embargo, cuando un fluido se somete a un esfuerzo aplicado similar continúa derformándose, esto es, fluye a una velocidad que aumenta con el esfuerzo creciente. Un fluido exhibe resistencia a este esfuerzo. La viscosidad es la propiedad de un fluido que da lugar a fuerzas que se oponen al movimiento relativo de capas adyacentes en el fluido. Estas *fuerzas viscosas se* originan de las que existen entre las moléculas del fluido y son de carácter similar a las *fuerzas cortantes* de los sólidos.

Estas ideas resultaran más claras al estudiar la viscosidad desde un punto de vista cuantitativo. En la figura 2.4-l se muestra un fluido encerrado entre dos placas paralelas infinitas (muy largas y muy anchas). Supóngase que la placa inferior se desplaza paralelamente a la superior a una velocidad constante Δv_z m/s mayor que la de la placa superior, debido a la aplicación de una fuerza uniforme de F newtons. Esta fuerza se llama *retardo viscoso* y tiene su origen en las fuerzas viscosas del fluido. Las placas tienen una separación Ay m. Todas las capas del líquido se desplazan en la dirección z. La capa inmediatamente adyacente a la placa inferior se desplaza a la velocidad de dicha placa. La capa que le sigue hacia arriba se mueve a una velocidad un poco menor, y cada una de ellas tiene una velocidad un poco menor que la anterior al recorrer el fluido en la dirección y. Este perfil de velocidades es lineal con respecto a la dirección y, tal como se muestra en la figura 2.4-l. Una analogía de este fluido seria un mazo de naipes donde al mover el naipe de abajo, todos los demás presentan también cierto grado de desplazamiento.

Para muchos fluidos se ha determinado en forma experimental que la fuerza F en newtons es directamente proporcional a la velocidad Δv_z en m/s , el área A en m^2 de la placa usada, inversamente proporcional a la distancia Ay en m. Expresada con la ley de viscosidad de Newton cuando el flujo es laminar,

$$\frac{F}{A} = -\mu \frac{\Delta v_z}{\Delta y} \tag{2.4-l}$$

donde μ es una constante de proporcionalidad llamada *viscosidad* del fluido en Pa . s o kg / m . s. Cuando Ay tiende a cero y usando la definición de derivada,

$$\tau_{yz} = -\mu \frac{dv_z}{dy} \qquad \text{(Unidades SI)} \tag{2.4-2}$$

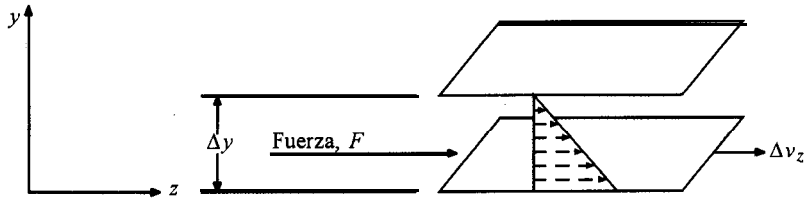


FIGURA 2.3-1. *Esfuerzo cortante en un fluido entre placas paralelas*

donde $\tau_{yz} = F/A$ es el esfuerzo cortante o fuerza por unidad de área en newtons/m^2 (N/m^2). En el sistema cgs, F está en dinas, μ en g/cm · s, v_z está en cm/s y y en cm. La ecuación (2.2-2) también puede escribirse así:

$$\tau_{yz} g_c = -\mu \frac{dv_z}{dy} \qquad \text{(Unidades del sistema inglés)} \qquad (2.4\text{-}3)$$

τ_{yz} está en lb_f/pie^2.

Las unidades de viscosidad en el sistema cgs son g/cm . s, llamadas *poise* o centipoise (cp). En el sistema SI, la viscosidad se expresa en Pa . s($N \cdot s/m^2$ o kg/m . s).

$$1 \text{ cp} = 1 \times 1\ 0^{-3} \text{ kg/m} \cdot \text{s} = 1 \times 1\ 0^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s} = 1 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{s/m}^2 \text{ (SI)}$$

$$1 \text{ cp} = 0.01 \text{ poise} = 0.01 \text{ g/cm} \cdot \text{s}$$

$$1 \text{ cp} = 6.\ 7197 \times 10^{-4} \text{ lb}_m/\text{pie} \cdot \text{s}$$

En el apéndice A.l se incluyen otros factores de conversión para la viscosidad. Algunas veces, la viscosidad se expresa como μ/ρ o viscosidad cinemática, en m^2/s o cm^2/s, donde ρ es la densidad del fluido.

Ejemplo 2.4-l. Cálculo del esfuerzo cortante en un líquido.

Con respecto a la figura 2.4-1, la distancia entre las placas es Ay = 0.5 cm, Av = 10 cm/s y el fluido es alcohol etílico a 273 K, cuya viscosidad es 1.77 cp (0.0177 g/cm . s).

a) Calcule el esfuerzo cortante τ_{yz} y el gradiente de velocidad o velocidad cortante dv_z/dy en unidades cgs.
b) Repita en lb fuerza, s y pies (unidades del sistema inglés).
c) Repita esto en unidades SI.

Solución: Se puede sustituir directamente en la ecuación (2.4-l) o integrar la ecuación (2.4-2). Usando este último método, reordenando la ecuación (2.4-2), llamando a la placa inferior punto 1 e integrando:

$$\tau_{yz} \int_{y_1=0}^{y_2=0.5} dy = -\mu \int_{v_1=10}^{v_2=0} dv_z \qquad (2.4\text{-}4)$$

$$\tau_{yz} = \mu \frac{v_1 - v_2}{y_2 - y_1} \qquad (2.4\text{-}5)$$

Al sustituir los valores conocidos

$$\tau_{yz} = \mu \frac{v_1 - v_2}{y_2 - y_1} = \left(0.0177 \frac{\text{g}}{\text{cm} \cdot \text{s}}\right) \frac{(10-0)\text{cm/s}}{(0.5-0)\text{cm}}$$

$$= 0{,}354 \frac{\text{g} \cdot \text{cm/s}^2}{\text{cm}^2} = 0.354 \frac{\text{dina}}{\text{cm}^2} \qquad (2.4\text{-}6)$$

Para calcular la velocidad cortante dv_z/dy, y puesto que el cambio de velocidad es lineal con respecto a y,

$$\text{velocidad cortante} = \frac{dv_z}{dy} = \frac{\Delta v_z}{\Delta y} = \frac{(10-0)\text{cm/s}}{(05-0)\text{cm}} = 20.0\ \text{s}^{-1} \qquad (2.4\text{-}7)$$

Para el inciso (b), usando lb fuerza como unidades y el factor de conversión de la viscosidad del apéndice A. 1,

$$\mu = 1.77\ \text{cp}(6.7197 \times 10^{-4}\ \text{lb}_\text{m}/\text{pie} \cdot \text{s})/\text{cp}$$
$$= 1.77(6.7197 \times 10^{-4})\ \text{lb}_\text{m}/\text{pie} \cdot \text{s}$$

Al integrar la ecuación (2.4-3),

$$\tau_{yz} = g_c \frac{\dfrac{\mu\ \text{lb}_\text{m}/\text{pie} \cdot \text{s}\,(v_1 - v_2)\text{pie/s}}{(y_2 - y_1)\text{pie}}}{\dfrac{\text{lb}_\text{m} \cdot \text{pie}}{\text{lb}_\text{f} \cdot \text{s}^2}} \qquad (2.4\text{-}8)$$

Al sustituir los valores conocidos en la ecuación (2.4-S) y convertir Δv_z a pie/s y Ay a pie, $\tau_{yz} = 7.39 \times 10^{-4}\ \text{lb}_\text{f}/\text{pie}^2$. También, $dv_z/dy = 20\ \text{s}^{-1}$.
Para el inciso c), Ay = 0.5/100 = 0.005 m, $\Delta v_z = 10/100 = 0.1$ m/s, y $\mu = 1.77 \times 10^{-3}$ kg/m · s = 1.77×10^{-3} P a · s. Al sustituir la ecuación (2.4-5),

$$\tau_{yz} = (1.77 \times 10^{-3})(0.10)/0.005 = 0.0354\ \text{N/m}^2$$

La velocidad cortante será la misma a $20.0\ \text{s}^{-1}$.

2.4B Transferencia de momento lineal en un fluido

El esfuerzo cortante τ_{yz} en las ecuaciones (2.4-l) a (2.4-3) también puede interpretarse como un *flujo de momento lineal dirigido a z en la dirección* y, esto es, la velocidad de flujo de momento lineal por unidad de área. Las unidades de momento lineal son masa por velocidad, kg . m/s. El esfuerzo cortante puede escribirse como

$$\tau_{yz} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m/s}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}} = \frac{\text{momento lineal}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}} \qquad (2.4\text{-}9)$$

Esta ecuación expresa una cantidad de momento lineal transferida por segundo y por unidad de área.

Lo anterior puede ilustrarse considerando la interacción entre dos capas adyacentes de un fluido en la figura 2.4-1, cuyas velocidades son diferentes y que, por tanto, tienen momento lineal distintos en la dirección z. Los movimientos desordenados de las moléculas en la capa de mayor velocidad envían a algunas de ellas a la capa más lenta, donde chocan con las moléculas de menor velocidad y tienden a acelerarlas o a aumentar su momento lineal en la dirección z. Además, y de la misma manera, las moléculas de la capa más lenta tienden a retardar a las de la capa más rápida. Este intercambio de moléculas entre las capas produce una transferencia o flujo de momento lineal en la dirección z de las capas de mayor velocidad a las de velocidad más baja. El signo negativo de la ecuación (2.4-2) indica que el momento lineal se transfiere hacia abajo por el gradiente de regiones de alta a baja velocidad. Esto es similar a la transferencia de calor de las regiones de alta a las de baja temperatura.

2.4C Viscosidad de los fluidos newtonianos

Los fluidos que obedecen la ley de viscosidad de Newton, ecuaciones (2.4-l) a (2.4-3) se llaman *flluidos newtonianos*. En los fluidos newtonianos existe una relación lineal entre el esfuerzo cortante τ_{yz} y el gradiente de velocidad dv_z/dy (velocidad cortante). Esto significa que la velocidad μ es constante e independiente de la velocidad cortante. En fluidos no newtonianos, la relación entre τ_{yz} y dv_z/dy no es lineal, es decir, la viscosidad μ no permanece constante sino que está en función de la velocidad cortante. Algunos líquidos no obedecen esta ley simple de Newton, como pastas, lechadas, altos polímeros y emulsiones. La ciencia del flujo y deformación de los fluidos se llama *reología*. No se estudiarán aquí los fluidos no newtonianos, ya que se incluyen en la sección 3.5.

La viscosidad de los gases, que son fluidos newtonianos, aumenta con la temperatura y es aproximadamente independiente de la presión hasta unos 1000 kPa. A presiones más elevadas, la viscosidad de los gases aumenta al incrementarse la presión. Por ejemplo, la viscosidad del N_2 gaseoso a 298 K casi se duplica al subir de 100 kPa a 5 × 10^4 kPa (Rl). En los líquidos, la viscosidad disminuye al aumentar la temperatura. Puesto que los líquidos son esencialmente incompresibles, la presión no afecta su viscosidad.

TABLA 2.4-l. *Viscosidades de algunos gases y líquidos a 101.32 kPa de presión.*

Gases				*Líquidos*			
Sustancia	*Temp. K*	*Viscosidad (Pa s)10^3 0 (kg/m s) 10^3*	*Ref.*	*Sustancia*	*Temp. K*	*Viscosidad (Pa s)10^3 0 (kg/m s) 10^3*	*Ref.*
Aire	293	0.01813	N1	Agua	293	1.0019	S1
					373	0.2821	S1
co2	273	0.01370	R1				
	373	0.01828	R1	Benceno	278	0.826	R1
CH4	293	0.01089	R1				
				Glicerina	293	1069	Ll
so2	373	0.01630	R1	Hg	293	1.55	R2
				Aceite de oliva	303	84	El

En la tabla 2.4- 1 se incluyen datos experimentales de algunos fluidos puros típicos a 10 1.32 kPa. Las viscosidades de los gases son las más bajas y no difieren mucho entre un gas y otro, siendo de más o menos 5 × 1 0^{-6} a 3 × 1 0^{-5} Pa . s. Las viscosidades de los líquidos son mucho más elevadas. El valor

para el agua a 293 K es de 1×10^{-3} y para la glicerina es de 1.069 Pa . s; por consiguiente, existen grandes diferencias entre las viscosidades de los líquidos. Se incluyen tablas de viscosidades más completas para el agua en el apéndice A.2, en el apéndice A.3 para líquidos y gases inorgánicos y orgánicos, y en el apéndice A.4 para líquidos biológicos y alimenticios. En otras referencias (P 1, R1, W1, Ll), pueden encontrarse datos más completos. También existen métodos (R1) para estimar viscosidades de gases y líquidos cuando no se cuenta con datos experimentales. Estos métodos de estimación son bastante precisos para gases a presiones inferiores a 100 kPa, con un error de ±5 %, pero los procedimientossimilares para líquidos son poco exactos,

2.5 TIPOS DE FLUJO DE FLUIDOS Y EL NÚMERO DE REYNOLDS

2.5A Introducción y tipos de flujo de fluidos

Los principios de la estática de fluidos, estudiados en la sección 2.2 son casi una ciencia exacta. Por otra parte, los principios del movimiento de los fluidos son bastante complicados. Las relaciones básicas que describen el movimiento de un fluido están comprendidas en la ecuaciones para los balances totales de masa, energía y momento lineal, que se tratarán en las secciones siguientes.

Estos balances totales (o macroscópicos) se aplicaran a un recipiente finito o volumen fijo en el espacio. Usamos el término "total" debido a que deseamos describir estos balances con respecto al exterior del recipiente. Los cambios dentro del recipiente quedan determinados en términos de las propiedades de las corrientes de entrada y salida, y de los intercambios de energía entre el recipiente y sus alrededores.

Al llevar a cabo balances totales de masa, energía y momento lineal, no interesan los detalles de lo que ocurre dentro del recipiente. Por ejemplo, en un balance total se consideran velocidades de entrada y salida promedio. Sin embargo, en un balance diferencial se puede obtener la distribución de velocidades dentro del recipiente por medio de la ley de viscosidad de Newton.

En esta sección estudiaremos primero los dos tipos de flujo de fluidos que se pueden verificar: flujo laminar y flujo turbulento. Además, se considerará también el número de Reynolds, que se usa para caracterizar los tipos de flujo. Después, en las secciones 2.6, 2.7 y 2.8 se describe el balance global de masa, el balance de energía y el balance de momento lineal, junto con varias aplicaciones. Por último, en la sección 2.9 se estudiarán los métodos para efectuar un balance de un elemento en el recinto para obtener la distribución de velocidades de dicho elemento y la caída de presión.

2.5B Flujo laminar y flujo turbulento

El tipo de flujo que se presenta en el desplazamiento de un fluido por un canal es muy importante en los problemas de dinámica de fluidos. Cuando los fluidos se mueven por un canal cerrado de cualquier área de corte transversal, se puede presentar cualquiera de dos tipos diferentes de flujo, dependiendo de las condiciones existentes. Estos dos tipos de flujo pueden verse con frecuencia en un río o en cualquier corriente abierta. Cuando la velocidad del flujo es baja, su desplazamiento es uniforme y terso. Sin embargo, cuando la velocidad es bastante alta, se observa una corriente inestable en la que se forman remolinos o pequeños paquetes de partículas de fluido que se mueven en todas direcciones y con gran diversidad de ángulos con respecto a la dirección normal del flujo.

El primer tipo de flujo avelocidades bajas, donde las capas de fluido parecen desplazarse unas sobre otras sin remolinos o turbulencias, se llama *flujo luminar y* obedece la ley de viscosidad de Newton estudiada en la sección 2.4A. El segundo tipo de flujo a velocidades más altas, donde se forman remolinos que imparten al fluido una naturaleza fluctuante, se llama *flujo turbulento.*

La existencia de flujo laminar y turbulento puede visualizarse con facilidad por medio de los experimentos de Reynolds, que se muestran en la figura 2.5- 1. Se hace fluir agua de manera uniforme a través de una tubería transparente, controlando la velocidad por medio de una válvula situada al final del tubo. Se introduce una corriente muy fina y uniforme de agua con un colorante, a través de una boquilla de inyección, para observar su flujo. Cuando la velocidad de flujo del agua es baja, la coloración es regular y forma una sola línea, esto es, una corriente similar a un cordel, tal como lo muestra la figura 2.5-la. En este caso no hay mezclado lateral del fluido y éste se desplaza en una línea recta por el tubo. Al colocar varios inyectores en otros puntos de la tubería se demuestra que no hay mezclado en ninguna parte del mismo y que el fluido fluye en líneas rectas paralelas, A este tipo de flujo *se* le llama *laminar o viscoso.*

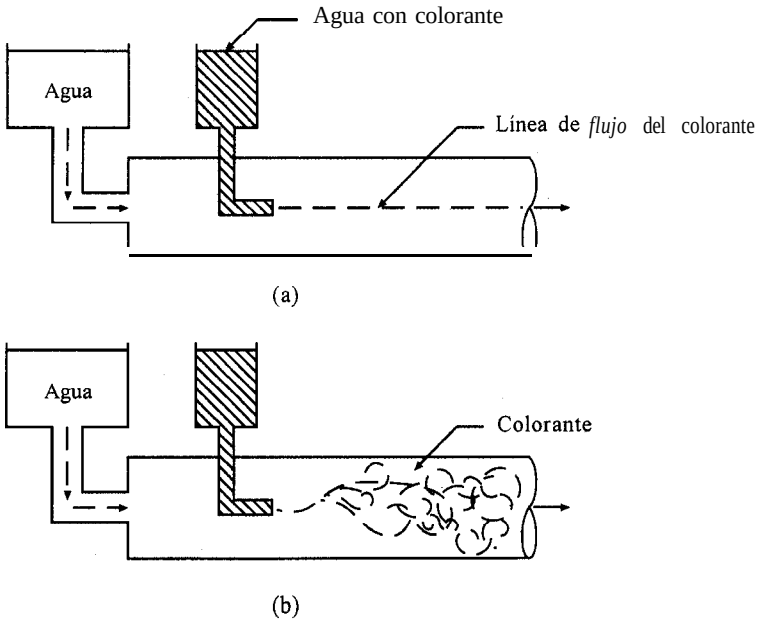


FIGURA 2.5-l. *Experimento de Reynolds para diferentes tipos de flujo: a) laminar, b) turbulento*

Al aumentar la velocidad, se ve que al llegar a cierto límite, la línea de colorante se dispersa y su movimiento se vuelve errático, tal como lo muestra la figura 2.5-1b. A este tipo de flujo se le llama turbulento. La velocidad a la que se presenta el cambio de tipo de flujo se llama *velocidad critica.*

2.5C El número de Reynolds

Con diversos estudios se ha podido demostrar que la transición del flujo laminar al turbulento en tuberías no está sólo en una función de la velocidad, sino también de la densidad y viscosidad del fluido y del diámetro del tubo. Estas variables se combinan en la expresión del numero de Reynolds, que es adimensional:

$$N_{\mathrm{Re}} = \frac{Dv\rho}{\mu} \qquad \textbf{(2.5-1)}$$

donde N_{Re} es el número de Reynolds, D es el diámetro en m, ρ es la densidad del fluido en $\mathrm{kg/m^3}$, μ es la viscosidad del fluido en Pa . s y v es la velocidad promedio del fluido en m/s (definiendo la

velocidad promedio como la velocidad volumétrica del flujo dividida entre el área de corte transversal de la tubería). Las unidades en el sistema cgs son cm para D, g/cm^3 para p, g/cm . s para μ y cm/s para v. En el sistema inglés, D se da en pies, p en lb$_m$/pie^3, μ en lb$_m$/pie . s y v en pie/s.

La inestabilidad del flujo que conduce a un régimen perturbado o turbulento está determinada por la relación de las fuerzas de inercia o cinéticas y las fuerzas viscosas de la corriente fluida. Las fuerzas de inercia son proporcionales a ρv^2 y las viscosas a $\mu v/D$, y la relación $\rho v^2 (\mu v/D)$ es el número de Reynolds $Dv\rho/\mu$. En la sección 3.11 se incluyen explicaciones y deducciones adicionales de los números adimensionales.

Cuando el número de Reynolds es menor de 2100 para una tubería circular recta, el flujo siempre es laminar. Cuando el valor es superior a 4000, el flujo será turbulento excepto en algunos casos especiales. Entre estos dos valores, *o región de transición*, el flujo puede ser viscoso o turbulento, dependiendo de los detalles del sistema, que no se pueden predecir.

EJEMPLO 2.5-l. Número de Reynolds en una tubería

Por una tubería con un diámetro interior (DI) de 2. 067 pulg fluye agua a 303 K con una velocidad de 10 gal/min. Calcule el número de Reynolds usando unidades del sistema inglés y SI.

Solución: Con base en el apéndice A. 1, 7.841 gal = 1 pie^3. Lavelocidad de flujo se calcula como

$$\text{velocidad de flujo} = \left(10.0\frac{\text{gal}}{\text{min}}\right)\left(\frac{1\ \text{pie}^3}{7.481\ \text{gal}}\right)\left(\frac{1\ \text{min}}{60\ \text{s}}\right) = 0.0223\ \text{pie}^3/\text{s}$$

$$\text{diámetro de la tubería, } D = \frac{2.067}{12} = 0.172\ \text{pie}$$

$$\text{área de corte transversal de la tubería} = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi(0.172)^2}{4} = 0.0233\ \text{pie}^2$$

$$\text{velocidad en la tubería, v} = \left(0.0223\ \frac{\text{pie}^3}{\text{s}}\right)\left(\frac{1}{0.0233\ \text{pie}^2}\right) = 0.957\ \text{pie/s}$$

Del apéndice A.2 para agua a 303 K (30 “C),

$$\text{densidad, } \rho = 0.996(62.43)\ \text{lb}_m/\text{pie}^3$$

$$\text{viscosidad, } \mu = (0.8007\ \text{cp})\left(6.7197 \times 10^{-4}\ \frac{\text{lb}_m/\text{pies s}}{\text{cp}}\right)$$

$$= 5.38 \times 10^{-4}\ \text{lb}_m/\text{pie . s}$$

Al sustituir en la ecuación (2.5-1),

$$N_{Re} = \frac{Dv\rho}{\mu} = \frac{(0.172\ \text{pie})(0.957\ \text{pie/s})(0.996 \times 62.43\ \text{lb}_m/\text{pie}^3)}{5.38 \times 10^{-4}\ \text{lb}_m/\text{pie}\cdot\text{s}}$$

$$= 1.905 \times 10^4$$

Por tanto, el flujo es turbulento. Al usar unidades SI,

$$\rho = (0.996)(100\ \text{kg/m}^3) = 996\ \text{kg/m}^3$$

$$D = (2.067\ \text{pulg})(1\ \text{pie}/12\ \text{pulg})(1\text{m}/3.2808\ \text{pie}) = 0.0525\ \text{m}$$

$$v = \left(0.957\frac{\text{pie}}{\text{s}}\right)(1\ \text{m}/3.2808\ \text{pie}) = 0.2917\ \text{m/s}$$

$$\mu = (0.8007\ \text{cp})\left(1 \times 10^{-3}\frac{\text{kg/m}\cdot\text{s}}{\text{cp}}\right) = 8.007 \times 10^{-4}\ \frac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{s}}$$

$$= 8.007 \times 10^{-4}\ \text{Pa}\cdot\text{s}$$

$$N_{\text{Re}} = \frac{D v \rho}{\mu} = \frac{(0.0525\ \text{m})(0.2917\ \text{m/s})(996\ \text{kg/m}^3)}{8.007 \times 10^{-4}\ \text{kg/m}\cdot\text{s}} = 1.905 \times 10^4$$

2.6 BALANCE TOTAL DE MASA Y ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

2.6A Introducción y balances de masa simples

En la dinámica de fluidos se estudia el movimiento de éstos. Por lo general, se transfieren de un lugar a otro por medio de dispositivos mecánicos tales como bombas o ventiladores por carga de gravedad o por presión, y fluyen a través de sistemas de tuberías o equipo de proceso. El primer paso en la resolución de los problemas de flujo casi siempre consiste en aplicar los principios de conservación de la masa a la totalidad del sistema o a una parte del mismo. Consideraremos primero un balance elemental para una geometría simple, para deducir después la ecuación general de balance de masa.

En la sección 1.5 se introdujeron los balances simples de material o de masa y se estableció que

$$\text{entrada} = \text{salida} + \text{acumulación} \qquad \textbf{(1.5-1)}$$

Puesto que en el flujo de fluidos generalmente se trabaja con velocidades de flujo y casi siempre en estado estacionario, la velocidad de acumulación es cero y se obtiene

$$\text{velocidad de entrada} = \text{velocidad de salida (estado estacionario)} \qquad \textbf{(2.6-l)}$$

En la figura 2.6-l se muestra un sistema simple de flujo en el que el fluido entra a la sección 1 con una velocidad promedio v_1 m/s y una densidad ρ_1 kg/m^3. El área de corte transversal es A_1 m^2. El fluido sale por la sección 2 con una velocidad promedio v_2. El balance de masa, ecuación (2.6-l) es,

$$m = \rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2 \qquad (2.6\text{-}2)$$

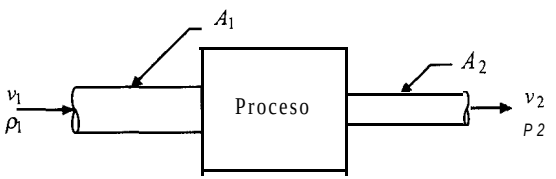


FIGURA 2.6-I. *Balance de masa en un sistema de flujo.*

donde $\dot{m}$ = kg/s. Con frecuencia, $v\rho$ se expresa como G = $v\rho$, donde G es la velocidad de masa o flujo específico de masa en kg/s · m^2. En unidades del sistema inglés, v está en pie/s, ρ en lb_m/pie^3, A en pie^2, $\dot{m}$ en lb_m/s y G en $lb_m/s \cdot pie^2$.

EJEMPLO 2.6-l. Flujo y balance de masa de petróleo crudo

Un petróleo crudo con una densidad de 892 kg/m^3 fluye a través del sistema de tuberías que se muestra en la figura 2.6-2 a una velocidad total de 1.388×10^{-3} m^3/s a la entrada de la tubería 1.

El flujo se divide en partes iguales entre las tres tuberías. Las tuberías son de acero de cédula 40 (véase en el apéndice A.5 las dimensiones exactas). Calcule lo siguiente usando unidades SI.

a) Velocidad total del flujo de masa $\dot{m}$ en las tuberías 1 y 3.
b) Velocidad promedio v en 1 y 3.
c) Velocidad de masa G en 1.

Solución: De acuerdo con el apéndice A.5, las dimensiones de las tuberías son las siguientes: tuberías de 2 pulg: D_1(DI) = 2.067 pulg, área de corte transversal,

$$A_1 = 0.02330 \text{ pie}^2 = 0.02330\ (0.0929) = 2.165 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

tubería de $1\frac{1}{2}$ pulg: D_3 (DI) = 1.610 pulg, área de corte transversal

$$A_3 = 0.01414 \text{ pie}^2 = 0.01414\ (0.0929) = 1.313 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

La velocidad total del flujo de masa en las tuberías 1 y 2 es igual, y

$$m_1 = (1.388 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s})\ (892 \text{ kg/m}^3) = 1.238 \text{ kg/s}$$

Puesto que el flujo se divide en partes iguales en las tres tuberías,

$$m_3 = \frac{m_1}{2} = \frac{1.238}{2} = 0.619 \text{ kg/s}$$

Para el inciso b), usando la ecuación (2.6-2) y despejando v,

$$v_1 = \frac{m_1}{\rho_1 A_1} = \frac{1.238 \text{ kg/s}}{(892 \text{ kg/m}^3)(2.165 \times 10^{-3} \text{ m}^2)} = 0.641 \text{ m/s}$$

$$v_3 = \frac{m_3}{\rho_3 A_3} = \frac{0.619}{(892)(1.313 \times 10^{-3})} = 0.528 \text{ m/s}$$

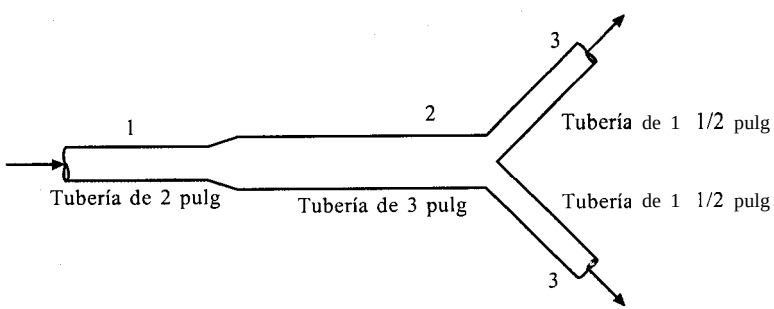


FIGURA 2.6-2. *Sistema de tuberías del ejemplo 2.6-I.*

Para el inciso c),

$$G_1 = v_1 \rho_1 = \frac{m_1}{A_1} = \frac{1.238}{2.165 \times 10^{-3}} = 572 \frac{\text{kg}}{\text{s} \cdot \text{m}^2}$$

2.6B Volumen de control para balances

Las leyes de conservación de la masa, la energía y el momento lineal se refieren siempre a un sistema y gobiernan la interacción de dicho sistema con sus alrededores. El *sistema se* define como una cierta cantidad de fluido de identidad conocida. Sin embargo, en el flujo de fluidos no es fácil identificar las partículas individuales. Como resultado, la atención se centra en un cierto espacio a través del cual fluye el fluido en vez de hacerlo en una cierta masa del fluido. El método empleado que resulta más conveniente consiste en seleccionar un volumen de control que es una región constante en el espacio a través de la cual fluye el fluido.

En la figura 2.6-3 se muestra el caso de un fluido que pasa a través de un conducto. La superficie de control que se representa como una línea punteada, es la superficie que rodea al volumen de control. En la mayoría de los problemas, parte de la superficie de control coincide con algún límite físico tal como la pared del ducto. El resto de la superficie de control es un área hipotética a través de la cual puede fluir el fluido, tal como lo muestran los puntos 1 y 2 en la figura 2.6-3. La representación del volumen de control es análoga a la del sistema abierto en termodinámica.

2.6C Ecuación global para el balance de masa

Al deducir la ecuación general para el balance total de masa, la ley de la conservación de la masa puede enunciarse como sigue para un volumen de control donde no se genera masa:

$$\begin{pmatrix}\text{velocidad de salida de masa}\\ \text{del volumen de control}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{velocidad de entrada de masa}\\ \text{al volumen de control}\end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix}\text{velocidad de acumulación de}\\ \text{masa en el volumen de control}\end{pmatrix} = 0 \text{ (velocidad de generación de masa)} \qquad \textbf{(2.6-3)}$$

Considérese ahora el volumen general de control fijo en el espacio y localizado en el campo de flujo de un fluido, tal como lo muestra la figura 2.6-4. Para un elemento pequeño de área dA m^2 en la superficie de control, la velocidad de efusión de masa de este elemento = $(\rho v)(dA \cos \alpha)$, donde $(dA \cos \alpha)$ es

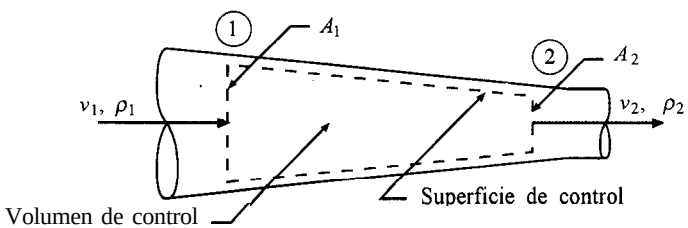


FIGURA *2.6-3 Volumen de control para el flujo a través de un dueto.*

el área dA proyectada perpendicularmente al vector de velocidad v, α es el ángulo entre el vector de velocidad v y el vector unitario dirigido hacia afuera n, que es perpendicular a dA; y ρ es la densidad en kg/m^3. La cantidad pv tiene unidades de $kg/s \cdot m^2$ y se llama *velocidad o flujo específico de masa G.*

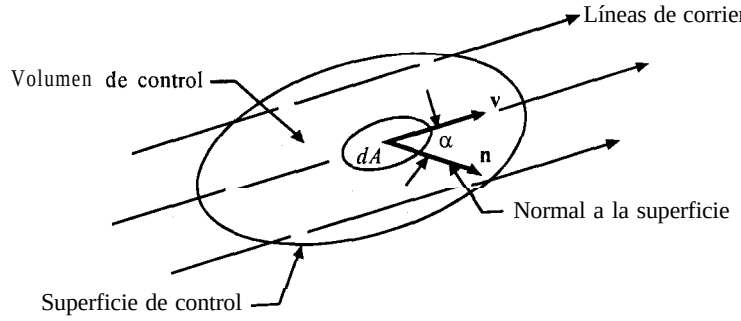


FIGURA 2.64. *Flujo a través de un Brea diferencial dA en una superficie de control.*

Por el álgebra vectorial se sabe que $(\rho v)(dA \cos a)$ es el producto escalar p $(v \cdot \mathbf{n})dA$. Integrando esta cantidad entre los límites de la totalidad de la superficie de control,4 se obtiene el flujo neto de masa a través de la superficie de control, o la efusión neta de masa en kg/s para la totalidad del volumen de control V.

$$\begin{pmatrix}\text{efusión neta de masa}\\ \text{desde el volumen de control}\end{pmatrix} = \iint_A v\rho \cos\alpha \, dA = \iint_A \rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})dA \tag{2.6-4}$$

Nótese que si hay entrada de masa al volumen de control, esto es, cuando existe flujo hacia adentro a través de la superficie de control, la efusión neta de masa en la ecuación (2.6-4) es negativa, pues $\alpha > 90$" y $\cos\alpha$ es negativo. Por lo tanto, hay un aporte neto de masa. Si $\alpha < 90°$, habrá una efusión neta de masa.

La velocidad de acumulación de masa dentro del volumen de control V puede expresarse como sigue:

$$\begin{pmatrix}\text{velocidad de acumulación de}\\ \text{masa en el volumen de control}\end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho \, dV = \frac{dM}{dt}\mathbf{v} \tag{2.6-5}$$

donde M es la masa de fluido en el volumen en kg. Sustituyendo las ecuaciones (2.6-4) y (2.6-5) en la (2.6-3) se obtiene la forma general del balance total de masa:

$$\iint_A \rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})dA + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho \, dV = 0 \tag{2.6-6}$$

El uso de la ecuación (2.6-6) puede ilustrarse para una situación común de un flujo unidimensional de estado estacionario, donde todo el flujo hacia adentro es normal a A_1 y el que sale es normal a A_2, tal como se muestra en la figura 2.6-3. Cuando la velocidad v_2 de salida (Fig. 2.6-3) es perpendicular a A_2, el ángulo α_2 entre la perpendicular a la superficie de control y la dirección de la velocidad es 0" y $\cos\alpha_2 = 1.0$. Donde v_1 se dirige hacia el interior, $\alpha_1 > \pi/2$, y para el caso en la figura 2.6-3, α_1 *es* 180" (cos al = -1.0). Como α_2 es 0" y al es 180°, usando la ecuación (2.6-4),

$$\iint_A v\rho \cos\alpha \, dA = \iint_{A_2} v\rho \cos\alpha_2 \, dA + \iint_{A_1} vp \;\; cosa, \;\; dA$$
$$= v_2 \rho_2 A_2 - v_1 \rho_1 A_1 \qquad \textbf{(2.6-7)}$$

Para estado estacionario, $dM/dt = 0$ en la ecuación (2.6-5) y la ecuación (2.6-6) se transforma en

$$m = \rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2 \qquad (2.6\text{-}2)$$

que es la ecuación (2.6-2), deducida con anterioridad.

En la figura 2.6-3 y en las ecuaciones (2.6-3) a la (2.6-7) no interesaba la composición de ninguna de las corrientes. Estas ecuaciones se pueden ampliar fácilmente para representar un balance de masa global para el componente i en un sistema de multicomponentes. Para el caso que se muestra en la figura 2.6-3 combinamos las ecuaciones (2.6-5), (2.6-6) y (2.6-7), agregamos un término de generación y obtenemos

$$m_{i2} - m_{i1} + \frac{dM_i}{dt} = R_i \qquad \textbf{(2.6-8)}$$

donde m_{i2} es la velocidad del flujo de masa del componente i que sale del volumen de control y R_i es la velocidad de generación del componente i en el volumen de control en kg por unidad de tiempo. (Aquí los flujos de difusión se desprecian o se suponen sin influencia). En algunos casos, desde luego, $R_i = 0$ cuando no hay generación. Muchas veces es más conveniente usar la ecuación (2.6-S) escrita en unidades molares.

EJEMPLO 2.6-2. Balance global de masa en un tanque agitado

Un tanque contiene inicialmente 500 kg de solución salina que tiene un 10% de sal. En el punto (1) en el volumen de control de la figura 2.6-5, entra una corriente con una velocidad de flujo constante de 10 kg/h que contiene 20% de sal. Una corriente sale por el punto (2) a una velocidad constante de 5 kg/h. El tanque se agita bien. Deduzca una ecuación que relacione la fracción de peso w_A de la sal en el tanque en cualquier momento t en horas.

Solución: Primero se hace un balance de masa total usando la ecuación (2.6-7) para la efusión de masa total neta a partir del volumen de control.

$$\iint_A v\rho \cos\alpha \, dA = m_2 - m_1 = 5 - 10 = -5 \text{ kg solución/h} \qquad (2.6\text{-}9)$$

De la ecuación (2.6-5), donde Mson los kilogramos totales de solución en el volumen de control en el tiempo t,

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \, dV = \frac{dM}{dt} \qquad \textbf{(2.6-5)}$$

Al sustituir las ecuaciones (2.6-5) y (2.6-9) en la (2.6-6), y luego integrar

$$-5 + \frac{dM}{dt} = 0 \qquad (2.6\text{-}10)$$

$$\int_{M=500}^{M} dM = 5 \int_{t=0}^{t} dt$$
$$M = 5t + 500 \qquad (2.6\text{-}11)$$

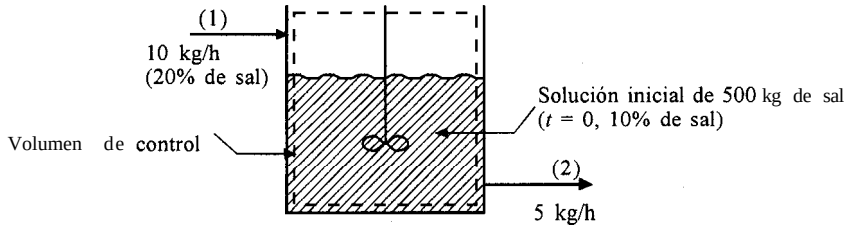


FIGURA 2.6-5. *Volumen de control para el flujo en un tanque agitado para el ejemplo 2.6-2*

La ecuación (2.6-l 1) relaciona la masa total Mque hay en el tanque en cualquier tiempo t. Ahora, haciendo un balance de sal del componente A, sea w_A = fracción de peso de sal en el tanque en el tiempo t y también la concentración en la corriente m_2 que sale en el tiempo t. Usando de nuevo la ecuación (2.6-7) pero para una balance de sal,

$$\int\int_A v\rho \cos\alpha\, dA = (5)w_A - 10\ (0.20) = 5w_A - 2 \text{kg sal/h} \tag{2.6-12}$$

Al usar la ecuación (2.6-5) para una balance de sal,

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho\, dV = \frac{d}{dt}(Mw_A) = \frac{M\, dw_A}{dt} + w_A\frac{dM}{dt} \text{kg sal/h} \tag{2.6-13}$$

Al sustituir las ecuaciones (2.6-12) y (2.6-13) en la (2.6-6),

$$5w_A - 2 + M\frac{dw_A}{dt} + w_A\frac{dM}{dt} = 0 \tag{2.6-14}$$

Al sustituir el valor de Mde la ecuación (2.6-l 1) en la (2.6-14), separando las variables, integrando y despejando w_A,

$$5w_A - 2 + (500 + 5t)\frac{dw_A}{dt} + w_A\frac{d(500 + 5t)}{dt} = 0$$

$$5w_A - 2 + (500 + 5t)\frac{dw_A}{dt} + 5w_A = 0$$

$$\int_{w_A = 0.10}^{w_A} \frac{dw_A}{2 - 10w_A} = \int_{t=0}^{t} \frac{dt}{500 + 5t}$$

$$-\frac{1}{10}\ln\left(\frac{2 - 10w_A}{1}\right) = \frac{1}{5}\ln\left(\frac{500 + 5t}{500}\right) \tag{2.6-15}$$

$$w_A = -0.1\left(\frac{100}{100 + t}\right)^2 + 0.20 \tag{2.6-16}$$

Nótese que la ecuación (2.6-8) para el componente i pudo haberse usado para el balance de sal con $R_i = 0$ (sin generación).

2.6D Velocidad promedio para uso en el balance global de masa

Al resolver el caso de la ecuación (2.6-7) supusimos una velocidad constante v_1 en la sección 1 y una v_2 constante en la sección 2. Si la velocidad no es constante, sino que varía en distintos puntos del área de superficie, se define una velocidad general o promedio mediante

$$v_{\text{prom}} = \frac{1}{A}\int\int_{A} v\, dA \qquad \textbf{(2.6-17)}$$

para una superficie sobre la cual v es perpendicular a A y la densidad ρ se supone constante.

EJEMPLO 2.6-3. ***Variación de la velocidad en diferentes puntos de la superficie de control y velocidad promedio***

Para el caso de un flujo incompresible (ρ es constante) a través de una tubería circular de radio R, el perfil de velocidad es parabólico para el flujo laminar, como sigue:

$$v = v_{\text{máx}}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \qquad \textbf{(2.6-18)}$$

donde $v_{\text{máx}}$ es la velocidad máxima en el centro donde $r = 0$, y v es la velocidad a una distancia radial r del centro. Deduzca una expresión para la velocidad general o promedio v_{prom} para usarla en la ecuación global de balance de masa.

Solución: La velocidad promedio está representada en la ecuación (2.6-17). En coordenadas cartesianas dA es $dx\, dy$. Sin embargo, usando coordenadas polares, que son más apropiadas para una tubería, $dA = r\, dr\, d\theta$, donde θ es el ángulo en coordenadas polares. Sustituyendo la ecuación (2.6-18), $dA = r\, dr\, d\theta$, y $A = \pi R^2$ en la ecuación (2.6-17) e integrando

$$v_{\text{prom}} = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{R} v_{\text{máx}}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right] r\, dr\, d\theta$$

$$= \frac{v_{\text{máx}}}{\pi R^4}\int_0^{2\pi}\int_0^{R}\left(R^2 - r^2\right) r\, dr\, d\theta$$

$$= \frac{v_{\text{máx}}}{\pi R^4}(2\pi - 0)\left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right) \qquad \textbf{(2.6-19)}$$

$$v_{\text{prom}} = \frac{v_{\text{máx}}}{2} \qquad \textit{(2.6-20)}$$

En este análisis se consideraron balances de masa totales o macroscópicos, pues se deseaba describirlos desde el exterior. En esta sección sobre balances globales de masa, algunas de las ecuaciones que se presentaron pueden parecer un tanto obvias, pero el propósito era desarrollar métodos que pudieran resultar útiles en las siguientes secciones.También se estudiarán balances generales de energía y de momento lineal. Estos balances generales no son indicativos de los detalles de lo que sucede en el interior. Sin embargo, en la sección 2.9 se tendrá un balance de momento lineal de recinto para obtener estos detalles y determinar la distribución de velocidades y la caída de presión. Para comprender mejor los detalles de los procesos que se verifican en el interior del sistema, se pueden escribir balances diferenciales en lugar de balances de recinto, tal y como se estudia en los temas de las secciones 3.6 a la 3.9 relativos a ecuaciones diferenciales de continuidad y transferencia

de momento lineal; en las secciones 5.6 y 5.7 sobre ecuaciones diferenciales de cambios de energía y flujo de capa límite, y en la sección 7.5B que estudia las ecuaciones diferenciales de continuidad para una mezcla binaria.

2.7 BALANCE GLOBAL DE ENERGÍA

2.7A Introducción

La segunda propiedad que debe considerarse en los balances globales del volumen de control es la energía. Se aplicará el principio de conservación de la energía a un volumen de control fijo en el espacio de manera similar al caso de conservación de la masa, para obtener los balances generales de masa. La ecuación de conservación de la energía se combinará con la primera ley de la termodinámica, a fin de obtener la ecuación global final de balance de energía.

La primera ley de la termodinámica puede escribirse como

$$\Delta E = Q - W \tag{2.7-1}$$

donde E es la energía total por unidad de masa de fluido, Q es el calor *absorbido* por unidad de masa de fluido, y W es el trabajo de cualquier clase realizado por unidad de masa de fluido *sobre* los alrededores. En estos cálculos, todos los términos de la ecuación deben expresarse en el mismo sistema de unidades, tales como J/kg (SI), btu/lb_m o pie · lb_f/lb_m (sistema inglés).

Puesto que la masa lleva consigo una energía que depende de su posición, movimiento o estado físico, todos estos tipos de energía aparecen en el balance de energía. Además, también puede transportarse energía a través del límite del sistema sin transferencia de masa.

2.7B Deducción de la ecuación de balance global de energía

El balance para una cantidad que se conserva, como en el caso de la energía, es similar a la ecuación (2.6-3) y se expresa como sigue para un volumen de control.

$$\text{velocidad de salida} - \text{velocidad de entrada} + \text{velocidad de acumulación} = 0 \tag{2.7-2}$$

La energía E presente en un sistema puede clasificarse en tres formas.

1. *Energia potencial* zg de una unidad de masa de fluido, que es la energía presente debido a la posición de la masa en un campo gravitacional g, donde z es la altura relativa en metros desde un plano de referencia. Las unidades de zg en el sistema SI son m · m/s^2. Multiplicando y dividiendo por kg masa, las unidades pueden expresarse como (kg · m/s^2) · (m/kg), o J/kg. En unidades del sistema inglés, la energía potencial es zg/g_c en pie . lb_f/lb_m.
2. *Energía cinética* $v^2/2$ de una unidad de masa de fluido, que es la energía presente debida al movimiento de traslación o rotación de la masa, donde v es la velocidad en m/s con respecto al límite del sistema en cierto punto. De nueva cuenta, en el sistema SI las unidades de $v^2/2$ son J/kg. En el sistema inglés, la energía cinética $v^2/2g_c$ se da en pie · lb_f/lb_m.
3. *Energía interna* U de una unidad de masa de un fluido, que es toda la demás energía presente, tal como de rotación o vibración de enlaces químicos.También las unidades son J/kg o pie · lb_f/lb_m.

Entonces, la energía total del fluido por unidad de masa es

$$E = U + \frac{v^2}{2} + zg \qquad \text{(SI)}$$

$$E = U + \frac{v^2}{2g_c} + \frac{zg}{g_c} \qquad \text{(Unidades del sistema inglés)} \tag{2.7-3}$$

La velocidad de acumulación de energía en el volumen de control V de la figura 2.6-4 es

$$\begin{pmatrix}\text{velocidad de acumulación de energía}\\ \text{en el volumen de control}\end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \left(U + \frac{v^2}{2} + zg\right)\rho\, dV \tag{2.7-4}$$

Después se considera la velocidad de entrada y salida de energía asociada con la masa en el volumen de control. La masa añadida o extraída del sistema lleva consigo energía interna, cinética y potencial. Además, cuando la masa fluye dentro y fuera del volumen de control, se transfiere energía. También se efectúa un trabajo neto cuando el fluido fluye por el volumen de control. Este trabaj o presión-volumen por unidad de masa de fluido es pV. Por lo regular se rechaza la contribución del trabajo cortante. Los términos pV y U se combinan usando la definición de entalpía, *H.*

$$H = U + pV \tag{2.7-5}$$

Por lo tanto, la energía total transportada con una unidad de masa es $(H + v^2/2 + zg)$.

Para un área pequeña dA en la superficie de control en la figura 2.6-4, la velocidad de efusión de energía es $(H + v^2/2 + zg)(\rho v)(dA \cos \alpha)$, donde $(dA \cos \alpha)$ es el área dA proyectada en dirección perpendicular al vector de velocidad v y α es el ángulo entre el vector de velocidad y el vector unitario perpendicular n, en dirección al exterior. Esta cantidad se integra entre los límites de la totalidad de la superficie de control y se obtiene

$$\begin{pmatrix}\text{efusión neta de energía}\\ \text{desde el volumen de control}\end{pmatrix} = \iint_A \left(H + \frac{v^2}{2} + zg\right)(\rho v)\cos\alpha\, dA \tag{2.7-6}$$

Ya se han considerado todas las energías asociadas con lamasaen el sistema y a través de los límites del balance, ecuación (2.7-2). A continuación se considera la energía calorífica y el trabajo que se transfieren por los límites y no están éstos asociados con la masa. El término q es el calor transferido al fluido a través de los límites por unidad de tiempo, debido al gradiente de temperatura. El calor absorbido por el sistema es positivo por definición.

El trabajo W, que es energía por unidad de tiempo, puede dividirse en W_s, que es trabajo mecánico puro y que se identifica con un eje giratorio que atraviesa la superficie de control, y el trabajo presión-volumen, que se ha incluido en el término de entalpía Hde la ecuación (2.7-6). Por definición, el trabajo realizado por el fluido sobre los alrededores, esto es, el que sale del sistema, es positivo.

Para obtener el balance general de energía se sustituyen las ecuaciones (2.7-4) y (2.7-6) en el balance (2.7-2) igualando la ecuación resultante con $q - W_s$.

$$\iint_A \left(H + \frac{v^2}{2} + zg\right)(\rho v)\, cosa\ \ dA + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \left(U + \frac{v^2}{2} + zg\right)\rho\, dV = W_S \tag{2.7-7}$$

2.7C Balance global de energía para un sistema de flujo en estado estacionario

Un caso especial bastante común del balance de energía global o macroscópico es el de un sistema en estado estacionario con flujo unidimensional a través de los límites, una sola entrada, una sola salida y una variación de altura z despreciable, siendo la densidad ρ y la entalpía H a través del área de entrada o de salida. Esto se muestra en la figura 2.7-l. Haciendo que el término de acumulación de la ecuación (2.7-7) sea igual a cero e integrando,

$$H_2 m_2 - H_1 m_1 + \frac{m_2 \left(v_2^3\right)_{\text{prom}}}{2v_{2\ \text{prom}}} - \frac{m_1 \left(v_1^3\right)_{\text{prom}}}{2v_{1\ \text{prom}}} + g m_2 z_2 - g m_1 z_1 = q - W_S \qquad (2.7\text{-}S)$$

Para el estado estacionario, $m_1 = \rho_1 v_{1\text{prom}} A_1 = m_2 = m$. Dividiendo todo entre m de tal manera que la ecuación quede en unidades de masa,

$$H_2 - H_1 + \frac{1}{2}\left[\frac{\left(v_2^3\right)_{\text{prom}}}{v_{2\ \text{prom}}} - \frac{\left(v_1^3\right)_{\text{prom}}}{v_{1\ \text{prom}}}\right] + g\left(z_2 - z_1\right) = Q - W_S \quad (\text{S I}) \qquad (2.7\text{-}9)$$

El término $(v^3)_{\text{prom}}/(2v_{\text{prom}})$ puede remplazarse por $v^2_{\text{prom}}/2\alpha$, donde α es el factor de corrección de velocidad de la energía cinética y es igual a $v^3_{\text{prom}}/(v^3)_{\text{prom}}$. El término α ha sido evaluado experimentalmente para diversos flujos y es $\frac{1}{2}$ para flujo laminar y casi 1.0 para flujo turbulento (véase la Sec. 2.7D). Por lo tanto, la ecuación (2.7-9) se transforma en

$$H_2 - H_1 + \frac{1}{2\alpha}\left(v^2_{2\,\text{prom}} - v^2_{1\,\text{prom}}\right) + g\left(z_2 - z_1\right) = Q - W_S \ (\text{SI})$$

$$H_2 - H_1 + \frac{1}{2\alpha g_c}\left(v^2_{2\,\text{prom}} - v^2_{1\,\text{prom}}\right) + \frac{g}{g_c}\left(z_2 - z_1\right) = Q - W_S \quad \text{(Unidades del sistema inglés)} \qquad \textbf{(2.7-10)}$$

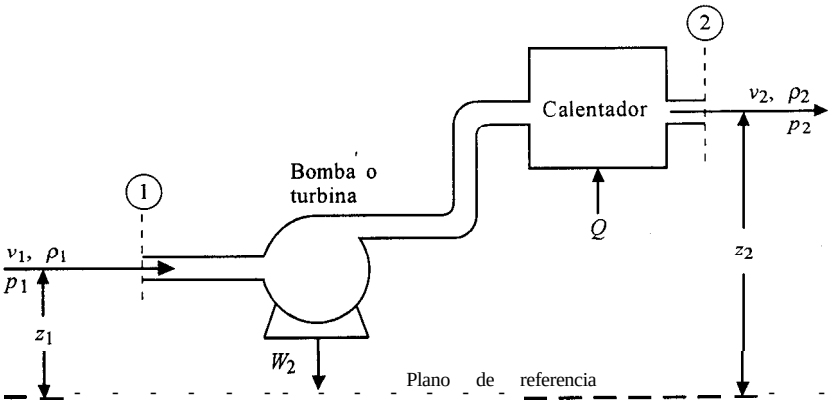


FIGURA 2.7-l. *Sistema de flujo en estado estacionario de un fluido.*

Algunos factores de conversión útiles que se incluyen en el apéndice A. 1 son:

$$1 \text{ btu} = 778.17 \text{ pie . lb}_f = 1055.06 \text{ J} = 1.05506 \text{ kJ}$$

$$1\ \text{hp} = 550\ \text{pie} \cdot \text{lb}_f/\text{s} = 0.7457\ \text{kW}$$
$$1\text{pie} \cdot \text{lb}_f/\text{lb}_m = 2.9890\ \text{J/kg}$$
$$1\ \text{J} = 1\ \text{N} \cdot \text{m} = 1\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$$

2.7D Factor de corrección para la velocidad en la energía cinética

1. Introducción. Al obtener la ecuación (2.7-S) fue necesario integrar el término de la energía cinética

$$\text{energía cinética} = \int\int_A \left(\frac{v^2}{2}\right)(\rho v)\cos\alpha\, dA \qquad \textbf{(2.7-l 1)}$$

que apareció en la ecuación (2.7-7). Para hacerlo primero se toma ρ como una constante y $\cos\alpha = 1$ .O, multiplicando el numerador y el denominador por $v_{\text{prom}} A$, donde v_{prom} es la velocidad general o promedio, y notando que $m = \rho v_{\text{prom}} A$, la ecuación (2.7-11) se convierte en

$$\frac{\rho}{2}\int\int_A \left(v^3\right) dA = \frac{\rho v_{\text{prom}} A}{2 v_{\text{prom}} A}\int\int_A \left(v^3\right) dA = \frac{m}{2 v_{\text{prom}}}\frac{1}{A}\int\int_A \left(v^3\right) dA \qquad \textbf{(2.7-12)}$$

Al dividir todo entre m de modo que la ecuación (2.7-12) se base en una unidad de **masa,**

$$\left(\frac{1}{2 v_{\text{prom}}}\right)\frac{1}{A}\int\int_A \left(v^3\right) dA = \frac{\left(v^3\right)_{\text{prom}}}{2 v_{\text{prom}}} = \frac{v^3_{\text{prom}}}{2\alpha} \qquad \textbf{(2.7-13)}$$

donde α se **define** como

$$\alpha = \frac{v^3_{\text{prom}}}{\left(v^3\right)_{\text{prom}}} \qquad \textbf{(2.7-14)}$$

Y $(v^3)_{\text{prom}}$ se **define** como sigue

$$\left(v^3\right)_{\text{prom}} = \frac{1}{A}\int\int_A \left(v^3\right) dA \qquad \textbf{(2.7-15)}$$

La velocidad local v varía en los diferentes puntos del área de la sección transversal de una tubería. Para **evaluar** $(v^3)_{\text{prom}}$ **y,** por tanto, el valor de α, debemos tener una ecuación de v en función de la posición en el área de corte transversal.

2. Flujo laminar. Para determinar el valor de α para el flujo laminar, primero combinamos las ecuaciones (2.6-18) y (2.6-20) para el flujo laminar a fm de obtener v en función de la posición r.

$$v = 2 v_{\text{prom}}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \qquad \textbf{(2.7-16)}$$

Al sustituir la ecuación (2.7-16) en la (2.7-15) considerando que $A = \pi R^2$ y $dA = r\, dr\, d\theta$ **(véase** el ejemplo **(2.6-3),** la ecuación (2.7-15) se convierte en

$$\left(v^3\right)_{\text{prom}} = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^{2\pi}\int_0^R \left[2 v_{\text{prom}}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\right]^3 r\, dr\, d\theta$$

$$= \frac{(2\pi)2^3 v_{prom}^3}{\pi R^2} \int_0^R \frac{\left(R^2 - r^2\right)^3}{R^6} r\, dr = \frac{16 v_{prom}^3}{R^8} \int_0^R \left(R^2 - r^2\right)^3 r\, dr \qquad \textbf{(2.7-17)}$$

Al integrar la ecuación (2.7-17) y reordenar

$$\left(v^3\right)_{prom} = \frac{16 v_{prom}^3}{R^8} \int_0^R \left(R^6 - 3r^2 R^4 + 3r^4 R^2 - r^6\right) r\, dr$$

$$= \frac{16 v_{prom}^3}{R^8} \left(\frac{R^8}{2} - \frac{3}{4} R^8 + \frac{1}{2} R^8 - \frac{1}{8} R^8 \right)$$

$$= 2 v_{prom}^3 \qquad \textbf{(2.7-18)}$$

Al sustituir la ecuación (2.7-18) en la (2.7-14),

$$\alpha = \frac{v_{prom}^3}{\left(v^3\right)_{prom}} = \frac{v_{prom}^3}{2 v_{prom}^3} = 0.50 \qquad \textbf{(2.7-19)}$$

Por tanto, para el flujo laminar el valor de α que se debe usar en el término de energía cinética de la ecuación (2.7-10) es 0.50.

3. Flujo turbulento. Para el flujo turbulento se necesita una relación entre v y la posición. Esto puede aproximarse mediante la siguiente expresión:

$$v = v_{max} \left(\frac{R - r}{R} \right)^{1/7} \qquad \textbf{(2.7-20)}$$

donde *r* es la distancia radial a partir del centro. Esta ecuación (2.7-20) se sustituye en la ecuación (2.7-15) y la resultante se integra para obtener el valor de $(v^3)_{prom}$. En seguida, se sustituye la ecuación (2.7-20) en la ecuación (2.6-17) y esta ecuación se 'integra para obtener v_{prom} y $(v_{prom})^3$. Combinando los resultados para $(v^3)_{prom}$ y $(v_{prom})^3$ en la ecuación (2.7-14), el valor α es 0.945 (véase la solución en el problema 2.7-l). El valor de α para el flujo turbulento varía entre 0.90 y 0.99. En la mayoría de los casos (excepto para un trabajo preciso) el valor de α se toma como 1.0.

2.7E Aplicaciones de la ecuación del balance total de energía

El balance total de energía en la forma expresada ecuación (2.7-10) no se suele emplear cuando ocurren cambios apreciables de entalpía o cuando la cantidad de calor sustraída (o agregada) es considerable, pues los términos de energía cinética y energía potencial son pequeños y pueden despreciarse. Como resultado, cuando se adicionan o se sustraen cantidades apreciables de calor o existen cambios de entalpía, por lo general se usan los métodos de balance de calor de la sección 1.7. Consideremos un ejemplo para ilustrar esto.

EJEMPLO 2.7-1. Balance de energía en una caldera de vapor

Auna caldera de vapor entra agua a 18.33 °C (65 "F) y 137.9 kPa (20 lb/pulg^2 abs) a través de una tubería a una velocidad promedio de 1.52 m /s. El vapor sale a 137.9 kPa a una altura de 15.2 m sobre la entrada de líquido, a 148.9 °C y 9.14 m/s en la línea de salida. ¿Cuánto calor debe añadirse en estado estable por kg masa de vapor? El flujo en las dos tuberías es turbulento.

Solución: En la figura 2.7-2 se muestra el diagrama de flujo del proceso. Reordenando la ecuación (2.7-10) y estableciendo $\alpha = 1$ para flujo turbulento y $W_S = 0$ (no hay trabajo externo),

$$Q = (z_2 - z_1)g + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + (H_2 - H_1) \tag{2.7-21}$$

Al despejar para los términos de energía cinética,

$$\frac{v_1^2}{2} = \frac{(1.52)^2}{2} = 1.115 \text{ J/kg}$$

$$\frac{v_2^2}{2} = \frac{(9.14)^2}{2} = 41.77 \text{ J/kg}$$

Al tomar la altura de referencia z_1 en el punto 1, $z_2 = 15.2$ m. Entonces,

$$z_2 g = (15.2)(9.80665) = 149.1 \text{ J/kg}$$

De la tabla de vapor del apéndice A.2 en unidades SI, H_1 a 18.33 °C = 76.97 kJ/kg, H_2 para vapor sobrecalentado a 148.9 °C = 2771.4 kJ/kg, y

$$H_2 - H_1 = 2771.4 - 76.97 = 2694.4 \text{ kJ/kg} = 2.694 \times 10^6 \text{ J/kg}$$

Al sustituir estos valores en la ecuación (2.7-21),

$$Q = (149.1 - 0) + (41.77 - 1.115) + 2.694 \times 10^6$$
$$Q = 189.75 + 2.694 \times 10^6 = 2.6942 \times 10^6 \text{ J/kg}$$

Por consiguiente, los términos de energía cinética y de energía potencial que totalizan 189.75 J/kg son despreciables en comparación con lavariación de entalpía de 2.694×10^6 J/kg. Este

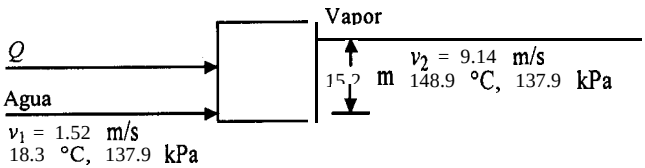


FIGURA 2.7-2 *Diagrama de flujo del proceso para el ejemplo 2.7-1*

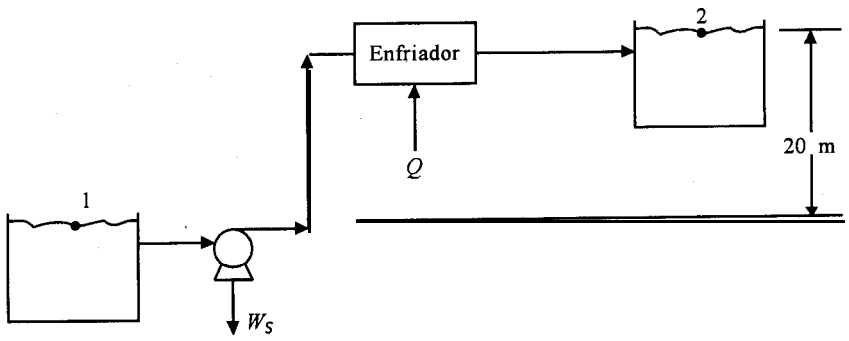


FIGURA 2.7-3. *Diagrama de flujo del proceso del balance de energía para el ejemplo 2.7-2.*

valor de 189.75 J/kg elevaría la temperatura del agua líquida en 0.0453 °C, cantidad que es despreciable.

EJEMPLO 2.7-2. Balance de energía en un sistema de flujo con bomba

En un gran tanque aislado, a presión atmosférica, se está almacenando agua a 85 .O °C, como se muestra en la figura 2.7-3. El agua se está bombeando en estado estacionario desde este tanque en el punto 1 mediante una bomba con una velocidad de 0.567 m^3/min. El motor que impulsa la bomba proporciona energía a una tasa de 7.45 kW. El agua pasa por un intercambiador de calor, donde cede 1408 kW de calor. El agua enfriada se conduce después aun gran tanque abierto en el punto 2, que está 20 m por encima del primer tanque. Calcule la temperatura final del agua que pasa al segundo tanque. Desprecie cualquier cambio de energía cinética, ya que las velocidades inicial y final en los tanques son esencialmente cero.

Solución: En el apéndice A.2, tablas de vapor, se ve que H_1 (85 "C) = 355.90 × 10^3 J/kg, ρ_1 = 1 / 0. 0010325 = 968.5 kg/m^3. Entonces, para el estado estacionario,

$$m_1 = m_2 = (0.567)(968.5)(\tfrac{1}{60}) = 9.152 \text{ kg/s}$$

Además, z_1 = 0 y z_2 = 20 m. El trabajo realizado por el fluido es W_S, pero en este caso, el trabajo se realiza sobre el fluido y W_S es negativo.

$$W_S = -(7.45 \times 10^3 \text{ J/s})(1/9.152 \text{ kg/s}) = -0.8140 \times 10^3 \text{ J/kg}$$

El calor añadido al fluido también es negativo, ya que el fluido cede calor y es

$$Q = -(1408 \times 10^3 \text{ J/s})(1/9.152 \text{ kg/s}) = -153.8 \times 10^3 \text{ J/kg}$$

Si se establece que $(v_1^2 - v_2^2)/2 = 0$ y se sustituye en la ecuación (2.7-10),

$$H_2 - 355.90 \times 10^3 + 0 + 9.80665\,(20 - 0) = (-153.8 \times 10^3) - (-0.814 \times 10^3)$$

Al resolver H_2 = 202.71 × 10^3 J/kg. En las tablas de vapor, esto corresponde a t_2= 48.41 "C. Nótese que en este ejemplo W_S y g $(z_2 - z_1)$ son muy pequeños comparados con Q.

EJEMPLO 2.7-3. Balance de energía en un calorímetro de flujo

Se esta usando un calorímetro de flujo para medir la entalpía de vapor. El calorímetro, que es una tubería horizontal aislada, consiste en un calentador eléctrico inmerso en un fluido que fluye en estado estacionario. En el punto 1 del calorímetro entra agua líquida a 0 °C a unavelocidad de 0.3964 kg/min. El líquido se vaporiza por completo por el calentador, donde se agregan 19.63 kW, y el vapor sale por el punto 2 a 250 °C y 150 kPa absolutos. Calcule la entalpía de salida H_2 del vapor si la entalpía del líquido a 0 °C se establece arbitrariamente como 0. Los cambios de energía cinética son pequeños y pueden despreciarse. (Puede suponerse que la presión tiene un efecto despreciable sobre la entalpía del líquido).

Solución: En este caso, W_S= 0 porque no hay trabajo de eje entre los puntos 1 y 2. Además, $(v_2^2/2\alpha - v_1^2/2\alpha)$ = 0 y g $(z_2 - z_1)$ = 0. Para el estado estacionario, $m_1 = m_2$ = 0.3964/60 = *6.607* × 10^{-3} kg/s. Puesto que el calor se agrega al sistema,

$$Q = \frac{19.63 \text{ kJ/s}}{6607 \times 10^{-3} \text{ kg/s}} = 2971 \text{ kJ/kg}$$

El valor de $H_1 = 0$. La ecuación (2.7-10) se convierte en

$$H_2 - H_1 + 0 + 0 = Q - 0$$

La ecuación final para el calorímetro es

$$H_2 = Q + H_1 \qquad (2.7\text{-}22)$$

Al sustituir Q = 2971 kJ/kg y $H_1 = 0$ en la ecuación (2.7-22), H_2 = 2971 kJ/kg a 250 °C y 150 kPa, que se acerca al valor de la tabla de vapor de 2972.7 kJ/kg.

2.7F Balance general de energía mecánica

Un tipo de balance de energía más útil para el flujo de fluidos, en especial de los líquidos, es una modificación del balance total de energía que considera la energía mecánica. Casi siempre, a los ingenieros les interesa primordialmente este tipo especial de energía, llamado *energía mecánica,* que incluye el término de trabajo a la energía cinética, a la energía potencial y la parte de trabajo de flujo del término de entalpía. La energía mecánica es una forma de energía que es, o bien un trabajo, o una forma que puede transformarse directamente en trabajo. Los otros términos de la ecuación de balance de energía (2.7-10), los términos de calor y la energía interna, no permiten una con-versión simple a trabajo debido a la segunda ley de la termodinámica y a la eficiencia de la conversión, que depende de las temperaturas. Los términos de energía mecánica no tienen esta limitación y pueden convertirse casi en su totalidad en trabajo. La energía que se convierte en calor, o energía interna, es trabajo perdido o una pérdida de energía mecánica causada por la resistencia fricciona1 al flujo.

Es conveniente escribir un balance de energía en términos de esta pérdida, $\sum F$, que es la suma de todas las pérdidas por fricción por unidad de masa. Para el caso de flujo de estado estacionario, cuando una unidad de masa pasa de la entrada a la salida, el trabajo realizado por el flujo W', se expresa como

$$W' = \int_{v_1}^{v_2} p\, dV - \sum F \qquad \left(\sum F > 0\right) \qquad (2.7\text{-}23)$$

Este trabajo W' difiere de W de la ecuación (2.7-1), que también incluye los efectos de energía cinética y de energía potencial. Escribiendo la primera ley de la termodinámica para este caso, donde ΔE se transforma en ΔU,

$$\Delta U = Q - W' \qquad (2.7\text{-}24)$$

La ecuación que define la entalpía, ecuación (2.7-5) puede escribirse como

$$\Delta H = \Delta U + \Delta pV = \Delta U + \int_{v_1}^{v_2} p\, dV + \int_{p_1}^{p_2} V\, dp \qquad (2.7\text{-}25)$$

Al sustituir la ecuación (2.7-23) en la (2.7-24) y combinar el resultado con la ecuación (2.7-25) se obtiene

$$\Delta H = Q + \sum F + \int_{p_1}^{p_2} V\, dp \qquad (2.7\text{-}26)$$

Por último, se sustituye la ecuación (2.7-26) en la (2.7-10) y $1/\rho$ para V, para obtener la ecuación de balance general de energía mecánica

$$\frac{1}{2\alpha}\left[v_{2\ \text{prom}}^2 - v_{1\ \text{prom}}^2\right] + g(z_2 - z_1) + \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho} + \sum F + W_S = 0 \qquad (2.7\text{-}27)$$

Para unidades del sistema inglés, los términos de energía cinética y de energía potencial de la ecuación (2.7-27) se dividen entre g_c.

El valor de la integral en la ecuación (2.7-27) depende de la ecuación de estado del fluido y de la trayectoria del proceso. Si el fluido es un líquido incompresible, la integral se transforma en $(p_2 - p_1)/\rho$ y la ecuación (2.7-27) toma la forma

$$\frac{1}{2\alpha}\left(v_{2\ \text{prom}}^2 - v_{1\ \text{prom}}^2\right) + g(z_2 - z_1) + \frac{p_2 - p_1}{\rho} + \sum F + W_S = 0 \qquad (2.7\text{-}28)$$

EJEMPLO 2.7-4. Balance de energía mecánica en un sistema de bombeo

A través de una tubería de diámetro uniforme fluye agua con densidad de 998 kg/m^3 y auna velocidad de flujo de masa en estado estacionario. La presión de entrada del fluido es 68.9 kN/m^2 abs en la tubería conectada a una bomba que suministra 155.4 J/kg del fluido de la tubería. (La tubería de salida de la bomba es del mismo diámetro que la entrada.) La sección de salida de la tubería está 3.05 más arriba que la entrada y la presión de salida es 137.8 kN/m^2 abs. El número de Reynolds de la tubería es superiora 4000 para el sistema. Calcule la pérdida por fricción $\sum F$ en el sistema de tuberías.

Solución: Primero se dibuja un diagrama de flujo del sistema (Fig. 2.7-4), con una adición de energía mecánica al fluido de 155.4 J/kg. Por lo tanto, W_S = -155.4, pues el trabajo efectuado por el fluido es positivo.

Estableciendo la altura de referencia, z_1 = 0, z_2 = 3.05. Como la tubería es de diámetro constante, $v_1 = v_2$. Además, para un flujo turbulento, α = 1.0 y

$$\frac{1}{2(1)}\left(v_2^2 - v_1^2\right) = 0$$

$$z_2 g = (3.05\ \text{m})(9.806\ \text{m/s}^2) = 29.9\ \text{J/kg}$$

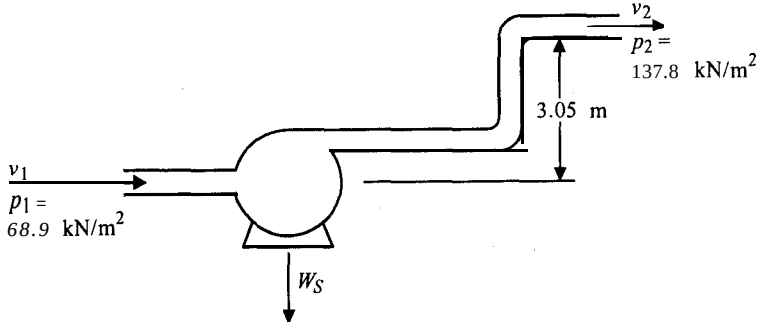


FIGURA *2.7-4 Diagrama de flujo del proceso del ejemplo 2.7-4.*

Puesto que se considera que el líquido es incompresible, se aplica la ecuación (2.7-28)

$$\frac{p_1}{\rho} = \frac{68.9 \times 1000}{998} = 69.0 \text{ J/kg}$$

$$\frac{p_2}{\rho} = \frac{137.8 \times 1000}{998} = 138.0 \text{ J/kg}$$

Al usar la ecuación (2.7-28) y despejar $\sum F$, las pérdidas por fricción:

$$\sum F = -W_S + \frac{1}{2\alpha}\left(v_1^2 - v_2^2\right) + g\left(z_1 - z_2\right) + \frac{p_1 - p_2}{\rho} \qquad \textbf{(2.7-29)}$$

Sustituyendo los valores conocidos y calculando las pérdidas por fricción:

$$\sum F = -(-155.4) + 0 - 29.9 + 69.0 - 138.0$$
$$= 56.5 \text{ J/kg } (18.9 \text{ pie . lb}_f/\text{lb}_m)$$

EJEMPLO 2.7-5. Potencia de un motor para un sistema de flujo

Una bomba que opera con un régimen de 69.1 gal/min extrae una solución líquida con densidad 114.8 lb_m /pie^3 de un tanque de almacenamiento que tiene una sección transversal considerable, por medio de una tubería de succión de 3.068 pulg de DI. La bomba descarga a través de una linea de 2.067 pulg de DI a un tanque elevado abierto. El extremo final de la línea de descarga está a 50 pies por encima del nivel del líquido en el tanque de alimentación. Las pérdidas por fricción en el sistema de tuberías son $\sum F$= 10.0 Ib-pie fuerza/lb masa. ¿Qué presión debe desarrollar la bomba y cuál deberá ser su potencia con una eficiencia del 65% ($\eta = 0.65$)? El flujo es turbulento.

Solución: Primero se traza un diagrama de flujo del proceso (Fig. 2.7-5). Se usará la ecuación (2.7-28). El término W_S en la ecuación (2.7-28) se convierte en

$$W_S = -\eta W_p \qquad (2.7\text{-}30)$$

donde $-W_S$= energía mecánica que la bomba suministra al fluido, esto es, trabajo mecánico neto, η = eficiencia fraccionaria y W_p = energía o trabajo axial suministrado a la bomba.

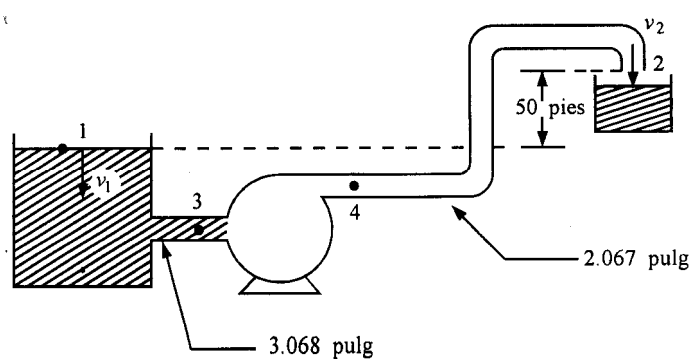


FIGURA 2.7-5. *Diagrama de flujo del proceso para el ejemplo 2.7-5.*

Con los datos del apéndice A.5 se sabe que el área de sección transversal de la tubería de 3.068 pulg mide 0.05134 pie2 y la correspondiente a la de 2.067 pulg, 0.0233 pie^2. La velocidad de flujo es

$$\text{velocidad de flujo} = (69.1 \frac{\text{gal}}{\text{min}})(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}})(\frac{1 \text{ pie}^3}{7.841 \text{ gal}}) = 0.1539 \text{ pie}^3/\text{s}$$

$$v_2 = \left(0.1539 \frac{\text{pie}^3}{\text{s}}\right)\left(\frac{1}{0.0233 \text{ pie}^2}\right) = 6.61 \text{ pies/s}$$

Puesto que el tanque es muy grande, $v_1 = 0$. Por lo tanto, $v_1^2/2g_c = 0$. La presión $p_1 = 1$ atm y $p_2 = 1$ atm. Además, $\alpha = 1$ .O ya que el flujo es turbulento. Por consiguiente:

$$\frac{p_1}{P} - \frac{p_2}{P} = 0$$

$$\frac{v_2^2}{2g_c} = \frac{(6.61)^2}{2(32.174)} = 0.678 \quad \frac{\text{pie} \cdot \text{lb}_f}{\text{lb}_m}$$

Al usar el dato de referencia de $z_1 = 0$ se obtiene,

$$z_2 \frac{g}{g_c} = (50.0)\frac{32.174}{32.174} = 50.0 \frac{\text{pie} \cdot \text{lb}_f}{\text{lb}_m}$$

Al aplicar la ecuación (2.4-28), despejando W_S y sustituyendo los valores conocidos:

$$W_S = z_1 \frac{g}{g_c} - z_2 \frac{g}{g_c} + \frac{v_1^2}{2g_c} - \frac{v_2^2}{2g_c} + \frac{p_1 - p_2}{\rho} - \sum F$$

$$= 0 - 50.0 + 0 - 0.678 + 0 \quad 10 = -60.678 \frac{\text{pie} \cdot \text{lb}_f}{\text{lb}_m}$$

Al usar la ecuación (2.7-30) y despejando W_p

$$W_p = \frac{W_S}{\eta} = \frac{60.678 \quad \text{pie} \cdot \quad \text{lb}_f}{0.65 \quad \text{lb}_m} = 93.3 \frac{\text{pie} \cdot \text{lb}_f}{\text{lb}_m}$$

$$\text{velocidad de flujo de masa} = \left(0.1539 \frac{\text{pie}^3}{\text{s}}\right)\left(114.8 \frac{\text{lb}_m}{\text{pie}^3}\right) = 17.65 \frac{\text{lb}_m}{\text{s}}$$

$$\text{potencia de la bomba} = \left(17.65 \frac{\text{lb}_m}{\text{s}}\right)\left(93.3 \frac{\text{pie} \cdot \text{lb}_f}{\text{lb}_m}\right)\left(\frac{1 \text{ hp}}{550 \text{ pie} \cdot \text{lb}_f/\text{s}}\right)$$

$$= 3.00 \text{ hp}$$

Para calcular la presión a la que debe operar la bomba, la ecuación (2.7-28) se adapta con respecto a la propia bomba entre los puntos 3 y 4 como lo muestra el diagrama,

$$v_3 = \left(0.1539 \frac{\text{pie}^3}{\text{s}}\right)\left(\frac{1}{0.05134 \text{ pie}^2}\right) = 3.00 \text{ pies/s}$$

$$v_4 = v_2 = 6.61 \text{ pies/s}$$

Puesto que la diferencia de nivel entre z_3 y z_4 de la propia bomba es despreciable, puede rechazarse. Reescribiendo la ecuación (2.7-28) entre los puntos 3 y 4 y sustituyendo los valores conocidos ($\sum F = 0$ puesto que se trata del sistema de bombeo),

$$\frac{p_4 - p_3}{\rho} = z_3 \frac{g}{g_c} - z_4 \frac{g}{g_c} + \frac{v_3^2}{2g_c} - \frac{v_4^2}{2g_c} - W_s - \sum F \qquad \textbf{(2.7-31)}$$

$$= 0 - 0 + \frac{(3.00)^2}{2(32.174)} - \frac{(6.61)^2}{2(32.174)} + 60.678 - 0$$

$$= 0 - 0 + 0.140 - 0.678 + 60.678 = 60.14 \ \frac{\text{pie lb}_f}{\text{lb}_m}$$

$$p_4 - p_3 = \left(60.14 \frac{\text{pie} \cdot \text{lb}_f}{\text{lb}_m}\right)\left(114.8 \frac{\text{lb}_m}{\text{pie}^3}\right)\left(\frac{1}{144 \text{ pulg}^2/\text{pie}^2}\right)$$

= 48.0 lb fuerza/pulg^2 (presión en lb/pulg^2 abs desarrollada por la bomba) (331 k Pa)

2.76 Ecuación de Bernoulli para el balance de energía mecánica

En el caso especial en que no se añade energía mecánica ($W_S = 0$) y no hay fricción ($\sum F = 0$), la ecuación (2.7-28) se convierte en la ecuación de Bernoulli, ecuación (2.7-32), para flujo turbulento, cuya importancia requiere explicaciones adicionales,

$$z_1 g + \frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} = z_2 g + \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} \qquad (2.7\text{-}32)$$

Esta ecuación cubre muchas situaciones de importancia práctica y se usa con frecuencia junto con la ecuación de balance de masa (2.6-2) para estado estacionario.

$$m = \rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2 \qquad \textbf{(2.6-2)}$$

Se considerarán varios ejemplos de su uso.

EJEMPLO 2.7-6. Velocidad de flujo a partir de mediciones de presión

Un líquido con densidad constante de ρ kg/m^3 fluye a velocidad desconocida v_1 m/s a través de una tubería horizontal cuya área de corte transversal es A_1 m^2 y a presión p_1 N/m^2, para después pasar a una sección de la tubería en la que el área se reduce gradualmente a A_2 m^2 y la presión es p_2. Suponiendo que no hay pérdidas por fricción, calcule las velocidades v_1 y v_2 con base en la medición de la diferencia de presión $(p_1 - p_2)$.

Solución: En la figura 2.7-6 se muestra el diagrama de flujo con tomas de presión para medir las presiones p_1 y p_2. Con base en la ecuación de continuidad de balance de masa (2.6-2) para una ρ constante, donde $\rho_1 = \rho_2 = p$.

$$v_2 = \frac{v_1 A_1}{A_2} \qquad (2.7\text{-}33)$$

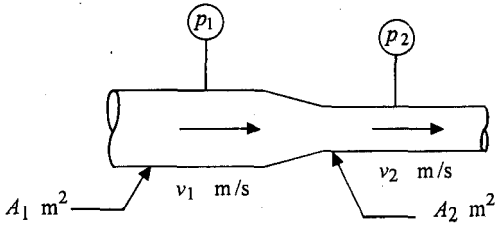


FIGURA 2.7-6. *Diagrama de flujo del proceso para el ejemplo 2.7-6*

Para el caso de la ecuación de Bernoulli (2.7-32) y una tubería horizontal,

$$z_1 = z_2 = 0$$

Entonces, la ecuación (2.7-32) se transforma, al sustituir v_2 por la ecuación (2.7-33),

$$0 + \frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} = 0 + \frac{v_1^2 A_2^2 / A_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} \qquad (2.7\text{-}34)$$

Al reordenar,

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho v_1^2 \left[(A_1/A_2)^2 - 1 \right]}{2} \qquad (2.7\text{-}35)$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{p_1 - p_2}{\rho} \frac{2}{\left[(A_1/A_2)^2 - 1 \right]}} \qquad \text{(SI)} \qquad (2.7\text{-}36)$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{p_1 - p_2}{\rho} \frac{2g_c}{\left[(A_1/A_2)^2 - 1 \right]}} \qquad \text{(Unidades del sistema inglés)}$$

Según la misma deducción pero en términos de v_2,

$$v_2 = \sqrt{\frac{p_1 - p_2}{\rho} \frac{2}{1 - (A_2/A_1)^2}} \qquad (2.7\text{-}37)$$

EJEMPLO 2.7-7. Velocidad de flujo en la tobera de un tanque

Una tobera de sección transversal $A2$ descarga a la atmósfera y está localizada en el costado de un tanque grande en el que la superficie expuesta del líquido está Hm por arriba de la línea central de la tobera. Calcule la velocidad v_2 en la tobera y la tasa volumétrica de descarga, suponiendo que no hay pérdidas por fricción.

Solución: En la figura 2.7-7 se muestra el flujo del proceso, con el punto 1 situado en el líquido a la entrada de la tobera y el punto 2 a la salida de la misma.

Puesto que A_1 es muy grande comparada con A_2, $v_1 \cong 0$. La presión p_1 es superior a 1 atm (101.3 kN/m^2) y la diferencia es la carga de fluido de H m. La presión p_2 a la salida de la tobera es de 1 atm. Usando el punto 2 como referencia, $z_2 = 0$ y $z_1 = 0$ m; reordenando la ecuación (2.7-32),

$$z_1 g + \frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1 - p_2}{\rho} = z_2 g + \frac{v_2^2}{2} \qquad (2.7\text{-}38)$$

Al sustituir los valores conocidos,

$$0 + 0 + \frac{p_1 - p_2}{\rho} = 0 + \frac{v_2^2}{2} \qquad (2.7\text{-}39)$$

Al despejar v_2,

$$v_2 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}} \quad \text{m/s} \qquad (2.7\text{-}40)$$

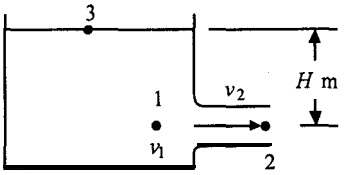


FIGURA *2.7-7. Diagrama de flujo de la tobera en el ejemplo 2.7-7.*

Puesto que $p_1 - p_3 = Hpg$ y $p_3 = p_2$ (ambas a 1 atm),

$$H = \frac{p_1 - p_2}{\rho g} \quad \text{m} \qquad (2.7\text{-}41)$$

donde H es la carga de líquido con densidad ρ. Entonces, la ecuación (2.4-40) se transforma en

$$v_2 = \sqrt{2gH} \qquad (2.7\text{-}42)$$

La velocidad de flujo volumétrico es

$$\text{velocidad de flujo} = v_2 A_2 \quad \text{m}^3/\text{s} \qquad (2.7\text{-}43)$$

Para ilustrar el hecho de que pueden usarse diferentes puntos en el balance, utilizaremos ahora los puntos 3 y 2. Escribiendo la ecuación (2.7-32),

$$z_2 g + \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2 - p_3}{\rho} = z_3 g + \frac{v_3^2}{2} \qquad (2.7\text{-}44)$$

Puesto que $p_2 = p_3 = 1$ atm, $v_3 = 0$ y $z_2 = 0$,

$$v_2 = \sqrt{2gz_3} = \sqrt{2gH} \qquad (2.7\text{-}45)$$

2.8 BALANCE GENERAL DE MOMENTO LINEAL

2.8A Derivación de la ecuación general

Se puede escribir un balance de momento lineal para el volumen de control que se muestra en la figura 2.6-3, que es similar a la ecuación general de balance de masa. El momento lineal, en contraste con la masa y la energía, es una cantidad vectorial. El vector lineal total de momento lineal **P** de la masa total M de un fluido en movimiento con una velocidad v es

$$\mathbf{P} = M\mathbf{v} \qquad (2.8\text{-}1)$$

El término $M\mathbf{v}$ es el momento lineal de esta masa, Men movimiento, incluida en un instante dado dentro del volumen de control de la figura 2.6-4. Las unidades de Mv son kg · m/s en el sistema SI.

A partir de la segunda ley de Newton, deduciremos la ecuación integral del balance de momento para un momento lineal. El momento angular no se va a considerar en esta parte, y la ***ley de Newton*** puede expresarse como: la velocidad de cambio de momento lineal de un sistema es igual a la suma de todas las fuerzas que actúan sobre dicho sistema y tiene lugar en la dirección de la fuerza neta resultante:

$$\Sigma\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} \qquad (2.8\text{-}2)$$

donde **F** es la fuerza. En el sistema SI, **F se** mide en newtons (N) y 1 N = 1 kg · m/s^2. Nótese que en el sistema SI, g_c no es necesario, aunque sí lo es en el sistema inglés.

La ecuación para la conservación de momento lineal con respecto a un volumen de control puede escribirse como:

$$\begin{pmatrix}\text{suma de fuerzas actuando}\\ \text{sobre el volumen de control}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{velocidad del momento lineal a la}\\ \text{salida del volumen de control}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{velocidad del momento lineal a la}\\ \text{entrada del volumen de control}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{velocidad de acumulación de}\\ \text{momento lineal en el volumen de control}\end{pmatrix} \qquad (2.8\text{-}3)$$

Ésta es la misma forma de la ecuación general de balance de masa (2.6-3) con la suma de las fuerzas como término de rapidez de generación. Por lo tanto, el momento lineal no se conserva ya que es generado por fuerzas externas al sistema. Si no existen fuerzas externas, sí hay conservación del momento lineal.

Al usar el volumen de control general de la figura 2.6-4, se pueden evaluar los diversos términos de la ecuación (2.8-3) usando métodos muy similares al desarrollo del balance general de masa. Para un elemento pequeño de área dA en la superficie de control:

$$\text{velocidad de efusión de momento lineal} = \mathbf{v}(\rho v)(dA\cos\alpha) \qquad (2.8\text{-}4)$$

Nótese que la velocidad de efusión de masa es $(\rho v)(dA \cos a)$. Obsérvese además que $(dA\cos\alpha)$ es el área dA proyectada en dirección perpendicular al vector de velocidad v y que α es el ángulo

entre dicho vector de velocidad y el vector perpendicular n en dirección al exterior. Con base en el álgebra vectorial, el producto de la ecuación (2.8-4) se convierte en

$$\mathbf{v}(\rho v)(dA\cos\alpha) = \rho\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})dA \tag{2.8-5}$$

Al integrar entre los límites de la totalidad de la superficie de control A,

$$\begin{pmatrix}\text{efusión neta de momento lineal}\\ \text{desde el volumen de control}\end{pmatrix} = \int\int_A \mathbf{v}(\rho v)\cos\alpha\, dA = \int\int_A \rho\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\, dA \tag{2.8-6}$$

La efusión neta representa los primeros dos términos del lado derecho de la ecuación (2.8-3).

En forma análoga a la ecuación (2.6-5), lavelocidad de acumulación del momento lineal dentro del volumen de control V es

$$\begin{pmatrix}\text{velocidad de acumulación de momento lineal}\\ \text{en el volumen de control}\end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho\mathbf{v}\, dV \tag{2.8-7}$$

Al sustituir las ecuaciones (2.8-2), (2.8-6) y (2.8-7) en la (2.8-3), el balance global de momento lineal para un volumen de control resulta ser

$$\Sigma\mathbf{F} = \int\int_A \rho\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})dA + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho\mathbf{v}\, dV \tag{2.843}$$

Adviértase que, en general, $\Sigma\mathbf{F}$ puede tener un componente en cualquier dirección y F es la fuerza que los alrededores desarrollan sobre el fluido del volumen de control. Puesto que la ecuación (2.8-8) es una ecuación vectorial, podemos escribir las ecuaciones escalares componentes para las direcciones x, **y y** z.

$$\int\int_A v_x\rho v\cos\alpha\, dA + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho v_x\, dV \qquad \text{(SI)} \tag{2.8-9}$$

$$\Sigma F_x = \int\int_A v_x\frac{\rho}{g_c}v\cos\alpha\, dA + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \frac{\rho}{g_c}v_x\, dV \quad \text{(Unidades del sistema inglés)}$$

$$\Sigma F_y = \int\int_A v_y\rho v\cos\alpha\, dA + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho v_y\, dV \tag{2.8-10}$$

$$\Sigma F_z = \int\int_A v_z\rho v\cos\alpha\, dA + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho v_z\, dV \tag{2.8-l 1}$$

El término de fuerza ΣF_x en la ecuación (2.8-9) está constituido por la suma de varias fuerzas. Éstas se determinan como se indica a continuación:

1. ***Fuerza del cuerpo.*** La fuerza del cuerpo F_{xg}, que es la fuerza en la dirección x causada por la acción de la gravedad sobre la masa total M del volumen de control. Esta fuerza F_{xg}, ***es Mg,.*** Cuando la dirección x es horizontal, esa fuerza equivale a cero.
2. ***Fuerza de la presión.*** La fuerza F_{xp} es la fuerza en dirección x causada por las presiones que actúan sobre la superficie del sistema fluido. Cuando la superficie de control pasa a través del fluido, se considera que la presión se dirige hacia adentro y perpendicularmente a la superficie.

En algunos casos, parte de la superficie de control puede ser un sólido, y esta pared se incluye entonces dentro de la superficie de control. También existe una contribución a F_{xp} de la presión en el exterior de esa pared, que es comúnmente la presión atmosférica. Si se emplea presión manométrica, la integral de la presión externa que es constante entre los límites de la totalidad de la superficie, puede despreciarse de manera automática.

3. *Fuerza de fricción.* Durante el flujo del fluido está presente una fuerza de fricción o cortante F_{xs} en la dirección x, que desarrolla sobre el fluido una pared sólida cuando la superficie de control atraviesa el sistema entre el fluido y la pared sólida. En algunos casos, esta fuerza de fricción puede ser despreciable en comparación con las demás y no se toma en cuenta.
4. *Fuerza de la superficie sólida.* En los casos en que la superficie de control pasa por un sólido, esta presente una fuerza R_x, que es el componente x de la resultante de las fuerzas que están actuando sobre el volumen de control en dichos puntos. Esto se presenta en casos típicos donde el volumen de control incluye una sección de una tubería, así como el fluido que transporta. Ésta es la fuerza ejercida por la superficie sólida sobre el fluido.

Los términos de fuerza de la ecuación (2.8-9) pueden representarse como

$$\Sigma F_x = F_{xg} + F_{xp} + F_{xs} + R_x \tag{2.8-12}$$

Pueden escribirse ecuaciones similares para las direcciones y y z. Entonces, la ecuación (2.8-9) se convierte, para la dirección x, en

$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= F_{xg} + F_{xp} + F_{xs} + R_x \\ &= \int\int_A v_x \rho v \cos\alpha \, dA + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho v_x \, dV\end{aligned} \tag{2.8-13}$$

2.8B Balance global de momento lineal en un sistema de flujo en una dirección

Un aplicación bastante común de la ecuación para el balance general de momento lineal es el caso de la sección de un ducto con su eje en la dirección x. Se supone que el fluido fluye en estado estacionario dentro del volumen de control que se muestra en las figuras 2.6-3 y 2.8-l. Puesto que $v = v_x$, la dirección x de la ecuación (2.8-13) se transforma en

$$\Sigma F_x = F_{xg} + F_{xp} + F_{xs} + R_x = \int\int_A v_x \rho v_x \cos\alpha \, dA \tag{2.8-14}$$

Al integrar entre $\cos\alpha = \pm 1.0$ y $\rho A = \mathrm{m}/v_{\mathrm{prom}}$,

$$F_{xg} + F_{xp} + F_{xs} + R_x = m\frac{\left(v_{x2}^2\right)_{\mathrm{prom}}}{v_{x2\ \mathrm{prom}}} - m\frac{\left(v_{x1}^2\right)_{\mathrm{prom}}}{v_{x1\ \mathrm{prom}}} \tag{2.8-15}$$

donde, si la velocidad no es constante y varía a lo largo del área superficial,

$$\left(v_x^2\right)_{\mathrm{prom}} = \frac{1}{A}\int\int_A v_x^2 \, dA \tag{2.8-16}$$

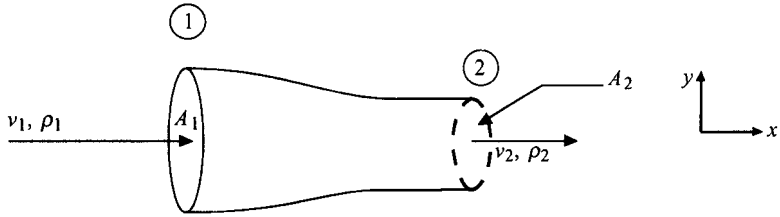


FIGURA 2.8-1. *Flujo a través de* una *tobera horizontal en dirección x solamente.*

La relación $\left(v_x^2\right)_{\text{prom}} / v_{x\text{prom}}$ se reemplaza por $v_{x\text{prom}}/\beta$, donde β, que es el factor de corrección de velocidad de momento lineal, tiene un valor entre 0.95 y 0.99 para flujo turbulento y $\frac{3}{4}$ paraflujo laminar. Para la mayoría de las aplicaciones de flujo turbulento $(v_x)^2_{\text{prom}}/v_{x\,\text{prom}}$ se remplaza por $v_{x\,\text{prom}}$, esto es, la velocidad promedio volumétrica. Nótese que el subíndice x en v_x y en F_x puede omitirse porque v_x = v y $F_x = F$ para un flujo unidireccional.

El término F_{xp}, que es la fuerza desarrollada por las presiones que actúan sobre la superficie del volumen de control, es

$$F_{xp} = p_1 A_1 - p_2 A_2 \tag{2.8-17}$$

En la ecuación (2.8-15) puede despreciarse la fuerza de fricción, de modo que $F_{xs} = 0$. La fuerza del cuerpo es $F_{xg} = 0$, puesto que la gravedad sólo está actuando en la dirección y. Sustituyendo F_{xp} de la ecuación (2.8-17) en la (2.8-15), remplazando $(v_x^2)_{\text{prom}} / v_{x\,\text{prom}}$ por v/β (donde $v_{x\,\text{prom}} = \text{v}$) haciendo $\beta = 1$ .O y despejando R_x en la ecuación (2.8-15),

$$R_x = mv_2 - mv_1 + p_2 A_2 - p_1 A_1 \tag{2.8-18}$$

donde R_x es la fuerza ejercida por el sólido sobre el fluido. La fuerza del fluido sobre el sólido (fuerza de reacción) es el negativo de la primera, o $-R_x$.

EJEMPLO 2.8-1. Factor de corrección β de la velocidad de momento lineal para flujo laminar

El factor de corrección β de la velocidad de momento lineal se define de la siguiente manera para el flujo unidireccional donde se ha omitido el subíndice x.

$$\frac{\left(v^2\right)_{\text{prom}}}{v_{\text{prom}}} = \frac{v_{\text{prom}}}{\beta} \tag{2.8-19}$$

$$\beta = \frac{\left(v_{\text{prom}}\right)^2}{\left(v^2\right)_{\text{prom}}} \tag{2.8-20}$$

Determine β para el flujo laminar en un tubo.

Solución: Al usar la ecuación (2.8-16),

$$(v^2)_{\text{prom}} = \frac{1}{A}\int\int_A v^2\, dA \tag{2.8-21}$$

Al sustituir la ecuación (2.7-16) para el flujo laminar en la ecuación (2.8-21) y notando que $A = \pi R^2$ y $dA = r\, dr\, d\theta$ se obtiene (véase ejemplo 2.6-3)

$$\left(v^2\right)_{\text{prom}} = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^{2\pi}\int_0^R \left[2v_{\text{prom}}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)\right]^2 r\, dr\, d\theta$$

$$= \frac{(2\pi)2^2 v_{\text{prom}}^2}{\pi R^2}\int_0^R \frac{\left(R^2-r^2\right)^2}{R^4} r\, dr \tag{2.8-22}$$

Al integrar la ecuación (2.8-22) y reordenando,

$$\left(v^2\right)_{\text{prom}} = \frac{8v_{\text{prom}}^2}{R^6}\left(\frac{R^6}{2}-\frac{R^6}{2}+\frac{R^6}{6}\right) = \frac{4}{3}v_{\text{prom}}^2 \tag{2.8-23}$$

Al sustituir la ecuación (2.8-23) en la (2.8-20), $\beta = \frac{4}{3}$.

EJEMPLO 2.8-2. Balance de momento linealpara una tobera horizontal

Por la tobera horizontal que se muestra en la figura 2.8-l fluye agua a una velocidad de flujo de 0.03 154 m^3/s, que descarga en la atmósfera en el punto 2. La tobera está conectada al punto 1 por la entrada y se considera que las pérdidas por fricción son despreciables. El DI de la conexión ancha es 0.0635 y el DI de la salida es 0.0286 m. Calcule la fuerza resultante en la tobera. La densidad del agua es 1000 kg/m^3.

Solución: Primero se calculan las velocidades de flujo de masa y volumétrica o promedio en los puntos 1 y 2. El área en el punto 1 es $A_1 = (\pi/4)(0.0635)^2 = 3.167 \times 10^{-3}\ \text{m}^2$ y $A_2 = (\pi/4)(0.0286)^2 = 6.424 \times 10^{-4}\ \text{m}^2$. Entonces,

$$m_1 = m_2 = m = (0.03154)(1000) = 31.54\ \text{kg/s}$$

La velocidad en el punto 1 es $v_1 = 0.03154/(3.167 \times 10^{-3}) = 9.96\ \text{m/s}$ y $v_2 = 0.031541 (6.424 \times 10^{-4}) = 49.1\ \text{m/s}$.

Para evaluar la presión p_1 a la entrada se usa la ecuación (2.7-28) del balance de energía mecánica, suponiendo que no hay pérdidas por fricción y que el flujo es turbulento. (Esto puede comprobarse calculando el numero de Reynolds.) Entonces, para $\alpha = 1.0$, esta ecuación se transforma en

$$\frac{v_1^2}{2}+\frac{p_1}{\rho} = \frac{v_2^2}{2}+\frac{p_2}{\rho} \tag{2.8-24}$$

Al establecer que $p_2 = 0$ presión manométrica, $\rho = 1000\ \text{kg/m}^3$, $v_1 = 9.96\ \text{m/s}$, $v_2 = 49.1\ \text{m/s}$, y despejando p_1,

$$p_1 = \frac{(1000)(49.1^2 - 9.96^2)}{2} = 1.156 \times 10^6\ \text{N/m}^2 \qquad \text{(presión manométrica)}$$

Para la dirección x se usa la ecuación del balance de momento lineal (2.8-l 8). Al sustituir los valores conocidos y despejando R_x,

$$R_x = 31.54\ (49.10 - 9.96) + 0 - (1.156 \times 10^6)(3.167 \times 10^{-3})$$
$$= -2427\ \text{N}(-546\ \text{lb}_f)$$

Como la fuerza es negativa, está actuando en la dirección$x$negativa o hacia la izquierda. Ésta es la fuerza de la boquilla sobre el fluido. La fuerza del fluido sobre el sólido es $-R_x$ o $+2427$ *N.*

2.8C Balance global de momento lineal en dos direcciones

En la figura 2.8-2 se muestra otra aplicación del balance global de momento lineal para un sistema de flujo con un fluido que entra en un conducto en el punto 1, que está inclinado a un ángulo α_1 respecto a la dirección x horizontal y que sale por un conducto en el punto 2 a un ángulo α_2. Se considera que el fluido fluye en estado estacionario y se desprecia la fuerza de fricción F_{xs}. Entonces, la ecuación (2.8-13) para la dirección x se convierte en la siguiente, cuando no hay acumulación:

$$F_{xg} + F_{xp} + R_x = \int\int_A v_x \rho v \cos\alpha\, dA \qquad (2.8\text{-}25)$$

Al integrar la integral (de área) superficial,

$$F_{xg} + F_{xp} + R_x = m\frac{(v_2^2)_{\text{prom}}}{v_{2\ \text{prom}}}\cos\alpha_2 - m\frac{(v_1^2)_{\text{prom}}}{v_{1\ \text{prom}}}\cos\alpha_1 \qquad (2.8\text{-}26)$$

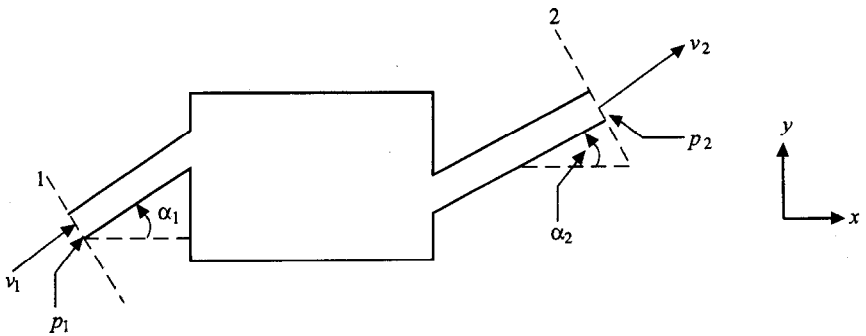


FIGURA 2.8-2. *Balance global de momento lineal para el sistema de flujo con un fluido que entra en el punto 1 y sale en el punto 2.*

Él término $(v^2)_{prom} / v_{prom}$ puede remplazarse otra vez por v_{prom}/β, donde β se establece como 1.0. A partir de la figura 2.8-2, el término F_{xp} *es*

$$F_{xp} = p_1 A_1 \cos \alpha_1 - p_2 A_2 \cos \alpha_2 \tag{2.8-27}$$

Entonces la ecuación (2.8-26) después de despejar R_x, *se* convierte en

$$R_x = mv_2 \cos \alpha_2 - mv_1 \cos \alpha_1 + p_2 A_2 \cos \alpha_2 - p_1 A_1 \cos \alpha_1 \tag{2.8-28}$$

El término $F_{xg} = 0$ en este caso.

Para R_y la fuerza del cuerpo F_{yg} está en la dirección y negativa y $F_{yg} = -m_t g$, donde m_t es la masa total de fluido en el volumen de control. Remplazando $\cos \alpha$ por sen a, la ecuación para la dirección y se convierte en

$$R_y = mv_2 \text{ sen } \alpha_2 - mv_1 \text{ sen } \alpha_1 + p_2 A_2 \text{ sen } \alpha_2 - p_1 A_1 \text{ sen } \alpha_1 + m_t g \tag{2.8-29}$$

EJEMPLO 2.8-3. Balance de momento lineal en un codo de tubería

A través de un codo de tubería con reducción fluye un fluido en estado estacionario tal como se muestra en la figura 2.8-3. (Se supondrá flujo turbulento con pérdidas por fricción despreciables.) El gasto volumétrico de líquido y la presión p_2 en el punto 2 son valores conocidos, lo mismo que los diámetros de los extremos. Suponga que la densidad p *es* constante y deduzca las ecuaciones para calcular las fuerzas que actúan sobre el codo.

Solución: Las velocidades v_1 y v_2 pueden obtenerse a partir del gasto volumétrico y de las áreas. Además, $m = \rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2$. Como en el ejemplo 2.8-2, se usa la ecuación del balance de energía mecánica (2.8-24) para obtener la presión de entrada, p_1. Para la dirección x se usa la ecuación (2.8-28) para el balance de momento lineal. Como $\alpha_1 = 0°$, $\cos \alpha_1 = 1.0$. La ecuación (2.8-28) se transforma en

$$R_x = mv_2 \cos \alpha_2 - mv_1 + p_2 A_2 \cos \alpha_2 - p_1 A_1 \quad \text{(SI)} \tag{2.8-30}$$

$$R_x = \frac{m}{g_c} v_2 \cos \alpha_2 - \frac{m}{g_c} v_1 + p_2 A_2 \cos \alpha_2 - p_1 A_1 \quad \text{(Unidades de sistema inglés)}$$

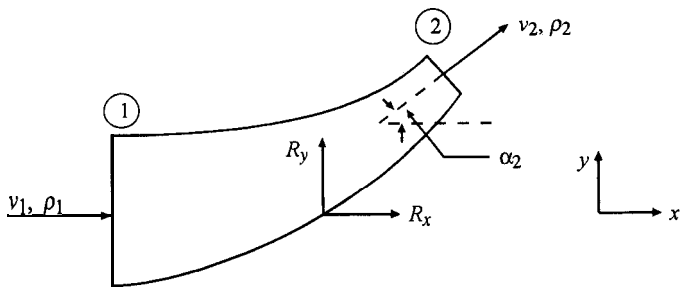


FIGURA 2.8-3 *Flujo a través de un codo con reducción en el ejemplo 2.8-3*

Para la dirección y, la ecuación (2.8-29) de balance de momento lineal se usa donde sen $\alpha_1 = 0$.

$$R_y = mv_2 \text{ sen } \alpha_2 + p_2 A_2 \text{ sen } \alpha_2 + m_t g \qquad \text{(SI)} \tag{2.8-31}$$

donde m_t es el fluido de masa total en el codo de la tubería. Las presiones en los puntos 1 y 2 son presiones manométricas, ya que las presiones atmosféricas que actúan sobre todas las superficies se cancelan. La magnitud de la fuerza resultante del codo que actúa sobre el fluido de volumen de control es

$$|\mathbf{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \tag{2.8-32}$$

El ángulo que ésta hace con la vertical es $\theta = \arctan (R_x/R_y)$. A menudo la fuerza de gravedad F_{yg} es pequeña en comparación con los otros términos de la ecuación (2.8-31) y se desprecia.

EJEMPLO 2.8-4. Pérdidas depresión en un ensanchamiento repentino

Cuando un fluido fluye pasando de una tubería pequeña a una más grande a través de un ensanchamiento abrupto tal como se muestra en el figura 2.8-4, se presenta una pérdida de energía mecánica. Use el balance de momento lineal y el balance de energía mecánica para obtener la expresión de las pérdidas en un líquido. *(Sugerencia:* Suponga quepo $= p_1$ y que $v_0 = v_1$. Proceda a un balance de energía mecánica entre los puntos 0 y 2 y a un balance de momento lineal entre los puntos 1 y 2. Se supone que p_1 y p_2 son uniformes en la totalidad del área de corte transversal.)

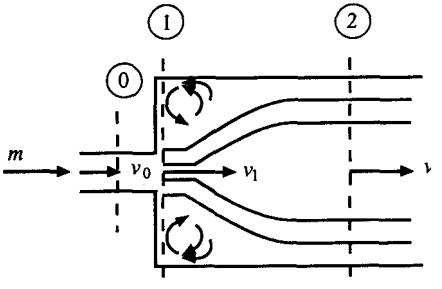


FIGURA *2.8-4. Pérdidas en un flujo expansivo.*

Solución: El volumen de control se selecciona de tal forma que no incluya la pared de la tubería, por lo que se elimina R_x. Los límites seleccionados son los puntos 1 y 2. El flujo a través del plano 1 sólo se verifica a través de un área A_0. Se desprecia la fuerza de fricción de arrastre, suponiéndose que toda la pérdida proviene de remolinos en este volumen. Llevando a cabo un balance de momento lineal entre los puntos 1 y 2 y observando que $PO = p_1$, $v_1 = v_0$ y $A_1 = A_2$,

$$p_1 A_2 - p_2 A_2 = mv_2 \quad mv_1 \tag{2.8-33}$$

El gasto másico es $m = v_0 \rho A_0$ y $v_2 = (A_0 / A_2)\, v_0$. Sustituyendo estos términos en la ecuación (2.8-33) y reordenando,

$$v_0^2 \frac{A_0}{A_2}\left(1 - \frac{A_0}{A_2}\right) = \frac{p_2 - p_1}{\rho} \qquad (2.834)$$

Al aplicar el balance de energía mecánica, ecuación (2.7-28), a los puntos 1 y 2,

$$\frac{v_0^2 - v_2^2}{2} - \sum F = \frac{p_2 - p_1}{\rho} \qquad \textbf{(2.8-35)}$$

Por último, al combinar las ecuaciones (2.8-34) y (2.8-35)

$$\sum F = \frac{v_0^2}{2}\left(1 - \frac{A_0}{A_2}\right)^2 \qquad (2.8\text{-}36)$$

2.8D Balance global de momento lineal para un chorro libre que golpea un aspa fija

Cuando un chorro libre golpea sobre un aspa fija como en la figura 2.8-5, puede aplicarse el balance global de momento lineal para determinar la fuerza sobre el aspa lisa. Como no hay cambios de elevación o de presión ni antes ni después del impacto, tampoco hay pérdida de energía, y la aplicación de la ecuación de Bernoulli muestra que la magnitud de la velocidad permanece sin cambio. Las pérdidas debidas al impacto se desprecian. La resistencia fricciona1 entre el chorro y el aspa lisa también es despreciable. Se supone que la velocidad es uniforme en todo el chorro. Como éste está abierto a la atmósfera, la presión es igual en todos los extremos del aspa.

Al realizar un balance de momento lineal para el volumen de control que se muestra para el aspa curva de la figura 2.8-5a, la ecuación (2.8-28) se escribe como sigue para el estado estacionario, donde los términos de presión son cero, $v_1 = v_2$, $A_1 = A_2$ y $m = v_1 A_1 \rho_1 = v_2 A_2 \rho_2$:

$$R_x = m v_2 \cos \alpha_2 - m v_1 + 0 = m v_1 (\cos \alpha_2 - 1) \qquad (2.8\text{-}37)$$

Al usar la ecuación (2.8-29) para la dirección y y despreciando la fuerza del cuerpo,

$$R_y = m v_2 \operatorname{sen} \alpha_2 - 0 = m v_1 \operatorname{sen} \alpha_2 \qquad (2.8\text{-}38)$$

Por lo tanto, R_x y R_y son las componentes de fuerza del aspa sobre el fluido de volumen de control. Las componentes de fuerza sobre el aspa son $-R_x$ y $-R_y$

EJEMPLO 2.8-5. Fuerza de un chorro libre sobre un aspa curva fija

Un chorro de agua que tiene una velocidad de 30.5 m /s y un diámetro de 2.54 $\times$ 1 0^{-2} m es desviado por un aspa curva y lisa como la que se muestra en la figura 2.8-5a, donde α_2 = 60". ¿Cuál es la fuerza del chorro sobre el aspa? Suponga que ρ = 1000 kg /m^3.

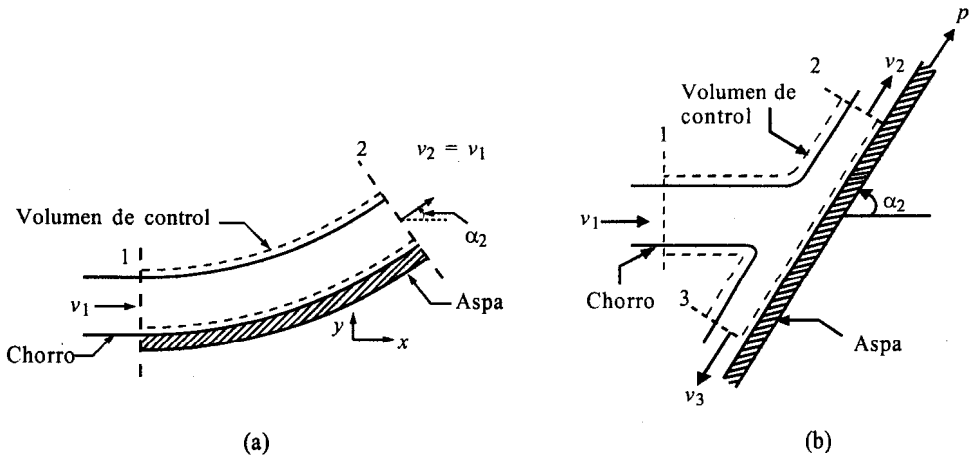


FIGURA 2.8-5. *Chorro libre que golpea un aspa fija: a) aspa curva lisa. b) aspa plana lisa.*

Solución: El área de corte transversal del chorro es $A_1 = \pi\ (2.54 \times 10^{-2})^2/4 = 5.067 \times 10^{-4}\ m^2$. Entonces, $m = v_1 A_1 \rho_1 = 30.5 \times 5.067 \times 10^{-4} \times 1000 = 15.45$ kg/s. Sustituyendo en las ecuaciones (2.8-37) y (2.8-38),

$$R_x = 15.45 \times 30.5\ (\cos 60^\circ - 1) = -235.6\ \text{N}(-52.97\ \text{lb}_f)$$
$$R_y = 15.45 \times 30.5\ \text{sen}\ 60^\circ = 408.1\ \text{N}(91.74\ \text{lb}_f)$$

La fuerza sobre el aspa es $-R_x = +235.6$ N y $-R_y = -408.1$ N. La fuerza resultante se calcula usando la ecuación 2.8-32.

En la figura 2.8-5b, un chorro libre con velocidad v_1 golpea una placa plana y lisa, inclinada, y el flujo se divide en dos corrientes separadas cuyas velocidades son iguales ($v_1 = v_2 = v_g$), puesto que no hay pérdida de energía. Es conveniente hacer un balance de momento lineal en la direcciónp paralela a la placa. La placa plana no ejerce fuerza sobre el fluido en esta dirección, es decir, no hay fuerza tangencial. Así, la componente del momento inicial en la direcciónp debe ser igual a la componente del momento lineal final en esta dirección. Esto significa que $\sum F_p = 0$. Escribiendo una ecuación semejante a la (2.8-26), donde m_1 son los kg/s que entran en 1 y m_2 los que salen de 2 y m_3 de 3,

$$\sum F_p = 0 = m_2 v_2 - m_1 v_1 \cos \alpha_2 - m_3 v_3$$
$$0 = m_2 v_1 - m_1 v_1 \cos \alpha_2 - m_3 v_1 \qquad (2.8\text{-}39)$$

Por la ecuación de continuidad,

$$m_1 = m_2 + m_3 \qquad (2.8\text{-}40)$$

Al combinar y resolver,

$$m_2 = \frac{m_1}{2}(1 + \cos \alpha_2), \qquad m_3 = \frac{m_1}{2}(1 - \cos \alpha_2) \qquad (2.8\text{-}41)$$

La fuerza resultante ejercida por la placa sobre el fluido debe ser normal a él. Esto significa que la fuerza resultante es simplemente $m_1 v_1$ sen α_2. De manera alterna, la fuerza resultante sobre el fluido puede calcularse determinando R_x y R_y a partir de las ecuaciones (2.8-28) y (2.8-29), y usando la ecuación (2.8-32). La fuerza sobre el codo es opuesta a ésta.

2.9 BALANCE DE MOMENTO LINEAL EN EL RECINTO Y PERFIL DE VELOCIDADES EN FLUJO LAMINAR

2.9A Introducción

En la sección 2.8 se analizan los balances de momento lineal utilizando un volumen de control global macroscópico. A partir de éste obtuvimos los cambios totales o globales de momento lineal que cruzaban la superficie de control. El balance general de momento lineal que se analizó en dicha sección no proporciona los detalles de lo que sucede dentro del volumen de control. También en esta sección se estudiará un volumen de control pequeño reduciéndose después este volumen de control a tamaño diferencial. Al hacerse esto, realizamos un balance de momento lineal del recinto y después, mediante la ecuación de definición de la viscosidad, se obtendrá una expresión para la distribución de velocidades dentro de los límites del recinto, así como para la caída de presión. Las ecuaciones se deducen para sistemas de flujo de geometría simple en flujo laminar y en estado estacionario.

En muchos problemas de ingeniería no se necesita conocer el perfil de velocidad completo, pero sí es necesario conocer la velocidad máxima, la velocidad promedio o el esfuerzo cortante sobre una superficie. En esta sección mostramos cómo obtener estas cantidades a partir de los perfiles de velocidad.

2.9B Balance de momento lineal en el recinto de una tubería

Los ingenieros suelen tener que estudiar el flujo de fluidos de un ducto o tubería circular. En la figura 2.9-l se muestra la sección horizontal de una tubería por la que fluye un líquido newtoniano incompresible, con flujo laminar de estado estacionario monodimensional. El flujo es totalmente desarrollado, esto es, no está influido por los efectos de entrada y el perfil de velocidades no varía a lo largo del eje del flujo en la dirección x.

El volumen de control cilíndrico es un recinto con radio interior r, un espesor Δr y longitud Δx. En estado estacionario, la conservación de momento lineal (2.8-3) expresa lo siguiente: suma de fuerzas actuando sobre el volumen de control = velocidad de salida del momento lineal − velocidad de entrada del momento lineal, ambas con respecto al volumen de control. Con base en la ecuación (2.8-17) las fuerzas de presión son:

$$\text{fuerza de presión} = pA|_x - pA|_{x+\Delta x} = p(2\pi r\,\Delta r)|_x - p(2\pi r\,\Delta r)|_{x+\Delta x} \qquad \textbf{(2.9-l)}$$

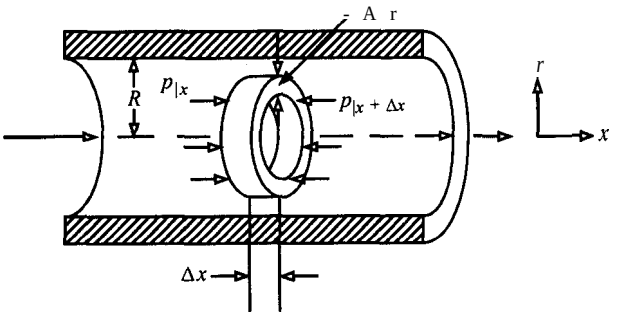


FIGURA *2.9-I. Volumen de control para el balance de momento lineal en el recinto de un fluido que fluye en un tubo circular.*

La fuerza cortante o fuerza de arrastre que actúa sobre la superficie cilíndrica en el radio r, es el esfuerzo cortante τ_{rx} multiplicado por el área $2\pi r$ Ax. Sin embargo, esto también puede considerarse como la velocidad de flujo de momento lineal de entrada a la superficie cilíndrica del recinto, tal como lo describe la ecuación (2.4-9). Por lo tanto, la velocidad neta de efusión de momento lineal es la velocidad de salida de momento lineal menos la velocidad de entrada de momento lineal igual a

$$\text{efusión neta} = (\tau_{rx}\, 2\pi r\, \Delta x)|_r + {}_{\Delta r} - (\tau_{rx}\, 2\pi r\, \Delta x)|_r \qquad (2.9\text{-}2)$$

El flujo convectivo neto de momento lineal a lo largo de la superficie anular enx y x + Δx es cero, puesto que el flujo está totalmente desarrollado y los términos son independientes de x. Esto es cierto, puesto que v_x en x es igual a v_x en x + Ax.

Al igualar las ecuaciones (2.9-l) y (2.9-2) y reordenar

$$\frac{(rt_{rx})\big|_{r+\Delta r} - (rt_{rx})\big|_r}{\Delta r} = \frac{r\left(p\big|_x - p\big|_{x+\Delta x}\right)}{\Delta x} \qquad (2.9\text{-}3)$$

En un flujo totalmente desarrollado, el gradiente de presión $(\Delta p/\Delta x)$ es constante y se transforma en $(\Delta p/L)$ donde Ap es la caída de presión para una tubería de longitud L. Suponiendo que Ar tiende a cero se obtiene

$$\frac{d(r\tau_{rx})}{dr} = \left(\frac{\Delta p}{L}\right) r \qquad (2.9\text{-}4)$$

Al separar variables e integrar,

$$\tau_{rx} = \left(\frac{\Delta p}{L}\right)\frac{r}{2} + \frac{C_1}{r} \qquad (2.9\text{-}5)$$

Cuando r = 0, la constante de integración C_1 debe ser cero si el flujo de momento lineal no es infinito. Por consiguiente,

$$\tau_{rx} = \left(\frac{\Delta p}{2L}\right) r = \frac{p_0 - p_L}{2L} r \qquad (2.9\text{-}6)$$

Esto significa que el flujo de momento lineal varíalinealmente con el radio, tal como lo muestra la figura 2.9-2 y el valor máximo se presenta a $r = R$ en la pared.

Al sustituir la ley de la viscosidad de Newton,

$$\tau_{rx} = -\mu \frac{dv_x}{dr} \qquad \textbf{(2.9-7)}$$

en la ecuación (2.9-6), se obtiene la siguiente ecuación diferencial para la velocidad:

$$\frac{dv_x}{dr} = -\frac{p_0 - p_L}{2\mu L} r \qquad (2.9\text{-}8)$$

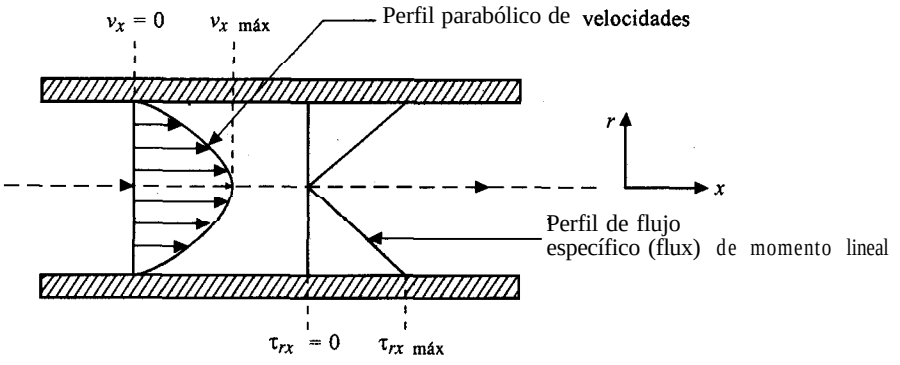


FIGURA 2.9-2. *Perfil de velocidad y de flujo de momento lineal para un flujo laminar en una tuberia.*

Al integrar con la condición límite de que en la pared, $v_x = 0$, cuando $r = R$, se obtiene la ecuación para la distribución de velocidades:

$$v_x = \frac{p_0 - p_L}{4\mu L} R^2 \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \tag{2.9-9}$$

Este resultado indica que la distribución de velocidades es de tipo parabólico, tal como muestra la figura 2.9-2.

La velocidad promedio $v_{x\,\text{prom}}$ para una sección transversal se determina sumando todas las velocidades en dicha sección y dividiendo entre el área de la misma como en la ecuación (2.6-17). Siguiendo el procedimiento del ejemplo 2.6-3, donde $dA = r\,dr\,d\theta$ y $A = \pi R^2$,

$$v_{x\,\text{prom}} = \frac{1}{A} \int\int_A v_x\, dA = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R v_x r\, dr\, d\theta = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R v_x 2\pi r\, dr \tag{2.9-10}$$

Al combinar las ecuaciones (2.9-9) y (2.9-10) e integrando

$$v_{x\,\text{prom}} = \frac{(p_0 - p_L)R^2}{8\mu L} = \frac{(p_0 - p_L)D^2}{32\mu L} \tag{2.9-11}$$

donde el diámetro $D = 2R$. Por consiguiente, la ecuación (2.9-11), que es la ecuación *de Hagen-Poiseuille,* relaciona la caída de presión y la velocidad promedio para flujos laminares en una tubería horizontal.

La velocidad máxima para una tubería se obtiene de la ecuación (2.9-9), y se presenta cuando $r = 0$.

$$v_{x\,\text{máx}} = \frac{p_0 - p_L}{4\mu L} R^2 \tag{2.9-12}$$

Al combinar las ecuaciones (2.9-11) y (2.9-12) se encuentra que

$$v_{x\,\text{prom}} = \frac{v_{x\,\text{máx}}}{2} \tag{2.9-13}$$

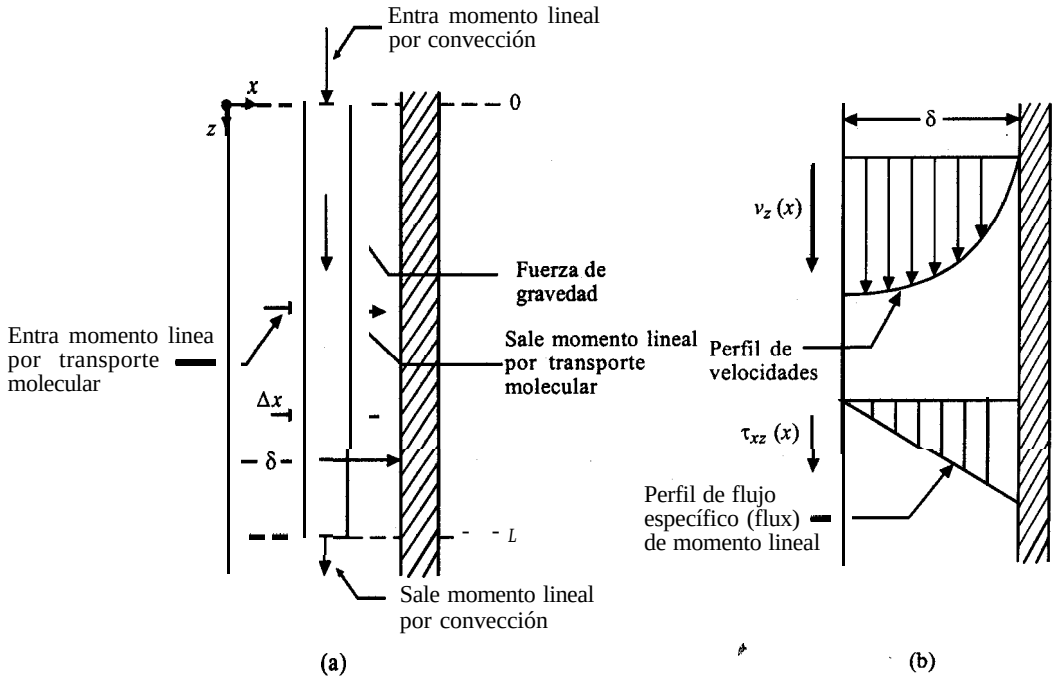


FIGURA *2.9-3. Flujo laminar vertical de una película líquida: a) balance de momento lineal en un recinto para un volumen de control de grosor* Δx*; b) perfiles de flujo específico (flux) de momento lineal de velocidad*

2.9C Balance de momento lineal en el recinto para una película descendente

Se va a usar un enfoque semejante al que se usó para un flujo laminar en una tubería para el flujo de un fluido en una película de flujo laminar hacia abajo sobre una superficie vertical. Las películas descendentes se han usado para estudiar varios fenómenos relacionados con transferencia de masa, recubrimiento de superficies, etc. El volumen de control para la película descendente se muestra en la figura 2.9-3a, donde la capa de fluido que se considera tiene un grosor de Δx y una longitud de L en dirección z vertical. Esta región está lo suficientemente lejos de las regiones de entrada y salida como para que el flujo no se vea afectado por estas regiones. Esto significa que la velocidad v_z (x) no depende de la posición z.

Para empezar se establece un balance de momento lineal en la dirección z sobre un sistema con un grosor de Δx, limitado en la dirección z por los planos z = 0 y z = L, y que se extiende una distancia W en la dirección y. Primero consideramos el flujo específico (flux) de momento lineal debido al transporte molecular. La velocidad de salida de momento lineal es el flujo específico de momento lineal en el punto $x + \Delta x$ menos el de x por el área L W.

$$\text{efusión neta} = L\ W(\tau_{xz})|_{x\ +\ \Delta x} - L\ W(\tau_{xz})|_x \tag{2.9-14}$$

El flujo específico de momento lineal convectivo neto es la velocidad de momento lineal que entra en el área Δx W en z = L menos la que sale en z = 0. Esta efusión neta es igual a 0, ya que v_z en z = 0 es igual a v_2, en z = L para cada valor de x.

$$\text{efusión neta} = \Delta x W v_z(\rho v_z)|_{z\ =\ L} - \Delta x W v_z(\rho v_z)|_{z\ =\ 0} = 0 \tag{2.9-15}$$

La fuerza de gravedad que actúa sobre el fluido es

$$\text{fuerza de gravedad} = \Delta x WL(\rho g) \tag{2.9-16}$$

Luego, al usar la ecuación (2.8-3) para la conservación de momento lineal en estado estacionario,

$$\Delta x WL(\rho g) = LW(\tau_{xz})|_{x+\Delta x} - LW(\tau_{xz})|_x + 0 \tag{2.9-17}$$

Al reordenar la ecuación (2.9-17) y haciendo que $\Delta x \rightarrow 0$,

$$\frac{\tau_{xz}\big|_{x+\Delta x} - \tau_{xz}\big|_x}{\Delta x} = \rho g \tag{2.9-18}$$

$$\frac{d}{dx}\tau_{xz} = \rho g \tag{2.9-19}$$

Si se integra usando las condiciones de frontera en $x = 0$, $\tau_{xz} = 0$ en la superficie de líquido libre y en x = x, $\tau_{xz} = \tau_{xz}$,

$$\tau_{xz} = \rho g x \tag{2.9-20}$$

Esto significa que el perfil de flujo específico de momento lineal es lineal, como se muestra en la figura 2.9-3b y el valor máximo está en la pared. Para un fluido newtoniano, usando la ley de Newton de la viscosidad,

$$\tau_{xz} = -\mu \frac{dv_z}{dx} \tag{2.9-21}$$

Al combinar las ecuaciones (2.9-20) y (2.9-21) se obtiene la siguiente ecuación diferencial para la velocidad:

$$\frac{dv_z}{dx} = -\left(\frac{\rho g}{\mu}\right)x \tag{2.9-22}$$

Al separar variables y al integrarlas se obtiene

$$v_z = -\left(\frac{\rho g}{2\mu}\right)x^2 + C_1 \tag{2.9-23}$$

Al usar la condición de frontera de que $v_z = 0$ en x = 6, $C_1 = (\rho g/2\mu)\delta^2$. Por lo tanto, la ecuación de distribución de la velocidad se transforma en

$$v_z = \frac{\rho g \delta^2}{2\mu}\left[1 - \left(\frac{x}{\delta}\right)^2\right] \tag{2.9-24}$$

Esto significa que el perfil de velocidad es parabólico, como se muestra en la figura 2.9-3 b. La velocidad máxima ocurre en x = 0 en la ecuación (2.9-24) y es

$$v_{z\,\text{máx}} \frac{\rho g \delta^2}{2\mu} \tag{2.9-25}$$

La velocidad promedio puede encontrarse usando la ecuación (2.6-17).

$$v_{z\,\text{prom}} = \frac{1}{A}\int\int_A v_z\, dA = \frac{1}{W\delta}\int_0^W\int_0^\delta v_z\, dx\, dy = \frac{W}{W\delta}\int_0^\delta v_z\, dx \tag{2.9-26}$$

Al sustituir la ecuación (2.9-24) en la (2.9-26) e integrando,

$$v_{z\,\text{prom}} = \frac{\rho g \delta^2}{3\mu} \tag{2.9-27}$$

Al combinar las ecuaciones (2.9-25) y (2.9-27) se obtiene $v_{z\,\text{prom}} = (2/3)v_{z\,\text{máx}}$. El gasto volumétrico q se obtiene multiplicando la velocidad promedio $v_{z\,\text{prom}}$ por el área de corte transversal δW.

$$q = \frac{\rho g \delta^3 W}{3\mu}\ \text{m}^3/\text{s} \tag{2.9-28}$$

Con frecuencia en las películas descendentes, el gasto de masa por unidad de grosor de pared Γ en kg/s · m se define como $\Gamma = \rho\delta v_{z\,\text{prom}}$ y el número de Reynolds se define como

$$N_{\text{Re}} = \frac{4\Gamma}{\mu} = \frac{4\rho\delta v_{z\,\text{prom}}}{\mu} \tag{2.9-29}$$

El flujo es laminar para $N_{\text{Re}} < 1200$. El flujo laminar con ondas se presenta cuando el N_{Re} excede de 25.

EJEMPLO 2.9-I. Velocidad y grosor de la película descendente

Cierta cantidad de aceite fluye hacia abajo por una pared vertical como una película de 1.7 mm de espesor. La densidad del aceite es de 820 kg/m^3 y la viscosidad es de 0.20 Pa · s. Calcule el gasto másico Γ que se necesita por unidad de grosor en la pared y el número de Reynolds. Calcule también la velocidad promedio.

Solución: El grosor de la película es de $\delta = 0.0017$ m. Al sustituir la ecuación (2.9-27) en la definición de Γ,

$$\Gamma = \rho\delta v_{z\,\text{prom}} = \frac{(\rho\delta)\rho g\delta^2}{3\mu} = \frac{\rho^2\delta^3 g}{3\mu} \tag{2.9-30}$$

$$= \frac{(820)^2\,(1.7 \times 10^{-3})^3\,(9.806)}{3 \times 0.20} = 0.05399\ \text{kg/s . m}$$

Al utilizar la ecuación (2.9-29),

$$N_{\text{Re}} = \frac{4\Gamma}{\mu} = \frac{4(0.05399)}{0.20} = 1.080$$

En consecuencia, la película tiene en flujo laminar. Usando la ecuación (2.9-27),

$$v_{z\,\text{prom}} = \frac{\rho g \delta^2}{3\mu} = \frac{820(9.806)\left(1.7 \times 10^{-3}\right)^2}{3(0.20)} = 0.03873 \text{ m/s}$$

2.10 ECUACIONES DE DISEÑO PARA FLUJO LAMINAR Y TURBULENTO EN TUBERÍAS

2.10A Perfiles de velocidad en tuberías

Una de las aplicaciones más importantes del flujo de fluidos es el flujo en conductos circulares, tuberías y caños. En el apéndice A.5 se incluyen los tamaños de las tuberías de acero comerciales. La tubería de cédula 40 en diferentes tamaños es la norma usual. La de cédula 80 tiene una pared más gruesa y soporta casi el doble de presión que la de cédula 40. Ambas tienen el mismo diámetro exterior, por lo que se pueden conectar a los mismos accesorios. Las tuberías de otros metales tienen el mismo diámetro externo que las de acero, para permitir el intercambio de secciones en un sistema. Los tamaños de las tuberías se especifican por medio del diámetro exterior y el espesor de pared. Perry y Green (P1) incluyen tablas detalladas de diversos tipos de tubos y ductos.

Cuando el fluido fluye en una tubería circular, al medir las velocidades a diferentes distancias de la pared al centro se demuestra que, tanto en el flujo laminar como en el turbulento, el fluido que está en el centro del tubo se desplaza con mayor rapidez que el que está cercano a las paredes. Estas mediciones se efectúan a una distancia razonable de la entrada a la tubería. La figura 2. 10- 1 contiene una gráfica de la distancia relativa desde el centro de la misma, en función de la fracción de velocidad máxima $v'/v_{máx}$, donde v' es la velocidad local en la posición considerada y $v_{máx}$ es la velocidad máxima en el centro de la tubería. Para un flujo laminar o viscoso, el perfil de velocidades es una parábola real, tal como se dedujo en la ecuación (2.9-9). La velocidad en la pared es cero.

En muchas aplicaciones de ingeniería resulta útil la relación entre la velocidad promedio v_{prom} en una tubería y la velocidad máxima $v_{máx}$, ya que en algunos casos sólo se mide la $v_{máx}$ en el punto central del tubo. Así, a partir de una sola medición puntual, se puede usar esta relación entre $v_{máx}$ y v_{prom} para determinar v_{prom}. En la figura 2.10-2 se grafican valores medidos experimentalmente de $v_{prom}/v_{máx}$ en función de los números de Reynolds $Dv_{prom}\rho/\mu$ y $Dv_{máx}\rho/\mu$.

La velocidad promedio en todo el corte transversal de la tubería es precisamente 0.5 veces la velocidad máxima en el centro, como lo expresa el balance de momento lineal en el recinto de la ecuación (2.9-13) para flujo laminar. Por otra parte, y para flujo turbulento, la curva resulta algo aplanada en el centro(Fig. 2.10-1)y lavelocidadpromedio es aproximadamente 0.8 veces la máxima. Estevalorde0.8 veces varía un poco, dependiendo del numero de Reynolds, como se muestra en la correlación de la figura 2. 10-2. (Nota: véase el problema 2.6-3 en el que se deduce un valor de 0.817, usando la ley de potencia 1/7.)

2.10B Caída de presión y pérdidas por fricción en un flujo laminar

*1. **Caída y pérdida de presión debido a la fricción.*** Cuando un fluido fluye por una tubería con flujo laminar en estado estacionario, la ecuación (2.4-2) expresa el esfuerzo cortante para un fluido newtoniano, y esta ecuación puede reescribirse para variaciones de radio ***dr,*** en vez de la distancia ***dy,*** como sigue:

$$\tau_{rz} = -\mu \frac{dv_z}{dr} \qquad \textbf{(2.10-l)}$$

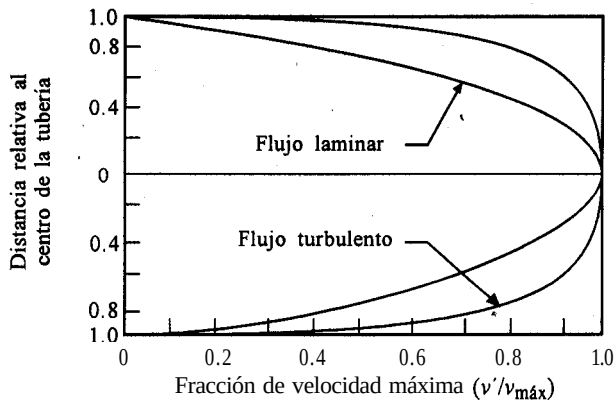


FIGURA 2.10-l. ***Distribución de velotidades de un fluido a lo largo de una tubería.***

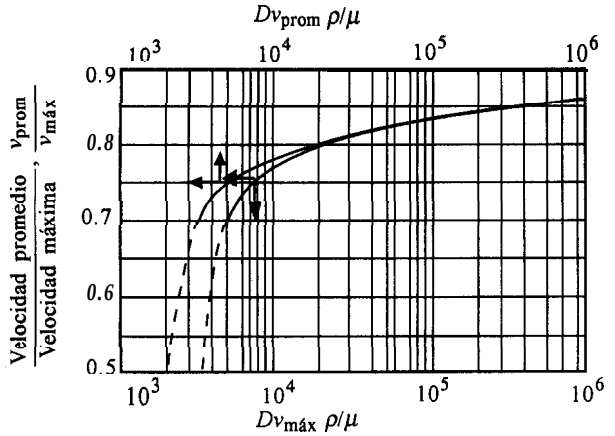


FIGURA 2.10-2. ***Razón $v_{prom}/v_{máx}$ en función del número de Reynolds para tuberías.***

Con esta expresión y llevando a cabo un balance de momento lineal en el recinto del fluido en un recinto cilíndrico, se obtiene la ecuación de Hagen-Poiseuille, ecuación (2.9-l 1), para el flujo laminar de un líquido en tubos circulares. En la sección 3.6 se incluye también una deducción usando el balance diferencial de momento lineal. Esta expresión es

$$\Delta p_f = (p_1 - p_2)_f = \frac{32\mu v(L_2 - L_1)}{D^2} \qquad (2.10\text{-}2)$$

donde p_1 es la presión corriente arriba en el punto 1, N/m^2; p_2 es la presión en el punto 2; v es la velocidad promedio en el tubo, m/s; D es el diámetro interno, m; y $(L_2 - L_1)$ o ΔL es la longitud de tubo recto, m. Para unidades del sistema inglés, el lado derecho de la ecuación (2.10-2) se divide entre g_c.

La cantidad $(p_1 - p_2)_f$ o Δp_f es la pérdida de presión debida a la fricción superficial. Entonces, para ρ constante, la pérdida por fricción F_f es

$$F_f = \frac{(p_1 - p_2)_f}{\rho} = \frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{kg}} \text{ o } \frac{\text{J}}{\text{kg}} \qquad \text{(SI)} \qquad (2.10\text{-}3)$$

$$F_f = \frac{\text{pie}\cdot\text{lb}_f}{\text{lb}_m} \qquad \text{(Unidades del sistema inglés)}$$

Ésta es la pérdida de energía mecánica debida a la fricción superficial en la tubería en N · m/kg del fluido y es parte del término $\sum F$ de pérdidas por fricción en la ecuación (2.7-28) del balance de energía mecánica. Este término $(p_1 - p_2)_f$ de fricción superficial, es diferente del término $(p_1 - p_2)$, causado por cambios de carga de velocidad o de carga potencial de la ecuación (2.7-28). En las secciones 2.10B y 2.10C se analiza la porción de $\sum F$ que se origina en fricciones dentro del propio ducto por flujo laminar o turbulento. En la sección 2.10F se estudia la porción de pérdida por fricción debido a accesorios (válvulas, codos, etc.), ángulos y otras variaciones que muchas veces constituyen factores importantes de la fricción. Nótese que al aplicar la ecuación (2.7-28) aun flujo estable en un tubo recto horizontal, se obtiene la expresión $(p_1 - p_2)/\rho = \sum F$.

Con la ecuación (2.10-2) puede obtenerse la medición experimental de la viscosidad de un fluido por medio de la determinación de la caída de presión y del gasto volumétrico a través de un tubo de longitud y diámetro conocidos. En la práctica casi siempre es necesario incluir pequeñas correcciones por efectos de energía cinética y de entrada. Además, la ecuación (2.10-2) también se emplea para la medición de flujos pequeños de líquidos.

EJEMPLO 2.10-L Medición de flujos pequeños de líquidos

Para medir en forma continua la velocidad de flujo de un líquido con densidad de 875 kg / m^3 y $\mu = 1.13 \times 10^{-3}$ Pa . s se usa un pequeño capilar con diámetro interior de 2.22 × 1 0^{-3} m y longitud igual a 0.3 17 m. La lectura de la caída de presión a través del capilar durante el flujo es 0.0655 m de agua (densidad 996 kg/m^3). ¿Cuál es la velocidad de flujo en m^3/s sin tomar en cuenta los efectos de los extremos del tubo?

Solución: Se usará la ecuación (2.10-2) suponiendo que el flujo es laminar. Primero se convierte la altura *h* de 0.0655 m de agua a una caída de presión por medio de la ecuación (2.2-4)

$$\Delta p_f = hpg = (0.0655\ \text{m})\left(99\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)\left(9.80665\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)$$
$$= 640\ \text{kg} \cdot \text{m/s}^2 \cdot \text{m}^2 = 640\ \text{N/m}^2$$

Al sustituir los siguientes valores en la ecuación (2.10-2), $\mu = 1.13 \times 10^{-3}$ Pa . s, $L_2 - L_1 = 0.317$ m, $D = 2.22 \times 10^{-3}$ m, y $\Delta p_f = 640\ \text{N/m}^2$, y despejando v,

$$\Delta p_f = \frac{32\mu v(L_2 - L_1)}{D^2} \qquad (2.10\text{-}2)$$

$$640 = \frac{32\left(1.13 \times 10^{-3}\right)(v)(0.317)}{\left(2.22 \times 10^{-3}\right)^2}$$

$$v = 0.275\ \text{m/s}$$

Entonces, el gasto volumétrico es

$$\text{gasto volumétrico} = v\pi\frac{D^2}{4} = \frac{0.275(\pi)\left(2.22 \times 10^{-3}\right)^2}{4}$$
$$= 1.066 \times 10^{-6}\ \text{m}^3/\text{s}$$

Puesto que se supuso un flujo laminar, se calcula el número de Reynolds para comprobarlo.

$$N_{\mathrm{Re}} = \frac{Dv\rho}{\mu} = \frac{(2.22 \times 10^{-3})(0.275)(875)}{1.13 \times 10^{-3}} = 473$$

Por lo tanto, el flujo es laminar como se supuso.

2. Uso del factor de fricción para las pérdidas por fricción en flujo laminar. Un parámetro muy común en el flujo laminar, y en especial en el turbulento, es el factor de fricción de ***Fanning, f***, que se define como la fuerza de arrastre por unidad de área mojada (esfuerzo cortante τ_s en la superficie) dividida entre el producto de la densidad por la carga de velocidad o altura dinámica, o $\frac{1}{2}\rho v^2$. La fuerza es Δp_f multiplicada por el área de sección transversal πR^2 y el área de superficie mojada es $2\pi R$ AL. Por consiguiente, la relación entre la caída de presión debida a la fricción y afes la siguiente para flujo laminar y turbulento.

$$f = \frac{\tau_s}{\rho v^2/2} = \frac{\Delta p_f \ \pi R^2}{2\pi R \Delta L} \Big/ \frac{\rho v^2}{2} \tag{2.10-4}$$

Al reordenar se convierte en

$$\Delta p_f = 4 f \rho \frac{\mathrm{AL}}{D} \frac{v^2}{2} \qquad \text{(SI)} \tag{2.10-5}$$

$$\Delta p_f = 4 f \rho \frac{\Delta L}{D} \frac{v^2}{2 g_c} \qquad \text{(Unidades del sistema inglés)}$$

$$F_f = \frac{\Delta p_f}{\rho} = 4 f \frac{\Delta L}{D} \frac{v^2}{2} \qquad \text{(SI)} \tag{2.10-6}$$

$$F_f = 4 f \frac{\Delta L}{D} \frac{v^2}{2 g_c} \qquad \text{(Unidades del sistema inglés)}$$

Para flujo laminar, combinando las ecuaciones (2.10-2) y (2.10-5),

$$f = \frac{16}{N_{\mathrm{Re}}} = \frac{16}{Dv\rho/\mu} \tag{2.10-7}$$

Las ecuaciones (2.10-2), (2.10-5), (2.10-6) y (2.10-7) para flujo laminar son válidas hasta un número Reynolds de 2100. Después de esto, cuando N_{Re} pasa de 2100, las ecuaciones (2.10-2) y (210-7) no son aplicables a flujo turbulento. Sin embargo, las ecuaciones (2.10-5) y (2.10-6) se usan con mucha frecuencia para flujo turbulento, junto con métodos empíricos para pronosticar el factor de fricción f, como se describe en la siguiente sección.

EJEMPLO 2.10-2. Uso del faetor de fricción en flujo laminar

Suponga las mismas condiciones conocidas del ejemplo 2. 10- 1 excepto que se conoce la velocidad, 0.275 m /s y se desea pronosticar la caída de presión Δp_f. Use el método del factor de fricción de Fanning.

Solución: Como antes, el número de Reynolds es

$$N_{\mathrm{Re}} = \frac{Dv\rho}{\mu} = \frac{(2.22 \times 10^{-3}\ \mathrm{m})(0.275\ \mathrm{m/s})(875\ \mathrm{kg/m^3})}{1.13 \times 10^{-3}\ \mathrm{kg/m \cdot s}} = 473$$

Con base en la ecuación (2.10-7) se obtiene el factor de fricción f

$$f = \frac{1}{N_{\mathrm{Re}}} = \frac{16}{473} = 0.0338 \text{ (adimensional)}$$

Al usar la ecuación (2.10-5) con AL = 0.3 17 m, v = 0.275 m/s, D = 2.22 x 10^{-3} m, ρ = 875 kg/m^3,

$$\Delta p_f = 4fp\,\frac{\Delta L}{D}\,\frac{v^2}{2} = \frac{4(0.0338)(875)(0.317)(0.275)^2}{(2.22 \times 10^{-3})(2)} = 640\ \mathrm{N/m^2}$$

Resulta obvio que este resultado comprueba el valor del ejemplo 2. 10- 1.

Cuando el fluido es un gas y no un líquido, la ecuación de Hagen-Poiseuille, ecuación (2.10-2) puede escribirse como sigue para flujo laminar,

$$m = \frac{\pi D^4 M(p_1^2 - p_2^2)}{128(2RT)\mu(L_2 - L_1)} \qquad \text{(SI)}$$

$$m = \frac{\pi D^4 g_c M(p_1^2 - p_2^2)}{128(2RT)\mu(L_2 - L_1)} \qquad \text{(Unidades del sistema inglés)} \qquad \textbf{(2.10-S)}$$

donde m = kg/s, M = peso molecular en kg/kg mol, T= temperatura absoluta en K y R = 83 14.3 N . m/kg mol . K. En unidades del sistema inglés, R = 1545.3 pies . lb$_f$/lb mol . "R.

2.10C Caída de presión y factor de fricción en flujo turbulento

En el flujo turbulento, como en el laminar, el factor de fricción también depende del número de Reynolds. Sin embargo, no es posible pronosticar en teoría el factor de fricción de Famingfpara flujo turbulento, como se hizo con el flujo laminar. El factor de fricción debe determinarse de manera empírica (experimental) y no depende sólo del número de Reynolds sino también de la rugosidad de la superficie de la tubería. En el flujo laminar, la rugosidad casi no produce efecto alguno.

Por otra parte, un análisis dimensional demostraría la interdependencia del factor de fricción y estos factores. En las secciones 3.11 y 4.14 se estudian métodos para obtener los números adimensionales y su importancia.

Se han obtenido y correlacionado muchos datos experimentales de factores de fricción para tuberías de superficie tersa, así como para diversos grados de rugosidad equivalente. Con fines de diseño, se puede usar la gráfica de factor de fricción de la figura 2.10-3 para pronosticar el factor de fricción f y, por tanto, la caída de presión fricciona1 en una tubería circular. Esta gráfica representa en coordenadas log-log la variación defen función de N_{Re}. Después, el factor de fricciónfse incluye en las ecuaciones (2.10-5) y (2.10-6) para pronosticar la pérdida de fricción Δp_f o F_f.

$$\Delta p_f = 4fp \frac{\Delta L}{D}\frac{v^2}{2} \quad \text{(SI)}$$

$$\Delta p_f = 4f\rho \frac{AL}{D}\frac{v^2}{2g_c} \quad \text{(Unidades del sistema inglés)} \qquad \textbf{(2.10-5)}$$

$$F_f = \frac{\Delta p_f}{\rho} = 4f\frac{\Delta L}{D}\frac{v^2}{2} \quad \text{(SI)}$$

$$F_f = 4f\frac{\Delta L}{D}\frac{v^2}{2g_c} \quad \text{(Unidades del sistema inglés)} \qquad \textbf{(2.10-6)}$$

Para la región con número de Reynolds inferior a 2100, la línea es idéntica a la de la ecuación (2.10-7). Para un número de Reynolds superior a 4000 y flujo turbulento, la línea más baja de la figura 2.10-3 representa la línea del factor de fricción para tuberías y ductos tersos, tales como los de vidrio, cobre extruido y latón. Las otras líneas para factores de fricción más altos corresponden a diferentes factores de rugosidad, ε/D, donde es el diámetro interior de la tubería en m, y ε es el parámetro de rugosidad, que representa la altura promedio en m de las proyecciones de rugosidad de la pared (M1). En la figura 2.10-3 se incluyen valores de rugosidad equivalente para tuberías nuevas (M1). La tubería más común, el acero comercial, tiene una rugosidad de $\varepsilon = 4.6 \times 10^{-5}$ m (1.5×10^{-4} pie).

El lector debe quedar advertido en cuanto al uso de factores de fricción f de otras referencias. En este texto usamos el factor de fricción de Fanning f de la ecuación (2.10-6). Otros textos usan un factor que puede ser cuatro veces mayor.

EJEMPLO 2.1 0-3. Uso del factor de fricción en flujo turbulento

Un líquido fluye por una tubería horizontal recta de acero comercial a 4.57 m /s. El diámetro interno de la tubería es de 2.067 pulg. La viscosidad del líquido es de 4.46 cp y su densidad de 801 kg/m^3. Calcule la pérdida por fricción de energía mecánica F_f en J/kg para una sección de tubería de 36.6 m.

Solución: Se conocen los siguientes datos: del apéndice A.5, $D = 0.0525$ m, v = 4.57 m/s, $\rho = 801$ kg/m^3, AL = 36.6 m y,

$$\mu = (4.46 \text{ cp})(1 \times 10^{-3}) = 4.46 \times 10^{-3} \text{ kg/m} \cdot \text{s}$$

El cálculo del número de Reynolds es

$$N_{Re} = \frac{Dv\rho}{\mu} = \frac{0.0525(4.57)(801)}{4.46 \times 10^{-3}} = 4.310 \times 10^4$$

Por consiguiente, el flujo es turbulento. La rugosidad equivalente para tubo de acero comercial, similar a la que se encuentra en la tabla de la figura 2.10-3, es 4.6×10^{-5} m.

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{4.6 \times 10^{-5} \text{ m}}{0.0525 \text{ m}} = 0.00088$$

Para un N_{Re} de 4.310×10^4, el factor de fricción según la figura 2.10-3 es $f = 0.0060$. Sustituyendo en la ecuación (2.10-6) obtenemos la pérdida por fricción

$$F_f = 4f\frac{\Delta L}{D}\frac{v^2}{2} = \frac{4(0.0060)(36.6)(4.57)^2}{(0.0525)(2)} = 174.8 \frac{\text{J}}{\text{kg}}\left(58.5 \frac{\text{pie} \cdot \text{lb}_f}{\text{lb}_m}\right)$$

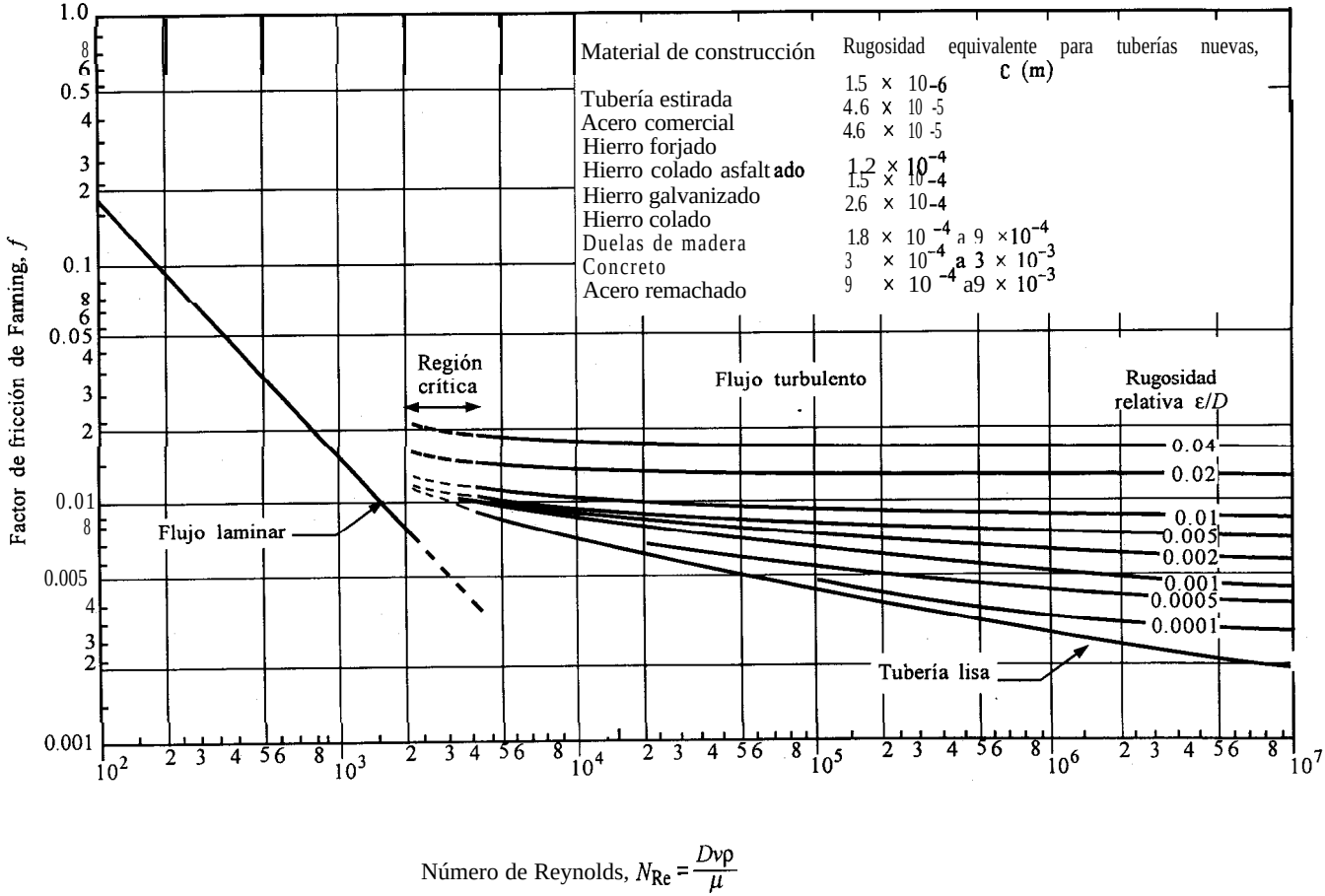


FIGURA 2.10-3. *Factores de fricción para fluidos en tubería. [Basados en L. F. Moody, Trans. A.S.M.E., 66, 671 (1944); Mech. Eng., 69, 1005 (1947). Con permiso de los editores.]*

En problemas que involucran pérdida por fricción F_f en tuberías, F_f suele ser la incógnita y, por lo general, se conocen los valores del diámetro D, la velocidad v y la longitud de la tubería, ΔL. En estos casos es posible una solución directa, como en el ejemplo 2.10-3. Si embargo, en ciertas ocasiones se conoce ya la pérdida por fricción F_f que dicta la carga del líquido. Entonces, conocido el gasto volumétrico y la longitud de tubería, es el diámetro lo que debe calcularse. Esta resolución se obtiene por aproximaciones sucesivas, pues la velocidad v aparece tanto en N_{Re} como en f, que son valores desconocidos. En otros casos, con el valor de F_f ya determinado, deben especificarse el diámetro y la longitud de la tubería. Se aplica también un método de aproximaciones sucesivas para calcular la velocidad. El ejemplo 2.1 O-4 muestra el método a usar para calcular el diámetro de la tubería cuando se establece F_f. Algunas referencias (M2) proporcionan gráficas prácticas para este tipo de cálculos.

EJEMPLO 2.10-4. Resolución por aproximaciones sucesivas del diámetro de una tubería
Se va a hacer fluir agua a 4.4 °C a través de una tubería horizontal de acero comercial con una longitud de 305 m a una velocidad de 150 gal /min. Se dispone de una carga de agua de 6.1 m para contrarrestar la pérdida por fricción F_f. Calcule el diámetro de la tubería.

Solución: Con el apéndice A.2 se determina que la densidad $\rho = 1000\ \text{kg/m}^3$ y la viscosidad μ es

$$\mu = (1.55\ \text{cp})(1 \times 10^{-3}) = 1.55 \times 10^{-3}\ \text{kg/m . s}$$

pérdida por fricción, $F_f = (6.1\ \text{m})g = (6.1)(9.80665) = 59.82\ \text{J/kg}$

$$\text{velocidad de flujo} = \left(150\frac{\text{gal}}{\text{min}}\right)\left(\frac{1\ \text{pie}^3}{7.481\ \text{gal}}\right)\left(\frac{1\ \text{min}}{60\ \text{s}}\right)(0.0283\ 17\ \text{m}^3/\text{pie}^3)$$
$$= 9.46 \times 10^{-3}\ \text{m}^3/\text{s}$$

$$\text{área de la tubería} = \frac{\pi D^2}{4}\text{m}^2 \text{ (se desconoce } D\text{)}$$

$$\text{velocidad v} = (9.46 \times 10^{-3}\ \text{m}^3/\text{s})\left(\frac{1}{\pi D^2/4\text{m}^2}\right) = \frac{0.01204}{D^2}\ \text{m/s}$$

La resolución se obtiene por prueba y error, pues v aparece en N_{Re} y f. Suponga que $D = 0.089$ m para la primera aproximación,

$$N_{Re} = \frac{Dv\rho}{\mu} = (0.089)\frac{0.01204(1000)}{(0.089)^2(1.55 \times 10^{-3})} = 8.730 \times 10^4$$

Para tubería de acero comercial y usando la figura 2.10-3. Entonces,

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{4.6 \times 10^{-5}\ \text{m}}{0.089\ \text{m}} = 0.00052$$

De la figura 2.10-3 para $N_{Re} = 8.730 \times 10^4$ y $\varepsilon/D = 0.00052$, $f = 0.0051$. Sustituyendo en la ecuación (2.10-6),

$$F_f = 59.82 = 4f\frac{\text{AL}}{D}\frac{v^2}{2} = \frac{4(0.0051)(305)(0.01204)^2}{D(2)\qquad D^4}$$

Al despejar D, D = 0.0945 m. Esto difiere del valor supuesto de 0.089 m.

Para la segunda aproximación, se supone que D es 0.0945 m.

$$N_{Re} = (0.0945)\ \frac{0.01204.\quad 1000}{(0.0945)^2} = 1.55 \times 10^{-3} = 8.220 \times 10^4$$

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{4.6 \times 10^{-5}}{0.0945} = 0.00049$$

De la figura 2.10-3, f=0.0052. Note que fcambiamuypoco con el valor de N_{Re} en la región turbulenta.

$$F_f = 59.82 = \frac{4(0.0052)(305)\ (0.01204)^2}{D(2)\qquad D^4}$$

Al resolver, D = 0.0954 m o 3.75 pulg. Esta solución sí concuerda con el valor supuesto de D.

2.10D Caída de presión y factor de fricción en el flujo de gases

Las ecuaciones y métodos estudiados en esta sección para flujo turbulento en tuberías son válidos para líquidos incompresibles. También pueden aplicarse a un gas si la densidad (o la presión) cambia en menos del 10%. En este caso, se debe usar una densidad promedio ρ_{prom} en kg/m^3 y los errores introducidos serán menores que los límites de incertidumbre del factor de fricción f. Para el caso de gases, la ecuación (2.10-5) puede reescribirse como

$$(p_1 - p_2)_f = \frac{4f\ \Delta L G^2}{D 2 \rho_{prom}} \qquad \textbf{(2.10-9)}$$

donde ρ_{prom} es la densidad a $\rho_{prom} = (p_1 + p_2)/2$. Además, el N_{Re} usado es DG/μ, donde G está en kg/m^2 . s y es una constante independiente de la variación de densidad y velocidad del gas. -La ecuación (2.10-5) también puede escribirse como

$$p_1^2 - p_2^2 = \frac{4f\ \Delta L G^2 RT}{DM} \qquad \text{(SI)}$$

$$p_1^2 - p_2^2 = \frac{4f\ \Delta L G^2 RT}{g_c DM} \qquad \text{(Unidades del sistema inglés)} \qquad \textbf{(2.10-10)}$$

donde R es 8314.3 J/kg mol · K o 1545.3 pie · lb_f/lb mol · °R y Mes el peso molecular.

La deducción de las ecuaciones (2.10-9) y (2.10-10) se aplica sólo a los casos de gases en los que el cambio de presión relativa es bastante pequeño como para que no ocurran grandes cambios en la velocidad. Si la velocidad de salida se vuelve grande, el término de la energía cinética, que se había omitido, adquiere importancia. Para cambios de presión superiores a un 10%, está ocurriendo un flujo compresible, y recomendamos al lector que consulte la sección 2.11. En el flujo adiabático en una tubería uniforme, la velocidad en la tubería no debe exceder a la velocidad del sonido.

EJEMPLO 2.10-5. Flujo de gas en línea y caída de presión

En un tubo liso que tiene un diámetro interior de 0.010 m está fluyendo nitrógeno gaseoso a 25 °C a una velocidad de 9.0 $\mathbf{kg/s \cdot m^2}$. El tubo mide 200 m de largo y el flujo puede suponerse isotérmico. La presión a la entrada del tubo es de 2.0265×10^5 Pa. Calcule la presión de salida.

Solución: La viscosidad del gas, según el apéndice A.3 es $\mu = 1.77 \times 10^{-5}$ Pa · s a $T = 298.15$ K. La presión del gas de entrada $p_1 = 2.0265 \times 10^5$ Pa, $G = 9.0$ kg/s . m^2, $D = 0.010$ m, $M = 28.02$ kg/kg mol, AL = 200 m, y $R = 83\,14.3$ J/kg mol . K. Suponiendo que la ecuación (2.10-10) es válida para este caso y que la caída de presión es menor del 10%, el número de Reynolds es

$$N_{\mathrm{Re}} = \frac{DG}{\mu} = \frac{0.010(9.0)}{1.77 \times 10^{-5}} = 5085$$

Por consiguiente, el flujo es turbulento. Usando la figura 2.10-3, $f = 0.0090$ para un tubo liso. Al sustituir en la ecuación (2.10-10),

$$d\text{-}d = \frac{4f\Delta L G^2 RT}{DM}$$

$$(2.0265 \times 10^5)^2 - p_2^2 = \frac{4(0.0090)(200)(9.0)^2(8314.3)(298.15)}{0.010(28.02)}$$

$$4.1067 \times 10^{10} - p_2^2 = 0.5160 \times 10^{10}$$

Al despejar, $p_2 = 1.895 \times 10^5$ Pa. Por tanto, puede usarse la ecuación (2.10-10) dado que la caída de presión es menor del 10%.

2.10E Efecto de la transferencia de calor en el factor de fricción

El factor de fricciónfen la figura 2.10-3 se emplea para flujo isotérmico, esto es, sin transferencia de calor. Cuando un líquido se calienta o se enfría, el gradiente de temperatura causa un cambio en las propiedades físicas de dicho fluido, en especial en lo que refiere a la viscosidad. Para cálculos de ingeniería se puede usar el siguiente método de Sieder y Tate (P1, S3) para pronosticar el factor de fricción de líquidos y gases con flujo no isotérmico.

1. Se calcula la temperatura total media t_a como el promedio de las temperaturas volumétricas del fluido de entrada y de salida.
2. Se calcula N_{Re} usando la viscosidad μ_a a t_a y se usa la figura 2.10-3 para obtener f.
3. Mediante la temperatura de la pared del tubo t_w, se determina μ_w a t_w.
4. Se calcula ψ para cualquiera que sea el caso entre los siguientes:

$$\psi = \left(\frac{\mu_a}{\mu_w}\right)^{0.17} \quad \text{(calentamiento)} \quad N_{\mathrm{Re}} > 2\,100 \qquad \textbf{(2.10-11)}$$

$$\psi = \left(\frac{\mu_a}{\mu_w}\right)^{0.11} \quad \text{(enfriamiento)} \quad N_{\mathrm{Re}} > 2100 \qquad \textbf{(2.10-12)}$$

$$\psi = \left(\frac{\mu_a}{\mu_w}\right)^{0.38} \quad \text{(calentamiento)} \quad N_{\mathrm{Re}} < 2100 \qquad \textbf{(2.10-13)}$$

$$\psi = \left(\frac{\mu_a}{\mu_w}\right)^{0.23} \qquad \text{(enfriamiento) } N_{\text{Re}} < 2100 \qquad \textbf{(2.10-14)}$$

5. El factor de fricción final se obtiene dividiendo el valor de f de la etapa 2 entre el valor de ψ de la etapa 4.

Por tanto, cuando el líquido se está calentando, ψ es mayor de 1.0 y elf final disminuye. Al enfriar el líquido ocurre lo contrario.

2.10F Pérdidas por fricción en expansiones, reducciones y otros accesorios de tubería

Las pérdidas por fricción superficial en los flujos por tuberías rectas se calculan usando el factor de fricción de Fanning. Sin embargo, si la velocidad del fluido cambia de dirección o de magnitud, se producen pérdidas por fricción adicionales. Esto se debe a la turbulencia adicional que se desarrolla por causa de remolinos y otros factores. A continuación se analizan los métodos para estimar estas pérdidas.

1. Pérdidas por ensanchamiento repentino. Si el corte transversal de una tubería aumenta de manera muy gradual, son pocas o ninguna las pérdidas adicionales que se producen. Si el cambio es repentino, se producen pérdidas adicionales debidas a los remolinos formados por la corriente que se expande en la sección ensanchada. Esta pérdida por fricción puede calcularse como sigue para flujo turbulento en ambas secciones. La ecuación (2.8-36) se dedujo en el ejemplo 2.8-4.

$$h_{\text{ex}} = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2\alpha} = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \frac{v_1^2}{2\alpha} = K_{\text{ex}} \frac{v_1^2}{2\alpha} \frac{\text{J}}{\text{kg}} \qquad \textbf{(2.10-15)}$$

donde h_{ex} es la pérdida por fricción en J/kg, K_{ex} es el coeficiente de pérdida por expansión = $(1 - A_1/A_2)^2$, v_1 es la velocidad corriente arriba en el área más pequeña en m/s, v_2 es la velocidad corriente abajo en el ensanche, y α = 1.0. Si el flujo es laminar en ambas secciones, el factor α en la ecuación es $\frac{1}{2}$. Para unidades del sistema inglés, el lado derecho de la ecuación (2. 10- 15) se divide entre g,. Además, h = pie . $\text{lb}_\text{f}/\text{lb}_\text{m}$.

2. Pérdidas por reducción repentina. Cuando el corte transversal de la tubería se reduce bruscamente, la corriente no puede fluir en forma normal en las esquinas de la contracción y los remolinos causados provocan pérdidas por fricción adicionales. Para flujo turbulento, esta pérdida es

$$h_c = 0.55\left(1 - \frac{A_2}{A_1}\right)\frac{v_2^2}{2\alpha} = K_c \frac{v_2^2}{2\alpha} \frac{\text{J}}{\text{kg}} \qquad \textbf{(2.10-16)}$$

donde h_c es la pérdida por fricción, α = 1.0 para flujo turbulento, v_2 es la velocidad promedio en la sección más pequeña o corriente abajo, y K_c es el coeficiente de pérdidas por contracción (PI), aproximadamente igual a 0.55 $(1 - A_2/A_1)$. Para flujo laminar se puede usar la misma ecuación con $\alpha = \frac{1}{2}$ (S2). Para unidades del sistema inglés, el lado derecho se divide entre g_c.

3. Pérdidas por accesorios y válvulas. Los accesorios de tuberías y las válvulas también perturban el flujo normal en una tubería y causan pérdidas por fricción adicionales. En una tubería corta con muchos accesorios, la pérdida por fricción en dichos accesorios puede ser mayor que en la tubería recta. La pérdida por fricción en accesorios y tuberías está dada por la siguiente ecuación:

$$h_f = K_f \frac{v_1^2}{2} \qquad (2.10\text{-}17)$$

donde K_f es el factor de pérdida para el accesorio o válvula y v_1 es la velocidad promedio en la tubería que conduce al accesorio. En la tabla 2.10-l se incluyen valores experimentales de K_f para flujo turbulento (P1) y en la tabla 2.10-2 para flujo laminar.

TABLA 2.10-l. *Pérdidas por fricción para flujo turbulento causadas por válvulas y accesorios*

Tipo de accesorio o válvula	*Pérdida por fricción, número de cargas de velocidad* K_f	*Pérdida por fricción, longitud equivalente de tubería recta en diámetros de tubería* L_e/D
Codo, 45"	0.35	17
Codo, 90"	0.75	35
Te	1	50
Retorno en U	1.5	75
Manguitos de acoplamiento	0.04	2
Manguitos de unión	0.04	2
Válvulas de compuerta		
Abiertas	0.17	9
Semiabiertas	4.5	225
Válvulas de globo		
Abiertas	6.0	300
Semiabiertas	9.5	475
Válvulas de ángulo, abiertas	2.0	100
Válvula de retención		
De bola	70.0	3500
De bisagra	2.0	100
Medidor de agua, disco	7.0	350

Fuente: R. H. Perry y C. H. Chilton, *Chemical Engineer's Handbook*, 5a. ed., Nueva York, Mc. Graw-Hill, Inc., 1973. Reproducido con permiso.

Como método alterno, algunos textos y referencias (B 1) incluyen datos para pérdidas en accesorios en forma de longitud equivalente de tubería, expresados en diámetros de tubería. Estos datos, que también se incluyen en la tabla 2. 10- 1 se expresan en forma de L_e/D, donde L_e es la longitud equivalente de tubería recta en m (que tiene la misma pérdida por fricción que el accesorio), y D es el diámetro interno de la tubería en m. Los valores de Ken las ecuaciones (2.10-l 5) y (2. 10- 16) pueden convertirse a valores de L_e/D multiplicando K por 50 (P 1). Los valores de L_e para los accesorios simplemente se suman a la longitud de la tubería recta para obtener el total de longitud de tubería recta equivalente que se usa en la ecuación (2.10-16).

4. Pérdidas por fricción en la ecuación de balance de energía mecánica. Las pérdidas por fricción en la tubería recta (fricción de Fanning), pérdidas por ensanchamiento, pérdidas por reducción y pérdidas por accesorios y válvulas, se incorporan en el término ΣF de la ecuación (2.7-28) para el balance de energía mecánica, de manera que

$$\Sigma F = 4f\,\frac{\Delta L}{D}\frac{v^2}{2} + K_{ex}\frac{v_1^2}{2} + K_c\frac{v_2^2}{2} + K_f\frac{v_1^2}{2} \qquad (2.10\text{-}18)$$

Si todas las velocidades v, v_1 y v_2 son iguales, entonces la factorización de la ecuación (2.10-18) para este caso especial es

$$\Sigma F = \left(4f\frac{\Delta L}{D} + K_{ex} + K_c + K_f\right)\frac{v^2}{2} \qquad (2.10\text{-}19)$$

El uso de la ecuación (2.7-28) de balance de energía mecánica junto con la ecuación (2.10-18) se ilustra con el siguiente ejemplo.

TABLA 2.10-2. *Pérdida por fricción para el flujo laminar a través de válvulas y accesorios (Kl)*

Tipo de accesorio o válvula	*Pérdida por fricción, Número de cargas de velocidad, K_f Número de Reynolds*					
	50	*100*	*200*	*400*	*1000*	*Turbulento*
Codo 90°	17	7	2.5	1.2	0.85	0.75
Te	9	4.8	3.0	2.0	1.4	1.0
Válvula de globo	28	22	17	14	10	6.0
Válvula de un solo sentido	55	17	9	5.8	3.2	2.0

EJEMPLO 2.10-6. Pérdidas por fricción y balance de energía mecánica

Un tanque de almacenamiento elevado contiene agua a 82.2 "C, tal como se muestra en la figura 2.10-4. Se desea tener una velocidad de descarga de 0.223 pie ^{3}/s en el punto 2. ¿Cuál deberá ser la altura H en pies de la superficie del agua en el tanque con respecto al punto de descarga? Se usa tubería de acero comercial, de cédula 40 y se incluyen las longitudes de las porciones rectas de la tubería.

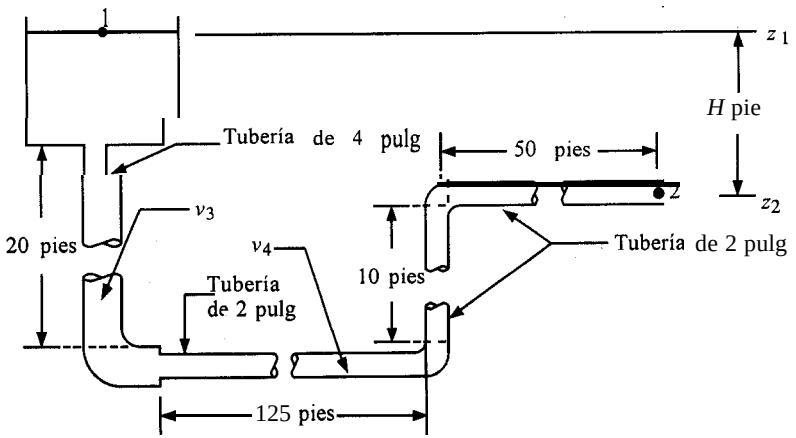


FIGURA 2.10-4. *Diagrama de flujo del proceso para el ejemplo 2.1 O-6.*

Solución: Se escribe la ecuación (2.7-28) del balance de energía mecánica para los puntos 1 y 2.

$$z_1 \frac{g}{g_c} + \frac{v_1^2}{2\alpha g_c} + \left(\frac{p_1}{\rho_2} - \frac{p_2}{\rho_2}\right) - W_S = z_2 \frac{g}{g_c} + \frac{v_2^2}{2\alpha g_c} + \sum F \qquad (2.10\text{-}20)$$

Del apéndice A.2 para el agua, p = 0.970 (62.43) = 60.52 $\text{lb}_\text{m}/\text{pie}^3$ y μ = 0.347 cp = 0.347 (6.7197×10^{-4}) = 2.33×10^{-4} $\text{lb}_\text{m}/\text{pie}$. s. Los diámetros de la tubería son

Para tubería de 4 pulg: $D_3 = \frac{4.026}{12} = 0.3353$ pie; $\quad A_3 = 0.0884$ pie^2

Para tubería de 2 pulg: $D_4 = \frac{2.067}{12} = 0.1722$ pie; $\quad A_4 = 0.02330$ pie^2

Las velocidades en las tuberías de 2 y 4 pulg son:

$$v_3 = \frac{0.223 \text{ pie}^3/\text{s}}{0.0884 \text{ pie}^2} = 2.523 \text{ pie/s} \qquad \text{(tubería de 4 pulg)}$$

$$v_4 = \frac{0.223}{0.02330} = 9.57 \text{ pie/s} \qquad \text{(tubería de 2 pulg)}$$

El término $\sum F$para las pérdidas por fricción en el sistema incluye lo siguiente: 1) pérdida por reducción a la salida del tanque, 2) pérdida por fricción en la tubería recta de 4 pulg, 3) fricción en el codo de 4 pulg, 4) pérdida por reducción al pasar de tubería de 4 pulg a tubería de 2 pulg, 5) fricción en la tubería recta de 2 pulg, y 6) fricción en los dos codos de 2 pulg. Los cálculos para estos seis puntos son como sigue:

1. *Pérdida por reducción a la salida del tanque.* Con base en la ecuación (2.10-16) y para la contracción de A_1 a A_3, puesto que A_1, el corte transversal del tanque, es muy grande en comparación con A_3,

$$K_c = 0.55\left(1 - \frac{A_3}{A_1}\right) = 0.55(1 - 0) = 0.55$$

$$h_c = K_c \frac{v_3^2}{2g_c} = 055\frac{(2523)^2}{2(32174)} = 0.054 \text{ pie . } \text{lb}_\text{f}/\text{lb}_\text{m}$$

2. *Fricción en la tubería de 4 pulg.* El número de Reynolds es

$$N_{\text{Re}} = \frac{D_3 v_3 \rho}{\mu} = \frac{0.3353(2.523)(60.52)}{2.33 \times 10^{-4}} = 2.193 \times 10^5$$

Por consiguiente, el flujo es turbulento. De la figura 2.10-3, ε = 4.6×10^{-5} m (1.5×10^{-4} pie).

$$\frac{\varepsilon}{D_3} = \frac{0.00015}{0.3353} = 0.000448$$

Entonces, para $N_{Re} = 219300$, el factor de fricción de Fanning $f = 0.0047$. Sustituyendo en la ecuación (2.10-6) para ΔL = 20.0 pies de tubería de 4 pulg.

$$F_f = 4f\frac{\Delta L}{D}\frac{v^2}{2g_c} = 4(0.0047)\frac{20.0}{0.3353}\frac{(2.523)^2}{2(32.174)} = 0.111\ \frac{\text{pie}\cdot\text{lb}_f}{\text{lb}_m}$$

3. Fricción en el codo de 4 pulg. De la tabla 2.10-1, *Kf* = 0.75. Entonces, sustituyendo en la ecuación (2.10-17),

$$h_f = K_f\frac{v^2}{2g_c} = 0.75\frac{(2.523)^2}{2(32.174)} = 0.074\ \frac{\text{pie}\cdot\text{lb}_f}{\text{lb}_m}$$

4. Pérdida por contracción de la tubería de 4 pulg a la de 2 pulg. Usando nuevamente la ecuación (2-10-16) para la contracción del área de corte transversal A_3 al área A_4,

$$K_c = 0.55\left(1 - \frac{A_4}{A_3}\right) = 0.55\left(1 - \frac{0.02330}{0.0884}\right) = 0.405$$

$$h_c = K_c\frac{v_4^2}{2g_c} = 0.405\frac{(9.57)^2}{2(32.174)} = 0.575\ \frac{\text{pie}\cdot\text{lb}_f}{\text{lb}_m}$$

5. Fricción en la tubería de 2 pulg. El número de Reynolds es

$$N_{Re} = \frac{D_4 v_4 \rho}{\mu} = \frac{0.1722(9.57)(60.52)}{2.33 \times 10^{-4}} = 4.280 \times 10^5$$

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0.00015}{0.1722} = 0.00087$$

De acuerdo con la figura 2.10-3, el factor de fricción de Fanning es f = 0.0048. La longitud total AL = 125 + 10 + 50 = 185 pies. Sustituyendo en la ecuación (2.10-6),

$$F_f = 4f\ \frac{\Delta L}{D}\frac{v^2}{2g_c} = 4(0.0048)\frac{185(9.57)^2}{(0.1722)(2)(32.174)} = 29.4\ \frac{\text{pie}\cdot\text{lb}_f}{\text{lb}_m}$$

6. Fricción en los dos codos de 2 pulg. Para un valor de $Kf = 0.75$ y dos codos,

$$h_f = 2K_f\frac{\bar{v}^2}{2g_c} = \frac{2(0.75)(9.57)^2}{2(32.174)} = 2.136\ \frac{\text{pie}\cdot\text{lb}_f}{\text{lb}_m}$$

La pérdida total por fricción $\sum F$ es la suma de (1) a (6).

$$\sum F = 0.054 + 0.111 + 0.074 + 0.575 + 29.4 + 2.136$$
$$= 32.35\ \text{pies}\cdot\text{lb}_f/\text{lb}_m$$

Al usar como referencia z_2, $z_1 = H$ pie, $z_2 = 0$. Puesto que se trata de flujo turbulento, $\alpha = 1.0$. También, $v_1 = 0$ y $v_2 = v_4 = 9.57$ pies/s. Dado que p_1 y p_2 están a 1 atm abs de presión y $\rho_1 = \rho_2$,

$$\frac{p_1}{\rho} - \frac{p_2}{\rho} = 0$$

Y puesto que no se usa bomba, $W_S = 0$. Sustituyendo estos valores en la ecuación (2.10-20),

$$H\frac{g}{g_c} + 0 + 0 - 0 = 0\frac{1(9.57)^2}{2(32.174)} + 32.35$$

Al resolver, $H(g/g_c) = 33.77$ pies · lb_f/lb_m (100.9 J/kg) y *Hes* 33.77 pies (10.3 m) de altura del nivel de agua por encima del punto de descarga.

EJEMPLO 2.10-7. Pérdidas de fricción con una bomba en el balance de energía mecánica

Se está bombeando agua a 20 °C desde un tanque hasta otro más elevado a un gasto de 50×10^{-3} m^3/s. Toda la tubería de la figura 2.10-5 es de tubo de cédula 40 de 4 pulg. La bomba tiene una eficiencia del 65%. Calcule la potencia en kW que se necesita para la bomba.

Solución: Como está escrita la ecuación de balance de energía mecánica (2.7-28), es válida entre los puntos 1 y 2, y el punto 1 es el plano de referencia.

$$\frac{1}{2\alpha}\left(v_{2\,\text{prom}}^2 - v_{1\,\text{prom}}^2\right) + g(z_2 - z_1) + \frac{p_2 - p_1}{\rho} + \sum F + W_S = 0 \qquad (2.7\text{-}28)$$

Según el apéndice A.2, para el agua, $p = 998.2$ kg $/m^3$, $\mu = 1.005 \times 10^{-3}$ Pa · s. Para una tubería de 4 pulg, de acuerdo con el apéndice A.5, $D = 0.1023$ m y $A = 8.219 \times 10^{-3}$ m^2. La velocidad en la tubería es v = $5.0 \times 10^{-3}/(8.219 \times 10^{-3}) = 0.6083$ m/s. El número de Reynolds es

$$N_{\text{Re}} = \frac{\quad}{\mu} = \frac{0.1023(0.6083)(998.2)}{1.005 \times 10^{-3}} = 6.181 \times 10^4$$

Por tanto, el flujo es turbulento.

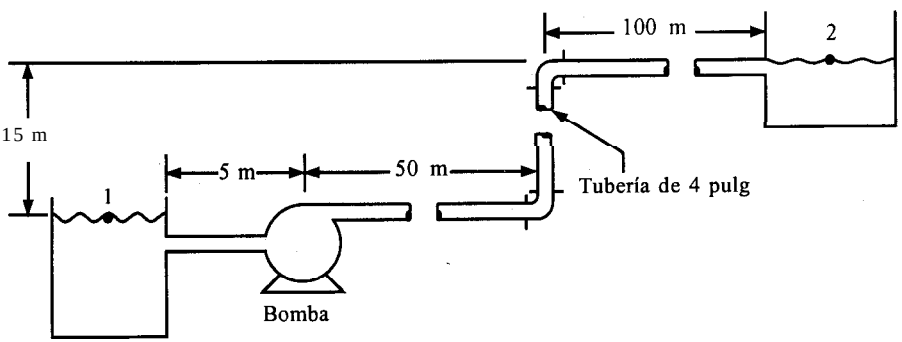


FIGURA 2.1 O-5 ***Diagrama de flujo del proceso para el ejemplo 2.10-7.***

El término $\sum F$ para pérdidas por fricción incluye lo siguiente: 1) pérdida por reducción a la salida del tanque, 2) fricción en la tubería recta, 3) fricción en los dos codos y 4) pérdidas por expansión en la entrada del tanque.

1. *Pérdida por reducción a la salida del tanque.* A partir de la ecuación (2.10-16) para una contracción de una A_1 grande a una A_2 pequeña,

$$k_c = 0.55\left(1-\frac{A_1}{A_2}\right) = 0.55\ (1-0) = 0.55$$

$$h_c = K_c\frac{v^2}{2\alpha} = (0.55)\frac{(0.6083)^2}{2(1.0)} = 0.102\ \text{J/kg}$$

2. *Fricción en la tubería recta.* De la figura 2.10-3, $\varepsilon = 4.6 \times 10^{-5}$ m y $\varepsilon/D = 4.6 \times 10^{-5}/0.1023 = 0.00045$. Entonces, para $N_{Re} = 6.181 \times 10^4$, $f = 0.0051$. Sustituyendo en la ecuación (2.10-6) para $\Delta L = 5 + 50 + 15 + 100 = 170$ m,

$$F_f = 4f\ \frac{\Delta L}{D}\frac{v^2}{2} = 4(0.0051)\frac{170}{0.1023}\frac{(0.6083)^2}{2} = 6.272\ \text{J/kg}$$

3. *Fricción en* los *dos codos.* A partir de la tabla 2.10-1, $K_f = 0.75$. Después, sustituyendo en la ecuación (2.10-7) para dos codos,

$$h_f = 2K_f\frac{v^2}{2} = 2(0.75)\frac{(0.6083)^2}{2} = 0.278\ \text{J/kg}$$

4. *Pérdida por expansión en la entrada del tanque.* Usando la ecuación (2.10-l 5),

$$K_{ex} = \left(1-\frac{A_1}{A_2}\right)^2 = (1-0)^2 = 1.0$$

$$h_{ex} = K_{ex}\frac{v^2}{2} = 1.0\frac{(0.6083)^2}{2} = 0.185\ \text{J/kg}$$

La pérdida total por fricción es $\sum F$.

$$\sum F = 0.102 + 6.272 + 0.278 + 0.185 = 6.837\ \text{J/kg}$$

Al sustituir en la ecuación (2.7-28), donde $(v_1^2 - v_2^2) = 0$ y $(p_2 - p_1) = 0$,

$$0 + 9.806(15.0 - 0) + 0 + 6.837 + W_S = 0$$

Al resolver, $W_S = 153.93$ J/kg. El gasto másico es $m = 5.0 \times 10^{-3}(998.2) = 4.991$ kg/s. Usando la ecuación (2.7-30),

$$W_S = -\eta W_p$$
$$-153.93 = -0.65\ W_p$$

Al resolver, $W_p = 236.8$ J/kg. La potencia en kW de la bomba es

$$\text{bomba kW} = mW_p = \frac{4.99(236.8)}{1000} = 1.182 \text{ kW}$$

2.106 Pérdidas por fricción en ductos no circulares

Las pérdidas por fricción en canales o ductos rectos largos de sección transversal no circular, pueden estimarse usando las mismas ecuaciones empleadas para tubos circulares cuando el diámetro en el número de Reynolds y en la ecuación (2.10-6) del factor de fricción se considera como el diámetro equivalente. El diámetro equivalente D se define como el cuádruple del radio hidráulico r_H. El radio hidráulico se define como la razón del área de la sección transversal del canal al perímetro mojado del canal sólo para el flujo turbulento. Por tanto,

$$D = 4r_H = 4\,\frac{\text{área de la sección transversal del canal}}{\text{perímetro mojado del canal}} \qquad \textbf{(2.10-21)}$$

Por ejemplo, para un tubo circular,

$$D = \frac{4(\pi D^2/4)}{\pi D} = D$$

Para un espacio anular con un diámetro externo D_1 e interno D_2,

$$D = \frac{4\left(\pi D_1^2/4 - \pi D_2^2/4\right)}{\pi D_1 + \pi D_2} = D_1 - D_2 \qquad \textbf{(2.10-22)}$$

Para un ducto rectangular con lados de a y b pies,

$$D = \frac{4(ab)}{2a+2b} = \frac{2ab}{a+b} \qquad \textbf{(2.10-23)}$$

Para canales abiertos y ductos parcialmente llenos con flujo turbulento, se usa también el diámetro equivalente y la ecuación (2.10-6) (P1). Para un rectángulo con profundidad de líquido y y anchura b,

$$D = \frac{4(by)}{b+2y} \qquad \textbf{(2.10-24)}$$

Para corriente ancha y poco profunda, de profundidad y,

$$D = 4y \qquad \textbf{(2.10-25)}$$

En las referencias (P1) se pueden encontrar las ecuaciones para flujo laminar en ductos abiertos de diversas formas de corte transversal no circular.

2.10H Sección de entrada de una tubería

Si el perfil de velocidad en la región de entrada de un tubo es plano, se necesita cierta longitud del tubo para que el perfil de velocidad se establezca por completo. Esta longitud para que se establezca un flujo completamente desarrollado se llama longitud de transición o longitud de entrada. Ésta se muestra en la figura 2.10-6 para el flujo laminar. En la entrada, el perfil de velocidad es plano, es decir, la velocidad es igual en todas las posiciones. Conforme el fluido avanza por el tubo, el grosor de la capa límite aumenta hasta que al fm se encuentran en el centro de la tubería y el perfil de velocidad parabólico se establece del todo.

La longitud de entrada aproximada L_e de una tubería que tiene un diámetro D para que se forme un perfil de velocidad completamente desarrollado de flujo laminar es *(L2)*

$$\frac{L_e}{D} = 0.0575\ N_{\mathrm{Re}} \qquad \textbf{(2.10-26)}$$

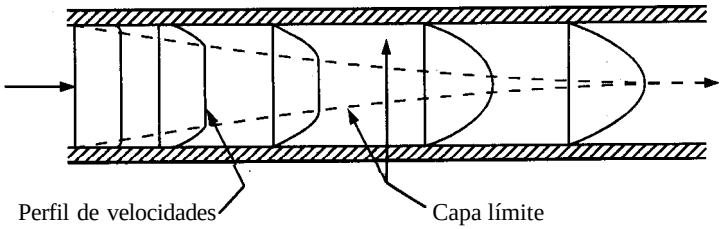


FIGURA 2.10-6. *Perfil de velocidad cerca de la entrada de una tubería para el flujo laminar.*

Para el flujo turbulento no se tiene a la mano una relación para pronosticar cuál debe ser la longitud de entrada para que se forme un perfil de velocidad turbulento completamente desarrollado. Como una aproximación, la longitud de entrada es casi independiente del número de Reynolds y está completamente desarrollada después de 50 diámetros corriente abajo.

EJEMPLO 2.10-8. Longitud de entrada para un fluido en una tubería

Por un tubo con diámetro de 0.010 m fluye agua a 20 °C a una velocidad de 0.10 m/s.

a) Calcule la longitud de entrada.

b) Calcule la longitud de entrada para el flujo turbulento.

Solución: Para el inciso a), a partir del apéndice A.2, $\rho = 998.2\ \mathrm{kg/m^3}$, $\mu = 1.005 \times 10^{-3}$ Pa . s. El número de Reynolds es

$$N_{\mathrm{Re}} = \frac{Dv\rho}{\mu} = \frac{0.010(0.10)(998.2)}{1.005 \times 10^{-3}} = 993\ 2$$

Al usar la ecuación (2.10-26) para un flujo laminar,

$$\frac{L_e}{D} = \frac{L_e}{0.01} = 0.0575(993.2) = 57.1$$

Por tanto, L_e = 0.571 m.
Para el flujo turbulento del inciso b), $L_e = 50(0.01) = 0.50$ m.

La caída de presión o factor de fricción en la longitud de entrada es más grande que en el flujo completamente desarrollado. Para el flujo laminar, el factor de fricción es más alto en la entrada *(L2)* y luego decrece gradualmente hasta el valor del flujo completamente desarrollado. Para el flujo turbulento habrá cierta porción de la entrada en la cual la capa límite sea laminar y el perfil del factor de fricción sea difícil de expresar. Como una aproximación, el factor de fricción para la longitud de entrada puede considerarse como dos a tres veces el valor del factor de fricción en el flujo completamente desarrollado.

2.10-I Selección de tamaños de tubería

En los sistemas de tubería grandes y complicados, el tamaño óptimo de tubería que debe usarse para una determinada situación depende de los costos relativos de inversión de capital, energía, mantenimiento y otros. Existen tablas y gráficas (P1) para la determinación de estos tamaños óptimos. Sin embargo, cuando se trata de instalaciones pequeñas, las aproximaciones del cálculo suelen tener suficiente precisión. En la tabla 2.10-3 se incluye una lista de valores representativos de intervalos de velocidades en tuberías.

TABLA 2.10-3 *Intervalos representativos de velocidades en tuberías de acero*

Tipo de fluido	*Tipo de flujo*	*Velocidad*	
		pies/s	*m/s*
Líquido no viscoso	Entrada a bomba	2 - 3	0.6 - 0.9
	Línea de proceso o descarga de bomba	5 - 8	1.5 - 2.5
Líquido viscoso	Entrada a bomba	0.2 - 0.8	0.06 - 0.25
	Línea de proceso o descarga de bomba	0.5 - 2	0.15 - 0.6
Gas		30 - 120	9 - 36
Vapor		30 - 75	9 - 23

2.11 FLUJO COMPRESIBLE DE GASES

2.11A Introducción y ecuación básica para el flujo en tuberías

Cuando en los gases ocurren cambios de presión mayores del 10%, las ecuaciones de pérdida de fricción (2.10-9) y (2.10-10) pueden resultar inapropiadas porque se trata de un flujo compresible. Entonces la resolución del balance de energía resulta más complicada debido a la variación de la densidad o volumen específico con los cambios de presión. El campo del flujo compresible es muy amplio y cubre una enorme gama de variaciones de geometría, presión, velocidad y temperatura. En esta sección restringimos nuestro análisis al flujo isotérmico y adiabático en tuberías uniformes y rectas, y no tratamos el flujo en boquillas, que se describe con cierto detalle en otras referencias (M2, P1).

La ecuación general de balance de energía mecánica (2.7-27) puede usarse como punto de partida. Si suponemos un flujo turbulento, de modo que α = 1.0; que no haya trabajo de eje, de modo que $W_S = 0$; y escribiendo la ecuación para una longitud diferencial dL, la ecuación (2.7-27) se convierte en

$$v\,dv + g\,dz + \frac{dp}{\rho} + dF = 0 \qquad \textbf{(2.11-1)}$$

Para un ducto horizontal, $dz = 0$. Usando sólo el término friccional de corte de pared para dF y escribiendo la ecuación (2.10-6) en forma diferencial,

$$v\,dv + V\,dp + \frac{4fv^2 dL}{2D} = 0 \qquad \textbf{(2.11-2)}$$

donde $V = 1/\rho$. Suponiendo un flujo en estado estacionario y un diámetro de tubería uniforme, G es constante y

$$G = v\rho = \frac{v}{V} \qquad \textbf{(2.11-3)}$$

$$dv = G\,dV \qquad \textbf{(2.11-4)}$$

Al sustituir las ecuaciones (2.11-3) y (2.11-4) en la (2.11-2) y reordenando,

$$G^2 \frac{dV}{V} + \frac{dp}{V} + 2f \frac{G^2}{D} L = O \qquad \textbf{(2.11-5)}$$

Ésta es la ecuación diferencial básica que debe integrarse. Para hacerlo, es necesario conocer la relación entre V y p a fin de evaluar la integral de dp/V. Esta integral depende de la naturaleza del flujo, y dos importantes condiciones que se usan son el flujo isotérmico y el adiabático en tuberías.

2.11B Flujo compresible isotérmico

Para integrar la ecuación (2.11-5) para flujo isotérmico, se supondrá un gas ideal donde

$$pV = \frac{1}{M} RT \qquad \textbf{(2.11-6)}$$

Al despejar V en la ecuación (2.11-6) y sustituyéndola en la ecuación (2.11-5), e integrando con la suposición de que f es constante,

$$G^2 \int_1^2 \frac{dV}{V} + \frac{M}{RT} \int_1^2 p\,dp + 2f \frac{G^2}{D} \int_1^2 dL = 0 \qquad \textbf{(2.11-7)}$$

$$G^2 \ln \frac{V_2}{V_1} + \frac{M}{2RT}\left(p_2^2 - p_1^2\right) + 2f \frac{G^2}{D} \Delta L = 0 \qquad \textbf{(2.11-8)}$$

Sustituyendo V_2/V_1 por p_1/p_2 y reordenando,

$$p_1^2 - p_2^2 = \frac{4f\Delta L G^2 RT}{DM} + \frac{2G^2 RT}{M} \ln \frac{p_1}{p_2} \qquad \textbf{(2.11-9)}$$

donde M = peso molecular en kg masa /kg mol, R = 83 14.34 N · m / kg mol . K y T = temperatura K. La cantidad $RT/M = p_{prom}/\rho_{prom}$, donde $p_{prom} = (p_1 + p_2)/2$ y ρ_{prom}, es la densidad promedio a T y p_{prom}. En unidades del sistema inglés, R = 1545.3 pies . lb_f/lb mol · °R y los términos del lado derecho se dividen entre g_c. De esta manera, la ecuación *(2.11-g)* se transforma en

$$(p_1 - p_2)_f = \frac{4f\Delta L G^2}{2D\rho_{prom}} + \frac{G^2}{\rho_{prom}} \ln \frac{p_1}{p_2} \tag{2.11-10}$$

El primer término de la derecha en las ecuaciones (2.1 l-9) y (2.1 l-10) representa la pérdida por fricción tal como está dada por las ecuaciones (2.10-g) y (2.10-10). El último término en ambas igualdades suele ser despreciable en ductos de longitud considerable, a menos que la caída de presión sea muy alta.

EJEMPLO 2.11-I. Flujo compresible de un gas en una linea de tubería

Se está bombeando gas natural, que es esencialmente metano, a través de una tubería de 1.016 m DI por una distancia de 1.609×10^5 m (D1) a una velocidad de 2.077 kg mol/s. Puede suponerse que la línea es isotérmica a 288.8 K. La presión p_2 en el extremo de descarga de la linea es 170.3×10^3 Pa y es absoluta. Calcule la presión p_1 en la admisión de la línea. La viscosidad del metano a 288.8 K es de 1.04×10^{-5} Pa . s.

Solución: D = 1.016 m, $A = \pi D^2/4 = \pi(1.016)^2/4 = 0.8107$ m^2. Entonces,

$$G = \left(2.077 \frac{\text{kg mol}}{\text{s}}\right)\left(16.0 \frac{\text{kg}}{\text{kg mol}}\right)\left(\frac{1}{0.8107\ \text{m}^2}\right) = 41.00 \frac{\text{kg}}{\text{s} \cdot \text{m}^2}$$

$$N_{Re} = \frac{DG}{\mu} = \frac{1.016(41.00)}{1.04 \times 10^{-5}} = 4\ 005 \times 10^6$$

De la figura 2.10-3, $\varepsilon = 4.6 \times 10^5$ m.

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{4.6 \times 10^{-5}}{1.016} = 0.0000453$$

El factor de fricción es $f = 0.0027$.

Para despejar p_1 en la ecuación (2.1 1-9), se debe usar el método de aproximaciones sucesivas. Estimando p_1 en 620.5×10^3 Pa, R = 8314.34 N · m/kg mol . K y $\Delta L = 1.609$ P $\times 10^5$ m. Sustituyendo en la ecuación (2.11-9),

$$p_1^2 - p_2^2 = \frac{4(0.0027)(1.609 \times 10^5)(41.00)^2(8314.34)(288.8)}{1.016(16.0)} +$$

$$+ \frac{2(41.00)^2(8314.34)(288.8)}{(16.0)} \ln \frac{620.5 \times 10^3}{170.3 \times 10^3}$$

$$= 4.375 \times 10^{11} + 0.00652 \times 10^{11} = 4.382 \times 10^{11}\ (\text{Pa})^2$$

Ahora, $P_2 = 170.3 \times 10^3$ Pa. Sustituyendo esto en la anterior y despejando p_1, $p_1 = 683.5 \times 10^3$ Pa. Sustituyendo este nuevo valor de p_1 en la ecuación (2.11-g) y despejando p_1, el resultado final es $p_1 = 683.5 \times 10^3$ Pa. Nótese que en este caso el último término de la ecuación (2.1 l-9) es casi despreciable.

Cuando la presión corriente arriba p_1 permanece constante, el gasto másico G cambia conforme varía la presión corriente abajo p_2. Según la ecuación (2.1 1-9), cuando $p_1 = p_2$, G = 0 y cuando $p_2 = 0$, G = 0. Esto indica que en algún valor intermedio de p_2, el flujo G debe ser un máximo. Esto significa que el flujo es máximo cuando $dG/dp_2 = 0$. Desarrollando esta diferenciación en la ecuación (2.11-g) para p_1 yfconstantes, y despejando G,

$$G_{máx} = \sqrt{\frac{Mp_2^2}{RT}} \tag{2.11-11}$$

Al usar las ecuaciones (2.1 l-3) y (2.1 1-6),

$$v_{máx} = \sqrt{\frac{RT}{M}} = \sqrt{p_2 V_2} \tag{2.11-12}$$

Ésta es la ecuación para la velocidad del sonido en el fluido en las condiciones del flujo isotérmico. Así, para el flujo isotérmico compresible existe un flujo máximo para una determinada p_1 corriente arriba, y una reducción adicional de p_2 no provocará ningún incremento adicional en el flujo. Mayores detalles, como la longitud de la tubería y la presión en condiciones de flujo máximo se analizan en otros libros (D1, M2, P1).

EJEMPLO 2.11-2. Flujo máximo para el flujo compresible de un gas

Para las condiciones del ejemplo 2.1 1- 1, calcule la velocidad máxima que puede obtenerse y la velocidad del sonido en esas condiciones. Compare los resultados con los del ejemplo 2.11-1.

Solución: Al usar la ecuación (2.1 1- 12) y las condiciones del ejemplo 2.1 1-1,

$$v_{máx} = \sqrt{\frac{RT}{M}} = \sqrt{\frac{8314(288.8)}{16.0}} = 387.4 \text{ m/s}$$

Ésta es la velocidad máxima que puede obtenerse si se reduce p_2. Ésta es también la velocidad del sonido en el fluido en las condiciones del flujo isotérmico. Para comparar esto con el ejemplo 2.1 1-1, la velocidad real a la presión de salida p_2 se obtiene combinando las ecuaciones (2.1 l-3) y (2.11-6) para obtener

$$v_2 = \frac{RTG}{p_2 M} \tag{2.11-13}$$

$$= \frac{8314.34(288.8)(41.00)}{(170.3 \times 10^3)16.0} = 36.13 \text{ m/s}$$

2.11C Flujo adiabático compresible

Cuando la transferencia de calor a través de la pared de una tubería es despreciable, el flujo de gas en flujo compresible en una tubería recta de sección transversal constante es adiabático. La ecuación (2.1 l-5) se ha integrado para flujo adiabático y los detalles se muestran en otras obras (D1, M1, P1). También se dispone de diagramas útiles para resolver este caso (P1). Los resultados para el flujo adiabático suelen desviarse muy poco de los del flujo isotérmico, especialmente en las tuberías largas. Para tuberías muy cortas y caídas de presión relativamente grandes, la velocidad de flujo adiabático es mayor que la del isotérmico, pero la diferencia máxima posible es de cerca del 20% (D1). Para tuberías cuya longitud es de cerca de 1000 diámetros o más, la diferencia generalmente es de menos del 5%. La ecuación (2.11-8) también puede usarse cuando el cambio de temperatura en los conductos es pequeño, utilizando una temperatura promedio aritmética.

Al emplear los mismos procedimientos para encontrar un flujo máximo a los que se usaron en el caso isotérmico, el flujo máximo ocurre cuando lavelocidad en el extremo corriente abajo de las tuberías es la velocidad sónica para el flujo adiabático. Esto es,

$$v_{máx} = \sqrt{\gamma p_2 V_2} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \qquad \textbf{(2.11-14)}$$

donde $\gamma = c_p / c_v$, es la razón de capacidades caloríficas. Para el aire, $\gamma = 1.4$. Por consiguiente, la velocidad máxima para flujo adiabático es de alrededor del 20% más grande que para el flujo isotérmico. La tasa de flujo no puede estar limitada, en la práctica, por las condiciones de flujo en la tubería, sino por el desarrollo de una velocidad sónica en un accesorio o válvula de la tubería. Por eso deben seleccionarse con sumo cuidado los accesorios para las tuberías destinadas al flujo compresible. En otras obras, (D1, M2, P1) se dan mayores detalles, como la longitud de la tubería y la presión en condiciones de flujo máximo.

Un parámetro conveniente que suele usarse en las ecuaciones de flujo compresible es el número de Mach, N_{Ma}, que se define como la razón de v, la velocidad del fluido en el conducto, a $v_{máx}$ la velocidad del sonido en el fluido en las condiciones de flujo reales.

$$N_{Ma} = \frac{v}{v_{máx}} \qquad \textbf{(2.11-15)}$$

Con un número de Mach de 1.0, el flujo es sónico. A valores menores de 1.0, el flujo es subsónico, y es supersónico si el número es mayor de 1.0.

PROBLEMAS

2.2-l. ***Presión en un tanque esférico.*** Calcule la presión en $lb/pulg^2$ abs y en kN/m^2 en el fondo de un tanque esférico que contiene petróleo y cuyo diámetro mide 8.0 pies. La parte superior del tanque está abierta a la atmósfera con una presión de 14.72 $lb/pulg^2$ abs. La densidad del petróleo es 0.922 g/cm^2,

Respuesta: 17.92 $lb_f/pulg^2$ (psia), 123.5 kN/m^2

2.2-2. Presión con dos líquidos: Hg y agua. En el fondo de un tubo de ensayo abierto a 293 K se colocan 12.1 cm de Hg y encima 5.6 cm de agua. Calcule la presión en el fondo del tubo cuando la atmósfera es de 756 mm de Hg. Use la densidad de 13.55 g/cm^3 para el agua. Proporcione la respuesta en términos de $dina/cm^2$, $lb/pulg^2$ abs y kN/m^2. Vea los factores de conversión en el apéndice A. 1.

Respuesta: 1.175×10^6 $dina/cm^2$, 17.0 $lb/pulg^2$ abs, 2.3 $lb/pulg^2$ man 117 kN/m^2

2.2-3. ***Carga y presión de un fluido combustible.*** La presión en la parte superior de un tanque de combustible es de 180.6 kN/m^2. La profundidad del líquido en el tanque es de 6.4 m y la densidad del combustible de 825 kg/m^3. Calcule la carga del líquido en m correspondiente a la presión absoluta en el fondo del tanque.

2.2-4. Medición depresión. Un manómetro abierto en forma de U parecido al de la figura 2.2-4a, se usa para medir la presión absoluta p_a en un recipiente con aire. La presión p_b es la presión atmosférica, 754 mm Hg. El líquido en el manómetro es agua, que tiene una densidad de 1000 kg/m^3. Suponga que la densidad ρ_B es de 1.30 kg/m^3 y que es muy pequeña la distancia z. La lectura de R es de 0.415 m. Calcule p_a en psia y en kPa.

Respuesta: p_a = 15.17 psia, 104.6 kPa.

2.2-5. Medición depequeñas diferencias depresión. El manómetro en forma de U de dos fluidos se usa para medir la diferencia de la presión en dos puntos en una línea que contiene aire a una presión de 1 atm abs. El valor de $R_0 = 0$ para presiones iguales. El fluido más ligero es un hidrocarburo con una densidad de 8 12 kg $/m^3$ y el agua más pesada tiene una densidad de 998 kg $/m^3$. Los diámetros internos del tubo en forma de U y del recipiente son de 3.2 mm y de 54.2 mm, respectivamente. La lectura R del manómetro es de 117.2 mm. Calcule la diferencia de presión en mm Hg y en pascales.

2.2-6. Presión en un laboratorio marino. Se va a diseñar un laboratorio marino de 5.0 m de alto para que resista la inmersión a 150 m, medidos desde el nivel del mar hasta la parte superior del laboratorio. Calcule la presión en la parte superior del laboratorio marino y también la variación de presión en un costado del cuarto, medidas como la distancia x en m desde la parte superior del laboratorio hacia abajo. La densidad del agua de mar es 1020 kg $/m^3$.

Respuesta: $p = 10.00(150 + x)$ kN/m^2

2.2-7. Medida de la diferencia de presión en recipientes. En la figura 2.2-5b se usa el manómetro diferencial para medir la diferencia de presión entre dos recipientes. Deduzca la ecuación de la diferencia de presión $p_A - p_B$ en términos de la altura y la densidad de los líquidos.

2.2-8. Diseño de un asentador y separadorpara líquidos inmiscibles. Se va a diseñar un asentador-separador cilíndrico vertical para separar una mezcla que fluye a 20.0 m^3/h y que contiene vohímenes iguales de petróleo ligero líquido (ρ_B = 875 kg/m^3) y una solución diluida de agua de lavado (ρ_A = 1050 kg $/m^3$). Los experimentos de laboratorio indican que se requiere un tiempo de asentamiento de 15 mm para que se separen adecuadamente las dos fases. Para propósitos ‘del diseño, utilice un tiempo de asentamiento de 25 mm y calcule el tamaño de los recipientes que se necesitan; calcule también los niveles que deben tener los líquidos ligero y pesado en el recipiente y la altura h_{A2} del rebosamiento del líquido pesado. Suponga que los extremos del recipiente son casi planos, que el diámetro del recipiente es igual que su altura y que un tercio del volumen es espacio para el vapor, abierto a la atmósfera. Emplee la nomenclatura dada en la figura 2.2-6.

Respuesta: h_{A2} = 1.537 m

2.3-1. Transporte molecular de una propiedad con difusividad variable. Se está transportando una propiedad a través de un fluido en estado estacionario por un área de corte transversal constante. En el punto 1 la concentración Γ_1 es 2.78 $\times 10^{-2}$ en cantidad de propiedad/m^3 y 1.50 $\times 10^{-2}$ en el punto 2 estando ambos puntos a una distancia de 2.0 m entre sí. La difusividad depende de la concentración Γ, como sigue:

$$\delta = A + B\Gamma = 0.150 + 1.65\Gamma$$

a) Deduzca la ecuación integrada para el flujo en términos de Γ_1 y Γ_2. Después, calcule el flujo. b) Calcule Γ en z = 1.0 m y grafique Γ en función de z para los tres puntos.

Respuesta: a) $\psi_z = [A(\Gamma_1 - \Gamma_2) + (B/2)(\Gamma_1^2 - \Gamma_2^2)]/(z_2 - z_1)$

2.3-2. Integración de la ecuación general de propiedad para el estado estacionario. Integre la ecuación general de propiedad (2.3-l 1) para estado estacionario y sin generación entre los puntos Γ_1 en z_1 y Γ_2 en z_2. La ecuación final deberá relacionar Γ con z.

Respuesta: $\Gamma = (\Gamma_2 - \Gamma_1)(z - z_1)/(z_2 - z_1) + \Gamma_1$

2.4-l. ***Esfuerzo cortante en aceite de soya.*** Con referencia a la figura 2.4-1, la diferencia entre las dos placas paralelas es 0.00914 m y la placa inferior se desplaza a una velocidad relativa 0.366 m/s mayor que la superior. El fluido usado es aceite de soya con viscosidad de 4×10^{-2} Pa · s a 303 K (Apéndice A.4).

a) Calcule el esfuerzo cortante τ y la velocidad cortante en unidades de lb fuerza, pie y s.

b) Repita en unidades SI.

c) Si se usa glicerina a 293 K, con viscosidad de 1.069 kg/m · s en lugar de aceite de soya, ¿qué velocidad relativa se necesitará con la misma distancia entre las placas para obtener el mismo esfuerzo cortante en el inciso a)? Además, ¿cuál será la nueva velocidad cortante?

Respuesta: a) Esfuerzo cortante = 3.34×10^{-2} lb_f/pie^2, velocidad cortante = 40 s^{-1}; b) 1.60 N/m^2; c) velocidad relativa = 0.01369 m/s, velocidad cortante = 1.50 s^{-1}.

2.4-2. Esfuerzo cortantey velocidad cortante en fluidos. En la figura 2.4-l se está empujando la placa inferior a una velocidad relativa 0.40 m/s mayor que la placa superior. El fluido que se usa es agua a 24 "C.

a) ¿Qué tan separadas deben colocarse las placas para que el esfuerzo cortante τ sea 0.30 N/m^2? Calcule también la velocidad cortante.

b) Si en vez de agua se usa aceite con una viscosidad de 2.0×10^{-2} Pa · s con la misma separación entre las placas y la misma velocidad que en el inciso a), ¿cuáles son el esfuerzo cortante y la velocidad cortante?

2.5-l. ***Número de Reynolds para flujo de leche.*** Un flujo de leche entera a 293 K con densidad de 1030 kg/m^3 y viscosidad de 2.12 cp, pasa a velocidad de 0.605 kg/s por una tubería de vidrio de 63.5 mm de diámetro.

a) Calcule el número de Reynolds. ¿Es turbulento el flujo?

b) Calcule la velocidad del flujo en m^3/s necesaria para un número de Reynolds de 2100 y la velocidad en m /s.

Respuesta: a) $N_{Re} = 5723$ flujo turbulento

2.5-2. Diámetro de la tubería y número de Reynolds. Se está bombeando aceite dentro de una tubería de 10.0 mm de diámetro con número de Reynolds de 2100. La densidad del aceite es de 855 kg/m^3 y su viscosidad es de 2.1×10^{-2} Pa . s.

a) ¿Cuál es la velocidad en la tubería?

b) Se desea conservar el mismo numero de Reynolds de 2100 y la misma velocidad que en el inciso a) usando un segundo fluido con una densidad de 925 kg/m^3 y una viscosidad de 1.5×10^{-2} Pa . s. ¿Cuál debe ser el diámetro de la tubería que se use?

2.6-l. Velocidadpromediopara el balance de masa en el flujo que escurrepor una placa vertical. Para una capa de líquido que fluye con flujo laminar en la dirección z hacia abajo de una placa o superficie vertical, el perfil de velocidad es

$$v_z = \frac{\rho g \delta^2}{2\mu}\left[1 - \left(\frac{x}{\delta}\right)^2\right]$$

donde δ es el grosor de la capa, x es la distancia desde la superficie del líquido hacia la placa, y v_z es la velocidad a una distancia x desde la superficie libre.

a) ¿Cuál es la máxima velocidad $v_{z\ máx}$?

b) Deduzca la expresión para la velocidad promedio $v_{z\ prom}$ y relaciónela con $v_{z\ máx}$.

Respuesta: a) $v_{z\ máx} = \rho g \delta^2/2\mu$, b) $v_{z\ prom} = \frac{2}{3} v_{z\ máx}$

2.6-2. *Flujo de líquido en una tubería y balance de masa.* Un hidrocarburo líquido entra en el sistema de flujo simple que se muestra en la figura 2.6-l con una velocidad promedio de 1.282 m/s, donde At = 4.33 $\times 10^{-3}$ m^2 y ρ_1 = 902 kg /m^3. El líquido se calienta en el proceso y la densidad de salida es de 875 kg/m^3. El área de corte transversal en el punto 2 es de 5.26 $\times 10^{-3}$ m^2. El proceso ocurre en estado estacionario.

a) Calcule el flujo másico m a la entrada y a la salida.

b) Calcule la velocidad promedio v en 2 y la velocidad de masa G en 1.

Respuesta: a) $m_1 = m_2 = 5.007$ kg/s, b) $G_1 = 1156$ kg/s . m^2

2.6-3. *Velocidad promedio para el balance de masa en flujo turbulento.* El perfil de velocidades para un flujo turbulento en un tubo circular liso, con radio R, varía de acuerdo con la siguiente expresión cuando el número de Reynolds es aproximadamente 1 0^5:

$$v = v_{máx}\left(\frac{R-r}{R}\right)^{1/7}$$

donde r es la distancia radial desde el centro y $v_{máx}$ es lavelocidad máxima en el centro. Deduzca la ecuación para relacionar la velocidad promedio (velocidad volumétrica) v_{prom} con $v_{máx}$ para un flujo incomprimible. (Sugerencia: La integración puede simplificarse sustituyendo z por $R - r$.)

Respuesta: $v_{prom} = \left(\frac{49}{60}\right)v_{máx} = 0.817v_{máx}$

2.6-4. *Velocidad volumétrica para el flujo entre placas paralelas.* Un fluido que fluye con flujo laminar en la dirección x entre dos placas paralelas tiene un perfil de velocidad dado por la siguiente expresión:

$$v_x = v_{x\ máx}\left[1-\left(\frac{y}{Y_0}\right)^2\right]$$

donde $2y_0$ es la distancia entre las placas, y es la distancia a la línea central y v_x es la velocidad en la dirección x en la posición y. Deduzca una ecuación que relacione v_{prom} (velocidad volumétrica o promedio) con $v_{x\ máx}$.

2.6-5. *Balance global de masa para procesos de dilución.* Un recipiente de almacenamiento bien agitado, contiene 10000 kg de solución de una solución de metano1 diluido (w_A = 0.05 fracción masa de alcohol). De pronto, se introduce en el tanque un flujo constante de 500 kg/min de agua pura y se empieza a extraer la disolución auna tasa constante de 500 kg/min. Estos dos flujos son continuos y permanecen constantes. Suponiendo que las densidades de las soluciones son iguales y que el contenido total del tanque permanece igual a 10000 kg de solución, calcule el tiempo para que el contenido de alcohol descienda hasta el 1 .0% en peso.

Respuesta: 32.2 mm

2.6-6. *Balanceglobal de masaparaprocesos de estado no estacionario.* Un recipiente de almacenamiento, bien agitado, contiene 500 kg de solución total con una concentración del 5.0% de sal. De pronto se introduce en el tanque un flujo constante de 900 kg /h de una solución salina que contiene 16.67% de sal, y también se da inicio a una extracción constante a razón de 600 kg/h. En adelante estos dos flujos permanecen constantes. Deduzca una ecuación que relacione la concentración decreciente en la salida en función del tiempo. Calcule también la concentración después de 2.0 h.

2.6-7. *Balance de masa para el flujo de una solución de sacarosa.* Una solución de sacarosa (azúcar) al 20% en peso y con densidad de 1074 kg/m^3 fluye por el mismo sistema de tuberías del ejemplo 2.6-1(Fig. 2.6-2). El gasto de entrada a la tubería 1 es 1.892 m^3/h. El flujo se divide en partes iguales en las tuberías 3. Calcule lo siguiente.

a) Velocidad en m/s en las tuberias 2 y 3.
b) La velocidad de masa G en $kg/m^2 \cdot s$ en las tuberias 2 y 3

2.7-1. ***Factor de corrección para la velocidad en la energía cinéticapara flujo turbulento.*** Deduzca la ecuación que determine el valor de α, el factor de corrección de la velocidad de la energía cinética, para flujo turbulento. Use la ecuación (2.7-20) para aproximar el perfil de velocidad y sustitúyalo en la ecuación (2.7-15) para obtener $(v^3)_{prom}$. Después, utilice las ecuaciones (2.7-20), (2.6-17) y (2.7-14) para obtener α.

Respuesta: α = 0.9448

2.7-2. Flujo entreplacasparalelas y factor de corrección de la energía cinética. En el problema 2.6-4 se da la ecuación para el perfil de velocidad para un fluido que corre con flujo laminar entre dos placas paralelas. Deduzca la ecuación para determinar el valor del factor de corrección de la velocidad de la energía cinética, α. [Sugerencia: Primero deduzca una ecuación que correlacione v con v_{prom}. Luego deduzca la ecuación para $(v^3)_{prom}$ y, por último, correlacione estos resultados con α.]

2.7-3. Caída de temperatura en una válvula de estrangulación y balance de energía. Por una válvula de estrangulación adiabática (no hay pérdida de calor o trabajo externo) fluye una corriente de vapor. El vapor entra al punto 1 corriente arriba de la válvula, a 689 kPa abs y 171.1°C y sale de la válvula (punto 2) a 359 kPa. Calcule la temperatura t_2 a la salida. [Sugerencia: Use la ecuación (2.7-21) para el balance de energía y desprecie los términos de energía cinética y energía potencial, tal como se hizo en el ejemplo 2.7-l. Obtenga la entalpía H_1 de las tablas de vapor del apéndice 2. En el caso de H_2, se tendrá que llevar a cabo una interpolación lineal de los valores de la tabla para obtener t_2.] Use unidades SI.

Respuesta: t_2 = 160.6 °C

2.7-4. Balance de energía en un intercambiador de calor y una bomba. Se está bombeando agua a 93.3 °C desde un gran tanque de almacenamiento a 1 atm abs, a velocidad de 0.189 m^3/min por medio de una bomba. El motor que impulsa a la bomba suministra energía a la velocidad de 1.49 kW. El agua se bombea a través de un intercambiador de calor, donde cede 704 kW de calor y después se vierte a un tanque de almacenamiento abierto situado a una elevación de 15.24 m con respecto al primer tanque. ¿Cuál es la temperatura final del agua que llega al segundo tanque? Además, ¿cuál es la ganancia de entalpía del agua debida a la adición de trabajo? (Sugerencia: Asegúrese de usar las tablas de vapor para la entalpía del agua. Desprecie los cambios de energía cinética pero incluya los de energía potencial.)

Respuesta: t_2 = 38.2 “C, ganancia de trabajo añadido = 0.491 kJ/kg

2.7-5. Caldera de vapor y balanceglobal de energía. Cierta cantidad de agua líquida a presión de 150 kPa entra a una caldera a 24 °C por una tubería a una velocidad promedio de 3.5 m/s con flujo turbulento. El vapor sale a un altura de 25 m sobre la entrada del líquido a 150 °C y a 150 kPa absolutos, y la velocidad en la línea de salida es de 12.5 m/s con flujo turbulento. El proceso ocurre en estado estacionario. ¿Cuánto calor debe agregarse por kg de vapor?

2.7-6. Balance de energía en un sistema de flujo con una bomba y un intercambiador de calor. El agua almacenada en un gran tanque de almacenamiento, bien aislado, a 2 1 .O °C y a presión atmosférica, se está bombeando en estado estacionario desde ese tanque por medio de una bomba a razón de 40 m^3/h. El motor que impulsa la bomba proporciona energía a razón de 8.5 kW. El agua se usa como medio refrigerante y pasa por un intercambiador de calor donde se le agregan 255 kW de calor. Después el agua calentada fluye hacia un segundo tanque grande abierto, que está ubicado 2.5 m más arriba que el primero. Determine la temperatura final del agua que pasa al segundo tanque.

2.7-7. Balance de energía mecánica en el bombeo de aceite de soya. Se está bombeando aceite de soya a través de un tubo de diámetro constante y con una velocidad de flujo en estado estacionario. Una bomba suministra un flujo de 209.2 J/ kg masa de fluido. La presión absoluta de entrada de la tubería a la bomba es 103.4 kN/m^2. La sección de salida de la tubería corriente

abajo de la bomba está 3.35 m por arriba de la entrada y la presión de salida es 172.4 kN/m^2. Las tuberías de entrada y salida tienen el mismo diámetro. El flujo es turbulento. Calcule la pérdida por fricción en el sistema. Véase en el apéndice A.4 las propiedades del aceite de soya. La temperatura es de 303 K.

Respuesta: $\sum F = 101.3$ J/kg

2.7-8. ***Potencia de una bomba para un sistema de salmuera.*** Una bomba suministra 0.200 $pies^3/s$ de salmuera con densidad de 1.15 g/cm^3 a un tanque abierto con un área extensa de corte transversal. La línea de aspiración tienen un diámetro interior de 3.548 pulg y el diámetro de la línea de descarga de la bomba mide 2.067 pulg. El flujo de descarga pasa a un tanque abierto y el extremo abierto de esta línea está 75 pies por encima del nivel del líquido en el tanque de alimentación. Si las pérdidas por fricción en el sistema de tuberías son 18.0 pies · lb_f/lb_m, ¿qué presión deberá desarrollar la bomba y cuál es la potencia de la bomba si la eficiencia es de 70%? El flujo es turbulento.

2.7-9. Mediciones de presión en flujos. Un flujo de agua, cuya densidad mide 998 kg/m^3, tiene velocidad de 1.676 m/s en una tubería horizontal de 3.068 pulg de diámetro, a presión p_1 de 68.9 kPa abs. Después pasa a otra tubería con diámetro interior de 2.067 pulg.

a) Calcule la nueva presión p_2 en la tubería de 2.067 pulg. Suponga que no hay pérdida por fricción.

b) Si la tubería es vertical y el flujo va hacia arriba, calcule la misma presión p_2. La presión p_2 se mide a 0.457 m por encima de p_1.

Respuesta: a) $p_2 = 63.5$ kPa; b) $p_2 = 59.1$ kPa

2.7-10. ***Drenaje de un tanque de aceite de semilla de algodón.*** Un tanque cilíndrico de 1.52 m de diámetro y 7.62 m de altura contiene aceite de semilla de algodón con densidad de 917 kg/m^3. El tanque está abierto a la atmósfera. Cerca del fondo del tanque hay una tobera de descarga de diámetro interior igual a 15.8 mm y con área de corte transversal A_2. La superficie del líquido está a $H = 6.1$ m por encima de la línea central de la tobera. Se abre la tobera de descarga y se drena el líquido desde $H = 6.1$ m hasta $H = 4.57$ m. Calcule el tiempo en segundos necesario para efectuar esta operación. [Sugerencia: La velocidad en la superficie del depósito es pequeña y se puede despreciar. Se puede calcular la velocidad v_2 m/s en la tobera para cualquier valor de H, aplicando la ecuación (2.7-36). Sin embargo, H y, por lo tanto, v_2 son variables. Establezca un balance de masa en estado no estacionario como sigue. El gasto volumétrico en el tanque es $(A_t\, dH)/dt$, donde A_t es la sección transversal del tanque en m^2 y $A_t\, dH$ son los m^3 del líquido que fluyen en dt s. Esta velocidad debe ser igual al negativo del gasto volumétrico en la tobera, $-A_2 v_2$ m^3/s. La presencia del signo negativo se debe a que dH es el valor negativo de v_2. Reordene esta ecuación e integre entre $H = 6.1$ a $t = 0$ y $H = 4.57$ m a $t = t_F$.]

Respuesta: $t_F = 1380$ s

2.7-11. ***Pérdidaporfricción en un sistema de energía eléctrica con turbinas de agua.*** Hay agua almacenada en un depósito elevado. Para generar electricidad, el agua fluye desde el depósito hacia abajo por un conducto grande hasta una tubería y después por otro conducto de tamaño similar. En un punto del conducto que esta 89.5 m arriba de la tubería, la presión es de 172.4 kPa, y aun nivel 5 m debajo de la turbina, la presión es de 89.6 kPa. La tasa del flujo del agua es de 0.800 m^3/s. La salida del eje de la turbina es de 658 kW y la densidad del agua es de 1000 kg/m^3. Si la eficiencia de la turbina para convertir la energía mecánica proporcionada por el fluido al eje de la turbina es de 89% ($\eta_t = 0.89$), calcule la pérdida de fricción en la turbina en J/kg. Advierta que en la ecuación de balance de la energía mecánica, el W_S es igual a la salida del eje de la turbina por encima de η_t.

Respuesta: $\sum F = 85.3$ J/kg

2.7-12. ***Bombeo de petróleo por una tubería.*** Una tubería instalada para atravesar una gran distancia conduce petróleo a velocidad de 795 m^3/día. La presión del petróleo alcanza 1793 kPa man al salir de la estación de bombeo 1 .A la entrada de la estación 2, la presión es de 862 kPa man. La segunda estación está 17.4 m más alta que la primera. Calcule la pérdida de trabajo (pérdida por fricción $\sum F$) en J/kg masa de petróelo. La densidad del aceite es de 769 kg/m^3.

2.7-13. ***Prueba de una bomba centrífuga y balance de energía mecánica.*** Se está probando una bomba centrífuga para determinar su rendimiento durante la prueba, la lectura de la presión en la línea de succión de 0.305 m de diámetro, adyacente a la cubierta de la bomba, es de -20.7 kPa (vacío por debajo de la presión atmosférica). En la línea de descarga, con un diámetro de 0.254 m en un punto que se encuentra 2.53 m arriba de la línea de succión, la presión manométrica es de 289.6 kPa. El flujo de agua desde la bomba se mide en 0.1133 m^3/s. (La densidad puede suponerse de 1000 kg/m^3. Calcule la salida en kW de la bomba.

Respuesta: 38.11kW

2.7-14. ***Pérdida por fricción en una bomba y sistema de flujo.*** Cierta cantidad de agua a 20 °C se bombea desde el fondo de un gran tanque de almacenamiento, donde la presión manométrica es de 3 10.3 kPa, hasta una boquilla que se encuentra 15.25 m por arriba del fondo del tanque y se descarga a la atmósfera con una velocidad en la boquilla de 19.8 1 m /s. La tasa de flujo del agua es de 45.4 kg/s. La eficiencia de la bomba es del 80% y al eje de la bomba se le aportan 7.5 kW. Calcule lo siguiente:

a) La pérdida por fricción en la bomba.

b) La pérdida por fricción en el resto del proceso.

2.7-15. ***Potenciapara bombeo en un sistema de flujo.*** Se está bombeando agua desde un depósito de agua abierto a razón de 2.0 kg/s a 10 °C hasta un tanque de almacenamiento abierto que se encuentra a 1500 m de distancia. La tubería es de cédula 40, de 3 1/2 pulg, y las pérdidas por fricción del sistema son de 625 J/kg. La superficie del depósito de agua está 20 m por encima del nivel del tanque de almacenamiento. La bomba tiene una eficiencia del 75%.

a) ¿Cuál es la potencia en kW que requiere la bomba?

b) Si no estuviera la bomba en el sistema, ¿habría flujo?

Respuesta: a) 1.143 kW

2.8-1. ***Balance de momento lineal en un codo reductor.*** Por el codo reductor de la figura 2.8-3 fluye agua en estado estacionario. El ángulo α_2 = 90" (un codo de ángulo recto). La presión en el punto 2 es 1 .O atm abs, la velocidad de flujo es 0.020 m^3/s y los diámetros en los puntos 1 y 2 miden 0.050 m y 0.030 m, respectivamente. Desprecie las fuerzas de fricción y gravitacional. Calcule las fuerzas resultantes en el codo en newtons y lb fuerza. Utilice $\rho = 1000$ kg/m^3.

Respuesta: $-R_x = +450.0$ *N*, $-R_y = 565.8$ *N*

2.8-2. Fuerzas en un codo reductor. En un codo reductor como el de la figura 2.8-3, con un ángulo de 60" ($\alpha_2 = 60°$), fluye agua en estado estacionario y 363 K a velocidad de 0.056 m^3/s. El diámetro de la tubería de entrada mide 0.10 16 m y el de salida, 0.0762 m. Se estima que la pérdida por fricción en el codo vale $v_2^2/5$. Desprecie la fuerza de gravedad. La presión de salida p_2 = 111.5 kN/m^2man. Calcule las fuerzas en el codo en newtons.

Respuesta: $-R_x = +1344$ N, $-R_y = -1026$ N

2.8-3. Fuerza de una corriente de agua sobre una pared. Una tobera descarga agua a 298 K horizontalmente sobre una pared vertical, plana. Después de chocar, el agua cae al suelo. La tobera tiene un diámetro de 12 mm y el agua sale por ella con un perfil de velocidad plano y a velocidad de 6.0 m /s. Desprecie la resistencia fricciona1 del aire sobre el chorro de aguay calcule la fuerza sobre la pared en newtons.

Respuesta: $-R_x = 4.059$ *N*

2.8-4. Flujo por un codo con expansión. Una corriente de agua en estado estacionario a velocidad de 0.050 m^3/s fluye a través de un codo con expansión para cambiar su dirección en 120 "C. El diámetro corriente arriba mide 0.0762 m y el diámetro corriente abajo 0.02112 m. La presión corriente arriba es de 68.94 kPa man. Desprecie las pérdidas de energía en el codo y calcule la presión corriente abajo en 298 K. También calcule R_x *y* R_y.

2.8-5. Fuerza de una corriente sobre una pared. Repita el problema 2.8-3 para las mismas condiciones, excepto que la pared tiene una inclinación de 45" con respecto a la vertical. El flujo

es sin fricción y suponga que no hay pérdidas de energía. La cantidad de fluido que se divide en cada dirección por la placa puede determinarse mediante la ecuación de continuidad y un balance de momento lineal. Calcule esta división del flujo y la fuerza sobre la pared.

Respuesta: $m_2 = 0.5774$ kg/s, $m_3 = 0.09907$ kg/s, $-R_x = 2.030$ N, $-R_y$ = -2.030 N (fuerza sobre la pared)

2.8-6. Balance de momento lineal para un chorro libre sobre un aspa curva fija. Un chorro libre que tiene una velocidad de 30.5 m/s y un diámetro de 5.08×10^{-2} es desviado por un aspa curva tija, como se ve en la figura 2.8-5a. Sin embargo, la curva del aspa es hacia abajo, con un ángulo de 60°, en vez de hacia arriba. Calcule la fuerza del chorro sobre el aspa. La densidad es de 1000 kg/m^3.

Respuesta: $-R_x = 942.8$ N, $-R_y$ = 1633 N

2.8-7. Balance de momento linealpara un chorro libre sobre un aspa fija de tipo U. Un chorro libre que tiene una velocidad de 30.5 m/s y un diámetro de 1.0×10^{-2} m es desviado por un aspa lisa fija, como en la figura 2.8-5a. Pero el aspa tiene forma de U, de modo que el chorro de salida viaja en una dirección exactamente opuesta a la del chorro de entrada. Calcule la fuerza del chorro sobre el aspa. Use $\rho = 1000$ kg/m^3.

Respuesta: $-R_x$ =146.1 N, $-R_y = 0$

2.8-8. Balance de momento lineal sobre un codo reductorypérdidasporfricción. Fluye agua a 20 °C por un codo reductor, donde α_2 (véase Fig. 2.8-3) es de 120". El diámetro de la tubería de entrada es de 1.829 m, el de la salida es de 1.2 19 m, y la tasa de flujo es de 8.50 m^3/s. El punto de salida z_2 está 3.05 m por arriba del de entrada, y la presión manométrica de entrada es de 276 kPa. Las pérdidas por fricción se estiman en $0.5v_2^2/2$ y la masa de agua en el codo es de 8500 kg. Calcule las fuerzas R_x y R_y y la fuerza resultante sobre el fluido del volumen de control.

2.8-9. Factor de corrección β de la velocidad de momento lineal para el flujo turbulento. Determine el factor de corrección β de la velocidad de momento lineal para el flujo turbulento en un tubo. Use la ecuación (2.7-20) para la relación entre v y la posición.

2.9-l. *Película de agua sobre una torre de pared mojada.* Agua pura a 20 °C fluye hacia abajo por una columna vertical de pared mojada a una tasa de 0.124 kg/s . m. Calcule el grosor de la película y la velocidad promedio.

Respuesta: $\delta = 3.370 \times 10^{-4}$ m, $v_{z\,\text{prom}} = 0.3687$ m/s

2.9-2. Balance de momento lineal en el recinto para el flujo entre placas paralelas. Un fluido de densidad constante está fluyendo en flujo laminar a estado estacionario en la dirección x horizontal entre dos placas planas y paralelas. La distancia entre las dos placas en la dirección y vertical es $2y_0$. Usando el balance de momento lineal en el recinto, deduzca la ecuación para el perfil de velocidad dentro de este fluido y la velocidad máxima para una distancia L m en la dirección x. [Sugerencia: Véase el método usado en la Sec. 2.9B para deducir la Ec. (2.9-9). Una de las condiciones límite que se usaron fue $dv_x/dy = 0$ en y = 0.]

Respuesta: $$v_x = \frac{p_0 - p_L}{2\mu L} y_0^2 \left[1 - \left(\frac{y}{y_0}\right)^2\right]$$

2.9-3. Perfil de velocidades para un fluido no newtoniano. La velocidad de esfuerzo cortante para un fluido no newtoniano es

$$\tau_{rx} = K\left(-\frac{dv_x}{dr}\right)^n$$

donde K y n son constantes. Determine la relación entre la velocidad y la posición radial r para este fluido incomprimible en estado estacionario. [Sugerencia: Combine esta ecuación con la Ec. (2.9-6). Después eleve ambos lados de la ecuación resultante a la potencia $1/n$ e integre.]

Respuesta: $$v_x = \frac{n}{n+1}\left(\frac{p_0 - p_L}{2KL}\right)^{1/n} (R_0)^{(n+1)/n}\left[1 - \left(\frac{r}{R_0}\right)^{(n+1)/n}\right]$$

2.9-4. Balance de momento lineal de recinto para un flujo hacia abajo en un plano inclinado. Considere el caso de un fluido newtoniano con flujo laminar de estado estacionario, que fluye hacia abajo por un plano inclinado cuyo ángulo con la horizontal es θ. Mediante un balance de momento lineal de recinto, determine la ecuación para el perfil de velocidad dentro de una capa líquida de espesor L, así como la velocidad máxima de la superficie libre. (Sugerencia: Los términos convectivos del momento lineal se cancelan para un flujo completamente desarrollado y los términos de presión-fuerza también se cancelan, debido a la presencia de una superficie libre. Note que hay una fuerza de gravedad sobre el fluido.)

Respuesta: $v_{x\ \text{máx}} = \rho g L^2 \operatorname{sen} \theta / 2\mu$

2.10-l. ***Medición de Za viscosidad de un liquido.*** Una de las aplicaciones de la expresión de Hagen-Poiseuille, ecuación (2.1 O-2) consiste en determinar la viscosidad de un líquido por la medición de las caídas de presión y de velocidad de un tubo capilar de dimensiones conocidas. El líquido usado tiene densidad de 9 12 kg/m^3, y el diámetro del tubo capilar es de 2.222 mm y su longitud 0.1585 m. La velocidad de flujo es de 5.33×10^{-7} m^3/s de líquido y se obtiene una caída de presión de 13 1 mm de agua (densidad 996 kg/m^3). Despreciando los efectos de los extremos, calcule la viscosidad del líquido en Pa · s.

Respuesta: $\mu = 9.06 \times 10^{-3}$ Pa . s

2.10-2. ***Caída friccional depresión en un flujo de aceite de oliva.*** Calcule la misma caída de presión por efectos de la fricción, expresada en pascales, para un aceite de olivo a 293 K que fluye por una tubería comercial de diámetro interno igual a 0.0525 m y longitud de 76.2 m. La velocidad del fluido es de 1.22 m/s. Utilice el método 'del factor de fricción. ¿Es el flujo laminar o turbulento? Consulte los datos físicos del apéndice A.4.

2.10-3. ***Pérdidas por fricción en una tubería recta y efecto del tipo de tubería.*** Un líquido con densidad de 801 kg/m^3 y viscosidad de 1.49×10^{-3} Pa · s fluye por una tubería horizontal recta a velocidad de 4.57 m/s. El tubo de acero comercial es de tamaño nominal de 1.5 pulg, cédula 40. Proceda a lo siguiente para un tubo de 61 m de largo:

a) Calcule la pérdida por fricción F_f.

b) Calcule la pérdida por fricción de una tubería lisa del mismo diámetro interior. ¿Cuál es el porcentaje de reducción de F_f para una tubería lisa?

Respuesta: a) 348.9 J/kg; b) 274.2 J/kg (91.7 pies · lb_f/lb_m), 21.4% de reducción

2.104. ***Resolución por aproximaciones sucesivas en un drenaje.*** En un proyecto hidráulico se diagrama una tubería de hierro colado de 0.156 m de diámetro interior y 305 m de longitud, para drenar aguas negras a 293 K. La carga disponible es de 4.57 m de agua. Despreciando las pérdidas en los accesorios y conexiones de la tubería, calcule la velocidad de flujo en m^3/s. ***(Sugerencia:*** Suponga las propiedades del agua pura. La solución se logra por prueba y error pues N_{Re}, que es necesario para calcular el factor de fricción que depende de la velocidad. Como primera aproximación, suponga que v = 1.7 m/s.)

2.10-5. ***Balance de energía mecánica ypérdidasporfricción.*** Se está descargando agua caliente de un tanque de almacenamiento, a velocidad de 0.223 pie^3/s. El diagrama de flujo del proceso y las condiciones son iguales a las del ejemplo 2.10-6, excepto por los tamaños nominales de cédula 40 que se detallan a continuación. El tubo de 20 pies de largo que sale del tanque de almacenamiento mide 1.5 pulg en lugar de 4 pulg. El otro tubo, que era de 2 pulg, es ahora de 2.5 pulg. Advierta que en este caso hay un ensanchamiento repentino después del codo al pasar de 1.5 pulg a 2.5 pulg.

2.104. ***Pérdidas por fricción y potencia de una bomba.*** El agua caliente de un tanque de almacenamiento abierto, que está a 82.2 °C, se bombea a velocidad de 0.379 m^3/min. La línea del tanque de almacenamiento a la aspiración de la bomba es de acero, de 6.1 m de longitud y 2 pulg de cédula 40 y contiene tres codos. La línea de descarga de la bomba tiene 61 m de tubería de 2 pulg y contiene 2 codos. El agua se descarga a la atmósfera a una altura de 6.1 m por encima del nivel en el tanque de almacenamiento.

a) Calcule todas las pérdidas por fricción $\sum F$.
b) Obtenga un balance de energía mecánica y determine el valor de W_s para la bomba en J/kg.
c) ¿Cuál es la potencia de la bomba en kW cuando su eficiencia alcanza el 75%?

Respuesta: a) $\sum F$ = 122.8 J/kg.
b) W_S = -186.9 J/kg, c) 1.527 kW

2.10-7. ***Caída de presión de*** un ***gas que fluye.*** Fluye nitrógeno gaseoso por una tubería de acero comercial cédula 40, de 4 pulg, a 298 K. La tasa de flujo total es de 7.40×10^{-2} kg/s y el flujo puede considerarse isotérmico. La tubería mide 3000 m de largo y la presión de entrada es de 200 kPa. Calcule la presión de salida.

Respuesta: p_2 = 188.5 kPa

2.10-8. ***Longitud de entrada para el flujo en una tubería.*** Dentro de un tubo cuyo diámetro es de 0.012 m fluye aire a 10 °C, con una presión absoluta de 1.0 atm y a una velocidad de 2.0 m/s.
a) Calcule la longitud de entrada.
b) Calcule la longitud de entrada para agua a 10 °C y con la misma velocidad.

2.109. ***Pérdida de fricción al bombear aceite hacia un tanque con sobrepresión.*** Un aceite que tiene densidad de 833 kg/m^3 y viscosidad de 3.3×10^{-3} Pa . s se bombea desde un tanque abierto hacia un tanque con sobrepresión que se mantiene a 345 kPa manométricos. El aceite es bombeado desde una entrada en un lado del tanque abierto, a través de una línea de tubería de acero comercial que tiene un diámetro interior de 0.07792 m, a una tasa de 3.494×10^{-3} m^3/s. La longitud de la tubería recta es de 122 m y la tubería contiene dos codos (90") y una válvula de globo abierta ala mitad. El nivel de líquido en el tanque abierto es de 20 mpor encima del nivel del líquido en el tanque con sobrepresión. La eficiencia de la bomba es del 65%. Calcule la potencia en kW de la bomba.

2.1010. ***Flujo en un anillo y caída depresión.*** Fluye agua en el anillo de un intercambiador de calor de tubería concéntrica horizontal, y se calienta de 40 °C a 50 °C en el intercambiador, que tiene una longitud de 30 m del equivalente en tubería recta. El gasto de agua es de 2.90×10^{-3} m^3/s. La tubería interior es de cédula 40 de 1 pulg y la exterior es de cédula 40 de 2 pulg. ¿Cuál es la caída de presión? Utilice una temperatura promedio de 45 °C para las propiedades físicas generales. Suponga que la temperatura de la pared es, en promedio, 4 °C mayor que la temperatura general promedio, de modo que debe hacerse una corrección para el efecto de la transferencia de calor sobre el factor de fricción.

2.114. ***Deducción de la velocidad máxima para el flujo isotérmico compresible.*** Empezando con la ecuación (2.1 l-9) deduzca las ecuaciones (2.11-l 1) y (2.11- 12) para la velocidad máxima en el flujo isotérmico compresible.

2.11-2. ***Caída de presión con flujo compresible. Se*** está bombeando metano gaseoso a través de 305 m de una tubería de acero de 52.5 mm de diámetro interior, a velocidad de 41.0 kg/m^2 . s. La presión de entrada es p_1 = 345 kPa abs. Suponga un flujo isotérmico a 288.8 K.
a) Calcule la presión p_2 al final de la tubería. La viscosidad es 1.04×10^{-5} Pa . s
b) Calcule la velocidad máxima que se puede alcanzar en esas condiciones y compárela con la velocidad del inciso a).

Respuesta: a) p_2 = 298.4 k Pa, b) $v_{máx}$ = 387.4 m/s
v_2 = **20.62** m/s

2.11-3. ***Caída depresión en el flujo isotérmico compresible.*** Entra aire a 288 K y 275 kPa absolutos en una tubería y fluye en flujo isotérmico compresible por una tubería comercial que tiene un DI de 0.080 m. La longitud de la tubería es de 60 m. La velocidad de masa ala entrada de la tubería es de 165.5 kg/m^2 . s. Considere que el peso molecular del aire es 29. Calcule la presión en la salida, así como la velocidad máxima permisible que puede alcanzarse, y compárela con la real.

REFERENCIAS

(B1) BENNETT, C.O. y Myers, J. E. *Momentum, Heat, and Mass Transfer,* 3a. ed. Nueva York, Mc. Graw-Hill, Inc., 1982.

(D1) DODGE, B. F., *Chemical Engineering Thermodynamics,* Nueva York, Mc. Graw-Hill, Inc., 1944.

(E1) EARLE, R. L. *United Operations in Food Processing,* Oxford, Pergamon Press, Inc., 1966.

(K1) **KITTRIDGE,** *C.* P. *y* **ROWLEY, D.** *S. Trans. A.S.M.E., 79,* 1759 (1957).

(L1) **LANGE,** *N.* A. *Handbook of Chemistry,* 10a. ed., Nueva York, Mc. Graw-Hill, Inc., 1967.

(L2) **LANGHAAR, H. L.** *Trans. A.S.M.E., 64,* A-55 (1942)

(M1) MOODY, L. F. *Trans. A.S.M.E., 66,* 671 (1944), Mech, Eng., 69, 1005 (1947).

(M2) Mc. CABE, W. L., *y* Smith, J. *C. Unit Operations of Chemical Engineering,* 4a. ed., Nueva York, Mc. Graw-Hill, Inc., 1985.

(N1) National Bureau of Standars, "*Tables of Thermal Properties of Gases",* Circular 464 (1955).

(P1) **PERRY, R. H.** *y* Green, D. *Perry 's Chemical Engineers' Handbook,* 6a. ed. Nueva York: Mc Graw Hill Book Company, 1984.

(R1) **REID,** R. *C. y* Sherwood, T. K. *The Properties of Gases and Liquids,* 3a. ed., Nueva York, Mc. Graw-Hill, Inc., 1977.

(R2) *Reactor Hadbook,* Vol. 2, AECD-33646. Washington, D.C., Atomic Energy Commission, mayo, 1955.

(S1) SWINDELLS, J. F., Coe, J. R. Jr., y Godfrey, T. B., *J. Res. Nat. Bur. Standars, 48,* **1 (1952).**

(S2) SKELLAND A. H. P., *Non- Newtonian Flow and Heat Transfer,* Nueva York, John Wiley & Sons, Inc., 1967.

(S3) SIEDER, E. N., y Tate *G.* E., *Ind. Eng. Chem., 28,* 1429 (1936).

(W1) WEAST, R. *C., Handbookof Chemistry and Physics,* 48a. ed., Cleveland, Chemical Rubber Co, Inc., 1967-1968.

CAPÍTULO 3

Principios de la transferencia de momento lineal y aplicaciones

3.1 FLUJO ALREDEDOR DE OBJETOS INMERSOS Y LECHOS EMPACADOS Y FLUIDIZADOS

3.1A Definición del coeficiente de arrastre para el flujo alrededor de objetos inmersos

1. Introducción y tipos de arrastre. En el capítulo 2 hubo un interés especial por la transferencia de momento lineal y las pérdidas por fricción para el flujo de fluidos en el interior de conductos o tuberías. En esta sección se considera con cierto detalle el flujo de fluidos alrededor de objetos sólidos inmersos.

El flujo de fluidos en torno, a cuerpos inmersos aparece en muchas aplicaciones de ingeniería química y en otras aplicaciones de procesamiento. Estas aplicaciones se presentan, por ejemplo, en el flujo a través de esferas empacadas en secado y filtración, en el flujo alrededor de tubos en los intercambiadores de calor, etc. En estas diversas aplicaciones es conveniente poder predecir las pérdidas por fricción y la fuerza ejercida sobre los objetos sumergidos.

En los ejemplos que se presentan en el capítulo 2 sobre fricción de fluidos dentro de conductos, la transferencia de momento lineal perpendicular a la superficie produjo un esfuerzo cortante o arrastre tangencial sobre la superficie lisa paralela a la dirección del flujo. Esta fuerza ejercida por el fluido sobre el sólido en la dirección del flujo se llama ***arrastre desuperficie o depared.*** La fricción superficial existirá para cualquier superficie que esté en contacto con un fluido en movimiento. Además de esta fricción superficial, si el fluido no está fluyendo en forma paralela a la superficie, sino que debe cambiar de dirección para pasar alrededor de un cuerpo sólido como una esfera, ocurrirán significativas pérdidas adicionales por fricción; a este procedimiento se llama ***arrastre de forma.***

En la figura 3.1- 1 a el flujo de fluidos es paralelo ala superficie lisa de la placa plana sólida, y la fuerza F en newtons de un elemento de área dA m^2 de la placa es el esfuerzo cortante de pared τ_w por el área dA o $\tau_w\, dA$. La fuerza total es la suma de las integrales de esas cantidades evaluadas sobre el área completa de la placa. Aquí la transferencia de momento lineal a la superficie produce un esfuerzo tangencial 0 arrastre superficial.

Sin embargo, en muehos casos el cuerpo inmerso es un sólido de forma irregular que presenta varios ángulos a la dirección de flujo del fluido. Como se muestra en la figura 3.1- 1 b, la velocidad de la corriente libre es v_0 y es uniforme alrededor del cuerpo de forma irregular suspendido en un conducto muy largo. Las líneas llamadas ***lineas de flujo*** representan la trayectoria de los elementos del fluido

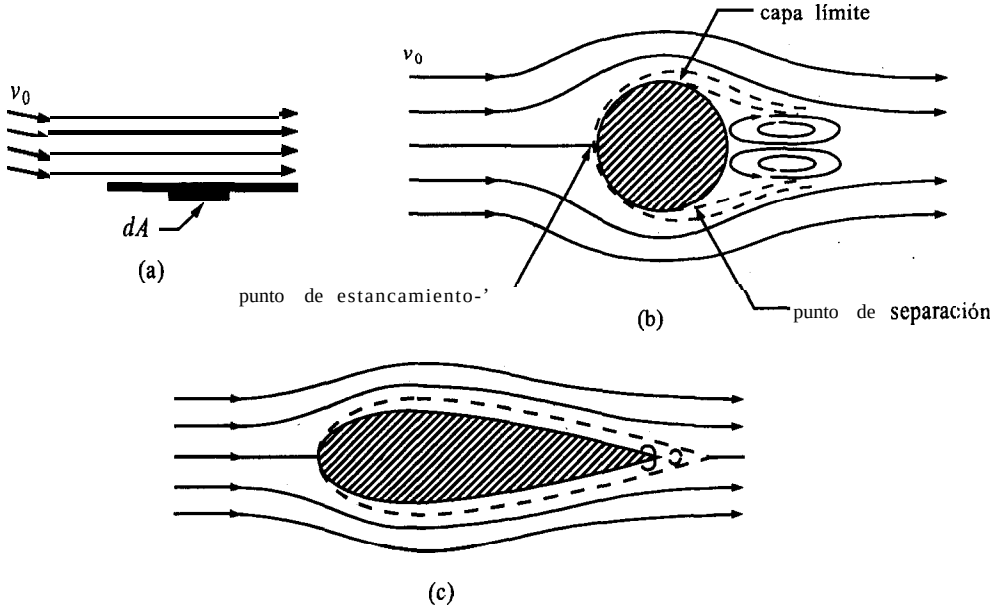


FIGURA 3.1-1. *Flujo alrededor de objetos inmersos: a) placa plana, b) esfera, c) objeto aerodinámico.*

alrededor del cuerpo suspendido. La fina capa límite adyacente a la superficie sólida se muestra como una línea punteada, y en el borde de esta capa, la velocidad es esencialmente igual ala velocidad del flujo general adyacente a él. En el centro de la cara frontal del cuerpo, llamado *punto de estancamiento,* la velocidad del fluido será cero; en este punto empieza el crecimiento de la capa límite y continúa sobre la superficie hasta que la capa se separa. El esfuerzo tangencial sobre el cuerpo debido al gradiente de velocidad en la capa límite es la fricción superficial. Por fuera de la capa límite, el fluido cambia de dirección para pasar alrededor del sólido; se acelera cerca del frente y luego se desacelera. A causa de estos efectos, el fluido ejerce una fuerza adicional sobre el cuerpo. Este fenómeno, llamado *arrastre de forma,* se agrega al arrastre superficial en la capa límite.

En la figura 3.1-lb ocurre la separación de la capa límite, como se muestra, y cuando se forman grandes remolinos que contribuyen a crear el arrastre se produce una estela, que cubre toda la parte posterior del objeto. El punto de separación depende de la forma de la partícula, del número de Reynolds y de otros factores, y se analiza con detalle en otras obras (S3).

El arrastre de forma para cuerpos escarpados puede minimizarse haciendo aerodinámico el cuerpo (figura 3.1 -1c), lo que fuerza al punto de separación hacia la parte posterior del cuerpo y reduce en gran medida el tamaño del remolino. En la sección 3.10 se analizan mas a fondo la turbulencia y las capas límite.

2. Coeficiente de arrastre. A juzgar por los análisis anteriores, es evidente. que la geometría del sólido inmerso es un factor fundamental para determinar la cantidad de la fuerza de arrastre total ejercida sobre el cuerpo. Las correlaciones de la geometría y las características del flujo para los objetos sólidos suspendidos o mantenidos en una corriente libre (objetos inmersos) son semejantes en concepto y forma a la correlación del factor de fricción y el número de Reynolds dada para el flujo dentro de conductos. En el flujo a través de conductos, el factor de fricción se definió como la razón entre la fuerza de arrastre por área unitaria (esfuerzo cortante) y el producto de la densidad por la carga de velocidad, como se da en la ecuación (2.10-4).

De la misma manera, para el flujo alrededor de objetos inmersos el coeficiente de arrastre C_D se define como la razón entre la fuerza de arrastre total por área unitaria y $\rho v_0^2/2$.

$$C_D = \frac{F_D/A_p}{\rho v_0^2/2} \quad \text{(SI)}$$

$$C_D = \frac{F_D/A_p}{\rho v_0^2/2g_c} \quad \text{(Unidades del sistema inglés)} \tag{3.1-1}$$

donde F_D es la fuerza de arrastre o resistencia al flujo total en N, A_p es un área en m^2, C_D no tiene dimensiones, v_0 es la velocidad de la corriente libre en m/s y ρ es la densidad del fluido en kg/m^3. En unidades del sistema inglés, F_D está en lb_f, v_0 está en pie/s, ρ está en lb_m/pie^3 y A_p en pie^2. El área A_p que se usa es el área obtenida al proyectar el cuerpo en un plano perpendicular a la línea de flujo. Para una esfera, $A_p = \pi D_p^2/4$, donde D_p es el diámetro de la esfera; para un cilindro cuyo eje es perpendicular a la dirección de flujo, $A_p = LD_p$, donde L = longitud del cilindro. Despejando en la ecuación (3.1-1) la fuerza de arrastre total,

$$F_D = C_D \frac{v_0^2}{2} \rho A_p \tag{3.1-2}$$

El número de Reynolds para un determinado sólido inmerso en un líquido que fluye es

$$N_{Re} = \frac{D_p v_0 \rho}{\mu} = \frac{D_p G_0}{\mu} \tag{3.1-3}$$

donde $G_0 = v_0\rho$.

3.1B Flujo alrededor de una esfera, de un cilindro largo y de un disco

Para cualquier forma particular del objeto y cualquier orientación del objeto con respecto a la dirección del flujo, existe una relación diferente de C_D en función de N_{Re}. Las correlaciones del coeficiente de arrastre en función del número de Reynolds se muestran en la figura 3.1-2 para esferas, cilindros largos y discos. La cara del disco y el eje del cilindro son perpendiculares a la dirección del flujo. Estas curvas se determinaron experimentalmente, pero en la región laminar para números de Reynolds pequeños, de menos de aproximadamente 1.0, la fuerza de arrastre experimental (resistencia) para una esfera es igual que la ecuación teórica de la ley de Stokes, como sigue:

$$F_D = 3\pi\mu D_p v_0 \tag{3.1-4}$$

Al combinar las ecuaciones (3.1-2) y (3.1-4) y despejando C_D, el coeficiente de resistencia predicho por la ley de Stokes es

$$C_D = \frac{24}{D_p v_0 \rho/\mu} = \frac{24}{N_{Re}} \tag{3.1-5}$$

La variación de C_D con respecto a N_{Re} (figura 3.1-2) es bastante complicada debido a la interacción de los factores que controlan el arrastre superficial y el arrastre de forma. Para una esfera, conforme el número de Reynolds aumenta más allá del intervalo de la ley de Stokes, va ocurriendo una separación y se forma una estela. Mayores incrementos de N_{Re} ocasionan desplazamientos del punto de separación. A aproximadamente $N_{Re} = 3 \times 10^5$, la súbita caída de C_D es resultado de que la capa límite se vuelve completamente turbulenta y el punto de separación se mueve corriente abajo. En la región de N_{Re} de alrededor de 1×10^3 a 2×10^5, el coeficiente de arrastre es prácticamente constante para cada forma y $C_D = 0.44$ para una esfera. Por encima de un N_{Re} de cerca de 5×10^5, el coeficiente de arrastre otra vez es aproximadamente constante, y CD para una esfera es de 0.13, para un cilindro es de 0.33 y para un disco es de 1.12. En la sección 3.9E se estudia más a fondo el flujo alrededor de esferas.

Para deducir la teoría y analizar con detalle la fuerza de arrastre para el flujo paralelo a una placa plana, consúltese la sección 3.10 sobre flujo de capa límite y turbulencia. El flujo de fluidos normal a bancos de cilindros o tubos se presenta en los intercambiadores de calor y en otras aplicaciones de procesos. Los bancos de tubos pueden disponerse en varias geometrías diferentes. Dado que hay muchos espaciamientos y configuraciones posibles de tubos geométricos, no se puede tener una correlación única entre los datos sobre caída de presión y los factores de fricción. Algunos detalles sobre muchas de las correlaciones disponibles se encuentran en la bibliografía (P1).

EJEMPLO 3.1-1 Fuerza sobre una esfera sumergida

Alrededor de una esfera que tiene un diámetro de 42 mm pasa aire a 37.8 °C y con 101.3 kPa de presión absoluta, a una velocidad de 23 m/s. ¿Cuáles son el coeficiente de arrastre C_D y la fuerza ejercida sobre la esfera?

Solución : Del Apéndice A.3 para el aire a 37.8 °C, $\rho = 1.137$ kg/m^3, $\mu = 1.90 \times 10^{-5}$ Pa . s. Además, $D_p = 0.042$m y $v_0 = 23.0$ m/s. Usando la ecuación (3.1-3),

A partir de la figura 3.1-2 para una esfera, $C_D = 0.47$. Sustituyendo en la ecuación (3.1-2),

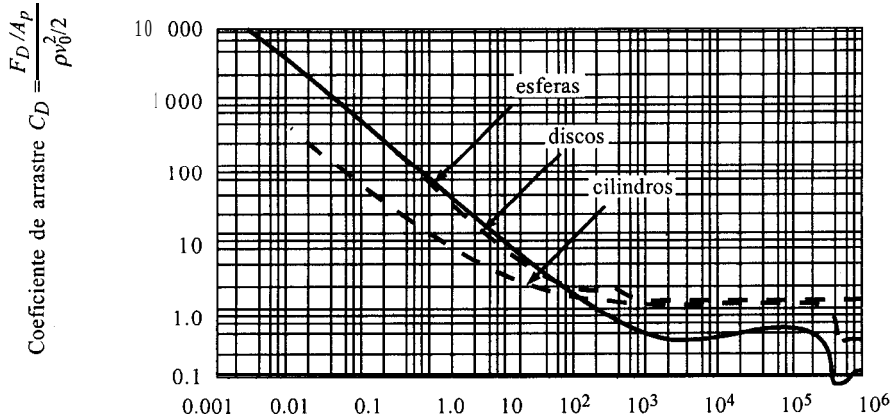


FIGURA 3.1-2 *Coeficientes de arrastre para el flujo alrededor de esferas, cilindros largos y discos inmersos. (Reproducido con autorización de C. E. Lapple y C. B. Shepherd. Ind. Eng. Chem., 32, 606 (1940). Derechos reservados por la American Chemical Society.)*

donde $A_p = \pi D_p^2/4$ para una esfera,

$$F_D = C_D \frac{v_0^2}{2} \rho A_p = (0.47)\frac{(23.0)^2}{2}(1.137)(\pi)\frac{(0.042)^2}{4} = 0.1958 \text{ N}$$

EJEMPLO 3.1-2. Fuerza sobre un cilindro en un túnel

Alrededor de un cilindro largo fluye agua a 24 °C auna velocidad de 1 .O m/s en un largo túnel. El eje del cilindro es perpendicular a la dirección del flujo. El diámetro del cilindro es de 0.090 m. ¿Cuál es la fuerza por metro de longitud sobre el cilindro?

Solución : Del Apéndice A.2 para el agua a 24 "C, $\rho = 997.2$ kg/m^3, $\mu = 0.9142 \times 10^{-3}$ Pa · s. Ademas, $D_p = 0.090$ m, $L = 1.0$ m y $v_0 = 1.0$ m/s. Usando la ecuación (3.1-3),

$$\frac{D_p v_0 \rho}{2} = \frac{0.090(1.0)(997.2)}{0.9142 \times 10^{-3}} = 9.817 \times 10^4$$

Según la figura 3.1-2 para un cilindro largo, $C_D = 1.4$. Sustituyendo en la ecuación (3.1-2), donde $A_p = LD_p = 1.0(0.090) = 0.090$ m^2,

$$F_D = C_D \frac{v_0^2}{2} \rho A_p = (1.4)\frac{(1.0)^2}{2}(997.2)(0.09) = 62.82 \text{ N}$$

3.1C Flujo en lechos empacados

1. Introducción. Un sistema de considerable importancia en ingeniería química y en otros campos de proceso es el lecho empacado o la columna empacada que se usa para un reactor catalítico de lecho fijo, para adsorción de un soluto, absorción simple, lecho de filtración, etc. El material que se empaca en el lecho puede consistir en esferas, partículas irregulares, cilindros o varios tipos de empaques comerciales.

En el análisis que sigue se supone que el empaquetamiento es uniforme en todos lados y que, si acaso hay acanalamiento, éste es mínimo. La razón entre el diámetro de la torre y el diámetro del empaquetamiento debe ser de un mínimo de 8:1 a 10: 1 para que los efectos de las paredes sean pequeños. En el enfoque teórico que se usa, la columna empacada se considera como un manojo de tubos torcidos con diferentes áreas de corte transversal. La teoría que se desarrolló en el capítulo 2 para tubos rectos simples se usa para obtener los resultados para el manojo de tubos torcidos.

2. Flujo laminar en lechos empacados. En las deducciones del flujo se usan ciertas relaciones geométricas para las partículas de los lechos empacados. La fracción vacía ε de un lecho empacado se define como

$$\varepsilon = \frac{\text{volumen de huecos en el lecho}}{\text{volumen total del lecho (huecos más solidos)}} \qquad (3.1\text{-}6)$$

La superficie específica de una partícula a_v *en* m^{-1} se define como

$$a_v = \frac{S_p}{v_p} \tag{3.1-7}$$

donde S_p es el área superficial de una partícula en m^2 y v_p es el volumen de una partícula en m^3. Para una partícula esférica,

$$a_v = \frac{6}{D_p} \tag{3.143}$$

donde D_p es el diámetro en m. Para un lecho empacado de partículas que no son esféricas, el diámetro efectivo de partículas D_p *se* define como

$$D_p = \frac{6}{a_v} \tag{3.1-9}$$

Puesto que (1 ε) es la fracción de volumen de las partículas del lecho,

$$a = a_v(1-\varepsilon) = \frac{6}{D_p}(1-\varepsilon) \tag{3.1-10}$$

donde ***a*** es la razón entre el área superficial total del lecho y el volumen total del lecho (volumen vacío más volumen de partículas) en m^{-1}.

EJEMPLO 3.1-3. Área superficial en el lecho empacado de cilindros

Un lecho empacado está compuesto por cilindros que tienen un diámetro D = 0.02 m y una longitud $h = D$. La densidad general del lecho empacado global es de 962 kg /m^3 y la densidad de los cilindros sólidos es de 1600 kg /m^3.

a) Calcule la fracción vacía e.
b) Calcule el diámetro efectivo D_p de las partículas.
c) Calcule el valor de ***a*** en la ecuación (3.1-10).

Solución: Para el inciso a), tomando 1.00 m^3 de lecho empacado como base, la masa total del lecho es de (962 kg /m^3) (1.00 m^3) = 962 kg. Esta masa de 962 kg es también la masa de los cilindros sólidos. Por lo tanto, el volumen de cilindros = 962 kg /(1600 kg /m^3) = 0.601 m^3. Usando la ecuación (3.1-6),

$$\varepsilon = \frac{\text{volumen de huecos en el lecho}}{\text{volumen total del lecho}} = \frac{1.000 - 0.601}{1.000} = 0.399$$

Para el diámetro efectivo de partícula, D_p , del inciso (b), para un cilindro donde $h = D$, el área superficial de una partícula es

$$S_p = (2)\frac{\pi D^2}{4}(\text{extremos}) + \pi D(\ D)(\ \text{lados}) = \tfrac{3}{2}\pi D^2$$

El volumen v_p de una partícula es

$$v_p = \frac{\pi}{4} D^2 (D) = \frac{\pi D^3}{4}$$

Al sustituir en la ecuación (3.1-7),

$$a_v = \frac{S_p}{v_p} = \frac{\frac{3}{2}\pi D^2}{\frac{1}{4}\pi D^3} = \frac{6}{D}$$

Por último, sustituyendo en la ecuación (3.1-9),

$$D_p = \frac{6}{a_v} = \frac{6}{6/D} = D = 0.02\text{m}$$

En consecuencia, el diámetro efectivo que se debe usar es $D_p = D = 0.02$ m. Para el inciso c), usando la ecuación (3.1-10),

$$a = \frac{6}{D_p}(1-\varepsilon) = \frac{6}{0.02}(1-0.399) = 180.3\text{m}^{-1}$$

La velocidad intersticial promedio en el lecho es v m/s y se relaciona con la velocidad superficial v', basada en el corte transversal del recipiente vacío, por medio de

$$v' = \text{EV} \tag{3.1-11}$$

El radio hidráulico r_H para el flujo definido en la ecuación (3.10-21) se modifica como sigue (B2).

$$r_H = \frac{\left(\begin{array}{c}\text{área de corte transversal}\\ \text{disponible para flujo}\end{array}\right)}{(\text{perímetro mojado})}$$

$$= \frac{(\text{volumen de huecos disponible para el flujo})}{(\text{superficie mojada total de sólidos})}$$

$$= \frac{(\text{volumen de huecos/volumen del lecho})}{(\text{superficie mojada/volumen del lecho})} = \frac{\varepsilon}{a} \tag{3.1-12}$$

Al combinar las ecuaciones (3.1-10) y (3.1-12),

$$r_H = \frac{\varepsilon}{6(1-\varepsilon)} D_p \tag{3.1-13}$$

Puesto que el diámetro equivalente D para un canal es $D = 4r_H$, el número de Reynolds para un lecho empacado es, según la ecuación (3.1- 13) y v' = EV,

$$N_{\mathrm{Re}} = \frac{(4r_H)v\rho}{\mu} = \frac{4\varepsilon}{6(1-\varepsilon)} D_p \frac{v'}{\varepsilon}\frac{\rho}{\mu} = \frac{4}{6(1-\varepsilon)}\frac{D_p v'\rho}{\mu} \tag{3.1-14}$$

Para lechos empacados, Ergun (El) define el número de Reynolds como se acaba de mostrar pero sin el término 4/6.

$$N_{\mathrm{Re},p} = \frac{D_p v'\rho}{(1-\varepsilon)\mu} = \frac{D_p G'}{(1-\varepsilon)\mu} \tag{3.1-15}$$

donde G' = v'p.

Para el flujo laminar, la ecuación de Hagen-Poiseuille (3.10-2) puede combinarse con la ecuación (3.1-13) para r_H y la ecuación (3.1-11) para dar

$$\Delta p = \frac{32\mu v\ \Delta L}{D^2} = \frac{32\mu(v'/\varepsilon)\ \Delta L}{(4r_H)^2} = \frac{(72)\mu v'\Delta L(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3 D_p^2} \tag{3.1-16}$$

El verdadero ΔL es más largo debido a la trayectoria tortuosa y el uso del radio hidráulico predice una v' demasiado grande. Los datos experimentales muestran que la constante debe ser 150, que da la ecuación de Blake-Kozeny para el flujo laminar, las fracciones de vacío de menos de 0.5, el diámetro de partícula efectivo D_p y $N_{\mathrm{Re},\,p} < 10$.

$$\Delta p = \frac{150\mu v'\Delta L}{D_p^2}\frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3} \tag{3.1-17}$$

3. Flujo turbulento en los lechos empacados. Para el flujo turbulento se usa el mismo procedimiento, empezando con la ecuación (2.10-5) y sustituyendo las ecuaciones (3.1-11) y (3.1-13) en esta ecuación para obtener

$$\Delta p = \frac{3f\rho(v')^2\ \Delta L}{D_p}\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon^3} \tag{3.1-18}$$

Para el flujo sumamente turbulento, el factor de fricción puede aproximarse a un valor constante. Además, se supone que todos los lechos empacados deben tener la misma rugosidad relativa. Los datos experimentales indican que 3f = 1.75. Por consiguiente, la ecuación final para el flujo turbulento para $N_{\mathrm{Re},\,p} > 1000$, que se llama ecuación de Burke-Plummer, se convierte en

$$\Delta p = \frac{1.75\rho(v')^2\ \Delta L}{D_p}\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon^3} \tag{3.1-19}$$

Al sumar la ecuación (3.1-l 7) para flujo laminar y la ecuación (3.1- 19) para flujo turbulento, Ergun (El) propuso la siguiente ecuación general para números de Reynolds bajos, intermedios y altos que se ha verificado experimentalmente.

$$\Delta p = \frac{150\mu v' \Delta L}{D_p^2}\frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3} + \frac{1.75\rho(v')^2 \Delta L}{D_p}\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon^3} \tag{3.1-20}$$

Al reescribir la ecuación (3.1-20) en términos de grupos sin dimensiones,

$$\frac{\Delta p \rho}{(G')^2}\frac{D_p}{\Delta L}\frac{\varepsilon^3}{1-\varepsilon} = \frac{150}{N_{\mathrm{Re},p}} + 1.75 \tag{3.1-21}$$

Véase también la ecuación (3.1-33) para conocer otra forma de la ecuación (3.1-21). La ecuación de Ergun (3.1-2 1) se puede usar para gases utilizando la densidad ρ del gas como el promedio aritmético de las presiones de entrada y de salida. La velocidad v' cambia en todos los puntos del lecho, para un fuido compresible, pero G' es una constante. A valores altos de $N_{Re,p}$, las ecuaciones (3.1-20) y (3.1-21) se reducen a la ecuación (3.1-19), y a la ecuación (3.1-17) para valores bajos. Para grandes caídas de presión en gases, la ecuación (3.1-20) puede escribirse de forma diferencial (P1).

EJEMPLO 3.1-4. Caída de presión y flujo de gases en un lecho empacado

A través de un lecho empacado de esferas que tienen un diámetro de 12.7 mm fluye aire a 3 11 K. La fracción de vacío ε del lecho es 0.38 y el lecho tiene un diámetro de 0.61 m y una altura de 2.44 m. El aire penetra en el lecho a 1.10 atm absolutas a una velocidad de 0.358 kg /s. Calcule la caída de presión del aire en el lecho empacado. El peso molecular promedio del aire es de 28.97.

Solución: Según el Apéndice A.3, para el aire a 311 K, $\mu = 1.90 \times 10^{-5}$ Pa . s. El área de corte transversal del lecho es $A = (\pi/4)D^2 = (\rho/4)(0.61)^2 = 0.2922$ m^2. Por lo tanto, G' = 0.358/0.2922 = 1.225 kg/m^2 · s (con base en el corte transversal vacío del recipiente o lecho). $D_p = 0.0127$ m, $\Delta L = 2.44$ m, y la presión de entrada es $P_1 = 1.1(1.01325 \times 10^5) = 1.115 \times 10^5$ Pa. De la ecuación (3.1-15),

$$N_{\mathrm{Re},p} = \frac{D_p G'}{(1-\varepsilon)\mu} = \frac{0.0127(1.225)}{(1-0.38)(1.90\times10^{-5})} = 1321$$

A fín de usar la ecuación (3.1-2 1) para gases, la densidad ρ que debe utilizarse es el promedio de las presiones de entrada p_1 y de salida p_2, o $(p_1 + p_2)/2$. Esta operación se realiza por aproximaciones sucesivas, ya que desconoce ρ_2. Suponiendo que Ap = 0.05 × 1 0^5 Pa, $\rho_2 = 1.115 \times 10^5 - 0.05 \times 10^5 = 1.065 \times 10^5$ Pa. La presión promedio es $p_{prom} = (1.115 \times 10^5 + 1.065 \times 10^5)/2 = 1.090 \times 10^5$ Pa. La densidad promedio que debe usarse es

$$P_{prom} = \frac{M}{RT} P_{prom} \tag{3.1-22}$$

$$= \frac{28.97(1.090 \times 10^5)}{8314.34(311)} = 1.221 \quad \mathrm{kg/m^3}$$

Al sustituir en la ecuación (3.1-21) y despejando Ap,

$$\frac{\Delta p(1.221)}{(1.225)^2}\frac{0.0127}{2.44}\frac{(0.38)^3}{1-0.38} = \frac{150}{1321} + 1.75$$

Resolviendo, Ap = 0.0497 x 10^5 Pa. Este resultado es bastante cercano al pronosticado, por lo que no se necesita un segundo intento.

4. Factores de forma. En los lechos empacados, muchas partículas suelen tener forma irregular. El diámetro equivalente de una partícula se define como el diámetro de una esfera que tuviera el mismo volumen que esa partícula. El factor de esfericidad ϕ_S de una partícula es la razón entre el área superficial de esa esfera (que tiene el mismo volumen que la partícula) y el área superficial real de la partícula. Para una esfera, el área superficial es $S_p = \pi D_p^2$ y el volumen es $v_p = \pi D_p^3/6$. Por consiguiente, para toda partícula, $\phi_S = \pi D_p^2/S_p$, donde S_p es el área superficial real de la partícula y D_p es el diámetro (diámetro equivalente) de la esfera que tiene el mismo volumen que la partícula. Entonces,

$$\frac{S_p}{v_p} = \frac{\pi D_p^2/\phi s}{\pi D_p^3/6} = \frac{6}{\phi_S D_p} \tag{3.1-23}$$

A partir de la ecuación (3.1-7),

$$a_v = \frac{S_p}{v_p} = \frac{6}{\phi_S D_p} \tag{3.1-24}$$

Entonces la ecuación (3.1-10) se transforma en

$$a = \frac{6}{\phi_S D_p}(1-\varepsilon) \tag{3.1-25}$$

Para una esfera, ϕ_S = 1 .O. Para un cilindro cuyo diámetro es igual a su longitud, ϕ_S se calcula como 0.874, y para un cubo, ϕ_S se calcula como 0.806. En cuanto a los materiales granulares, es difícil medir el volumen y el área superficial reales para obtener el diámetro equivalente, así que D_p generalmente se toma como el tamaño nominal obtenido ***en*** un análisis por mallas (tamices) o en mediciones visuales de longitud. El área superficial está determinada por las mediciones de adsorción o por mediciones de la caída de presión en un lecho de partículas. Así, se usa la ecuación (3.1-23) para calcular ϕ_S (Tabla 3. l-l). Los valores más comunes para muchos materiales triturados se encuentran entre 0.6 y 0.7. Para el cilindro y el cubo, en ocasiones se usa por conveniencia el diámetro nominal **(en** vez del diámetro equivalente), lo que da un factor de forma de 1.0.

5. ***Mezclas de partículas.*** Para las mezclas de partículas de varios **tamaños** podemos definir una superficie específica media a_{vm} como

$$a_{vm} = \sum x_i a_{vi} \tag{3.1-26}$$

donde x_i es la fracción de volumen. Combinando las ecuaciones (3.1-24) y (3.1-26),

$$D_{pm} = \frac{6}{a_{vm}} = \frac{6}{\Sigma x_i\left(6/\phi_S D_{pi}\right)} = \frac{1}{\Sigma x_i/\left(\phi_S D_{pi}\right)} \qquad \textbf{(3.1-27)}$$

donde D_{pm} es el diámetro medio efectivo para la mezcla.

EJEMPLO 3.1-5. Diámetro medio para una mezcla de partículas

Una mezcla contiene partículas de tres tamaños: 25% del volumen es de 25 mm, 40% es de 50 mm y 35% es de 75 mm. La esfericidad es de 0.68. Calcule el diámetro promedio efectivo.

TABLA 3.1-1. *Factores de forma (esfericidad) de algunos materiales*

Material	*Factor de forma,* ϕ_S	*Referencia*
Esferas	1.0	
Cubos	0.81	
Cilindros	0.87	
$D_p = h$ (longitud)		
Sillas Berl	0.3	(B4)
Anillos Raschig	**0.3**	(C2)
Carbón en polvo	**0.73**	(C2)
Arena, promedio	**0.75**	(C2)
Vidrio triturado	**0.65**	(C2)

Solución: Se tienen los siguientes datos: $x_1 = 0.25$, $D_{p1} = 25$ mm; $x_2 = 0.40$, $D_{p2} = 50$; $x_3 = 0.35$, $D_{p3} = 75$; $\phi_S = 0.68$. Sustituyendo en la ecuación (3.1-27),

$$D_{pm} = \frac{1}{0.25/(0.68 \times 25) + 0.40/(0.68 \times 50) + 0.35/(0.68 \times 75)}$$
$$= 30.0 \text{ mm}$$

6. Ley empírica de Darcypara el flujo laminar. La ecuación (3. l-l 7) para el flujo laminar en lechos empacados muestra que el gasto es proporcional a Ap e inversamente proporcional a la viscosidad μ y a la longitud AL. Ésta es la base de la ley de Darcy que se presenta a continuación sólo para el flujo viscoso en un medio poroso consolidado.

$$v' = \frac{q'}{A} = -\frac{k}{\mu}\frac{\Delta p}{\Delta L} \qquad \textbf{(3.1-28)}$$

donde v' es la velocidad superficial basada en el corte transversal vacío en cm/s, q' es el gasto en cm^3/s, A es el corte transversal vacío en cm^2, μ es la viscosidad en cp, Ap es la caída de presión en atm,

ΔL es la longitud en cm y k es la permeabilidad en (flujo en cm^3/s) . (cp) (longitud en cm)/(área en cm^2)· (caída de presión en atm). Las unidades de cm^2 . cp/s . atm usadas para k con frecuencia son en darcys o en milidarcys (1/1000 darcy). Por tanto, si un medio poroso tiene una permeabilidad de 1 darcy, un fluido con viscosidad de 1 cp fluirá a 1 cm^3/s por un corte transversal de 1 cm^2 con una Ap de 1 atm por centímetro de longitud. Esta ecuación se usa a menudo para medir permeabilidades en depósitos subterráneos de petróleo.

3.1D Flujo en lechos fluidizados

1. Velocidad mínima y porosidad mínima. Cuando un fluido corre hacia arriba por un lecho empacado de partículas a bajas velocidades, las partículas permanecen estacionarias. Al aumentar la velocidad del fluido, la caída de presión aumenta de acuerdo con la ecuación de Ergun (3.1-20). Si sigue aumentando la velocidad, llegará un momento en que la fuerza de la caída de presión por el área de corte transversal iguale a la fuerza gravitatoria sobre la masa de las partículas. Entonces las partículas empezarán a moverse, y éste es el principi0o de la fluidización, o fluidización mínima. La velocidad del fluido a la cual empieza la fluidización es la velocidad de fluidización mínima v'_{mf} en m/s, basada en el corte transversal de la torre vacía (velocidad superficial).

La porosidad del lecho cuando ocurre la verdadera fluidización es la porosidad mínima para la fluidización y es ε_{mf}. Algunos valores típicos de ε_{mf} para varios materiales se muestran en la tabla 3.1-2. El lecho se expande hasta este ahuecamiento o porosidad antes de que aparezca el movimiento de las partículas. Esta expansión mínima puede determinarse experimentalmente sometiendo el lecho auna corriente de gas ascendente y midiendo la altura del lecho L_{mf} en m. En general parece ser mejor usar μmgas como fluido, y no un líquido, ya que los líquidos dan valores ligeramente superiores de ε_{mf}.

Como se indicó antes, la caída de presión aumenta al elevarse la velocidad del gas hasta el inicio de la fluidización mínima. Después, al aumentar aún más la velocidad, la caída de presión decrece muy poco y luego permanece prácticamente sin cambio mientras el lecho sigue expandiéndose o aumentando su porosidad al aumentar la velocidad. El lecho parece un líquido en ebullición. A medida que el lecho se expande con el aumento de velocidad, el lecho continúa conservando su superficie horizontal superior. En un momento dado, cuando el aumento de la velocidad ya es muy grande, el arrastre de partículas del lecho fluidizado real se vuelve apreciable.

La relación entre la altura L del lecho y la porosidad ε es como se indica para un lecho que tiene un área de corte transversal uniforme A. Puesto que el volumen $LA(1 - \varepsilon)$ es igual al volumen total de los sólidos como si formaran una pieza,

$$L_1 A(1 - \varepsilon_1) = L_2 A(1 - \varepsilon_2) \tag{3.1-29}$$

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{1 - \varepsilon_2}{1 - \varepsilon_1} \tag{3.1-30}$$

donde L_1 es la altura del lecho con porosidad ε_1 y L_2 es la altura con porosidad ε_2.

2. Caída de presión y velocidad mínima de fluidización. Como una primera aproximación, la caída de presión al comenzar la fluidización puede determinarse como sigue. La fuerza obtenida de la caída de presión por el área de corte transversal debe ser igual a la fuerza gravitatoria ejercida por la masa de las partículas menos la fuerza de flotación del fluido desplazado.

$$\Delta pA = L_{mf} A(1 - \varepsilon_{mf})(\rho_p \quad \rho)g \tag{3.1-31}$$

TABLA 3.1-2. *Fracción de vacío ε_{mf}, en condiciones de fluidización mínima (L2)*

Tipo de partículas	Tamaño de partículas D_p(mm)			
	0.06	0.10	0.20	0.40
	Fracción de vacío, ε_{mf}			
Arena angulosa (ϕ_S=0.67)	0.60	0.58	0.53	0.49
Arena redonda (ϕ_S = 0.86)	0.53	0.48	0.43	(0.42)
Carbón de antracita (ϕ_S = 0.63)	0.61	0.60	0.56	0.52

Por lo tanto,

$$\frac{\Delta p}{L_{mf}} = \left(1-\varepsilon_{mf}\right)\left(\rho_p - \rho\right)g \qquad \text{(SI)}$$

$$\frac{\Delta p}{L_{mf}} = \left(1-\varepsilon_{mf}\right)\left(\rho_p - \rho\right)\frac{g}{g_c} \qquad \text{(Unidades del sistema inglés)} \tag{3.1-32}$$

Puesto que muchas veces se tienen partículas de forma irregular en el lecho, es más conveniente utilizar el tamaño de partícula y el factor de forma en las ecuaciones. Primero se sustituye el diámetro medio efectivo D_p por el término $\phi_S D_p$, donde D_p ahora representa el tamaño de partícula de una esfera que tiene el mismo volumen que la partícula y ϕ_S es el factor de forma. Muchas veces el valor de D_p se aproxima usando el tamaño nominal obtenido en un análisis de criba. Entonces la ecuación (3.1-20) para la caída de presión en un lecho empacado se convierte en

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{150\mu v'}{\phi_S^2 D_p^2}\frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3} + \frac{1.75\rho(v')^2}{\phi_S D_p}\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon^3} \tag{3.1-33}$$

donde $\Delta L = L$, longitud del lecho en m.

La ecuación (3.1-33) ahora puede usarse mediante una pequeña extrapolación para los lechos empacados a fin de calcular la velocidad mínima de fluidización v'_{mf} a la cual empieza la fluidización, sustituyendo v'_{mf} por v', ε por ε_{mf} y L por L_{mf}, y combinando el resultado con la ecuación (3.1-32) para dar

$$\frac{1.75D_p^2\left(v'_{mf}\right)^2\rho^2}{\phi_S\varepsilon_{mf}^3\mu^2} + \frac{150\left(1-\varepsilon_{mf}\right)D_p v'_{mf}\rho}{\phi_S^2\varepsilon_{mf}^3\mu} - \frac{D_p^3\rho\left(\rho_p-\rho\right)g}{\mu^2} = 0 \tag{3.1-34}$$

Si definimos el número de Reynolds como

$$N_{Re,mf} = \frac{D_p v'_{mf}\rho}{\mu} \tag{3.1-35}$$

la ecuación (3.1-34) se convierte en

$$\frac{1.75\left(N_{Re,mf}\right)^2}{\phi_S\varepsilon_{mf}^3} + \frac{150\left(1-\varepsilon_{mf}\right)\left(N_{Re,mf}\right)}{\phi_S^2\varepsilon_{mf}^3} - \frac{D_p^3\rho\left(\rho_p-\rho\right)g}{\mu^2} = 0 \tag{3.1-36}$$

Cuando $N_{Re,\ mf} < 20$ (partículas pequeñas), el primer término de la ecuación (3.1-36) puede eliminarse, y cuando $N_{Re,\ mf} > 1000$ (partículas g2el segundo término se anula.

Si no se conocen el término ε_{mf}, el término ϕ_S o ninguno de los dos, Wen y Yu (W4) encontraron que, para diversos sistemas,

$$\phi_S \varepsilon_{mf}^3 \cong \frac{1}{14'} \qquad \frac{1-\varepsilon_{mf}}{\phi_S^2 \varepsilon_{mf}^3} \cong 11 \tag{3.1-37}$$

Al sustituir en la ecuación (3.1-36), se obtiene la siguiente ecuación simplificada.

$$N_{Re,\ mf} \left[(33.7)^2 + 0.0408 \frac{D_p^3 \rho (\rho_p - \rho) g}{\mu^2} \right]^{1/2} - 33.7 \tag{3.1-38}$$

Esta ecuación es válida para un intervalo de números de Reynolds de entre 0.001 y 4000, con una desviación promedio de ± 25%. Otras ecuaciones alternativas pueden encontrarse en la bibliografía (K1, W4).

EJEMPLO 3.14 Velocidad mínima para la fluidización

Se van a fluidizar partículas sólidas que tienen un tamaño de 0.12 mm, un factor de forma ϕ_S de 0.88 y una densidad de 1000 kg/m^3, usando aire a 2.0 atm absolutas y 25 "C. El ahuecamiento en las condiciones mínimas de fluidización es de 0.42.

a) Si el corte transversal del lecho vacío es de 0.30 m^2 y el lecho contiene 300 kg de sólido, calcule la altura mínima del lecho fluidizado.
b Calcule la caída de presión en las condiciones de fluidización mínimas.
c) Calcule la velocidad mínima para la fluidización.
d) Utilice la ecuación (3.1-38) para calcular v'_{mf} suponiendo que no se dispone de los datos para f_S ni para ε_{mf}.

Solución: Para el inciso a), el volumen de sólidos = 300 kg /(1000 kg /m^3) = 0.300 m^3. La altura que los sólidos ocuparían en el lecho si $\varepsilon_1 = 0$ es $L_1 = 0.300$ m^3/(0.30 m^2 de corte transversal) = 1.00 m. Usando la ecuación (3.1-30) y nombrando $L_{mf} = L_2$ y $\varepsilon_{mf} = \varepsilon_2$,

$$\frac{L_1}{L_{mf}} = \frac{1-\varepsilon_{mf}}{1-\varepsilon_1}$$

$$\frac{1.00}{L_{mf}} = \frac{1-0.42}{1-0}$$

Resolviendo, $L_{mf} = 1.724$ m.

Las propiedades físicas del aire a 2.0 atm y 25 °C (Apéndice A.3) son $\mu = 1.845 \times 10^{-5}$ Pa · s, $\rho = 1.187 \times 2 = 2.374$ kg /m^3, $\rho = 2.02'65 \times 10^5$ Pa. Para la partícula, $D_p = 0.00012$ m, $\rho_p = 1000$ kg /m^3, $\phi_S = 0.88$, $\varepsilon_{mf} = 0.42$.

Para el inciso b), utilizando la ecuación (3.1-32) para calcular Δ_p,

$\Delta_p = L_{mf}(1-\varepsilon_{mf})(\rho_p - \rho)g$
$= 1.724(1-0.42)(1000-2.374)(9.80665) = 0.0978 \times 10^5$ Pa

Para calcular v'_{mf} para el inciso c), se usa la ecuación (3.1-36).

$$\frac{1.75\left(N_{\mathrm{Re},mf}\right)^2 + 150(1-0.42)\left(N_{\mathrm{Re},mf}\right)}{(0.88)(0.42)^3 \qquad (0.88)'\ (0.42)^3} - (0.00012)^3 \frac{2.374(1000-2.374)(9.80665)}{\left(1.845 \times 10^{-5}\right)^2}$$

Al resolver,

$$N_{\mathrm{Re},mf} = 0.07764 = \frac{D_P v'_{mf} \rho}{\mu} = \frac{0.00012\left(v'_{mf}\right)(2.374)}{1.845 \times 10^{-5}}$$

$$v'_{mf} = 0.005029 \text{ m/s}$$

Usando la ecuación simplificada (3.1-38) para el inciso d),

$$N_{\mathrm{Re},mf} = \left[(33.7)^2 + \frac{0.0408(0.00012)^3(2.374)(1000-2.374)(9.80665)}{\left(1.845 \times 10^{-5}\right)^2}\right]^{1/2} - 33.7$$

$$= 0.07129$$

Resolviendo, $v'_{mf} = 0.004618$ m/s.

3. Expansión de lechos fluidizados. Para el caso de partículas pequeñas y donde $N_{\mathrm{Re},mf} = D_p v' \rho / \mu < 20$, podemos calcular la variación de la porosidad o altura del lecho L como sigue. Suponemos que la ecuación (3.1-36) se aplica al intervalo completo de velocidades del fluido y se desprecia el primer término. Después, despejando v',

$$v' = \frac{D_P^2\left(\rho_p - \rho\right) g \phi_S^2}{150\mu} \frac{\varepsilon^3}{1-\mathrm{E}} = K_1 \frac{\varepsilon^3}{1-\mathrm{E}} \tag{3.1-39}$$

Se encuentra que todos los términos, excepto ε, son constantes para el sistema en particular, y que ε depende de v'. Esta ecuación puede usarse para líquidos a fin de calcular ε con $\varepsilon < 0.80$, pero, debido al amontonamiento y a otros factores, pueden ocurrir errores si se utiliza para gases.

El gasto en un lecho fluidizado está limitado por una parte por la v'_{mf} mínima, y por otra, por el arrastre de sólidos del lecho en sí. Esta velocidad máxima permisible se considera aproximadamente como la velocidad de sedimentación terminal v'_t de las partículas. (Véanse en la sección 13.3 los métodos para calcular la velocidad de sedimentación). Las que siguen son ecuaciones aproximadas para calcular el intervalo de operación (P2). Para sólidos finos, con $N_{\mathrm{Re},f} < 0.4$,

$$\frac{v'_t}{v'_{mf}} \cong \frac{90}{1}$$

Para sólidos grandes, con $N_{Re,f} > 1000$,

$$\frac{v'_t}{v'_{mf}} \cong \frac{91}{1} \qquad \textbf{(3.1-41)}$$

EJEMPLO 3.1-7. Expansión de un lecho fluidizado

Utilizando los datos del ejemplo 3.1-6, calcule la velocidad máxima permisible v'_t. Empleando una velocidad de operación de 3.0 veces el mínimo, estime la expansión del lecho.

Solución: A partir del ejemplo 3.1-6, $N_{Re,mf} = 0.07764$, $v'_{mf} = 0.005029$ m/s, $\varepsilon_{mf} = 0.42$. Usando la ecuación (3.1-40), la velocidad máxima permisible es

$$v'_t \cong 90(v'_{mf}) = 90(0.005029) = 0.4526 \text{ m/s}$$

Usando una velocidad de operación v′ de 3.0 veces el mínimo,

$$v' = 3.0(v'_{mf}) = 3.0(0.005029) = 0.01509 \text{ m/s}$$

Para determinar el ahuecamiento a esta nueva velocidad, la sustituimos en la ecuación (3.1-39) usando los valores conocidos en las condiciones de fluidización mínimas para determinar K_1.

$$0.005029 = K_1 \frac{(0.42)^3}{1 - 0.42}$$

Al resolver, $K_1 = 0.03938$. Después, usando la velocidad de operación en la ecuación (3.1-39),

$$0.01509 = (0.3938) \frac{\varepsilon^3}{1 - \varepsilon}$$

Resolviendo, el ahuecamiento del lecho es $\varepsilon = 0.555$ a la velocidad de operación.

3.2 MEDICIÓN DEL FLUJO DE FLUIDOS

Es importante poder medir y controlar la cantidad de material que entra y que sale de una planta de procesamiento químico o de otro tipo. Como muchos de los materiales están en forma de fluidos, suelen fluir por tuberías o conductos. Para medir el flujo de fluidos se utilizan muchos tipos diferentes de dispositivos. Los más sencillos son los que miden directamente el volumen de los fluidos, como los medidores ordinarios de gas y agua y las bombas de desplazamiento positivo. Los medidores actuales usan un elemento, como un propulsor o copas en un brazo rotatorio, que gira a una rapidez determinada por la velocidad del fluido que pasa por él. Para medir los fluidos se utilizan extensamente el tubo pitot, el medidor venturi, el medidor de orificio y los vertederos de canal abierto.

3.2A Tubo pitot

El tubo pitot se usa para medir la velocidad local en un punto dado en la corriente de flujo, y no la velocidad promedio dentro de la tubería o conducto. En la figura 3.2-1a se muestra un esquema de este sencillo dispositivo. Un tubo, el tubo de impacto, tiene su abertura normal a la dirección del flujo, y el tubo estático tiene su abertura paralela a la dirección del flujo.

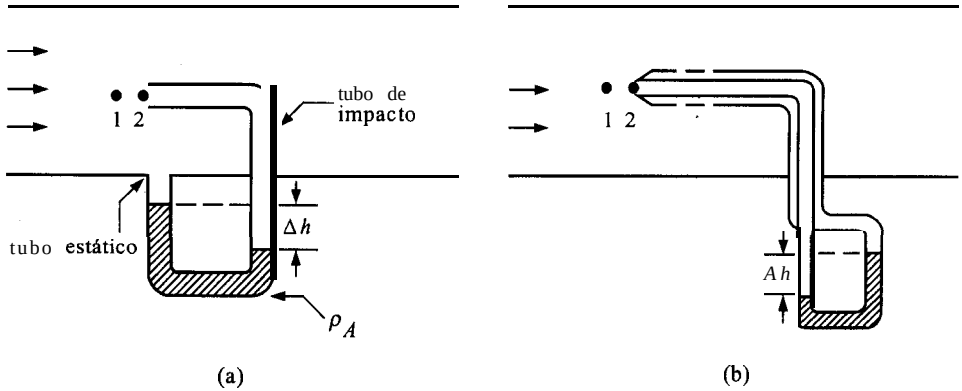


FIGURA 3.2-l. *Diagrama del tubo pitot: a) tubo simple, b) tubo con orificios de presión estática*

El fluido fluye hacia adentro de la abertura en el punto 2; la presión aumenta y luego permanece estacionaria en este punto, llamadopunto *de estancamiento.* La diferencia de la presión de estancamiento en este punto 2 y la presión estática medida por el tubo estático representa la elevación de presión asociada con la desaceleración del fluido. El manómetro mide esta pequeña elevación de presión. Si el fluido es incompresible, podemos escribir la ecuación de Bernoulli (2.7-32) entre el punto 1, donde la velocidad v_1 no se altera antes de que el fluido se desacelere, y el punto 2, donde la velocidad v_2 es cero.

$$\frac{v_1^2}{2} - \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_1 - p_2}{\rho} = 0 \tag{3.2-l}$$

Haciendo $v_2 = 0$ y despejando v_1,

$$v = C_p \sqrt{\frac{2(p_2 - p_1)}{\rho}} \tag{3.2-2}$$

donde v es la velocidad v_1 en el tubo en el punto 1 en m /s, p_2 es la presión de estancamiento, p es la densidad del fluido que fluye a la presión estática p_1 y C_p es un coeficiente adimensional que sirve para tomar en cuenta las desviaciones a partir de la ecuación (3.2-l) y que generalmente varía entre cerca de 0.989 y 1.0. Para un uso preciso, el coeficiente debe determinarse por la calibración del tubo pitot. Esta ecuación se aplica a fluidos incompresibles, pero puede servir para aproximar el flujo de gases a velocidades moderadas y con cambios de presión de cerca del 10% o menos de la presión total. Para los gases, el cambio de presión suele ser bastante pequeño, por lo que resulta difícil medir con precisión las velocidades.

El valor de la caída de presión $p_2 - p_1$ o Ap en Pa se relaciona con Ah, la lectura del manómetro, mediante la ecuación (2.2-14), como sigue:

$$\Delta p = \Delta h(\rho_A - \rho)g \tag{3.2-3}$$

donde ρ_A es la densidad del fluido en el manómetro en kg/m^3 y Ah es la lectura del manómetro en metros. En la figura 3.2-lb se muestra un diseño más compacto, con tubos concéntricos. En el tubo exterior, los hoyos de presión estática son paralelos a la dirección del flujo. Mayores detalles pueden encontrarse en la bibliografía (P1).

Dado que el tubo pitot mide la velocidad sólo en un punto del flujo, pueden usarse varios métodos para obtener lavelocidadpromedio en la tubería. En el primer método, la velocidad se mide exactamente en el centro del tubo para obtener $v_{máx}$. Luego, usando la figura 2.10-2, se puede obtener v_{prom}. Debe tenerse el cuidado de colocar el tubo pitot al menos 100 diámetros corriente abajo de cualquier obstrucción de la tubería. En el segundo método se toman lecturas en varias posiciones conocidas en el corte transversal de la tubería, y luego, usando la ecuación (3.6- 17), se realizan integraciones gráficas o numéricas para obtener v_{prom}.

EJEMPLO 3.2-l. Medición del flujo usando un tubo pitot

Se usa un tubo pitot semejante al de la figura 3.2- 1 a para medir el flujo de aire en un ducto circular de 600 mm de diámetro. La temperatura del aire que fluye es de 65.6 "C. El tubo pitot se coloca en el centro del ducto y la lectura Ah del manómetro es de 10.7 mm de agua. Una medida de la presión estática obtenida en la posición del tubo pitot es de 205 mm de agua sobre la atmosférica. El coeficiente del tubo pitot es $C_p = 0.98$.

a) Calcule la velocidad en el centro y la velocidad promedio.

b) Calcule el gasto volumétrico del aire que fluye en el ducto.

Solución: Para el inciso a), las propiedades del aire a 65.6 ºC, a partir del Apéndice A.3, son $\mu = 2.03 \times 10^{-5}$ Pa . s, ρ = 1.043 kg/m^3 (a 101,325 kPa). Para calcular la presión estática absoluta, la lectura del manómetro Ah = 0.205 m del agua indica la presión por encima de 1 atm absoluta. Usando la ecuación (3.2-14), considerando la densidad del agua como 1000 kg/m^3 y suponiendo que la densidad del aire es de 1.043 kg /m^3,

$$\text{Ap} = 0.205(1000 - 1.043)9.80665 = 2008 \text{ Pa}$$

Entonces, la presión estática absoluta es $p_1 = 1.01325 \times 10^5 + 0.02008 \times 10^5 = 1.0333 \times 10^5$ Pa. La densidad del aire correcta en el aire que fluye es de $(1.0333 \times 10^5/1.01325 \times 10^5)(1.043) = 1.063$ kg/m^3. Si se usa este valor correcto en lugar de 1.043, tendrá un efecto despreciable en el nuevo cálculo de p_1.

Para calcular la Ap para el tubo pitot se emplea la ecuación (3.2-3).

$$\Delta p = \Delta h(\rho_A - \rho)g = \frac{10.7}{1000}(1000 - 1.063)(9.80665) = 104.8 \text{ Pa}$$

Al usar la ecuación (3.2-2), la velocidad máxima en el centro es

$$v = 0.98 \sqrt{\frac{2(104.8)}{1.063}} \quad 13.76 \text{ m/s}$$

El número de Reynolds, usando la velocidad máxima, es

$$N_{Re} = \frac{D v_{máx} \rho}{\mu} = \frac{0.600(13.76)(1.063)}{2.03 \times 10^{-5}} = 4.323 \times 10^5$$

A partir de la figura 2.10-2, $v_{prom}/v_{máx} = 0.85$. Entonces, $v_{prom} = 0.85(13.76) = 11.70$ m/s. Para calcular el gasto para el inciso b), el área de la sección transversal del ducto es $A = (\pi/4)(0.600)^2 = 0.2827$ m^2. El gasto volumétrico = $0.2827(11.70) = 3.308$ m^3/s

3.7B Medidor Venturi

En la figura 3.2-2 se muestra un *medidor Venturi* que se inserta directamente en una tubería. En las dos derivaciones que se muestran se conecta un manómetro u otro dispositivo para medir la diferencia de presión $p_1 - p_2$ entre los puntos 1 y 2. La velocidad promedio en el punto 1, donde el diámetro es D_1, m es v_1 m/s y en el punto 2 o garganta, la velocidad es v_2 y el diámetro D_2. Puesto que el estrechamiento de D_1 a D_2 y la expansión de D_2 a D_1 son graduales, se producen pocas pérdidas por fricción originadas en la contracción o la expansión.

Para deducir la ecuación para el medidor Venturi se desprecia la fricción y se supone que la tubería es horizontal. Suponiendo un flujo turbulento y escribiendo la ecuación de balance de energía mecánica, ecuación (2.7-28) entre los puntos 1 y 2 para un fluido incompresible,

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} \tag{3-2-4}$$

La ecuación de continuidad para la constante *p es*

$$v_1 \frac{\pi D_1^2}{4} = v_2 \frac{\pi D_2^2}{4} \tag{3.2-5}$$

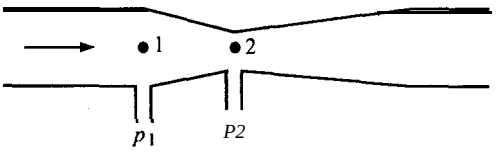


FIGURA3.2-2. *Medidor de flujo Venturi*

Al combinar las ecuaciones (3.2-4) y (3.2-5) y eliminar v_1,

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{1-(D_2/D_1)^4}} \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}} \tag{3.2-6}$$

Para tomar en cuenta la pequeña pérdida por fricción se introduce un coeficiente experimental C_v, con lo cual

$$v_2 = \frac{C_v}{\sqrt{1-(D_2/D_1)^4}} \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}} \qquad \text{(SI)}$$

$$v_2 = \frac{C_v}{\sqrt{1-(D_2/D_1)^4}} \sqrt{\frac{2g_c(p_1 - p_2)}{\rho}} \qquad \text{(Unidades del sistema inglés)} \tag{3.2-7}$$

Para la mayoría de medidores y un número de Reynolds $> 1\,0^4$ en el punto 1, C_v es aproximadamente 0.98 para diámetros de tubería inferiores a 0.2 m y 0.99 para tamaños mayores. Sin embargo, estos coeficientes pueden variar y se recomienda una calibración individual cuando no se dispone de la del fabricante.

Para calcular el gasto volumétrico, la velocidad v_2, se multiplica por el área A_2,

$$\text{Gasto volumétrico} = v_2 \frac{\pi D_2^2}{4} \text{ m}^3/\text{s} \tag{3.2-8}$$

Para la medición del flujo compresible de gases, en la ecuación (3.2-7) debe tomarse en cuenta la expansión adiabática de la presión de p_1 y p_2. Se utiliza una ecuación semejante y el mismo coeficiente C_v junto con el factor de corrección de expansión adimensional Y(mostrado en la Fig. 3.2-3 para el aire), como sigue:

$$m = \frac{C_v A_2 Y}{\sqrt{1-(D_2/C_1)^4}} \sqrt{2(p_1 - p_2)\rho_1} \tag{3.2-9}$$

donde m es el gasto en kg/s, ρ_1 es la densidad del flujo corriente arriba en el punto 1 en kg/m^3, y A_2 es el área de corte transversal en el punto 2 en m^2.

La diferencia de presión p_1 p_2 *se* presenta debido a que la velocidad aumenta de v_1 a v_2. No obstante, después de cierto recorrido en el tubo, la velocidad regresa a su valor original v_1 , en el caso de líquidos. Debido a algunas pérdidas por fricción, una parte de la diferencia p_1 p_2 nunca se recupera. En un medidor Venturi de buen diseño, la pérdida permanente es de más o menos 10% de la diferencia $p_1 - p_2$ y esto representa una pérdida de energía. Los medidores Venturi suelen usarse para medir flujos en tuberías extensas, tales como los sistemas de distribución municipales.

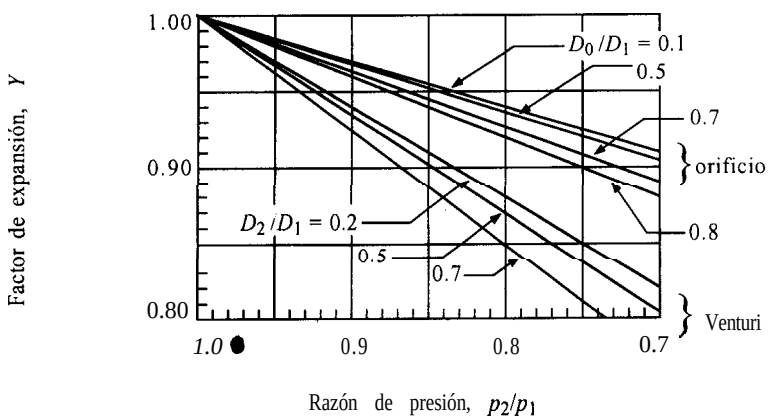


FIGURA *3.2-3. Factor de expansión para aire en el Venturi y en el orificio. [Calculados a partir de las ecuaciones y datos de las referencias (A2, M2, S3).]*

3.2C Medidor de orificio

El medidor Venturi tiene varias desventajas para utilizarse en instalaciones comunes de las plantas de proceso: ocupa un espacio considerable y es costoso. Además, el diámetro de la garganta es fijo, por lo que, si el intervalo de velocidades de flujo cambia de manera notable, se obtienen diferencias de presión poco precisas. El *medidor de orificio* elimina estas objeciones, aunque a costa de una pérdida de carga o potencia mucho mayor.

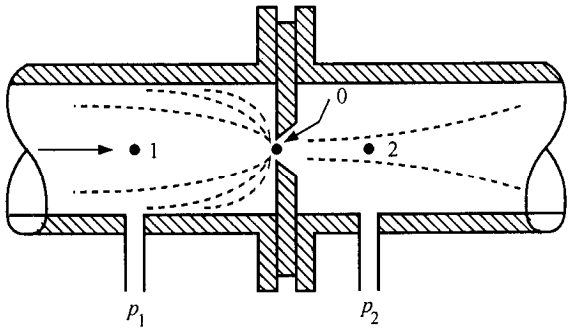


FIGURA 3.2-4. *Medidor de flujo de orificio.*

En la figura 3.2-4 se muestra un medidor de flujo con orificio típico de bordes afilados. La placa torneada y perforada de orificio con diámetro D_0 se monta con dos bridas en un tubo de diámetro D_1. Las derivaciones de presión en el punto 1 corriente arriba y en el 2 corriente abajo, miden la diferencia $p_1 \quad p_2$. Las posiciones exactas de las dos derivaciones son algo arbitrarias, y en algunos tipos de medidores se instalan a aproximadamente un diámetro del tubo corriente arriba y entre 0.3-O. 8 diámetro del tubo corriente abajo. La corriente de fluido forma una vena contracta o chorro de flujo libre después de pasar por el orificio.

La ecuación para el orificio es parecida a la ecuación (3.2-7),

$$v_0 = \frac{C_0 \sqrt{2(p_1 - p_2)}}{\sqrt{1-(D_0/D_1)4}\ \rho} \qquad \text{(SI)} \tag{3.2-10}$$

donde v_0 es la velocidad en el orificio en m /s, D_0 es el diámetro del orificio en m y C_0 es el coeficiente adimensional del orificio. El coeficiente de orificio C_0 siempre se determina experimentalmente. Si el valor de N_{Re} en el orificio es superior a 20000 y D_0/D_1 es inferior a más o menos 0.5, el valor de C_0 se mantiene casi constante en 0.61, que es un valor de diseño adecuado para líquidos (M2, P1). Por debajo de 20000 el coeficiente asciende abruptamente y luego cae; una correlación para C_0 puede encontrarse en otros libros (P1).

Como en el caso de Venturi, para la medición del flujo compresible de gases en un orificio se usa un factor de corrección Y dado en la figura 3.2-3 para el aire, como sigue.

$$m = \frac{C_0 A_0 Y}{\sqrt{1-(D_0/D_1)^4}} \sqrt{2(p_1 - p_2)\rho_1} \tag{3.2-l 1}$$

donde *m es* el gasto en kg /s, ρ_1 es la densidad corriente arriba en kg/m^3 y A_0 es el área de la sección transversal del orificio.

La pérdida permanente de presión es mucho más alta que en un Venturi, debido a los remolinos que se forman cuando el chorro se expande debajo de la vena contracta. Esta pérdida depende de D_0/D_1 y es 73% de $p_1 - p_2$ para $D_0/D_1 = 0.5$; 56% para $D_0/D_1 = 0.65$, y 38% para $D_0/D_1 = 0.8$ (P1).

EJEMPLO 3.2-2. Medición de flujo de petróleo con un orificio

Se instala un orificio de bordes afilados con un diámetro de 0.0566 m en una tubería de 0.154 m, por la que fluye petróleo con densidad de 878 kg /m^3 y viscosidad de 4.1 cp. La

diferencia de presión medida en las derivaciones del orificio es de 93.2 kN/m^2. Calcúlese el gasto volumétrico en m^3/s. Supóngase que $C_0 = 0.61$.

Solución:

$$p_1 - p_2 = 93.2 \text{ kN/m}^2 = 9.32 \times 10^4 \text{ N/m}^2$$

$$D_1 = 0.1541 \text{ m} \qquad D_0 = 0.0566 \text{ m} \quad \frac{D_0}{4} = \frac{0.0566}{0.1541} = 0.368$$

Sustituyendo en la ecuación (3.2-10)

$$v_0 = \frac{C_0}{\sqrt{1-(D_0/D_1)^4}}\sqrt{\frac{2(p_1-p_2)}{\rho}}$$

$$= \frac{0.61}{\sqrt{1-(0.368)^4}}\sqrt{\frac{2(9.32\times10^4)}{878}}$$

$$v_0 = 8.97 \text{ m/s}$$

$$\text{Gasto volumétrico} = v_0\left(\frac{\pi D_0^2}{4}\right) = \frac{(\pi)(0.0566)^2}{4}$$

$$= \mathbf{0.02257} \text{ m}^3/\text{s} \ (0.797 \text{ pie}^3/\text{s})$$

Se calcula el valor de N_{Re} para saber si es superior a 20 000 para $C_0 = 0.61$,

$$\mu = 4.1 \times 1 \times 10^{-3} = 4.1 \times 10^{-3} \text{ kg/m . s} = 4.1 \times 10^{-3} \text{ Pa . s}$$

$$N_{Re} = \frac{D_0 v_0 \rho}{\mu} = \frac{0.0566(8.97)(878)}{4.1 \times 10^{-3}} = 1{,}087 \times 10^5$$

Por consiguiente, el número de Reynolds es superior a 20 000.

En las referencias (P1) se analizan otros dispositivos de medición para flujos en ductos cerrados, tales como rotámetros, toberas de flujo, etcétera.

3.2D. Flujo en canales abiertos o vertederos

En muchos casos de ingeniería de procesos e instalaciones agrícolas, los líquidos fluyen en canales abiertos y no en ductos cerrados. Para medir el gasto volumétrico en estos casos se suele usar vertederos. Un *vertedero* es un dique sobre el cual fluye el líquido. Los dos tipos principales son el vertedero rectangular y el triangular que se muestran en la figura 3.2-5. El líquido fluye sobre el vertedero y, tal como se muestra en la figura, se mide la altura h_0 (carga del vertedero) en metros por encima de la base plana o de la muesca. Esta carga debe medirse a una distancia aproximada de $3h_0$ m corriente arriba del vertedero, por medio de un nivel o un flotador.

La ecuación para obtener el gasto volumétrico q en m^3/s para un vertedero rectangular, es la siguiente:

$$q = 0.415(L - 0.2h_0)h_0^{1.5}\sqrt{2g} \qquad \textbf{(3.2-12)}$$

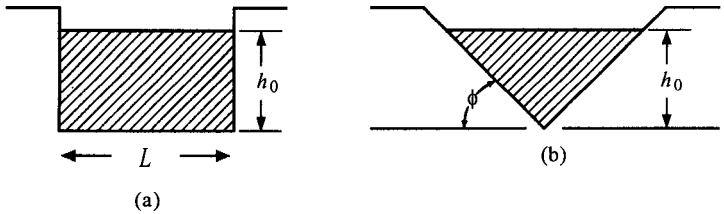


FIGURA 3.2-5 *Tipos de vertederos: a) rectangular, b) triangular.*

donde L = longitud de la cresta en m, g = 9.80665 m/s^2, y h_0 = carga del vertedero en m. A esta expresión se le llama *fórmula de vertedero de Francis modificada* y concuerda con los resultados experimentales con un 3% de aproximación cuando: $L > 2h_0$, la velocidad corriente arriba es < 0.6 m/s, $h_0 > 0.09$ m y la altura de la cresta por encima del fondo del canal es $> 3h_0$. En unidades inglesas, L y h están en pies, q en pie^3/s, y g = 32.174 $pies/s^2$.

Para el vertedero triangular,

$$q = \frac{0.31h_0^{2.5}}{\tan\phi}\sqrt{2g} \tag{3.2-13}$$

Las ecuaciones (3.2-12) y (3.2-13) son aplicables sólo para agua. Para otros líquidos, consúltense los datos de otras referencias (P1).

3.3 BOMBAS Y EQUIPO PARA MANEJAR GASES

3.3A Introducción

Para que un fluido fluya de un punto a otro en un ducto cerrado o en una tubería, es necesario contar con una fuerza impulsora. Algunas veces, esta fuerza es la gravedad cuando hay diferencias de nivel. Por lo general, un dispositivo mecánico como una bomba o un ventilador, suministra la energía o fuerza impulsora que incrementa la energía mecánica del fluido. Esta energía puede usarse para aumentar la velocidad (mover el fluido), la presión o la elevación del fluido, tal como lo expresa la ecuación del balance de energía mecánica, ecuación (2.7-28), que relaciona v con p, p y el trabajo. Los métodos más comunes para adicionar energía son el desplazamiento positivo y la acción centrífuga.

En general, la palabra "bomba" describe una máquina o dispositivo que se usa para mover un líquido incompresible. Los ventiladores, sopladores y compresores son dispositivos para mover gases (casi siempre aire). Los ventiladores descargan grandes volúmenes de gases a presiones bajas del orden de varios cientos de milímetros de agua. Los sopladores y los compresores descargan gases a altas presiones. En las bombas y los ventiladores, la densidad del fluido no varía de manera apreciable y se puede suponer que existe un flujo incompresible. En el caso de los sopladores y compresores se usa la teoría de flujo compresible.

3.3B. Bombas

1. Potencia y trabajo requeridos. Mediante la expresión del balance total de energía mecánica, ecuación (2.7-28) para una bomba y un sistema de tuberías, puede calcularse la energía

mecánica real o teórica W_S J/kg adicionada al fluido por la bomba. El ejemplo 2.7-5 corresponde a este tipo de cálculo. Si la eficiencia fraccionaria es η y W_p es el trabajo axial suministrado por la bomba, la ecuación (2.7-30) da

$$W_p = -\frac{W_S}{\eta} \tag{3.3-1}$$

La potencia real (o potencia al freno de una bomba) es la siguiente:

$$\text{kW al freno} = \frac{W_p m}{1000} = -\frac{W_S m}{\eta \times 1000} \quad \text{(Unidades SI)}$$

$$\text{hp al freno} = \frac{W_p m}{550} = -\frac{W_S m}{\eta \times 550} \quad \text{(Unidades del sistema inglés)} \tag{3.3-2}$$

donde W_p está en J/kg, m es la velocidad de flujo en kg/s y 1000 es el factor de conversión W/kW. En unidades del sistema inglés, W_S esta en pie . $\text{lb}_\text{f}/\text{lb}_\text{m}$ y m en lb_m/s. La potencia teórica del fluido es

$$\text{potencia teórica} = (\text{kW al freno})(\eta) \tag{3.3-3}$$

La energía mecánica W_S en J/kg adicionada al fluido se suele expresar como la carga H desarrollada por la bomba en metros de fluido bombeado, donde

$$-W_S = Hg \quad \text{(SI)}$$

$$-W_S = H\frac{g}{g_c} \quad \text{(Unidades del sistema inglés)} \tag{3.3-4}$$

Para calcular la potencia de un ventilador donde la diferencia de presión es del orden de unos cuantos cientos de milímetros de agua, se usa una densidad promedio lineal del gas entre la entrada y la salida del ventilador para calcular W_S y los kW caballos de potencia al freno.

Puesto que la mayoría de las bombas son impulsadas por motores eléctricos, debe tomarse en cuenta la eficiencia del motor para determinar el suministro total de energía eléctrica al mismo. Las eficiencias típicas η_e de motores eléctricos son: 75% para motores de 0.5 kW, 80% para 2 kW, 84% para 5 kW, 87% para 15 kW; y, aproximadamente, 93% para motores de más de 150 kW. Por consiguiente, el suministro total de energía eléctrica es igual a la potencia al freno dividida entre la eficiencia del motor eléctrico η_e.

$$\text{Suministro de energía eléctrica (kW)} = \frac{\text{kW al freno}}{\eta_e} = \frac{-W_S m}{\eta \eta_e \cdot 1000} \tag{3.3-5}$$

2. Altura de aspiración. La potencia calculada con la ecuación (2.7-3) depende de las diferencias de presión y no de que las presiones reales estén por encima o por abajo de la presión atmosférica. Sin embargo, el límite inferior de la presión absoluta en la línea de aspiración (entrada) de la bomba queda fijado por la presión de vapor del líquido a su temperatura en la línea de aspiración. Si la presión

sobre el líquido en la línea de aspiración se reduce a la presión de vapor, parte del líquido se evapora instantáneamente (cavitación). En estas condiciones, no puede introducirse líquido a la bomba.

Para el caso especial en que el líquido no es volátil, la fricción en la línea de aspiración de la bomba es despreciable y si el líquido está siendo bombeado desde un depósito abierto, la bomba operará con su máximo de altura vertical de aspiración. Para agua fría esto sería de unos 10.4 m de agua. No obstante, en condiciones prácticas, la fricción, la presión de vapor, los gases disueltos y las pérdidas en la entrada, hacen que este valor sea muy inferior. Para más detalles, se recomienda consultar las referencias (P1, M2).

3. Bombas centrífugas. Las industrias de proceso emplean con frecuencia bombas centrífugas. Se pueden adquirir en tamaños desde 0.004 hasta 380 m^3/min (1 a 100000 gal/min) y para presiones de descarga desde unos cuantos metros de carga hasta 5000 kPa. Una bomba centrífuga consiste, en su forma más simple, en un propulsor que gira dentro de una armadura. La figura 3.3-l muestra el diagrama esquemático de una bomba centrífuga simple.

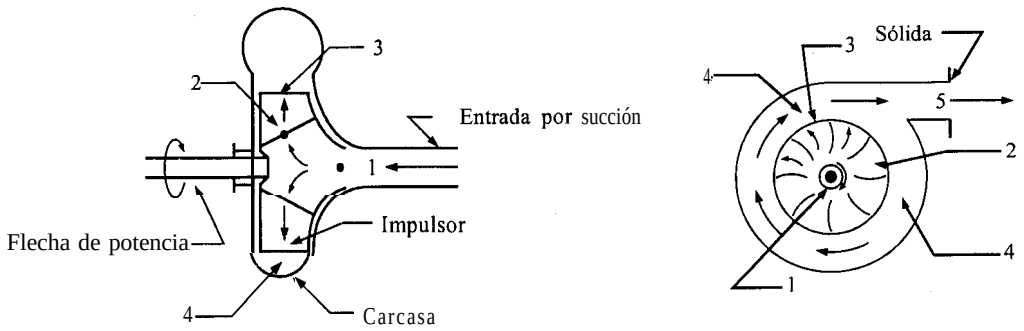


FIGURA 3.3-1. *Bomba centrífuga simple.*

El líquido entra axialmente ala bomba en el punto 1 en la línea de aspiración y penetra hasta el centro de rotación del propulsor, de donde se distribuye de manera radial. Al hacerlo así, se introduce en los canales, entre las paletas en el punto 2, y fluye por dichos canales hacia el punto 3, situado en la periferia del impulsor. Aquí se recolecta en la cámara espiral 4 y fluye hacia la descarga de la bomba 5. La rotación del impulsor imparte una carga de alta velocidad al fluido, que se transforma en carga de presión a medida que el líquido pasa a la cámara espiral y de aquí a la descarga. Algunas unidades se construyen como bombas de dos etapas o de etapas múltiples.

Muchos factores complican la determinación de la eficiencia real y las características de funcionamiento de una bomba. Por tanto, es muy común emplear el funcionamiento real experimental. Casi siempre, el propio fabricante expresa el funcionamiento de la bomba por medio de curvas llamadas *curvas características,* y éstas suelen ser para agua. La carga H producida en metros es igual para cualquier líquido de la misma viscosidad. La presión desarrollada, que se expresa como $p = H\rho g$, *es* proporcional a la densidad. Las viscosidades inferiores a 50 cp tienen poco efecto sobre la carga producida. Los kilowatts al freno varían directamente con la densidad.

Se pueden usar las siguientes aproximaciones para una bomba. La capacidad q_1 en m^3/s es directamente proporcional a las rpm N_1. Es decir,

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{N_1}{N_2} \qquad (3.3\text{-}6)$$

La carga H_1 es proporcional a q_1^2, 0

$$\frac{H_1}{H_2} = \frac{q_1^2}{q_2^2} = \frac{N_1^2}{N_2^2} \qquad \textit{(3.3-7)}$$

La *potencia consumida* W_1 es proporcional al producto $H_1 q_1$, *o*

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{H_1 q_1}{H_2 q_2} = \frac{N_1^3}{N_2^3} \qquad \textit{(3.3-8)}$$

La mayoría de las bombas tienen velocidad constante. En la figura 3.3-2 se muestran curvas características para una bomba centrífuga típica de una sola etapa, que opera a velocidad invariable. En general, las bombas se clasifican con base en la carga y en la capacidad en su punto de eficiencia máxima. Esta eficiencia se logra a aproximadamente 50 gal /min. A medida que la velocidad de descarga en gal /min aumenta, la carga desarrollada disminuye. Tal como es de esperarse, los hp al freno aumentan al incrementarse la velocidad del flujo.

EJEMPLO 3.3-l. Cálculo del caballaje al freno de una bomba

Para ilustrar la determinación de la curva de hp al freno, calcúlese el valor de hp al freno a 40 gal /min de gasto para la bomba de la figura 3.3-2.

Solución: A 40 gal/min la eficiencia η en la curva se aproxima a 60% y la carga *H es 38.5* pies. Un gasto de 40 gal /min de agua con densidad de 62.4 1b masa/pie^3, vale:

$$m = \left(\frac{40\,\text{gal/min}}{60\,\text{s/min}}\right)\left(\frac{1\,\text{pie}^3}{7.481\,\text{gal}}\right)\left(62.4\,\frac{\text{lb}_\text{m}}{\text{pie}^3}\right) = 5.56\,\frac{\text{lb}_\text{m}}{\text{s}}$$

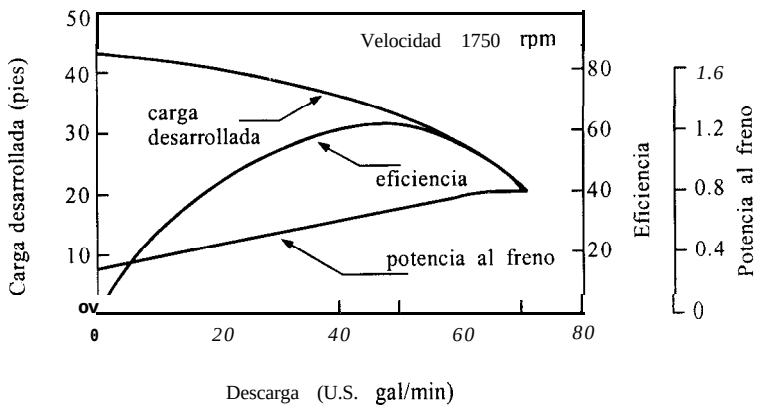


FIGURA. *3.3-2. Curvas características para una bomba centrífuga de una sola etapa que maneja agua. (Tomada de W. L. Badger y J. T. Banchero, Introduction to Chemical Engineering, Nueva York. McGraw-Hill, Inc., 1955. Con Permiso.)*

Con base en la ecuación (3.3-2), el trabajo W_S es:

$$W_S = -H\frac{g}{g_c} = -38.5\frac{\text{pie. lb}_f}{\text{lb}_m}$$

La potencia al freno, con la ecuación (3.3-2), es de:

$$\text{hp al freno} = \frac{-W_S m}{\eta \cdot 550} = \frac{38.5(5.56)}{0.60(550)} = 0.65 \text{ hp } (0.48 \text{ kW})$$

Este valor concuerda con el de la curva en la figura 3.3-2.

4. Bombas de desplazamiento positivo. En esta clase de bombas se introduce en la cámara un volumen definido de líquido que después se fuerza a salir a presión mayor. Existen dos tipos principales de bombas de desplazamiento positivo. En la *bomba de vaivén,* la cámara es un cilindro estacionario en cuyo interior entra el líquido por la acción de un pistón en el cilindro. Después, la salida se fuerza por medio del pistón en su desplazamiento regresivo. En la *bomba rotatoria,* la cámara se mueve de la entrada a la descarga y regresa a la entrada. En una bomba rotatoria de engranes hay dos de éstos acoplados, entre cuyos dientes se atrapa el líquido para forzarlo a salir en la descarga.

Tanto las bombas de vaivén como las rotatorias pueden usarse a presiones muy elevadas, mientras que las bombas centrífugas tienen limitaciones en cuanto a la carga y se usan para presiones más bajas. Las bombas centrífugas suministran líquido a presiones uniformes (sin variaciones ni pulsaciones) y pueden manejar líquidos con grandes cantidades de sólidos en suspensión. Es muy común que en plantas químicas y de procesamiento biológico, las bombas que más se usen sean las centrífugas.

Las ecuaciones (3.3-l) a (3.3-5) son válidas para el cálculo de la potencia en bombas de desplazamiento positivo. A velocidad constante, la capacidad de flujo permanece invariable con diferentes líquidos. En general, la velocidad promedio de descarga depende directamente de la velocidad. La potencia aumenta con relación directa a la carga, y la velocidad de descarga permanece casi constante a medida que aumenta la carga.

3.3C Maquinaria para el movimiento de gases

La *maquinaria para mover gases* comprende dispositivos mecánicos que se usan para comprimir y mover gases los cuales se clasifican o se consideran generalmente desde el punto de vista de las cargas de presión producidas, y son ventiladores para presiones bajas, sopladores (o ventiladores) para presiones intermedias y compresores para presiones elevadas.

1. Ventiladores. El método más común para mover volúmenes pequeños de gases (a presiones bajas) consiste en el empleo de un *ventilador.* Los ventiladores grandes suelen ser centrífugos y su principio de operación es similar al de las bombas centrífugas. Las cargas de descarga son bajas, desde 0.1 m a 1.5 m de H_2O. Sin embargo, en algunos casos, gran parte de la energía añadida al ventilador se convierte en energía cinética y otra pequeña cantidad en carga de presión.

En un ventilador centrífugo, la fuerza centrífuga producida por el rotor causa una compresión del gas, llamada *carga estática depresión.* Además, puesto que la velocidad del gas aumenta, se produce también una carga de velocidad. Al estimar la eficiencia y la potencia se debe incluir tanto la elevación de la carga estática de presión como el incremento de la carga de velocidad. Las eficiencias de operación varían entre 40 y 70%. La presión de operación de un ventilador casi siempre se expresa en pulgadas de agua manométricas y es la suma de la carga de velocidad y de la presión estática del gas que sale del ventilador. Para calcular la potencia de los ventiladores se puede usar la teoría del flujo incompresible.

EJEMPLO 3.3-2 Potencia al freno en kW de un ventilador centrífugo

Se desea usar 28.32 m^3/min de aire (medido a presión de 101.3 kPa y a 294.1 K) en un proceso. Esta cantidad de aire, que está en reposo, entra a la succión del ventilador a una presión de 741.7 mm Hg y temperatura de 366.3 K, y se descarga a una presión de 769.6 mm de Hg y velocidad de 45.7 m/s. Se usará un ventilador centrífugo que tiene una eficiencia del 60% Calcúlese la potencia al freno en kW necesaria.

Solución: Se puede suponer un flujo incompresible, pues la caída de presión es de sólo (27.9/741.7) 100, o 3.8% de la presión, corriente arriba. En la ecuación del balance de energía mecánica puede usarse una densidad promedio del gas.
La densidad en la succión, punto 1, es

$$\rho_1 = \left(28.97 \frac{\text{kg aire}}{1\ m^3\text{mol}}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{741.7}{760}\right) = 0.940\ \text{kg/m}^3$$

(El peso molecular de 28.97 para el aire, el volumen de 22.414 m^3/kg mol a 101.3 kPa y 273.2 K se obtuvieron del Apéndice A. 1.) La densidad en la descarga, punto 2, es

$$\rho_2 = (0.940)\frac{769.6}{741.7} = 0.975\ \text{kg/m}^3$$

La densidad promedio del gas es

$$\rho_{prom} = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} = \frac{0.940 + 0.975}{2} = 0.958\ \text{kg/m}^3$$

El gasto másico del gas es

$$m = \left(28.32 \frac{m^3}{min}\right)\left(\frac{1\ min}{60s}\right)\left(\frac{1\ kg\ mol}{22.414 m^3}\right)\left(\frac{273.2}{294.1}\right)\left(28.97 \frac{kg}{kg\ mol}\right) = 0.5663\ \text{kg/s}$$

La carga de presión desarrollada es

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho_{prom}} = \frac{(769.6 - 741.7)\text{mm Hg}}{760\ \text{mm/atm}}\left(1{,}01325 \times 10^5 \frac{N/m^2}{atm}\right)\left(\frac{1}{0.958 kg/m^3}\right) = 3883\ \text{J/kg}$$

La carga de velocidad desarrollada para $v_1 = 0$ es

$$\frac{v_2^2}{2} + \frac{(45.7)^2}{2} = 1044 \text{ J/kg}$$

Al escribir el balance de energía mecánica, ecuación (2.7-28),

$$z_1 g \frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} - W_S = z_2 g + \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + \sum F$$

Estableciendo $z_1 = 0$, $z_2 = 0$, $v_1 = 0$, y $\sum F = 0$ y despejando W_s,

$$-W_S = \frac{p_2 - p_1}{\rho_{prom}} + \frac{v_2^2}{2} = 3883 + 1044 = 4927 \text{ J/kg}$$

Al sustituir en la ecuación (3.3-2)

$$\text{kW al freno} = \frac{-W_S m}{\eta \cdot 1000} = \frac{4927(0.5663)}{0.60(1000)} = 4.65 \text{ kW } (6.23 \text{ hp})$$

2. Sopladores y compresores. Para el manejo de volúmenes de gases a presiones más altas que en los ventiladores, se usan diversos tipos de equipo. Los *turbosopladores, turboventiladores o compresores centrífugos* se emplean para mover grandes volúmenes de gas con elevaciones de presión desde unos 5 kPa hasta varios miles de kPa. Los principios de operación de un turbosoplador son los mismos de una bomba centrífuga. Un turbosoplador tiene una apariencia física similar a la de una bomba centrífuga; la principal diferencia consiste en que el gas del soplador es compresible. Como las bombas centrífugas, la carga del turbosoplador es independiente del tipo de fluido. Para lograr presiones más elevadas aún, se usan turbosopladores de etapas múltiples.

Los sopladores y compresores rotatorios son máquinas del tipo de desplazamiento positivo y son, esencialmente, equipos de velocidad de flujo a volumen constante con presión de descarga variable. Al variar la velocidad se modifica el gasto volumétrico. Lós detalles de construcción de los diversos tipos existentes (P1) son muy variables y de acuerdo con el modelo usado pueden obtenerse presiones de hasta 1000 kPa.

Los compresores de vaivén que se usan para presiones más altas son de desplazamiento positivo con pistones. Existen también equipos de etapas múltiples para presiones de 10 000 kPa o mayores.

3.3D Ecuaciones para la compresión de gases

En sopladores o ventiladores y compresores, los cambios de presión son considerables por lo que se presenta un flujo compresible. Puesto que la densidad varía de manera notable, la ecuación de balance de energía mecánica debe escribirse de forma diferencial e integrarse para obtener el trabajo de compresión. En la compresión de gases se eliminan los términos de carga estática, carga de

velocidad y fricción, y sólo quedan (en la forma diferencial de la ecuación de energía mecánica) el término de trabajo dW y el término dp/ρ; es decir,

$$dW = \frac{dp}{\rho} \tag{3.3-9}$$

La integración entre la presión de aspiración p_1 y la presión de descarga p_2, nos proporciona el trabajo de compresión,

$$W = \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho} \tag{3.3-10}$$

Para integrar la ecuación (3.3-10) para un gas perfecto, se supone una compresión adiabática o isotérmica. Para una compresión isotérmica, en la que el gas se enfría al comprimirlo, p/ρ es una constante igual a RT/M, donde R = 8314.3 J/kg mol . K {en unidades SI) y 1545.3 pie . $1b_f$/°R (en unidades del sistema inglés). Entonces,

$$\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{p}{\rho} \tag{3.3-11}$$

Si se despeja p en la ecuación (3.3-11) y se sustituye en la ecuación (3.3-10), el trabajo para la compresión isotérmica es

$$-W_S = \frac{p_1}{\rho_1}\int_{p_1}^{p_2}\frac{dp}{p} = \frac{p_1}{\rho_1}\ln\frac{p_2}{p_1} = \frac{2.3026RT_1}{M}\log\frac{p_2}{p_1} \tag{3.3-12}$$

Además, puesto que el proceso es isoténnico, $T_1 = T_2$.

Para una compresión adiabática, el fluido sigue una trayectoria isoentrópica, y

$$\frac{p_1}{p} = \left(\frac{\rho_1}{\rho}\right)^{\gamma} \tag{3.3-13}$$

donde $\gamma = c_p/c_v$; esto es, la relación de las capacidades caloríficas. Combinando las ecuaciones (3.3-10) y (3.3-11) e integrando,

$$-W_s = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{RT_1}{M}\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1\right] \tag{3.3-14}$$

Las temperaturas adiabáticas están relacionadas por la expresión

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} \tag{3.3-15}$$

Para calcular la potencia al freno, cuando la eficiencia es η,

$$\text{kW al freno} = \frac{-W_S m}{(\eta)(1000)} \tag{3.3-16}$$

donde m = kg gas /s y W_S = J/kg.

Los valores de y son, aproximadamente, 1.40 para aire, 1.3 1 para metano, 1.29 para SO_2, 1.20 para etano y 1.40 para N_2 (P1). Para una relación de compresión, dada el trabajo de compresión isotérmica de la ecuación (3.3-12) es inferior al trabajo de compresión adiabática de la ecuación (3.3-14). Por consiguiente, algunos compresores requieren enfriamiento.

EJEMPLO 3.3-3. Compresión de metano

Un compresor de una sola etapa tiene que comprimir 7.56×10^{-3} kg mol/s de metano gaseoso a 26.7 °C y 137.9 kPa abs a 551.6 kPa abs.

a) Calcúlese la potencia necesaria si la eficiencia mecánica es de 80% y la compresión es adiabática.

b) Repítase el cálculo para la compresión isotérmica.

Solución: Para el inciso a), $p_1 = 137.9$ kPa, $p_2 = 551.6$ kPa, $M = 16.0$ kg masa/kg mol, y $T_1 = 273.2 + 26.7 = 299.9$ K. El gasto másico por segundo es

$$m = (7.56 \times 10^{-3} \text{ kg mol/s})(16.0 \text{ kg/mol kg}) = 0.121 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

Sustituyendo en la ecuación (3.3-14) el valor y = 1.31 para el metano y $p_2/p_1 = 551.6/137.9 = 4.0/1$,

$$-W_S = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{RT_1}{M}\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1\right]$$

$$= \left(\frac{1.31}{1.31-1}\right)\frac{8314.3(299.9)}{16.0}\left[\left(\frac{4}{1}\right)^{(1.31-1)/1.31} - 1\right]$$

$$= 256300 \text{ J/kg}$$

Al usar la ecuación (3.3-16),

$$\text{kW al freno} = \frac{-W_S m}{\eta \cdot 1000} = \frac{(256300)0.121}{0.80(1000)} = 38.74 \text{ kW (52.0 hp)}$$

Para el inciso b), usando la ecuación (3.3-12) para compresión isotérmica,

$$-W_S = \frac{2.3026RT_1}{M}\log\frac{p_2}{p_1} = \frac{2.3026(8314.3)(299.9)}{16.0}\log\frac{4}{1}$$

$$= 216000 \text{ J/kg}$$

$$\text{kW al freno} = \frac{-W_S m}{\eta \cdot 1000} = \frac{(216000)0.121}{0.80(1000)} = 32.67 \text{ kW (43.8 hp)}$$

Por tanto, la compresión isotérmica requiere 15.8% menos potencia.

3.4 AGITACIÓN Y MEZCLADO DE FLUIDOS Y NECESIDADES DE POTENCIA

3.4A Objetivos de la agitación

En las industrias químicas de procesos y en otras semejantes, muchas operaciones dependen en alto grado de la agitación y mezclado eficaz de los fluidos, Por lo general, la *agitación* se refiere a forzar un fluido por medios mecánicos para que adquiera un movimiento circulatorio en el interior de un recipiente. El *mezclado* implica partir de dos fases individuales, tales como un fluido y un sólido pulverizado o dos fluidos, y lograr que ambas fases se distribuyan al azar entre sí.

Existen varios objetivos en la agitación de fluidos y algunos de ellos son:

1. Mezclado de dos líquidos miscibles, tales como alcohol etílico y agua.
2. Disolución de sólidos en líquidos, tales como sal en agua.
3. Dispersión de un gas en un líquido en forma de burbujas pequeñas, como en el caso del oxígeno del aire en una suspensión de microorganismos para la fermentación, o para el proceso de activación de lodos en el tratamiento de aguas de desperdicio.
4. Suspensión de partículas sólidas finas en un líquido, tal como en la hidrogenación catalítica de un líquido, donde las partículas del catalizador sólido y las burbujas de hidrógeno se dispersan en un líquido.
5. Agitación de un fluido para aumentar la transferencia de calor entre dicho fluido y un serpentín o una camisa en las paredes del recipiente.

3.4B Equipo para agitación

Generalmente, los líquidos se agitan en un recipiente cilíndrico que puede estar cerrado o abierto. La altura del líquido debe equivaler en forma aproximada al diámetro del tanque. Un motor eléctrico impulsa al propulsor agitador, que está montado en un eje. En la figura 3.4-l se muestra un sistema de agitación típico.

1. Agitador propulsor de tres aspas. Existen varios tipos de agitadores de uso común. Uno de los más conocidos es el agitador de tres aspas de tipo marino, similar a la hélice de un motor fuera de borda para lanchas. El agitador puede ser móvil para introducirlo lateralmente en el tanque o estar montado en la pared de un tanque abierto, en posición desplazada del centro. Estos agitadores giran a velocidades de 400 a 1750 rpm (revoluciones por minuto) y son propios para líquidos de baja viscosidad. En la figura 3.4-l se muestra el patrón de flujo en un tanque con deflectores y con un propulsor colocado en el centro del tanque. Este tipo de patrón de flujo se llama *flujo axial,* ya que el fluido fluye axialmente hacia abajo en el eje central o eje de la hélice y hacia arriba a los lados del tanque, como se muestra en la citada figura.

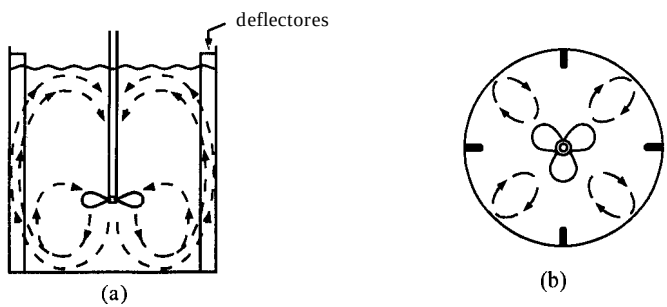


FIGURA 3.4-1. *Tanque con deflectores y agitador de turbina de paletas planas con patrón de flujo axial. a) vista lateral, b) vista del fondo.*

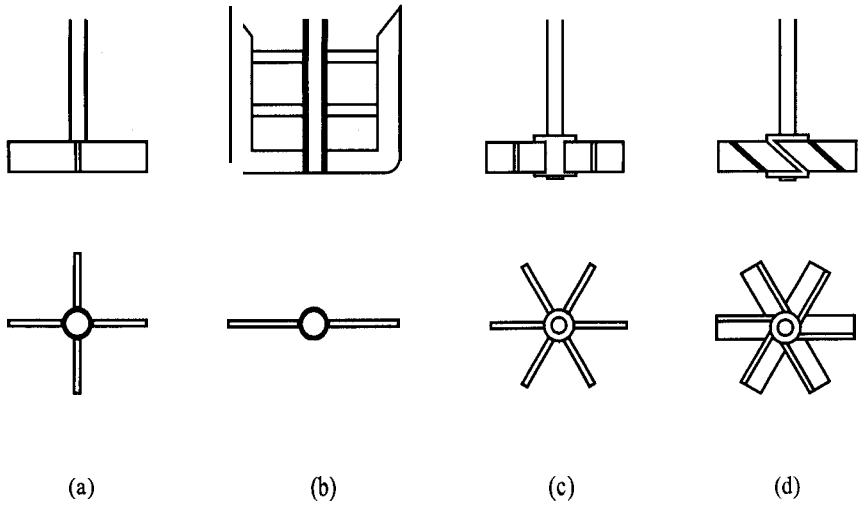


FIGURA 3.4-2 *Varios tipos de agitadores: a) paleta de* **cuatro** *aspas, b) paleta de compuerta o ancla, c) turbina abierta de seis aspas, d) turbina de aspas inclinadas (45°).*

2. Agitadores depaletas. Para velocidades de 20 a 200 rpm se emplean diversos tipos de agitadores de paletas. Tal como lo muestra la figura 3.4-2a se tienen sistemas de dos a cuatro paletas planas. La longitud total del propulsor de paletas mide del 60 al 80% del diámetro del tanque y la anchura de la paleta es de 1/6 a 1/10 de su longitud. A bajas velocidades se consigue una agitación suave en un recipiente sin deflectores. A velocidades más altas se usan deflectores porque, sin ellos, el líquido simplemente hace remolinos y en realidad casi no se mezcla. El agitador de paletas no es efectivo para sólidos en suspensión porque, aunque hay un buen flujo radial, hay poco flujo axial o vertical. Se suele usar una paleta de ancla o compuerta, ilustrada en la figura 3.4-2b, la cual barre o raspa las paredes del tanque y a veces su fondo. Se emplea con líquidos viscosos que pueden generar depósitos en las paredes y para mejorar la transferencia de calor hacia las mismas, pero no es buen mezclador. Se suele usar para procesar pastas de almidón, pinturas, adhesivos y cosméticos.

3. Agitadores de turbina. Cuando se procesan líquidos con amplia diversidad de viscosidades se usan turbinas semejantes a un agitador de paletas múltiples con aspas más cortas. El diámetro de una turbina suele medir del 30 al 50% del diámetro del tanque. Normalmente las turbinas tienen cuatro o seis aspas. En la figura 3.4-3 se muestra un agitador de turbina de seis aspas, con disco; en la figura 3.4-2c se ilustra una turbina plana abierta de seis aspas. Las turbinas con aspas planas producen un flujo radial, como se muestra en la figura 3.4-3. Para dispersar un gas en un líquido, el gas puede hacerse penetrar justo por debajo del propulsor de la turbina en su eje; de esa manera las paletas dispersan el gas en muchas burbujas tinas. Con la turbina de hojas inclinadas que se muestra en la figura 3.4-2d, con las aspas a 45°, se imparte cierto flujo axial, de modo que hay una combinación de flujos radial y axial. Este tipo es útil para sólidos en suspensión, ya que las corrientes fluyen hacia abajo y luego levantan los sólidos depositados.

4. Agitadores de banda helicoidal. Este tipo de agitadores se usa para soluciones sumamente viscosas y opera a pocas rpm, en la región laminar. La banda se forma en una trayectoria helicoidal y está unida a un eje central. El líquido se mueve en una trayectoria de flujo tortuosa hacia abajo en el centro y hacia arriba a los lados, con movimiento de giro, Otros tipos semejantes son el de banda helicoidal doble y el de banda helicoidal con tornillo.

5. Selección del agitador e intervalos de viscosidad. La viscosidad del fluido es uno de los diferentes factores que influyen en la selección del tipo de agitador. En seguida se dan algunas indicaciones de los intervalos de viscosidad de esos agitadores. Los propulsores se usan para viscosidades del fluido inferiores a 3 Pa . s (3000 cp); las turbinas pueden usarse por debajo de unos 100 Pa . s (100000 cp); las paletas modificadas como los agitadores tipo ancla se pueden usar desde más de 50 Pa . s hasta unos 500 Pa . s (500000 cp); los agitadores helicoidales y de tipo banda se suelen usar desde arriba de este intervalo hasta cerca de 1000 Pa . s y se han utilizado hasta para más de 25000 Pa . s. Para viscosidades mayores de unos 2.5 a 5 Pa . s (5000 cp) o más, los deflectores no se necesitan porque hay poca turbulencia.

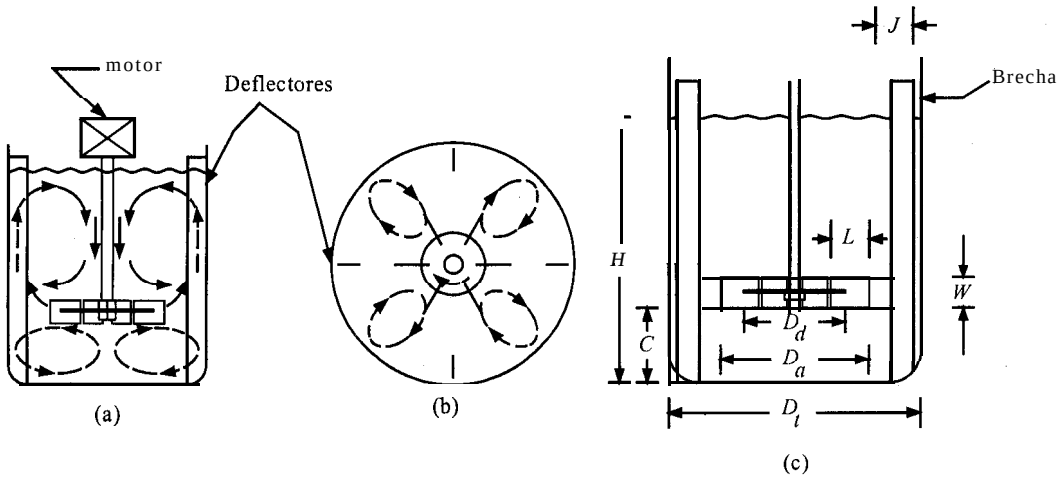


FIGURA 3.4-3 *Tanque con deflectores con un agitador de turbina de seis aspas con disco, que muestra patrones de flujo: a) vista lateral, b) vista superior, c) dimensiones de la turbina y el tanque.*

3.4C. Trayectoria del flujo en la agitación

La trayectoria del flujo en un tanque de agitación depende de las propiedades del fluido, de la geometría del tanque, del tipo de deflectores y del propio agitador. Si el propulsor u otro agitador va montado verticalmente en el centro del tanque sin deflectores, casi siempre se desarrolla una trayectoria de flujo tipo remolino. Esto suele ser indeseable debido a que se atrapa aire, se desarrolla un vórtice considerable y ocurren oleadas y otros efectos perjudiciales, en especial cuando se opera a velocidades altas. Para evitar esto, puede usarse una posición angular desplazada del centro cuando se trata de propulsores de baja potencia. Sin embargo, para agitación vigorosa a potencias altas, las fuerzas no equilibradas pueden ser severas y limitar el uso de esas potencias.

Para lograr una agitación vigorosa con agitadores verticales, se acostumbra el empleo de deflectores para reducir el tamaño del remolino y obtener así un buen mezclado. En la figura 3.4-3 se muestran deflectores montados en las paredes en posición vertical. Casi siempre basta con cuatro deflectores, que tengan anchura de cerca de $\frac{1}{12}$ del diámetro del tanque para turbinas y propulsores. El impulsor de la turbina fuerza al líquido en dirección radial hasta las paredes donde se divide, en una porción que fluye hacia arriba, hasta tocar la superficie para regresar hacia el propulsor, mientras la otra porción fluye hacia abajo. Algunas veces, cuando se trata de tanques con grandes profundidades de líquido en comparación con el diámetro del tanque, se montan dos o tres propulsores en el mismo eje, y cada uno actúa como un mezclador individual. El propulsor inferior está cerca de 1 .O diámetro del propulsor por arriba del fondo del tanque.

En un sistema de agitación, el gasto volumétrico del fluido que mueve el impulsor (esto es, la velocidad de circulación), es un factor muy importante para asegurarse de agitar la totalidad del volumen del mezclador en tiempo razonable. Además, la turbulencia en la corriente de agitación es decisiva para el mezclado, puesto que arrastra al material hacia la corriente. Algunos sistemas de agitación requieren una alta turbulencia con velocidades de circulación bajas; otros se basan en turbulencias bajas con altas velocidades de circulación. Esto casi siempre depende de los tipos de fluidos que se mezclan y del grado de mezclado que se solicite.

3.4D Diseño "normal" típico de una turbina

El agitador de turbina que se muestra en la figura 3.4-3 es el agitador más usado en las industrias de proceso. Para diseñar un sistema de agitación ordinario, generalmente se usa este tipo de agitador en el diseño inicial. Las proporciones geométricas del sistema de agitación que se considera como el diseño "normal" típico se muestra en la tabla 3.4- 1. Estas proporciones relativas son la base de las correlaciones principales del desempeño de los agitadores en muchas publicaciones. (Véase la nomenclatura en la figura 3.4-3c)

En algunos casos, para las correlaciones del agitador, $W/D_a = 1/8$. El número de deflectores en la mayoría de los usos es 4. El claro o brecha entre los deflectores y la pared suele ser de 0.10 a 0.15 J para asegurar que el líquido no forme bolsas estancadas cerca de esa zona. En pocas correlaciones la relación entre el deflector y el diámetro del tanque es $J/D_t = 1/10$ en lugar de 1/12.

3.4E Potencia consumida en los recipientes de agitación

Un factor trascendental en el diseño de un recipiente de agitación es la potencia necesaria para mover el impulsor. Puesto que la potencia requerida para un sistema dado no puede predecirse teóricamente, se tienen correlaciones empíricas para estimar los requerimientos de potencia. La presencia o ausencia de turbulencia puede correlacionarse con el número de Reynolds del impulsor N'_{Re}, que se define como

$$N'_{Re} = \frac{D_a^2 N \rho}{\mu} \tag{3.4-1}$$

donde D_a es el diámetro del impulsor (agitador) en m, N la velocidad de rotación en rev/s, ρ la densidad del fluido en kg/m^3 y μ la viscosidad en kg/m · s. El flujo es laminar en el tanque cuando $N'_{Re} < 10$, turbulento cuando $N'_{Re} > 10000$ y para un intervalo de 10 a 10000, el flujo es de transición, mostrándose turbulento en el impulsor y laminar en la partes más recónditas del recipiente.

El consumo de potencia se relaciona con la densidad del fluido ρ, su viscosidad μ, la velocidad de rotación Ny el diámetro del impulsor D_a, por medio de gráficas de número de potencia N_p en función de N'_{Re}. El número de potencia es

$$N_p = \frac{P}{\rho N^3 D_a^5} \quad \text{(SI)}$$

$$N_p = \frac{P g_c}{\rho N^3 D_a^5} \quad \text{(Unidades del sistema inglés)} \tag{3.4-2}$$

donde P = potencia en J/s o W. En unidades del sistema inglés, P = pie · lb$_f$/s.

TABLA 3.4-l. *Proporciones geométricas para un sistema de agitación "normal"*

$\frac{D_a}{4} = 0.3$ a 0.5	$\frac{H}{D_t} = 1$	$\frac{C}{D_t} = \frac{1}{3}$
$\frac{W}{D_a} = \frac{1}{5}\frac{D_d}{D_a} - \frac{2}{3}$	$\frac{L}{D_a} = \frac{1}{4}$	$\frac{J}{D_t} = \frac{1}{12}$

La figura 3.4-4 es una correlación (B3, R1) de impulsores de uso común con líquidos newtonianos contenidos en recipientes cilíndricos con deflectores. En la figura 3.4-3c se incluyen mediciones dimensionales de los tamaños de los deflectores, el tanque y el impulsor. Estas curvas también son prácticas para tanques sin deflectores cuando N'_{Re} vale 300 o menos (B3, R1). Cuando N'_{Re} es superior a 300, el consumo de potencia en un recipiente sin deflectores es considerablemente menor que en uno con deflectores. Existen también curvas para otros tipos de impulsores (B3, R1).

EJEMPLO 3.4-l. Consumo de potencia en un agitador

En un tanque similar al de la figura 3.4-3 se instala un agitador de turbina de aspas planas que tiene seis aspas. El diámetro del tanque D_t mide 1.83 m el diámetro de la turbina D_a, 0.61 m, D_t = H y el ancho W, *0.122* m. El tanque tiene cuatro deflectores, todos ellos con un ancho J= *0.15* m. La turbina opera a 90 rpm y el líquido del tanque tiene una viscosidad de 10 cp y densidad de 929 kg/m^3.

a) Calcúlense los kilowatts requeridos para el mezclador.
b) Con las mismas condiciones (excepto.que la solución tiene ahora una viscosidad de 100000 cp), vuélvase a calcular la potencia requerida.

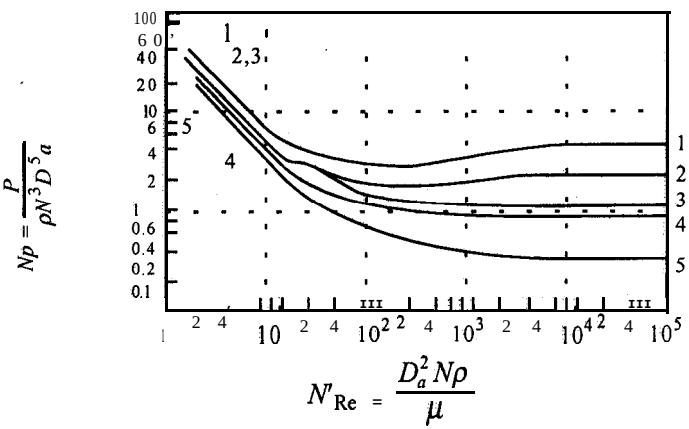


FIGURA 3.4-4 *Correlaciones de potencia para diversos impulsores y defectores (véase en la Fig. 3.4-3c las dimensiones D_a, D_t, J y W)*

Curva 1. Turbina de seis aspas planas (igual a la Fig. 3.4-3 pero con seis aspas); $D_a/W = 5$; cuatro deflectores cada uno con $D_t/J = 12$.

Curva 2. Turbina abierta de seis aspas planas (igual a la Fig. 3.4-2c pero con seis aspas); $D_a/W = 8$; cuatro deji'ectores con $D_t/J = 12$.

Curva 3. Turbina abierta de seis aspas a 45" (igual a la Fig. 3.4-2d pero las aspas a 45°); $D_a/W = 8$; cuatro dejlectores con $D_t/J = 12$.

Curva 4. Propulsor; inclinación $2D_a$, cuatro deflectores con $D_t/J = 10$; también es valida para el mismo propulsor en posición angular y desplazado del centro sin dejlectores.

Curva 5. Propulsor; inclinación = Da, cuatro dejlectores con $D_t/J = 10$; también es valida para un propulsor en posición angular desplazada del centro sin dejlectores.

[Curvas 1. 2 y 3 reproducidas con permiso de R. L. Bates, P. L. Fondy y R. R. Corpstein. Ind. Eng. Chem. Proc. Des. Dev., 2. 310 (1963). Derechos registrados por la American Chemical Society. Curvas 4 y 5 tomadas con permiso de J. H. Rushton, E. W. Costich y H. J. Everett. Chem. Eng. Progr., 46, 395, 467 (1950).]

Solución: Para el inciso a) se cuenta con los datos siguientes: D_a = 0.61 m, W = 0.122 m, D_t = 1.83 m, J = 0.15 m, N= 90/60 = 1.50 rev/s, ρ = 929 kg/m^3 y

$$\mu = (10.0 \text{ cp})(1 \times 10^{-3}) = 0.01 \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}} = 0.01 \text{ Pa . s}$$

Al aplicar la ecuación (3.4-1), el número de Reynolds es

$$N'_{\text{Re}} = \frac{D_a^2 N \rho}{\mu} = \frac{(0.61)^2 (1.50) 929}{0.01} = 5.185 \times 10^4$$

Considérese la curva 1 en la figura 3.4-4, puesto que D_a/W = 5 y D_t/J = 12, N_p = 5 para N'_{Re} = 5 1850. Al despejar P en la ecuación (3.4-2) y sustituir los valores conocidos,

$$P = N_p \rho N^3 D_a^5 = 5\ (929)(1.50)^3(0.61)^5$$

$$= 1324 \text{ J/s} = 1.324 \text{ kW } (1.77 \text{ hp})$$

Para el inciso b),

$$\mu = 100\ 000(1 \times 10^{-3}) = 100 \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}$$

$$\text{N'}_{\text{Re}} = \frac{(0.61)^2 (1.50) 929}{100} = 5\ 185$$

Esta es la región de flujo laminar. Con base en la figura 3.4-4, N_p = 14.

$$P = (14)(929)(1.50)^3(0.61)^5 = 3707 \text{ J/s} = 3.71 \text{ kW } (4.98 \text{ hp})$$

Por lo anterior, un aumento de 10000 veces en la viscosidad sólo incrementa el consumo de potencia de 1.324 a 3.71 kW.

Las diversas relaciones geométricas que difieren del diseño "normal" pueden tener diferentes efectos en el número de potencia N_p en la región turbulenta de los distintos agitadores de turbina, como se indica (B3).

1. Para la turbina abierta de seis aspas planas, N_p CC $(W/D_a)^{1.0}$.
2. Para la turbina abierta de seis aspas planas, si se hace varias D_a/D_t de 0.25 a 0.50 prácticamente no hay efectos sobre N_p.
3. Para dos turbinas abiertas de seis aspas instaladas en el mismo eje, y si el espaciamiento entre los dos impulsores (la distancia vertical entre los bordes inferiores de las dos turbinas) es al menos igual a D_a, la potencia total es 1.9 veces la de un impulsor de una aspa plana. Para dos turbinas de seis aspas inclinadas (45°), la potencia también es de cerca de 1.9 veces la de un impulsor de aspa inclinada.
4. Un tanque cuadrado vertical con deflectores y un tanque cilíndrico horizontal tienen el mismo número de potencia que un tanque cilíndrico vertical, pero en ellos se producen patrones de flujo marcadamente diferentes.

El número de potencia de un agitador simple de tipo ancla, semejante al de la figura 3.4-2b pero sin las dos barras transversales horizontales, es como sigue para $N'_{Re} < 100$ (H2):

$$N_p = 215(N'_{Re})^{-0.955} \qquad (3.4\text{-}3)$$

donde D_a *ID, = 0.90,* W/D_t = 0.10 y C/D_t = *0.05.*

El número de potencia para un agitador de banda helicoidal para líquidos muy viscosos, con $N'_{Re} < 20$, es como se indica (H2,P3).

$$N_p = 186(N'_{Re})^{-1} \quad \text{(paso del agitador/diámetro del tanque = 1.0)} \qquad (3.4\text{-}4)$$

$$N_p = 290(N'_{Re})^{-1} \quad \text{(paso del agitador/diámetro del tanque = 0.5)} \qquad (3.4\text{-}5)$$

Las proporciones dimensionales típicas que se usan son D_a/D_t = 0.95, con algunas tan bajas como 0.75, y $W/D_t = 0.095$.

3.4F Aumento de escala de los agitadores

1. Introducción. En las industrias de procesos los datos experimentales suelen estar disponibles a partir de un sistema de agitación de tamaño de laboratorio o de unidad piloto, y se desea aumentar la escala de los resultados para diseñar una unidad a escala completa. Como hay una gran diversidad en los procesos cuya escala se debe aumentar, no hay un solo método que pueda manejar todos los tipos de problema de aumento de escala, y hay muchas maneras de hacer esto. La semejanza geométrica es importante, por supuesto, y es la más fácil de lograr. La semejanza cinemática puede definirse en términos de razones de velocidades o de tiempos (R2). La semejanza dinámica requiere proporciones fijas de fuerzas viscosas, inerciales o gravitatorias. Aun si se logra la semejanza geométrica, las semejanzas dinámica y cinemática no siempre se pueden obtener al mismo tiempo. Por consiguiente, a veces lo que el diseñador debe hacer es confiar en su buen juicio y experiencia para hacer el aumento de escala.

En muchos casos, los objetivos principales que se presentan en un proceso de agitación son los siguientes: *igual movimiento de líquidos,* como en la mezcla de líquidos, donde el movimiento o velocidad correspondiente de los líquidos es aproximadamente igual en ambos casos; *igual suspensión de sólidos,* donde los niveles de suspensión son iguales; *e iguales tasas de transferencia de masa,* donde la transferencia de masa ocurre entre una fase líquida y una sólida, entre dos fases líquidas, etc., y las tasas son iguales.

2. Procedimiento de aumento de escala. En seguida se sugiere un procedimiento paso a paso para aumentar de escala desde las condiciones iniciales, donde los tamaños geométricos dados en la tabla 3.4-l son $D_{a1}, D_{T1}, H_1, W_1, y$ así sucesivamente, hasta las condiciones finales de $D_{a\,2}, D_{T2}, y$ así sucesivamente.

1. Calcule la razón de aumento de escala *R*. Suponiendo que el recipiente original es un cilindro estándar con $D_{T1} = H_1$, el volumen V_1 es

$$V_1 = \left(\frac{\pi D_{T1}^2}{4}\right)(H_1) = \left(\frac{\pi D_{T1}^3}{4}\right) \qquad (3.4\text{-}6)$$

Por tanto, la relación entre los volúmenes es

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\pi D_{T2}^3/4}{\pi D_{T1}^3/4} = \frac{D_{T2}^3}{D_{T1}^3} \tag{3.4-7}$$

Así, la relación de aumento de escala es

$$R = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1/3} = \frac{D_{T2}}{D_{T1}} \tag{3.4-8}$$

2. Al usar este valor de R, aplíquelo a todas las dimensiones de la tabla 3.4-l para calcular las nuevas dimensiones. Por ejemplo,

$$D_{a2} = RD_{a1}, \quad J_2 = RJ_1, \cdots \tag{3.4-9}$$

3. Después debe elegirse una regla de aumento de escala y aplicarse para determinar la rapidez del agitador N_2 que debe usarse para duplicar los resultados a pequeña escala que se obtuvieron empleando N_1. Esta ecuación es la siguiente (R2):

$$N_2 = N_1 \left(\frac{1}{R}\right)^n = N_1\left(\frac{D_{T1}}{D_{T2}}\right) \tag{3.4-10}$$

donde $n = 1$ para igual movimiento de líquidos, $n = \frac{3}{4}$ para igual suspensión de sólidos, y $n = \frac{2}{3}$ para iguales tasas de transferencia de masa (lo que equivale a igual potencia por volumen unitario). Este valor de n se basa en consideraciones empíricas y teóricas.

4. Al conocer N_2, la potencia necesaria puede determinarse usando la ecuación (3.4-2) y la figura *3.4-4.*

EJEMPLO 3.4-2. Deducción del exponente de la regla de aumento de escala

Para el exponente n de la regla de aumento de escala de la ecuación (3.4-10), demuestre lo siguiente para la agitación turbulenta.

a) Que cuando $n = \frac{2}{3}$, la potencia por volumen unitario es constante en el aumento de escala.

b) Que cuando $n = 1.0$, la velocidad de la punta es constante en el aumento de escala.

Solución: Para el inciso a), se ve en la figura 3.4-4 que N_P es constante para la región turbulenta. Entonces, a partir de la ecuación (3.4-2),

$$P_1 = N_p \rho N_1^3 D_{a1}^5 \tag{3.4-l 1}$$

Así, para igual potencia por volumen unitario, $P_1/V_1 = P_2/V_2$, o, usando la ecuación (3.4-6),

$$\frac{P_1}{V_1} = \frac{P_1}{\pi D_{T1}^3/4} = \frac{P_2}{V_2} = \frac{P_2}{\pi D_{T2}^3/4} \tag{3.4-12}$$

Al sustituir P_1 de la ecuación (3.4-l 1) y también una ecuación semejante para P_2 en la ecuación (3.4-12) y combinándolas con la ecuación (3.4-8),

$$N_2 = N, \left(\frac{1}{R}\right)^{2/3} \tag{3.4-13}$$

Para el inciso b), usando la ecuación(3.4-10) con $n = 1.0$, reordenando y multiplicando por π,

$$N_2 = N_1 \left(\frac{D_{T1}}{D_{T2}}\right)^{1.0} \tag{3.4-14}$$

$$\pi D_{T2} N_2 = \pi D_{T1} N_1 \tag{3.4-15}$$

donde $\pi D_{T2}\, N_2$ es la velocidad del extremo en m/s.

Para ayudar al diseñador de nuevos sistemas de agitación y para que sirvan como guía para evaluar los sistemas existentes, en seguida se dan algunas indicaciones aproximadas para líquidos de viscosidades normales (M2): para agitación y mezclado suave, 0.1 a 0.2 kW/m^3 de fluido (0.0005 a 0.001 hp/gal); para agitación vigorosa, 0.4 a 0.6 kW/m^3 (0.002 a 0.003 hp/gal); para agitación intensa o cuando la transferencia de masa es importante, 0.8 a 2.0 kW/m^3 (0.004 a 0.0 10 hp/gal). Esta potencia en kilowatts es la potencia real proporcionada al fluido como se indica en la figura 3.4-4 y en la ecuación (3.4-2). Esto no incluye la potencia que se usa en las cajas de engranajes y chumaceras. Las eficiencias típicas de los motores eléctricos se dan en la sección 3.3B. Como una aproximación, la pérdida de potencia en las cajas de engranajes y chumaceras y en la ineticiencia del motor eléctrico es de entre el 30 y el 40% de P, la entrada de potencia real en el fluido.

EJEMPLO 3.4-3. Aumento de escala de un sistema de agitación de turbina

Cierto sistema de agitación existente es igual al del ejemplo 3.4-la para una turbina de aspa plana con un disco y seis aspas. Las condiciones y los tamaños son $D_{T1} = 1.83$ m, $D_{a1} = 0.61$ m, $W_1 = 0.122$ m, $J_1 = 0.15$ m, $N_1 = 90/60 = 1.50$ rev/s, $p = 929$ kg/m^3 y $\mu = 0.01$ Pa . s. Se desea aumentar la escala de estos resultados para un recipiente cuyo volumen es 3.0 veces mayor. Realice esto para los siguientes objetivos de proceso.

a) Cuando se desea igual cantidad de transferencia de masa.
b) Cuando se necesita igual movimiento de líquido.

Solución: Puesto que $H_1 = D_{T1} = 1.83$ m, el volumen del tanque original $V_1 = (\pi D_{T1}^2/4 (H_1) = \pi(1.83)^3/4 = 4.813\ m^3$. El volumen es $V_2 = 3.0(4.813) = 14.44\ m^3$. Siguiendolospasos del procedimiento de aumento de escala, y usando la ecuación (3.4-8),

$$R = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1/3} = \left(\frac{14.44}{4.813}\right)^{1/3} = 1.442$$

Las dimensiones del sistema de agitaciónmás grande son como sigue: $D_{T2} = RD_{T1} = 1.442(1.83) = 2.64$ m, $D_{a2} = 1.442(0.61) = 0.880$ m, $W_2 = 1.442(0.122) = 0.176$ m, y $J_2 = 1.442(0.15) = 0.216$ m.

Para el inciso a), para igual transferencia de masa, $n = \frac{2}{3}$ en la ecuación (3.4-10).

$$N_2 = N_1 \left(\frac{1}{R}\right)^{2/3} = (1.50)\left(\frac{1}{1.442}\right)^{2/3} = 1.175 \text{ rev/s (70.5 rpm)}$$

Al usar la ecuación (3.4-1),

$$N_{Re} = \frac{D_a^2 N \rho}{\mu} = \frac{(0.880)^2 (1.175) 929}{0.01} = 8.453 \times 10^4$$

Utilizando $N_p = 5.0$ en la ecuación (3.4-2)

$$P_2 = N_p \rho N_2^3 D_{a2}^5 = 5.0(929)(1.175)^3(0.880)^5 = 3977 \text{ J/s} = 3.977 \text{ kW}$$

La potencia por volumen unitario es

$$\frac{P_1}{V_1} = \frac{1.324}{4.808} = 0.2752 \text{ kW/m}^3$$

$$\frac{P_2}{V_2} = \frac{3.977}{14.44} = 0.2752 \text{ kW/m}^3$$

El valor de 0.2752 kW/m^3 es un poco menor que el de las indicaciones aproximadas de 0.8 a 2.0 para la transferencia de masa.

Para el inciso (b), para igual movimiento de líquido, $n = 1.0$.

$$N_2 = (1.50)\left(\frac{1}{1.442}\right)^{1.0} = 1.040 \text{ rev/s}$$

$$P_2 = 5.0(929)(1.040)^3(0.880)^5 = 2757 \text{ J/s} = 2.757 \text{ kW}$$

$$\frac{P_2}{V_2} = \frac{2.757}{14.44} = 0.1909 \text{ kW/m}^3$$

3.4G Tiempos de mezcla para los líquidos miscibles

En uno de los métodos que se usan para estudiar el tiempo de mezcla de los líquidos miscibles, se agrega cierta cantidad de ácido clorhídrico a un equivalente de NaOH y se anota el tiempo requerido para que el indicador cambie de color. Ésta es una medida del mezclado de las moléculas. También se usan otros métodos experimentales. Cerca del impulsor se verifica una mezcla rápida, y una mezcla más lenta (que depende de la tasa de circulación de bombeo) en las zonas más externas.

En la figura 3.4-5 se da una correlación del tiempo de mezcla para un agitador de turbina (B5, M5, NI). El factor adimensional de mezcla f_t se define como

$$f_t = t_T \frac{\left(ND_a^2\right)^{2/3} g^{1/6} D_a^{1/2}}{H^{1/2} D_t^{3/2}} \qquad \textbf{(3.4-16)}$$

donde t_T es el tiempo de mezcla en segundos. Para $N'_{Re} > 1000$, como f_t es aproximadamente constante, entonces $t_T N^{2/3}$ es constante. Para algunas otras mezcladoras se ha demostrado que $t_T N$ es aproximadamente constante. Para aumentar la escala del recipiente 1 a otro recipiente 2 de diferente tamaño, pero con igual geometría y con la misma potencia/volumen unitario en la región turbulenta, los tiempos de mezcla se relacionan mediante

$$\frac{t_{T2}}{t_{T1}} = \left(\frac{D_{a2}}{D_{a1}}\right)^{11/18} \tag{3.4-17}$$

Por tanto, el tiempo de mezcla aumenta para el recipiente más grande. Al aumentar la escala se mantiene el mismo tiempo de mezcla y la potencia /volumen unitario P/V aumenta marcadamente.

$$\frac{(P_2/V_2)}{(P_1/V_1)} = \left(\frac{D_{a2}}{D_{a1}}\right)^{11/4} \tag{3.4-18}$$

Normalmente, cuando se aumenta la escala para los recipientes de gran tamaño, se utiliza un tiempo de mezcla un tanto mayor, de modo que la potencia /volumen unitario no aumente demasiado.

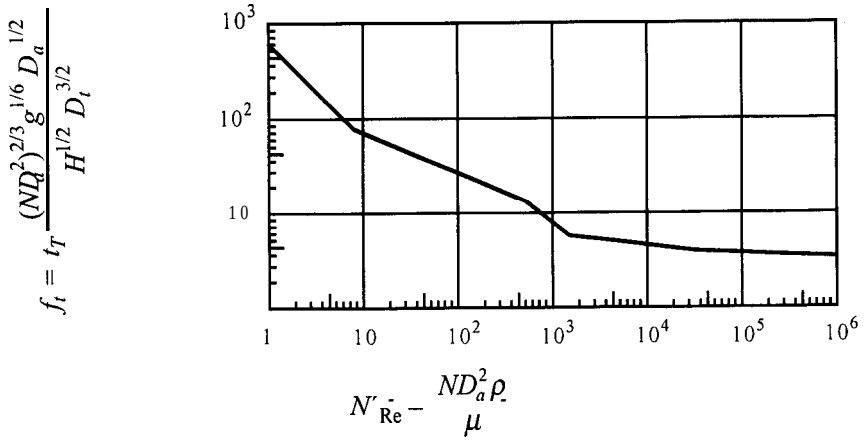


FIGURA *3.4-5 Correlación del tiempo de mezcla para líquidos miscibles usando una turbina en un tanque con defectores (para turbina simple, una turbina con disco y una turbina con aspas inclinadas). [De "Flow Patterns and Mixing Rates in Agitated Vessels" por K. W. Norwood y A. B. Metzner, A. I. Ch. E. J., 6, 432 (1960). Reproducido con autorización del American hstitute of Chemical Engineers, 1960.]*

El tiempo de mezcla para un agitador de banda helicoidal es el siguiente para $N'_{Re} < 20$ (H2).

$$N_{tT} = 126 \quad \text{(paso del agitador/diámetro del tanque = 1.0)} \tag{3.4-19}$$

$$N_{tT} = 90 \quad \text{(paso del agitador/diámetro del tanque = 0.5)} \tag{3.4-20}$$

Para líquidos muy viscosos, la mezcladora de banda helicoidal da un tiempo de mezcla mucho menor que una turbina para la misma potencia/volumen unitario (M5), pero para líquidos no viscosos, da tiempos mayores.

Biggs (B5) da una correlación de tiempo de mezcla para un agitador propulsor en un tanque con deflectores, Fox y Gex (Fl) la dan para un tanque sin deflectores.

3.4H Número de flujo y rapidez de circulación en la agitación

Un agitador funciona como un impulsor de bomba centrífuga sin carcasa, y genera un flujo con cierta carga de presión. Esta tasa de circulación Q en m^3/s a partir del borde del impulsor es la cantidad de flujo perpendicular al área de descarga del impulsor. Las velocidades de flujo se han medido en las mezcladoras y se han usado para calcular la rapidez de circulación. Los datos para los recipientes con deflectores se han correlacionado usando el número de flujo adimensional N_Q (U1).

$$N_Q = \frac{Q}{ND_a^3} \tag{3.4-21}$$

$N_Q = 0.5$ propulsor marino (paso = diámetro)

$N_Q = 0.75$ turbina de seis aspas con disco $(W/D_a = \frac{1}{5})$

$N_Q = 0.5$ turbina de seis aspas con disco $(W/D_a = \frac{1}{8})$

$N_Q = 0.75$ turbina con aspas inclinadas $(W/D_a = \frac{1}{5})$

3.41 Sistemas de agitación especiales

1. Suspensión de sólidos. En algunos sistemas de agitación se suspende un sólido en el líquido agitado. Hay ejemplos en los que un sólido finalmente disperso se debe disolver en el líquido, se suspenden microorganismos en la fermentación, se debe producir una mezcla homogénea de sólido y líquido para alimentar un proceso o se usa un sólido suspendido como catalizador para apresurar una reacción. La suspensión de sólidos es un tanto parecida a un lecho fluidizado. En el sistema agitado, las corrientes de circulación del líquido conservan las partículas en suspensión. La cantidad y tipo de agitación necesaria depende principalmente de la velocidad terminal de sedimentación de las partículas, la cual puede calcularse usando las ecuaciones de la sección 14.3. En las referencias (M2, Wl) se dan ecuaciones empíricas para predecir la potencia requerida para suspender partículas.
2. Dispersión de gases y líquidos en líquidos. En los procesos de dispersión de gas-líquido, el gas se introduce por debajo del impulsor, que corta el gas en burbujas sumamente finas. El tipo de agitación determina el tamaño de las burbujas y el área interfacial total. Los más típicos de estos procesos son la aereación en plantas de tratamiento de aguas negras, la hidrogenación de líquidos mediante hidrógeno gaseoso en presencia de un catalizador, la absorción del soluto de un gas mediante un líquido, y la fermentación. Se dispone de correlaciones para predecir el tamaño de la burbuja, la demora y la potencia en kilowatts necesaria (C3, Ll, Zl). Para líquidos dispersos en líquidos inmiscibles, véase la referencia (Tl). La potencia requerida por el agitador en los sistemas de dispersión gas-líquido puede ser hasta del 10 al 50% menos de la que se necesita cuando no hay gas presente (C3, T2).
3. Mezcladoras sin movimiento. La mezcla de dos fluidos puede realizarse en mezcladoras inmóviles que no tienen partes móviles. En estos dispositivos comerciales, unos elementos estacionarios que se encuentran dentro de una tubería dividen sucesivamente porciones de la corriente y luego las

recombinan. En un tipo de mezcladoras, un elemento helicoidal corto divide la corriente ‘en dos y la hace girar 180”. El segundo elemento, puesto a 90” respecto al primero, vuelve a dividir la corriente en dos. Por cada elemento existen 2 divisiones y recombinaciones, o 2^n para n elementos en serie. Para 20 elementos ocurren cerca de 10^6 divisiones.

Hay disponibles otros tipos que consisten en barras o placas planas colocadas a lo largo en una tubería. Las caídas a baja presión son características de todos estos tipos de mezcladoras, y en ellas es bastante buena la mezcla incluso de materiales sumamente viscosos.

3.45 Mezclado de polvos, materiales viscosos y pastas

1. Polvos. Al mezclar partículas sólidas (o polvos) es necesario desplazar algunas partes de la mezcla en polvo con respecto a las porciones restantes. Los dispositivos más simples propios para un mezclado poco vigoroso son los tambores giratorios. Sin embargo, no sirven para romper aglomerados. Entre los dispositivos de mezclado giratorio, uno de los tipos más comunes es el *mezclador cónico,* en el que se montan dos conos unidos por sus extremos abiertos, que giran tal como lo muestra la figura 3.4-6a, aunque también pueden emplearse deflectores internos. Si el cono incluye en su interior un dispositivo de rotación, el sistema puede romper aglomerados. Otras geometrías usadas son un cilindro con deflectores internos o el mezclador en V de doble cuerpo. Los mezcladores adaptados para romper aglomerados son cilindros o conos giratorios en los que se cargan también bolas o cilindros de metal o porcelana.

Otro tipo de dispositivos para el mezclado de sólidos es el llamado de *coraza estacionaria,* donde el recipiente está inmóvil y el desplazamiento del material se logra por medio de dispositivos giratorios internos, simples o múltiples. En el mezclador de bandas de la figura 3.4-6b, el dispositivo giratorio es un eje con dos tomillos helicoidales abiertos (1 y 2), uno siniestro y el otro diestro. A medida que se hace girar el eje, las porciones de polvo se mueven en direcciones opuestas para que se verifique el mezclado. Existen otros tipos de dipositivos internos de rotación para situaciones especiales (PI); además en algunos equipos, tanto el recinto como el dispositivo interno giran simultáneamente.

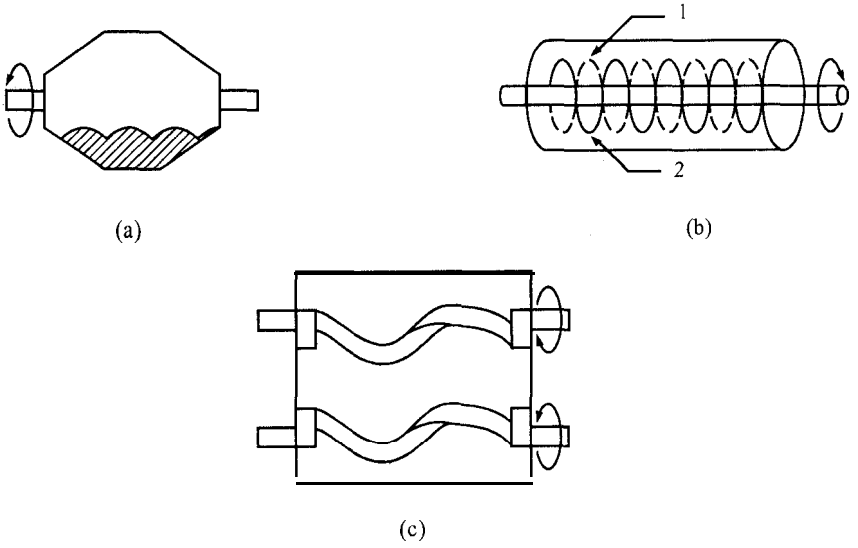


FIGURA *3.4-6. Mezcladores para polvos y pastas. a) mezclador cónico para polvos, b) mezclador de bandas para polvos con dos bandas, c) mezclador amasador para pastas.*

2. Masas, pastas y materiales viscosos. En el mezclado de masas, pastas y otros materiales viscosos, se necesitan elevadas cantidades de potencia para dividir, doblar sobre sí mismas y recombinar las porciones del material, además de que es necesario desplazar algunas partes del material con respecto a otras, para que la recombinación se efectúe, dentro de lo posible, con superficies nuevas. Algunas máquinas requieren chaquetas de enfriamiento para absorber el calor generado.

El primer tipo de dispositivo es similar a los agitadores de fluidos, con un impulsor que gira lentamente en un tanque. El impulsor puede ser un agitador de marco muy ajustado a las paredes como el de la figura 3.4-6b, en el que pueden incluirse también aspas para raspado. También puede emplearse un impulsor de marco que tenga barras verticales u horizontales que corten la pasta a varios niveles y en la pared, la cual puede tener barras estacionarias. Un mezclador de marco modificado es el mezclador de barras cortantes o paletas verticales giratorias que pasan entre espigones también verticales pero estacionarios. Otras modificaciones de estos tipos son los mezcladores en los que el recipiente o coraza gira simultáneamente con las barras y los raspadores. A éstos se les llama *mezcladores de cubeta giratoria*.

El mezclador de uso más común para pastas y masas espesas *es* el *mezclador amasador de brazo doble.* La acción de mezclado es un movimiento de todo el volumen de la masa con estiramiento, remoldeo, divisiones, dobleces y recombinación de superficies. El diseño más conocido emplea dos brazos contrarrotatorios de forma sigmoidal que giran a diferentes velocidades, tal como se muestra en la figura 3.4-6c.

3.5 FLUIDOS NO NEWTONIANOS

3.5A Tipos de fluidos no newtonianos

Como se señaló en la sección 2.4, los fluidos no newtonianos son aquellos que no obedecen la ley de Newton, ecuación (3.5-l)

$$\tau = -\mu \frac{dv}{dr} \qquad \text{(SI)}$$

$$\tau = \frac{\mu}{g_c} \frac{dv}{dr} \qquad \text{(Unidades del sistema inglés)} \tag{3.5-l}$$

donde μ, la viscosidad, es una constante independiente de la velocidad cortante. En la figura 3.5-l se muestra una gráfica del esfuerzo cortante τ en función de la velocidad cortante dv/dr. La gráfica de un fluido newtoniano es una recta con pendiente igual a μ.

Cuando un fluido no obedece la ecuación (3.5-1), se trata de un fluido no newtoniano. En estas condiciones, una gráfica de τ en función de $-dv/dr$ no es lineal a través del origen. Los fluidos no newtonianos pueden dividirse en dos categorías principales con base en su comportamiento de esfuerzo cortante /velocidad cortante: fluidos en los que el esfuerzo cortante es independiente del tiempo o duración de la acción cortante (independientes del tiempo) y aquellos en los que el esfuerzo cortante depende del tiempo o duración de la acción cortante (dependientes del tiempo). Además de su comportamiento anormal en relación con el esfuerzo cortante, algunos fluidos no newtonianos también tienen características elásticas (como el caucho) que están en función del tiempo y como resultado de las cuales se les llama *fluidos viscoelásticos*. Estos fluidos exhiben esfuerzos normales perpendiculares a la dirección del flujo, además de los esfuerzos tangenciales usuales. Nuestro estudio se concentrará en los fluidos independientes del tiempo, que incluyen a la mayoría de los no newtonianos.

3.5B. Fluidos independientes del tiempo

1. Fluidos plásticos de Bingham. Éstos son los más simples debido a que, tal como se muestra en la figura 3.5-1, sólo difieren de los newtonianos en cuanto a que la relación lineal no pasa por el origen. Para iniciar el flujo se requiere un exceso de cierto valor del esfuerzo cortante τ_y (llamado *límite de fluidez)* en N/m^2. Algunos fluidos tienen un límite (cortante) τ_y finito, pero la gráfica de τ contra $-dv/dr$ se curva hacia arriba o hacia abajo. Sin embargo, esta desviación con respecto a la plasticidad de Bingham suele ser pequeña. Entre los ejemplos de fluidos con un límite de fluidez están los lodos de perforación, las suspensiones de turba, la margarina, las mezclas de chocolate, las grasas, los jabones, las suspensiones de granos en agua, las pastas dentífricas, la pulpa de madera y los lodos de desecho.

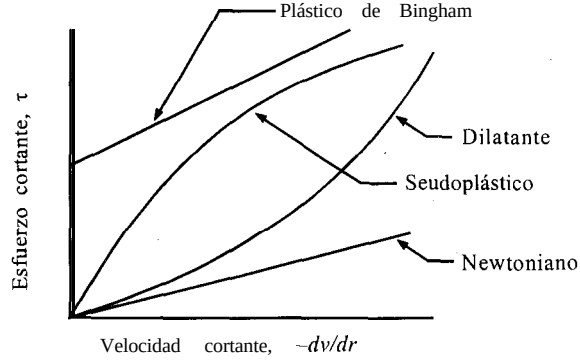


FIGURA 3.5-l *Diagrama de esfuerzo cortante para fluidos newtonianos y no newtonianos independientes del tiempo.*

2. Fluidos seudoplásticos. La mayoría de los fluidos no newtonianos pertenecen a esta categoría e incluyen las soluciones o fusiones de polímeros, las grasas, las suspensiones de almidón, la mayonesa, ciertos fluidos biológicos, las suspensiones de detergentes, los medios de dispersión de algunos productos farmacéuticos y las pinturas. En la figura 3.5-l se muestra la forma de la curva de flujo, que por lo general puede representarse mediante una ecuación exponencial (que a veces se llama *ecuación de Ostwald-de Waele):*

$$\tau = K\left(-\frac{dv}{dr}\right)^n \quad (n < 1) \tag{3.5-2}$$

donde K es el índice de consistencia en $N \cdot s^n/m^2$ o $lb_f \cdot s^n/pie^2$ y n es el índice de comportamiento de flujo, cantidad adimensional. La viscosidad aparente obtenida de las ecuaciones (3.5-l) y (3.5.-2) es $\mu_a = K(dv/dr)^{n-1}$ disminuye al aumentar el esfuerzo cortante.

3. Fluidos dilatantes. Éstos son mucho menos comunes que los seudoplásticos y su comportamiento de flujo en la figura 3.5- 1 muestra un aumento de la viscosidad aparente al elevar la velocidad cortante. Casi siempre se puede aplicar la expresión exponencial de la ecuación (3.5-2), pero cuando $n > 1$,

$$\tau = K\left(-\frac{dv}{dr}\right)^n \quad (n > 1) \tag{3.5-3}$$

Para un fluido newtoniano, $n = 1$. Algunas soluciones dilatantes son la harina de maíz y la azúcar en solución, arena de playa húmeda, almidón en agua, silicato de potasio en agua y varias soluciones que contengan concentraciones elevadas de polvos en agua.

3.5C Fluidos dependientes del tiempo

1. Fluidos tixotrópicos. Estos fluidos exhiben una disminución reversible del esfuerzo cortante con el tiempo cuando la velocidad cortante es constante. Este esfuerzo cortante tiende a un valor límite que depende de la velocidad cortante. Entre los principales ejemplos pueden incluirse algunas soluciones de polímeros, la manteca, algunos materiales alimenticios y las pinturas. La teoría de los fluidos dependientes del tiempo todavía es un poco confusa.

2. Fluidos reopécticos. Son muy raros y exhiben un aumento reversible del esfuerzo cortante con el tiempo cuando la velocidad cortante es constante. Algunos ejemplos son las suspensiones de arcilla bentonítica, algunos soles y las suspensiones de yeso. En algunos procedimientos de diseño para fluidos tixotrópicos y reopécticos, cuando se trata de flujo estable en tuberías, se usan (S2, W3) los valores límite de las propiedades de flujo a velocidad cortante invariable.

3.5D Fluidos viscoelásticos

Los fluidos de esta naturaleza exhiben una recuperación elástica de las deformaciones que se presentan durante el flujo, es decir, muestran propiedades tanto viscosas como elásticas. Parte de la deformación se recupera al eliminar el esfuerzo. Entre los principales ejemplos están las masas de harina, el napalm (gelatina de petróleo), ciertos polímeros fundidos y los betunes.

3.5E Flujo laminar de los fluidos no newtonianos independientes del tiempo

1. Propiedades de flujo de un *fluido.* Para determinar las propiedades de flujo de un fluido no newtoniano e independiente del tiempo, suele aplicarse un viscosímetro de tubo capilar. Con este dispositivo se mide la caída de presión AP N /m^2 para cierta velocidad de flujo q m^3/ s, en un tubo recto de longitud L m y diámetro D m. Este proceso se repite para diferentes gastos o velocidades promedio V m /s. Si el fluido es independiente del tiempo, estos datos de flujo sirven para predecir sus características en cualquier otro tipo de tubería.

En la figura 3.5-2 se muestra una gráfica de $D \cdot \Delta P/4L$, que es π_w, el esfuerzo cortante en la pared en N /m^2, en función de $8V/D$, proporcional a la velocidad cortante en la pared, para un fluido que obedece la ley exponencial:

$$\tau_w = \frac{D\,\Delta p}{4L} = K'\left(\frac{8V}{D}\right)^{n'} \qquad \textbf{(3.5-4)}$$

donde n' es la pendiente de la línea (cuando los datos se grafican en coordenadas logarítmicas) y las unidades K' son $\dot{N} \cdot s^{n'}/m^2$. Cuando $n' = 1$, el fluido es newtoniano; si $n' < 1$, es seudoplástico o plástico de Bingham si la curva no pasa por el origen; para $n' > 1$, se trata de un fluido dilatante.

El término K', esto es, el índice de consistencia de la ecuación (3.5-4), es el valor de $D \cdot \Delta p/4L$ para $8V/D = 1$. La velocidad cortante en la pared, $(-dv/dr)_w$, es

$$\left(-\frac{dv}{dr}\right)_w = \left(\frac{3n'+1}{4n'}\right)\left(\frac{8V}{D}\right) \qquad (3.5\text{-}5)$$

También, $K' = \mu$ para flujos newtonianos.

La ecuación (3.5-4) es simplemente otra expresión del modelo de la ley exponencial de la ecuación (3.5-2) aplicada a flujos en tubos redondos (D2) y es de manejo más conveniente para situaciones de flujo en tubería (D2). Por consiguiente, la ecuación (3.5-4) define las características de flujo en forma tan completa como la ecuación (3.5-2). Se ha determinado por medios experimentales (M3) que, para la mayoría de los fluidos, K' y n' son constantes en intervalos amplios de 8 V/D o D Ap $/4L$. Para algunos fluidos, esto no es así y K' y n' pueden variar. En estos casos los valores de K' y n' que se usen deben

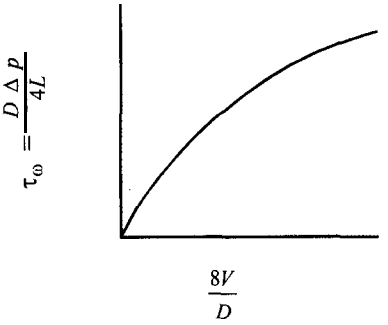


FIGURA 3.52 *Curva general de flujo para un fluido de ley exponencial, cuyo flujo en un tubo es laminar.*

ser válidos para los límites reales de 8 V/D o D Ap $/4L$ que se fijan en las condiciones de diseño. Este método con flujo en un tubo se usa frecuentemente para determinar las propiedades de flujo de un fluido no newtoniano.

En muchos casos, las propiedades de flujo de un fluido se determinan por medio de un viscosímetro giratorio. Las propiedades de flujo K y n de la ecuación (3.5-2) se establecen de esta manera. Un análisis de los viscosímetros giratorios se da en la sección 3.5-1.

Cuando las propiedades de flujo son constantes en un amplio intervalo de esfuerzos cortantes, situación muy común para muchos fluidos, se aplican las siguientes ecuaciones (M3):

$$n' = n \qquad (3.5\text{-}6)$$

$$K' = K\left(\frac{3n'+1}{4n'}\right)^{n'} \qquad (3.5\text{-}7)$$

También se suelen definir un coeficiente de viscosidad generalizado γ:

$$\gamma = K' 8^{n'-1} \quad \text{(SI)}$$
$$\gamma = g_c K' 8^{n'-1} \quad \text{(Unidades del sistema inglés)} \qquad (3.5\text{-}8)$$

donde las unidades de γ son N . $s^{n'}/m^2$ o $lb_m/pie^2 \cdot s^{2-n'}$.

En la tabla 3.5-l se incluyen constantes típicas de propiedades de flujo (constantes reológicas). Algunos de estos datos se expresan en función de γ en lugar de K', pero puede aplicarse la ecuación (3.5-8) para transformar estos valores cuando resulte necesario. En algunos casos de la literatura, K o K' se expresan en dina . $s^{n'}/cm^2$ o lb_f . $s^{n'}/pie^2$. Con base en el apéndice A. 1, los factores de conversión son

$$1 \text{ lbf} \cdot s^{n'}/\text{pie}^2 = 47.880 \text{ N} \cdot s^{n'}/m^2$$

$$1 \text{ dina} \cdot s^{n'}/cm^2 = 2.0886 \times 10^{-3} \text{ lb}_f \cdot s^{n'}/\text{pie}^2$$

TABLA 3.5-1. *Constantes de propiedades de flujo para fluidos no newtonianos*

Fluido	*Constantes de las propiedades de flujo* n'	γ	$K\left(\frac{N \cdot s^{n'}}{m^2}\right)$	*Ref.*
Carboximetilcelulosaal 1.5% en **agua**	0.554	*1.369*		(S1)
CMC al 3 .0% en agua	0.566	4.17		(S1)
Pulpa de madera al 4% en agua	0.575	9.12		(A1)
Arcillaal 14.3% en agua	0.350	0.0512		(W2)
Napalm al 10% en querosina	0.520	1.756		(S1)
Arcilla al 25% en agua	0.185	0.3036		(W2)
Puré de manzana, clase A (297 K), densidad = 1.10 g/cm³	0.645		0.500	(C1)
Puré de plátano, clase A (297 K), densidad = 0.977 g/cm³	0.458		6.51	(C1)
Miel (297 K)	1.00		5.61	(C1)
Crema, 30% de grasas (296 K)	1.0		0.01379	(M4)
Concentrado de tomate, 5.8% de sólidos totales (305 K)	*0.59*		0.2226	(H1)

2. Ecuaciones para flujo en un tubo. Para predecir la caída de presión *Ap* por fricción en el flujo laminar en un tubo, se despeja Ap en la ecuación (3.5-4).

$$\Delta p = \frac{K' 4L}{D}\left(\frac{8V}{D}\right)^{n'} \tag{3.5-9}$$

Si se desea la velocidad promedio, la ecuación (3.5-4) puede reordenarse para obtener

$$V = \frac{D}{8}\left(\frac{\Delta p D}{K' 4L}\right)^{1/n'} \tag{3.5-10}$$

Si las ecuaciones se desean en términos de K en lugar de K', las ecuaciones (3.5-6) y (3.5-7) pueden sustituirse en las ecuaciones (3.5-9) y (3.5-10). El flujo debe ser laminar y el número de Reynolds generalizado se define como

$$N_{\mathrm{Re,gen}} = \frac{D^{n'}V^{2-n'}\rho}{\gamma} = \frac{D^{n'}V^{2-n'}\rho}{K'8^{n'-1}} = \frac{D^{n}V^{2-n}\rho}{K8^{n-1}\left(\frac{3n+1}{4n}\right)^{n}} \qquad \text{(SI)} \tag{3.5-11}$$

3. Método del factor de fricción. En otro método, se aplica el factor de fricción de Fanning expresado por las ecuaciones (2.10-5) a (2.10-7) para fluidos newtonianos, pero usando números de Reynolds generalizados:

$$f = \frac{16}{N_{\mathrm{Re,gen}}} \tag{3.5-12}$$

$$\Delta p = 4f\rho\,\frac{L}{D}\frac{V^2}{2} \qquad \text{(SI)} \tag{3.5-13}$$

$$\Delta p = 4f\rho\,\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g_c} \qquad \text{(Unidades del sistema inglés)}$$

EJEMPLO 3.5-1. Caída de presión de un fluido con flujo laminar que obedece la ley exponencial

Un fluido que obedece la ley exponencial y con densidad de 1041 kg/m^3 fluye a través de 14.9 m de una tubería de 0.0524 m de diámetro interior, a velocidad promedio de 0.0728 m /s. Las propiedades reológicas o de fluidez del fluido son K' = 15.23 N . $s^{n'}/m^2$ (0.3 18 lb_f . $s^{n'}/pie^2$) y $n' = 0.40$.

a) Calcule la caída de presión y la pérdida por fricción con la ecuación (3.5-9) para flujo laminar. Compruebe el número de Reynolds generalizado para asegurarse de que el flujo es laminar.

b) Repita los cálculos del inciso a) con el método del factor de fricción.

Solución: Los datos conocidos son los siguientes: $K' = 15.23$, $n' = 0.40$, $D = 0.0524$ m, $V = 0.0728$ m/s, $L = 14.9$ m y $\rho = 1041$ kg/m^3. Usando la ecuación (3.5-9) para el inciso a),

$$\Delta p = \frac{K'4L}{D}\left(\frac{8V}{D}\right)^{n'} = \frac{15.23(4)(14.9)}{0.0524}\left(\frac{8\times 0.0728}{0.0524}\right)^{0.4} = 45390\ \mathrm{N/m^2}$$

Además, para calcular la pérdida por fricción,

$$F_f = \frac{\Delta p}{\rho} = \frac{45390}{1041} = 43.60\ \mathrm{J/kg}$$

Ahora con la ecuación (3.5-11),

$$N_{\mathrm{Re,\ gen}} = \frac{D^{n'}V^{2-n'}\rho}{K'8^{n'-1}} = \frac{(0.0524)^{0.40}(0.0728)^{1.60}(1041)}{15.23(8)^{-0.6}} = 1\,106$$

Se verifica que el flujo es laminar.
Para el inciso b), mediante la ecuación (3.5-12),

$$f = \frac{16}{N_{\mathrm{Re,gen}}} = \frac{16}{1.106} = 14.44$$

Al sustituir en la ecuación (3.5-13),

$$\mathrm{Ap} = 4f\rho \frac{L}{D}\frac{V^2}{2} = 4(14.44)(1041)\frac{14.9}{0.0524}\frac{(0.0728)^2}{2}$$

$$= 45.39 \frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}^2}\left(946\frac{\mathrm{lb_f}}{\mathrm{ft}^2}\right)$$

Existen métodos, que se analizan en detalle en las referencias (C 1, P 1, S2), para determinar la caída de presión de un fluido que muestra comportamiento plástico de Bingham, con límite de fluidez para flujo laminar.

3.5F *Pérdidas por fricción de redacciones, expansiones y accesorios, con flujo laminar*

Puesto que los fluidos no newtonianos que obedecen la ley exponencial, y que fluyen por conductos exhiben por lo general un flujo laminar debido a su alta viscosidad efectiva, las pérdidas causadas por los cambios repentinos de velocidad y por los accesorios tienen gran importancia en el flujo laminar.
1. Energía cinética en el flujo laminar. Al aplicar el balance general de energía mecánica de la ecuación (2.7-28), se necesita saber la energía cinética promedio por unidad de masa del fluido. Este valor es (S2),

$$\text{energía cinética promedioikg} = \frac{V^2}{2\alpha} \qquad \textbf{(3.5-14)}$$

Para fluidos newtonianos con flujo laminar, $\alpha = \frac{1}{2}$. Para fluidos no newtonianos que obedecen la ley exponencial,

$$\alpha = \frac{(2n+1)(5n+3)}{3(3n+1)^2} \qquad \textbf{(3.5-15)}$$

Por ejemplo, si $n = 0.50$, $\alpha = 0.585$; si $n = 1.00$, $\alpha = \frac{1}{2}$. Para flujo turbulento de fluidos newtonianos y no newtonianos, $\alpha = 1.0$ (1.0) (D3).

2. Pérdidas en reducciones y accesorios. Skelland (S2) y Dodge y Metzner (D2) afirman que cuando un fluido sale de un tanque y fluye con una reducción repentina a un tubo de diámetro D_2, o bien cuando pasa de un tubo de diámetro D_1 a otro de diámetro D_2 con una reducción repentina, casi siempre se forma una vena contracta corriente abajo de la reducción. En general, se cree que las pérdidas de presión por fricción para fluidos seudoplásticos y plásticos de Bingham, son muy similares a las de fluidos newtonianos con los mismos números de Reynolds generalizados tanto en flujo laminar como en turbulento y para reducciones, accesorios y válvulas.

Para pérdidas por reducción puede ser útil la ecuación (2.10-16), donde $\alpha = 1$ .O para flujo turbulento; para flujo laminar puede usarse la ecuación (3.5-15) para determinar α, puesto que n no vale 1.00.

En el caso de accesorios y válvulas, las pérdidas por fricción deben determinarse con base en la ecuación (2.10-17) y a los valores de la tabla 2.10-l.

3. Pérdidas en una expansión repentina. Skelland (S2), proporciona la siguiente expresión para la pérdidas por fricción de un líquido no newtoniano con flujo laminar que pasa por una expansión repentina de un diámetro D_1 a D_2:

$$h_{ex} = \frac{3n+1}{2n+1} V_1^2 \left[\frac{n+3}{2(5n+3)} \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^4 - \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2 + \frac{3(3n+1)}{2(5n+3)} \right] \tag{3.5-16}$$

donde h_{ex} es la pérdida por fricción en J/kg. En unidades del sistema inglés, la ecuación (3.5-16) se divide entre g_c y h_{ex} está expresada en pie · lb_f/lb_m.

La ecuación (2.10-l 5) para un flujo laminar con $\alpha = \frac{1}{2}$, proporciona valores razonablemente cercanos a los de la ecuación (3.5-16) para $n = 1$ (fluido newtoniano). Para un flujo turbulento, la pérdida por fricción puede aproximarse mediante la ecuación (2.10-15), con $\alpha = 1.0$, para fluidos no newtonianos (S2).

3.5G Flujo turbulento y factores de fricción generalizados

En flujo turbulento y para fluidos dependientes del tiempo, el número de Reynolds en el cual se presenta este flujo turbulento varía con las propiedades de flujo del fluido no newtoniano. Dodge y Metzner (D2) llevaron a cabo un estudio muy minucioso para obtener una ecuación teórica para el flujo turbulento de fluidos no newtonianos a través de tuberías circulares lisas. La figura 3.5-3 es una gráfica de la ecuación final, donde se trazó el factor de fricción de Fanning en función del número de Reynolds generalizado, $N_{Re,\,gen}$, de la ecuación (3.5-l 1). Para el caso se estudiaron fluidos que obedecen la ley exponencial y tienen índices de comportamiento de flujo n' entre 0.36 y 1.0,

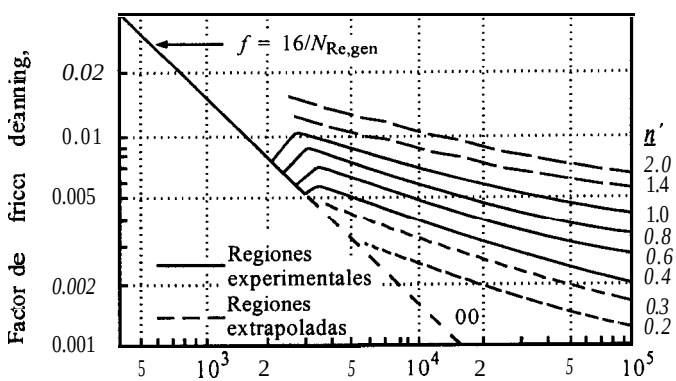


FIGURA *3.5-3. Factor de fricción de Fanning en función del número de Reynolds generalizado para fluidos newtonianos y no newtonianos independientes del tiempo, fluyendo en tuberías lisas. [Tomado de D. W. Dodge y A. B. Metzner, A. I. Ch. E. J., 5, 189 (1959). Reproducido con permiso.]*

obteniéndose resultados experimentales con números de Reynolds hasta de 35000, mismos que confirman la deducción teórica.

Las curvas para los diferentes valores de n' se desvían de la línea laminar a diferentes números de Reynolds para penetrar en la región de transición. Para $n' = 1.0$ (newtoniano), la zona de transición empieza en $N_{Re,\,gen} = 2\,100$. Puesto que muchos fluidos no newtonianos que obedecen la ley exponencial tienen viscosidades efectivas elevadas, casi siempre tienen flujo laminar. La correlación para un tubo liso también es válida para un tubo rugoso cuando se trata de flujo laminar.

La figura 3.5-3 no sirve para tuberías ásperas comerciales con diversos grados de rugosidad ε/D, y flujo turbulento pues esta expresión se dedujo únicamente para tuberías lisas. La interdependencia funcional entre los valores de rugosidad ε/D, y n' exige datos experimentales que todavía no existen. Metzner y Reed (M3, S3) recomiendan el uso de la relación existente, figura 2.1 O-3 para fluidos newtonianos en tuberías con rugosidad, usando el número de Reynolds generalizado, $N_{Re,\,gen}$. Este es un enfoque conservador, pues los datos preliminares disponibles indican que los factores de fricción para fluidos seudoplásticos pueden ser ligeramente inferiores a los de los fluidos newtonianos. Esto también concuerda con la figura 3.5-3 para tuberías lisas, que indica la existencia de valores defmás bajos cuando n' es inferior a 1.0 (S2).

EJEMPLO 3.5-2. Flujo turbulento de un fluido de ley exponencial

Un fluido seudoplástico que obedece la ley exponencial, y cuya densidad es 96 1 kg /m^3, fluye a través de un tubo circular liso cuyo diámetro interior mide 0.0508 m, a velocidad promedio de 6.10 m/s. Las propiedades de flujo del fluido son $n' = 0.30$ y $k' = 2.744$ N . s$^{n'}$/m^2. Calcule la caída de presión por fricción en un tubo de 30.5 m de largo.

Solución: Los datos conocidos son los siguientes: $K' = 2.744$, $n' = 0.30$, $D = 0.0508$ m, $V = 6.10$ m/s, $\rho = 961$ kg/m^3, y $L = 30.5$ m. La expresión del número de Reynolds generalizado, ecuación (3.5-11), arroja este resultado:

$$N_{Re,gen} = \frac{D^{n'}V^{2-n'}\rho}{K'8^{n'-1}} = \frac{(0.0508)^{0.3}(6.10)^{1.7}(961)}{2.744\left(8^{-0.7}\right)}$$

$$= 1.328 \times 10^4$$

Por tanto, el flujo es turbulento. Con la figura 3.5-3 para $N_{Re,\,gen} = 13280$ y $n' = 0.30$, $f = 0.0032$.

Al sustituir esos valores en la ecuación (3.5-13),

$$\Delta p = 4f\rho\frac{L}{D}\frac{V^2}{2} = 4(0.0032)(961)\left(\frac{30.5}{0.0508}\right)\frac{(6.10)^2}{2}$$

$$= 137.4\ \text{kN/m}^2(2870\ \text{lb}_f/\text{pie}^2)$$

3.5H Perfiles de velocidad para fluidos no newtonianos

A partir de la ecuación (3.5-2) escrita como

$$\tau_{rx} = K\left(-\frac{dv_x}{dr}\right)^n \qquad \textbf{(3.5-17)}$$

puede deducirse la siguiente ecuación que relaciona la velocidad v_x con la posición radial r, que es la distancia a partir del centro. (Véase el problema 2.9-3 para esta deducción.)

$$v_x = \frac{n}{n+1}\left(\frac{p_0 - p_L}{2KL}\right)^{1/n}(R_0)^{(n+1)/n}\left[1-\left(\frac{r}{R_0}\right)^{(n+1)/n}\right] \qquad (3.5\text{-}M)$$

A $r = 0$, $v_x = v_{x\,máx}$ y la ecuación (3.5-18) se convierte en

$$v_x = v_{x\,máx}\left[1-\left(\frac{r}{R_0}\right)^{(n+1)/n}\right] \qquad (3.5\text{-}19)$$

Puede calcularse el perfil de velocidad para el flujo laminar de un fluido no newtoniano para demostrar que puede ser muy diferente del perfil de velocidad para un fluido newtoniano que se da en la ecuación (2.9-9). Para fluidos seudoplásticos $(n < 1)$, se obtiene un perfil de velocidad relativamente plano comparado con el perfil parabólico de un fluido newtoniano. Para $n = 0$, se obtiene un flujo en forma de bastón. Para fluidos dilatantes (n >1), se obtiene un perfil mucho más agudo, y para $n = \infty$, la velocidad está en función lineal del radio.

3.51 Determinación de las propiedades de flujo de los fluidos no newtonianos usando un viscosímetro rotatorio

La propiedad de flujo o constantes reológicas de los flujos no newtonianos pueden medirse usando el flujo de tubería que se analizó en la sección 3.5E. Otro método, más importante, de medir las propiedades de flujo es usar un viscosímetro rotatorio de cilindro concéntrico. El primero que lo describió fue Couette en 1890. En este dispositivo, un cilindro rotatorio concéntrico (árbol) da vueltas con velocidad constante dentro de otro cilindro. Generalmente hay una brecha muy pequeña entre las paredes. Este anillo está lleno de fluido. El momento de torsión necesario para mantener esta tasa de rotación constante del árbol interno se mide mediante un alambre de torsión del cual está suspendido el árbol. Un instrumento comercial típico de este tipo es el viscosímetro de Brookfíeld. Algunos tipos tienen cilindro externo rotatorio.

El esfuerzo de corte en la pared del eje o árbol rotatorio es

$$\tau_w = \frac{T}{2\pi R_b^2 L} \qquad (3.5\text{-}20)$$

donde τ_w es el esfuerzo de corte en la pared, N/m^2 o $kg/s^2 \cdot m$; T es momento de torsión medido, $kg \cdot m^2/s^2$; R_b es el radio del árbol, m; y L es la longitud efectiva del árbol, m. Nótese que la ecuación (3.5-20) es válida para fluidos newtonianos y no newtonianos.

La relación de corte en la superficie del árbol para fluidos no newtonianos es como sigue (M6) para $0.5 < R_b/R_c < 0.99$:

$$\left(-\frac{dv}{dr}\right)_w = \frac{2\omega}{n\left[1-(R_b/R_c)^{2/n}\right]} \qquad (3.5\text{-}21)$$

donde R_c es el radio del cilindro exterior o recipiente, m; y ω es la velocidad angular del árbol, rad/s. Además, $\omega = 2\pi N/60$, cuando N son las rpm. Los resultados calculados usando la ecuación

(3.5-21) dan valores muy próximos a los que se obtienen con la ecuación más complicada de Krieger y Maron (K2), también dada en (P4, S2).

La ecuación de la ley de potencia está dada por

$$\tau = K = \left(-\frac{dv}{dr}\right)^n \tag{3.5-2}$$

donde $K = \mathrm{N} \cdot \mathrm{s}^n/\mathrm{m}^2$, kg . $\mathrm{s}^{n-2}/\mathrm{m}$. Sustituyendo las ecuaciones (3.5-20) y (3.5-21) en la (3.5-2) resulta

$$T=2\pi R_b^2 LK\left[\frac{2}{n\left[1-\left(R_b/R_c\right)^{2/n}\right]}\right]\omega^n \tag{3.5-22}$$

0 bien

$$T = A\omega^n \tag{3.5-23}$$

donde

$$A = 2\pi R_b^2 LK\left[\frac{2}{n\left[1-\left(R_b/R_c\right)^{2/n}\right]}\right]^n \tag{3.5-24}$$

Se obtienen datos experimentales midiendo el momento de torsión *Ta* diferentes valores de ω para un fluido dado. Las constantes de las propiedades de flujo pueden evaluarse graficando log *Ten* función de log ω. El parámetro, *n*, es la pendiente de la línea recta y la intersección es log *A*. Ahora el factor de consistencia *K* se evalúa fácilmente a partir de la ecuación (3.5-24).

Para la ecuación (3.5-21) se han deducido varios casos especiales.

1. *Fluidos newtonianos.* ($n = 1$).

$$\left(-\frac{dv}{dr}\right)_w = \frac{2\omega}{1-\left(R_b/R_c\right)^2} \tag{3.5-25}$$

2. *Claro muy grande* ($R_b/R_c < 0.1$). Éste es el caso de un árbol inmerso en un vaso grande de laboratorio con fluido de prueba. La ecuación (3.5-21) se transforma en

$$\left(-\frac{dv}{dr}\right)_w = \frac{2\omega}{n} \tag{3.5-26}$$

Al sustituir las ecuaciones (3.5-20) y (3.5-26) en la (3.5-2),

$$T = 2\pi R_b^2\ LK\left(\frac{2}{n}\right)^n \omega^n \tag{3.5-27}$$

De nuevo, igual que antes, la constante de propiedad del flujo puede evaluarse graticando log *Ten* función de log ω.

3. *Claro muy angosto.* ($R_b/R_c > 0.99$). Éste es similar al flujo entre placas paralelas. Tomando la relación de corte en el radio $(R_b + R_c)/2$,

$$\left(-\frac{dv}{dr}\right)_w \cong \frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{2\omega}{1-(R_b/R_c)^2} \tag{3.5-28}$$

Esta ecuación, entonces, es la misma que la ecuación (3.5-25).

3.55 Requisitos de potencia en la agitación y mezcla de fluidos no newtonianos

Para correlacionar los requisitos de potencia en la agitación y mezcla de los fluidos no newtonianos, el número de potencia N_P está definido por la ecuación (3.4-2), que es la misma ecuación que se usa para los fluidos newtonianos. Sin embargo, la definición del número de Reynolds es mucho más complicada que para los fluidos newtonianos, ya que la viscosidad aparente no es constante en los fluidos no newtonianos y varía con las velocidades de corte o con los gradientes de velocidad en el recipiente. En varias investigaciones (G1, M1) se ha usado una viscosidad aparente promedio μ_a, que se utiliza en el número de Reynolds como sigue:

$$N'_{\mathrm{Re},n} = \frac{D_a^2 N \rho}{\mu_a} \tag{3.5-29}$$

La viscosidad aparente promedio puede relacionarse con la velocidad de corte promedio o con el gradiente de velocidad promedio por el siguiente método. Para un fluido que obedece la ley de potencia,

$$\tau = K\left(-\frac{dv}{dy}\right)^n_{\mathrm{prom}} \tag{3.5-30}$$

Para un fluido newtoniano,

$$\tau = \mu_a\left(-\frac{dv}{dy}\right)_{\mathrm{prom}} \tag{3.531}$$

Al combinar las ecuaciones (3.5-30) y (3.5-31),

$$\mu_a = K\left(\frac{dv}{dy}\right)^{n-1}_{\mathrm{prom}} \tag{3.5-32}$$

Metzner y otros (G1, M1) encontraron experimentalmente que la velocidad de corte promedio $(dv/dy)_{\mathrm{prom}}$ para los líquidos seudoplásticos ($n < 1$) varía aproximadamente como sigue con la velocidad de rotación:

$$\left(\frac{dv}{dy}\right)_{\mathrm{prom}} = 11N \tag{3.5-33}$$

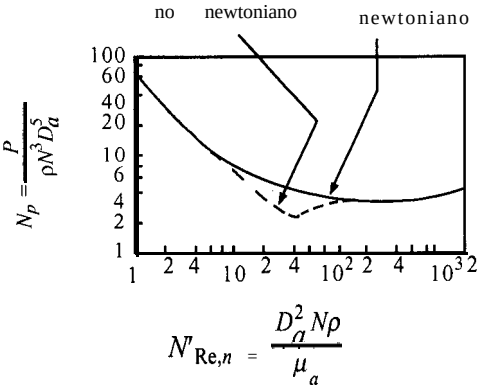


FIGURA 3.5-4 *Correlación de potencia en la agitación para una turbina plana de seis aspas con disco en fluidos seudoplásticos no newtoniano y newtoniano (G1, M1, RI): $D_a/W = 5$. $L/W = 5/4$, $D_t/J = 10$.*

Por consiguiente, combinando las ecuaciones (3.5-32) y (3.5-33),

$$\mu_a = (1\,1N)^{n-1}K \tag{3.534}$$

Al sustitur en la ecución (3.5-29),

$$N'_{Re,n} = \frac{D_a^2 N^{2-n}\rho}{11^{n-1}K} \tag{3.5-35}$$

La ecuación (3.5-35) se ha usado para correlacionar los datos correspondientes a una turbina de seis aspas planas con disco en líquidos seudoplásticos, y la curva punteada de la figura 3.5-4 muestra esta correlación (M1). La curva sólida se aplica a fluidos newtonianos (R1). Ambos conjuntos de datos se obtuvieron para cuatro deflectores con $D_t/J = 10$, $D_a/W = 5$, y $L/W = 5/4$. Sin embargo, dado que se ha demostrado que la diferencia entre los resultados para $D_t/J = 10$ y $D_t/J = 12$ es muy pequeña (R1), esta línea newtoniana puede considerarse igual que la curva 1 de la figura 3.4-4. Las curvas de la figura 3.5-4 muestran que los resultados son idénticos para el intervalo de números de Reynolds de 1 a 2000, excepto que difieren sólo en el intervalo de 10 a 100, donde los fluidos seudoplásticos usan menos potencia que los fluidos newtonianos. En el agitador, los patrones de flujo de los fluidos seudoplásticos muestran cambios de gradiente de velocidad mucho mayores que los fluidos newtonianos. El fluido que se encuentra lejos del impulsor puede moverse en flujo laminar lento con una gran viscosidad aparente. También se dispone de datos para hélices y turbinas de ventilador (M1).

3.6 ECUACIONES DIFERENCIALES DE CONTINUIDAD

3.6A Introducción

En las secciones 2.6, 2.7 y 2.8, los balances totales de masa, energía y momentum nos permitieron resolver muchos problemas elementales de flujo de fluidos. Estos balances se llevaron a cabo con respecto a un volumen finito arbitrario llamado *volumen* de control. En estos balances totales de energía, energía mecánica y momento lineal, sólo es necesario conocer el estado de las corrientes de entrada y salida y los intercambios con los alrededores.

Estos balances generales son muy útiles para resolver diversos problemas de flujo, debido a que no requieren un conocimiento de lo que sucede deritro de un volumen de control finito. Además, en los balances simples de recinto que se estudiaron en la sección 2.9, se obtuvieron expresiones para la distribución de velocidades y la caída de presión. Sin embargo, para profundizar en el estudio de estos sistemas de flujo, es necesario investigar con mayor detalle lo que sucede en el interior del volumen de control. Para lograr esto, usaremos ahora un elemento diferencial como volumen de control. Los balances diferenciales tienen ciertas similitudes con los balances totales y de recinto, pero ahora haremos el balance en una sola fase e integraremos hasta el límite de la fase empleando las condiciones límite. En los balances que se estudiaron anteriormente, se obtenía uno para cada sistema estudiado. Ahora no es necesario formular nuevos balances para cada nuevo problema de flujo. Casi siempre es más fácil empezar con las ecuaciones diferenciales de la conservación de **masa** (ecuación de continuidad) y con la conservación del momento lineal en su forma general. Después de esto, las ecuaciones se simplifican al descartar los términos innecesarios para cada problema considerado.

En el capítulo 5, se considerará una ecuación diferencial general para la conservación de energía para un sistema no isotérmico. También se deducirá en el capítulo 7 una ecuación diferencial general de continuidad para una mezcla binaria. La ecuación diferencial general de balance de momento lineal que a su vez se deducirá, se basa en la segunda ley de Newton y nos permite determinar la forma en que la velocidad varía con la posición, el tiempo y la caída de presión en el flujo laminar. La ecuación del balance de momento lineal puede usarse para flujo turbulento con ciertas modificaciones.

Con frecuencia, a estas ecuaciones de conservación se les llama *ecuaciones de cambio,* pues describen las variaciones de las propiedades del fluido con respecto a la posición y el tiempo. Antes de deducir estas ecuaciones, se estudiarán brevemente los distintos tipos de derivadas con respecto al tiempo que intervienen en dichas fórmulas, y se elaborará un resumen de la notación vectorial que se emplea.

3.6B Tipos de derivadas con respecto al tiempo y notación vectorial

1. Derivadas parciales con respecto al tiempo. En las deducciones que se considerarán intervienen varios tipos de derivadas, siendo la más conocida la derivada parcial con respecto al tiempo. Por ejemplo, supóngase que estamos interesados en la concentración de masa o densidad ρ en kg/m^3, en el flujo de una corriente, como función de la posición x, y, z, y del tiempo t. La derivada parcial de ρ con respecto al tiempo es $\partial\rho/\partial t$. Esto corresponde a la variación local de la densidad con el tiempo en un punto fijo x, y y z.

2. Derivada total con respecto al tiempo. Supóngase que se desea medir la densidad en la corriente mientras nos desplazamos por dicha corriente con velocidades en las direcciones x, y y z, iguales a dx/dt, dy/dt y dz/dt, respectivamente. La derivada total $d\rho/dt$ es

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{dz}{dt} \qquad \textbf{(3.6-l)}$$

Esto significa que la densidad es una función de t y de los componentes de la velocidad dx/dt, dy/dt y dz/dt, con la cual se desplaza el observador.

3. Derivada sustancial con respecto al tiempo. Otro tipo de derivada muy útil es la que se obtiene cuando el observador flota junto con la velocidad v de la corriente y observa los cambios de densidad

en función del tiempo. A esto se le describe como una derivada que sigue al movimiento, eso es, *derivada sustancial con respecto al tiempo, Dρ/Dt,*

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + v_x\frac{\partial\rho}{\partial x} + v_y\frac{\partial\rho}{\partial y} + v_z\frac{\partial\rho}{\partial z} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla\rho) \qquad (3.6\text{-}2)$$

donde v_x, v_y y v_z son los componentes de la velocidad v de la corriente, que es un vector. Esta derivada sustancial se aplica a las variables tanto escalares como vectoriales. El término (v . Vp) se estudiará en la parte 6 de la sección 3.6B.

4. Escalares. Las propiedades físicas relacionadas con la transferencia de momento lineal, calor y masa, pueden clasificarse en varias categorías: escalàres, vectoriales y tensoriales. Las magnitudes escalares son cantidades tales como concentración, temperatura, longitud, volumen, tiempo y energía. Tienen magnitud pero no dirección y se consideran como tensores de orden cero. Las leyes algebraicas comunes son válidas para el álgebra escalar. Por ejemplo, $bc = cd$, $b(cd)d = (bc)$, etcétera.

5. *Vectores.* La velocidad, la fuerza, el momento lineal y la aceleración son vectores, pues tienen magnitud, dirección y sentido. Se consideran como tensores de primer orden y en este texto se escriben con **negritas,** tal como v para la velocidad. En la figura 3.6-l se ilustra la adición de dos vectores B + C por construcción de un paralelogramo y la sustracción de dos vectores B − C. El vector B se representa mediante sus tres proyecciones B_x, B_y y B_z en los ejes x, y y z,

$$\mathrm{B} = \mathbf{i}B_x + \mathbf{j}B_y + \mathbf{k}B_z \qquad (3.6\text{-}3)$$

donde **i, j y k** son vectores unitarios a lo largo de los ejes x, y y z, respectivamente.

Para multiplicar una cantidad escalar r o s por un vector B:

$$r\mathbf{B} = \mathrm{Br} \qquad (3.6\text{-}4)$$

$$(rs)\mathbf{B} = r(s\mathbf{B}) \qquad (3.6\text{-}5)$$

$$r\mathbf{B} + s\mathbf{B} = (\mathrm{r} + s)\mathbf{B} \qquad (3.6\text{-}6)$$

Además, también puede establecerse que:

$$(\mathrm{B}\ .\ \mathrm{C}) = (\mathrm{C}\ \cdot\ \mathrm{B}) \qquad (3.6\text{-}7)$$

$$\mathrm{B}\cdot(\mathrm{C} + \mathrm{D}) = (\mathrm{B}\ \cdot\ \mathrm{C}) + (\mathrm{B}\ \cdot\ \mathrm{D}) \qquad (3.6\text{-}8)$$

$$(\mathrm{B}\ \cdot\ \mathrm{C})\mathrm{D} \neq \mathrm{B}(\mathrm{C}\ \cdot\ \mathrm{D}) \qquad (3.6\text{-}9)$$

$$(\mathrm{B}\ .\ \mathrm{C}) = BC\cos\phi_{BC} \qquad (3.6\text{-}10)$$

donde ϕ_{BC} es el ángulo entre dos vectores y es < 180".

Los tensores de segundo orden τ se originan principalmente en la transferencia de momento lineal y tienen nueve componentes. Estos se pueden estudiar en la literatura (B2).

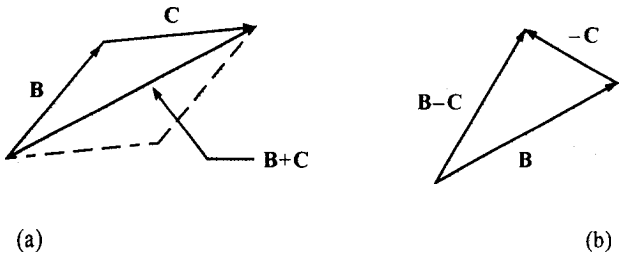


FIGURA 3.6-1. *Adición y sustracción de vectores: a) adición de vectores.* B +C; *b) sustracción de vectores,* B C.

6. Operaciones diferenciales con escalares y vectores. El gradiente o "grad" de un campo escalar es

$$\nabla\rho = \mathbf{i}\frac{\partial\rho}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\rho}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\rho}{\partial z} \qquad \textbf{(3.6-l 1)}$$

donde ρ es un escalar, como la densidad.

La divergencia o "div" de un vector v es

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \qquad (3.6\text{-}12)$$

donde v es una función de v_x ,v_y y v_z.

El laplaciano de un cuerpo escalar es

$$\nabla^2\rho = \frac{\partial^2\rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\rho}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\rho}{\partial z^2} \qquad \textbf{(3.6-13)}$$

Otras operaciones que conviene tener presentes, son:

$$Vrs = r\nabla s + s\nabla r \qquad \textbf{(3.6-14)}$$

$$(\nabla \cdot sv) = (VS \cdot v) + s(\nabla \cdot v) \qquad \textbf{(3.6-15)}$$

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla s) = v_x\frac{\partial s}{\partial x} + v_y\frac{\partial s}{\partial y} + v_z\frac{\partial s}{\partial z} \qquad \textbf{(3.6-16)}$$

3.6C. Ecuación diferencial de continuidad

1. Deducción de la ecuación de continuidad. Como primer paso se efectúa un balance de masa para un fluido puro que fluye a través de un elemento de volumen estacionario Δx Ay Az, localizado en el espacio, tal como se muestra en la figura 3.6-2. El balance de masa del fluido con una concentración de ρ kg/m^3 es el siguiente:

$$\begin{pmatrix}\text{velocidad de}\\ \text{entrada de masa}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{velocidad de}\\ \text{salida de masa}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{velocidad de}\\ \text{acumulación de masa}\end{pmatrix} \qquad \textbf{(3.6-l 7)}$$

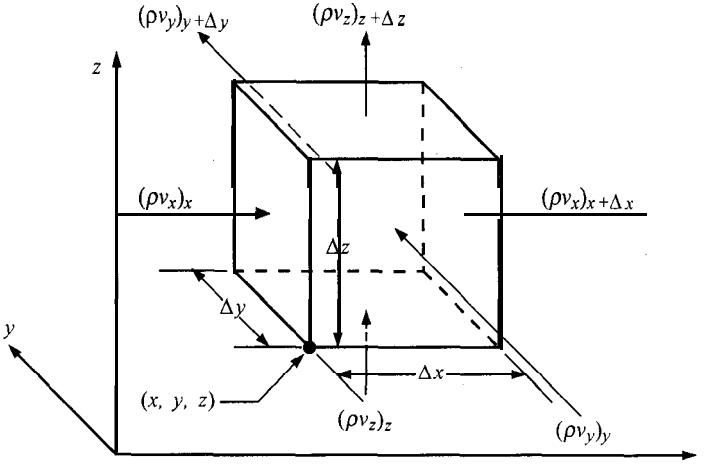


FIGURA 3.6-2. *Balance de masa para el flujo de un fluido puro a través de un volumen* Δx Ay Az, *fijo en el espacio.*

Al considerar la dirección x, la velocidad de entrada de masa por la cara x, con área de Ay Az m^2 es $(\rho v_x)_x$ Ay Az kg /s y 1 que sale por x + Ax es $(\rho v_x)_{x+\Delta x}$ Ay Az. El término (ρv_x) es un flujo específico de masa en $kg/s \cdot m^2$. En la figura 3.6-2 se muestran también las masas que entran y salen en las direcciones Y Y z.

La velocidad de acumulación de masa en el volumen Δx Ay Δz es

$$\text{velocidad de acumulación de masa} = \Delta x \text{ Ay } \Delta z \frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{3.6-18}$$

Al sustituir estas expresiones en la ecuación (3.6-17) y dividir ambos lados entre Δx **Ay Az, se** obtiene

$$\frac{\left[(\rho v_x)_x - (\rho v_x)_{x+\Delta x}\right]}{\Delta x} + \frac{\left[(\rho v_y)_y - (\rho v_y)_{y+\Delta y}\right]}{\Delta y} + \frac{\left[(\rho v_z)_z - (\rho v_z)_{z+\Delta z}\right]}{\Delta z} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{3.6-19}$$

Al tomar el límite cuando Δx, Ay y Δz tienden a cero, se obtiene la ecuación de continuidad de conservación de la masa para un fluido puro:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\left[\nabla \cdot \rho \mathbf{v}\right] = -\left[\frac{\partial (\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z}\right] \tag{3.6-20}$$

La notación vectorial del lado derecho de la ecuación (3.6-20) se origina en el hecho de que v es un vector. La ecuación (3.6-20) indica la forma en que la densidad varía con el tiempo en un punto fijo, como resultado de los cambios del vector de velocidad de masa, $\rho \mathbf{v}$.

La ecuación (3.6-20) puede convertirse en otra forma si se lleva a cabo la diferenciación parcial,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) - \left(v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z}\right) \tag{3.6-21}$$

Al reordenar,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} = -\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) \tag{3.6-22}$$

El lado izquierdo de la ecuación (3.6-22) es igual a la derivada sustancial de la ecuación (3.6-2). Por consiguiente, la ecuación (3.6-22) se transforma en

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = -\rho(\nabla \cdot \mathbf{v}) \tag{3.6-23}$$

2. Ecuación de continuidad para densidad constante. En ingeniería de manejo de líquidos relativamente incompresibles sucede muchas veces que la densidad ρ es casi constante. En esos casos, el valor de ρ permanece invariable para un elemento del fluido a medida que se desplaza a lo largo de su trayectoria de movimiento, *o* $D\rho/Dt = 0$. Por tanto, la ecuación (3.6-23) para un fluido de densidad constante en estado estable o inestable, es

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{3.6-24}$$

En estado estable, $\partial\rho/\partial t = 0$ en la ecuación (3.6-22).

EJEMPLO 3.6-l. Flujo sobre una placa plana

Un fluido incompresible pasa por una de las caras de una placa plana. El flujo en la dirección x es paralelo a la placa. En el borde de entrada de la placa, el flujo es uniforme y la velocidad de la corriente libre es v_{x0}. No hay velocidad en la dirección z. La dirección y es la distancia perpendicular a la placa. Analice este ejemplo usando la ecuación de continuidad.

Solución: Para este caso en el que ρ es constante, se aplica la ecuación (3.6-24).

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{3.6-24}$$

Puesto que no existe velocidad en la dirección z, se obtiene

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\partial v_y}{\partial y} \tag{3.6-25}$$

A un valor dado pequeño dey, cercano a la placa, el valor de v_x debe disminuir con respecto a su velocidad de corriente libre v_{x0}, a medida que pasa por el borde de entrada en la dirección x,

debido a la fricción del fluido. Por lo tanto, $\partial v_x/\partial x$ es negativo. Entonces, con base en la ecuación (3.6-25), $\partial v_y/\partial y$ es positivo y hay un componente de velocidad alejándose de la placa.

3. *Ecuación de continuidad con coordenadas cilíndricas y esféricas.* Cuando un fluido fluye en un cilindro, resulta conveniente usar coordenadas cilíndricas para resolver la ecuación de continuidad. En la figura 3.6-3a se muestra el sistema de coordenadas con respecto a las coordenadas rectangulares. Las relaciones entre las coordenadas rectangulares x, y y z y las cilíndricas r, θ y z son:

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta \qquad z = z$$

$$r = +\sqrt{x^2 + y^2} \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} \tag{3.6-26}$$

Al sustituir las relaciones de la ecuación (3.6-26) en la ecuación (3.6-20), la ecuación de continuidad en coordenadas cilíndricas es

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial(\rho r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0 \tag{3.6-27}$$

Para coordenadas esféricas, las variables r, θ y ϕ se relacionan con x, y y z por medio de las siguientes expresiones, tal como se muestra en la figura 3.6-3b.

$$x = r\,\text{sen}\,\theta\cos\phi \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi \qquad z = r\cos\theta$$

$$r = +\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \qquad \phi = \tan^{-1}\frac{y}{x} \tag{3.6-28}$$

Entonces, la ecuación de continuidad en coordenadas esféricas es

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial(\rho r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\,\text{sen}\,\theta}\frac{\partial(\rho v_\theta\,\text{sen}\,\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\,\text{sen}\,\theta}\frac{\partial(\rho v_\phi)}{\partial\phi} = 0 \tag{3.6-29}$$

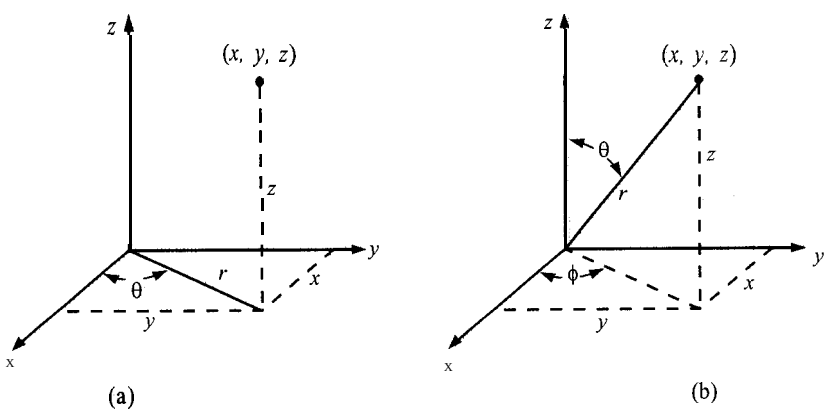


FIGURA 3.6-3. *Sistemas de coordenadas curvilíneas: a) coordenadas cilíndricas, b) coordenadas esféricas*

3.7 ECUACIÓN DIFERENCIAL DE TRANSFERENCLA DE MOMENTO LINEAL 0 DE MOVIMIENTO

3.7A Deducción de las ecuaciones de transferencia de momento lineal

La *ecuación de movimiento* es en realidad, la ecuación de la conservación del momento lineal, ecuación (2.8-3), que se puede escribir como

$$\begin{pmatrix}\text{velocidad de momento lineal}\\ \text{de entrada}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{velocidad de momento lineal}\\ \text{de salida}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{suma de fuerzas}\\ \text{actuando sobre el sistema}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{velocidad de acumulación}\\ \text{de momento lineal}\end{pmatrix} \tag{3.7-1}$$

Se procederá aun balance con respecto aun elemento, tal como se muestra en la figura 3.6-2. Primero se considera únicamente el componente x en cada término de la ecución (3.6-30). Los componentes y y z pueden describirse de manera análoga.

La velocidad de entrada del componente x del momento lineal en la cara x y en la dirección x por convección es $(\rho v_x v_x)_x$ Ay Az, y la velocidad de salida en x + Δx es $(\rho v_x v_x)_{x + \Delta x}$ Ay Az. La cantidad (ρv_x) es la concentración de momento lineal /m^3 o (kg · m /s) m^3, y se multiplica por v_x para obtener el flujo específico de momento lineal como momento lineal /s . m^2.

El componente x del momento lineal que entra a la cara en y es $(\rho v_y v_x)_y \Delta x \Delta z$, y el que sale por Y+ AY es $(\rho v_y v_x)_{y + \mathbf{Ay}} \Delta x$ Az. Para la cara en z se tiene $(\rho v_z v_x)_z \Delta x$ Az a la entrada, y en la salida por $z + \Delta z$ es $(\rho v_z v_x)_{z + \Delta z} \Delta x$ Ay. Por tanto, el flujo convectivo de momento lineal neto x al elemento de volumen Ax Ay Δz es

$$\left[(\rho v_x v_x)_x - (\rho v_x v_x)_{x + \Delta x}\right]\Delta y\, \Delta z + \left[(\rho v_y v_x)_y - (\rho v_y v_x)_{y + \Delta x}\right]\Delta x\, \mathbf{AZ} + \left[(\rho v_2 v_x)_z - (\rho v_z v_x)_{z + \Delta x}\right]\Delta x\, \mathbf{AY} \tag{3.7-2}$$

El momento lineal fluye entrando y saliendo del elemento de volumen por medio de un mecanismo de convección o flujo global, tal como lo expresa la ecuación (3.7-2), así como por transferencia molecular (en virtud de los gradientes de gasto laminar). La velocidad de entrada del componente x del momento lineal a la cara en x por transferencia molecular es $(\tau_{xx})_x$ Ay Δz y la velocidad de salida por $x + \Delta x$ es $(\tau_{xx})_{x + \Delta x}$ AY Az. La velocidad de entrada a la cara en y es $(\tau_{yx})_y \Delta x$ Az, para salir por y + Ay a velocidad $(\tau_{yx})_{y + \Delta y} \Delta x\, \Delta z$. Nótese que τ_{yx} es el flujo específico del momento lineal x a través de la cara perpendicular al eje y. Escribiendo una ecuación similar para las caras restantes, el componente neto x del momento lineal por transferencia molecular es

$$\left[(\tau_{xx})_x - (\tau_{xx})_{x + \Delta x}\right]\Delta y\, \Delta z + \left[(\tau_{yx})_y - (\tau_{yx})_{y + \Delta y}\right]\Delta x\, \Delta z + \left[(\tau_{zx})_z - (\tau_{zx})_{z + \Delta z}\right]\Delta x\, \Delta y \tag{3.7-3}$$

Estos flujos específicos de momento lineal de origen molecular pueden considerarse como esfuerzos cortantes y esfuerzos normales. De esta forma, τ_{yx} es la dirección x del esfuerzo cortante sobre la caray, y τ_{zx} es el esfuerzo cortante sobre la cara z. Además, τ_{xx} es el esfuerzo normal sobre la cara x.

La fuerza de presión neta del fluido que actúa sobre el elemento en la dirección x es la diferencia entre la fuerza sobre x y sobre $x + \Delta x$.

$$(p_x - p_{x+\Delta x})\ \Delta y\ _{AZ} \tag{3.7-4}$$

La fuerza gravitacional g_x que actúa sobre una unidad de masa en la dirección x se multiplica por la masa del elemento para obtener

$$\rho g_x\ \Delta x\ \Delta y\ _{AZ} \tag{3.7-5}$$

donde g_x es el componente x del vector gravitacional g.

La velocidad de acumulación del momento lineal x en el elemento es

$$\Delta x\ \Delta y\ \Delta z\ \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t} \tag{3.7-6}$$

Al sustituir las ecuaciones (3.7-2) a (3.7-6) en la (3.7-1), dividiendo entre Δx Ay Az y tomando el límite cuando Δx Ay y Az tienden acero, se obtiene el componente x de la ecuación diferencial de movimiento.

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\text{at}} = -\left[\frac{\partial(\rho v_x v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y v_x)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z v_x)}{\partial z}\right]$$

$$-\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial_x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial_y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial_z}\right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x \tag{3.7-7}$$

Los componentes y y z de la ecuación diferencial de movimiento son, respectivamente:

$$\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial t} = -\left[\frac{\partial(\rho v_x v_y)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y v_x)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z v_y)}{\partial z}\right]$$

$$-\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right) - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y \tag{3.7-8}$$

$$\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial t} = -\left[\frac{\partial(\rho v_x v_z)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y v_z)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z v_z)}{\partial z}\right]$$

$$-\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}\right) - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_z \tag{3.7-9}$$

Es posible combinar la ecuación (3.6-20), que es la ecuación de continuidad, con la ecuación (3.7-7) y obtener una ecuación de movimiento para que el componente x como sigue

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right) = -\left[\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right] + \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} \tag{3.7-10}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)=-\left[\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right]+\rho g_y-\frac{\partial p}{\partial x} \qquad (3.7\text{-}l\ 1)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=-\left[\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}\right]+\rho g_z-\frac{\partial p}{\partial x} \qquad (3.7\text{-}12)$$

Para los componentes y y z pueden escribirse ecuaciones similares y al sumar todas éstas se obtiene una ecuación de movimiento para un fluido puro:

$$\rho\frac{Dv}{Dt}=-(\nabla\cdot\tau)-\nabla p+\rho\mathbf{g} \qquad (3.7\text{-}13)$$

Nótese que las ecuaciones (3.7-7) a (3.7-13) son válidas para cualquier medio continuo.

3.7B. Ecuaciones de movimiento para fluidos newtonianos con densidad y viscosidad variables

Para aplicar las ecuaciones (3.7-7) a (3.7-13) a la determinación de distribuciones de velocidad, se deben emplear expresiones de los diversos esfuerzos en términos de gradientes de velocidad y propiedades del fluido. Para fluidos newtonianos, las expresiones para los esfuerzos τ_{xx}, τ_{yx}, τ_{zx}, etc., se relacionan con los gradientes de velocidad y viscosidad del fluido μ (B1, B2, D1) y son como sigue:

1. Componentes del esfuerzo cortante para fluidos newtonianos en coordenadas rectangulares

$$\tau_{xx}=-2\mu\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{2}{3}\mu\,(\nabla\cdot\mathrm{v}) \qquad (3.7\text{-}14)$$

$$\tau_{yy}=-2\mu\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{2}{3}\mu\,(\nabla\cdot\mathrm{v}) \qquad (3.7\text{-}15)$$

$$\tau_{zz}=-2\mathrm{y}\frac{\partial v_z}{\partial z}+\frac{2}{3}\mu\,(\nabla\cdot\mathrm{v}) \qquad (3.7\text{-}16)$$

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}=-\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right) \qquad (3.7\text{-}17)$$

$$\tau_{yz}=\tau_{zy}=-\mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial y}\right) \qquad (3.7\text{-}18)$$

$$\tau_{zx}=\tau_{xz}=-\mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial z}\right) \qquad (3.7\text{-}19)$$

$$(\nabla\cdot\mathbf{v})=\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) \qquad (3.7\text{-}20)$$

2. Componentes del esfuerzo cortante para fluidos newtonianos en coordenadas cilíndricas

$$\tau_{rr} = -\mu \left[2\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{v}) \right] \tag{3.7-21}$$

$$\tau_{\theta\theta} = -\mu \left[2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{v}) \right] \tag{3.7-22}$$

$$\tau_{zz} = -\mu \left[2\left(\frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{v}) \right) \right] \tag{3.7-23}$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = -\mu \left[r\frac{\partial (v_\theta / r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \tag{3.7-24}$$

$$\tau_{\theta z} = \tau_{z\theta} = -\mu \left[\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right] \tag{3.7-25}$$

$$\tau_{zr} = \tau_{rz} = -\mu \left[\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right] \tag{3.7-26}$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \frac{1}{r}\frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{3.7-27}$$

3. Componentes del esfuerzo cortante para fluidos newtonianos en coordenadas esféricas

$$\tau_{rr} = -\mu \left[2\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{v}) \right] \tag{3.7-28}$$

$$\tau_{\theta\theta} = -\mu \left[2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{v}) \right] \tag{3.7-29}$$

$$\tau_{\phi\phi} = -\mu \left[2\left(\frac{1}{r\ sen\ \theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r} \right) - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{v}) \right] \tag{3.7-30}$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = -\mu \left[r\frac{\partial (v_\theta / r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \tag{3.7-31}$$

$$\tau_{\theta\phi} = \tau_{\phi\theta} = -\mu \left[\frac{\text{sen}\ \theta\ \partial (v_\phi / \text{sen}\theta)}{r\ \partial \theta} + \frac{1}{r\ \text{sen}\ \theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right] \tag{3.7-32}$$

$$\tau_{\phi r} = \tau_{r\phi} = -\mu \left[\frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + r \frac{\partial (v_\phi / r)}{\partial r} \right] \tag{3.7-33}$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 v_r)}{\partial r} + \left[\frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial (v_\theta \operatorname{sen} \theta)}{\partial \theta} \right] \frac{\partial v_\phi}{r \operatorname{sen} \theta \, \partial \phi} \tag{3.7-34}$$

4. Ecuación del movimiento para fluidos newtonianos con densidad y viscosidad variables. Una vez que las ecuaciones (3.7-14) a (3.7-20) para las componentes del esfuerzo cortante se han sustituido en la ecuación (3.7-10) para la componente x del momento lineal, obtenemos la ecuación general del movimiento para un fluido newtoniano con densidad y viscosidad variables.

$$\rho \frac{Dv_x}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x}\left[2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{v}) \right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \right] - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x \tag{3.7-35}$$

Se obtienen ecuaciones semejantes para las componentes y y z del momento lineal.

3.7C Ecuaciones del movimiento para fluidos newtonianos con densidad y viscosidad constantes

Las ecuaciones anteriores rara vez se usan en sus formas completas. Cuando la densidad ρ y la viscosidad μ son constantes donde (V . v) = 0, las ecuaciones se simplifican y se obtienen las ecuaciones del movimiento para fluidos newtonianos. Estas ecuaciones también se llaman *ecuaciones* de *Navier-Stokes.*

1. Ecuación del movimiento en coordenadas rectangulares. Para fluidos newtonianos con p y μ constantes para las componentes x, y y z, obtenemos, respectivamente,

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x \tag{3.7-36}$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z \tag{3.7-37, 3.7-38}$$

Al combinar estas tres ecuaciones para las tres componentes, se obtiene:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \tag{3.7-39}$$

2. Ecuación del movimiento en coordenadas cilíndricas. Son las que se indican en seguida para fluidos newtonianos con ρ y μ constantes para las componentes r, θ y z, respectivamente.

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}-\frac{v_\theta^2}{r}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial r}$$
$$+\mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}\right]+\rho g_r \qquad (3.7\text{-}40)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}-\frac{v_r v_\theta}{r}+v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)=-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}$$
$$+\mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_\theta)}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}\right]+\rho g_\theta \qquad (3.7\text{-}41)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}$$
$$+\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right]+\rho g_z \qquad (3.7\text{-}42)$$

3. Ecuación de movimiento en coordenadas esféricas. Se presentan aquí las ecuaciones para fluidos Newtonianos para ρ y μ constantes para las componentes r, θ y ϕ respectivamente

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}+\frac{v\phi}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi}-\frac{v_0^2+v_\phi^2}{r}\right)=-\frac{\partial p}{\partial r}$$
$$+\mu\left(\nabla^2 v_r-\frac{2}{r^2}v_r-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}-\frac{2}{r^2}v_\theta\cot\theta-\frac{2}{r^2\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}\right)+\rho g_r \qquad (3.7\text{-}43)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{v_\phi}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}+\frac{v_r v_\theta}{r}-\frac{\phi^2\cot\theta}{r}\right)=-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}$$
$$+\mu\left(\nabla^2 v_\theta+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}-\frac{v_\theta}{r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}-\frac{2}{r^2}\frac{\cos\theta}{\mathrm{sen}^2\,\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}\right)+\rho g_\theta \qquad (3.7\text{-}44)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_\phi}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\phi}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \theta}+\frac{v_\phi}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}+\frac{v_\phi v_r}{r}+\frac{v_\theta v_\phi}{r}\cot\theta\right)=-\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial p}{\partial \phi}$$
$$+\mu\left(\nabla^2 v_\phi-\frac{v_\phi}{r^2\mathrm{sen}^2\,\theta}+\frac{2}{r^2\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi}+\frac{2\cos\theta}{r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}\right)+\rho g_\phi= \qquad (3.7\text{-}45)$$

donde, en las tres ecuaciones anteriores,

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\,\text{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\text{sen}\,\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\,\text{sen}^2\,\theta}\left(\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right) \qquad (3.7\text{-}46)$$

De la transformación de las coordenadas rectangulares en coordenadas cilíndricas surgen importantes ventajas y usos. Por ejemplo, en la ecuación (3.7-40) el término $\rho v_\theta^2/r$ es la fuerza centrífuga. Esto da la fuerza en la dirección r (radial) que resulta del movimiento del fluido en la dirección θ. Nótese que este término se obtiene de manera automática de la transformación de las coordenadas rectangulares en cilíndricas, por lo que no se debe agregar a la ecuación por razones de física.

En la transformación de las coordenadas de la ecuación (3.7-41) también surge automáticamente la fuerza de Coriolis $\rho v_r v_\theta / r$, que es la fuerza efectiva en la dirección θ cuando existe un flujo tanto en la dirección r como en la θ, como en el caso del flujo cerca de un disco rotatorio.

3.8 USO DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE MOVIMIENTO Y CONTINUIDAD

3.8A Introducción

Como ya se ha mencionado, los objetivos y usos de las ecuaciones de movimiento y continuidad consisten en aplicarlas a cualquier problema de flujo viscoso. Cuando se considera un problema específico, se descartan los términos que son cero o casi cero y con las ecuaciones simplificadas resultantes se obtienen los valores de las distribuciones de velocidad, densidad y presión. Claro está que es necesario conocer las condiciones iniciales y las condiciones límite para resolver las ecuaciones. Ahora se considerarán varios ejemplos para ilustrar los métodos generales empleados.

Consideremos algunos casos en que el flujo tiene geometrías específicas que pueden describirse fácilmente en forma matemática, como sucede con el flujo entre placas paralelas y en cilindros.

3.8B Ecuaciones diferenciales de continuidad y movimiento para el *flujo* entre placas paralelas

Se van a considerar dos ejemplos, uno para placas horizontales y uno para placas verticales.

EJEMPLO 3.8-l Flujo laminar entre placas paralelas horizontales

Deduzca la ecuación para la distribución de velocidades en estado estacionario del flujo laminar de un fluido de densidad constante con viscosidad también constante, entre dos placas planas paralelas. El perfil de velocidad deseado se localiza en un punto alejado de la entrada y de la salida del canal. Se considerará que ambas placas están fijas y con una anchura infinita y que el flujo es impulsado por el gradiente de presión en la dirección x.

Solución: Suponiendo que el canal es horizontal, la figura 3.8-l señala los ejes seleccionados con el flujo en la dirección x, y la anchura en la dirección z. De esta forma, las velocidades v_y y v_z son cero, y la separación de las placas es igual a $2y_0$.

La expresión de continuidad, ecuación (3.6-24) para densidad constante es

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{3.6-24}$$

Puesto que v_y y v_z son cero, la ecuación (3.6-24) se transforma en

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \tag{3.8-1}$$

La ecuación de Navier-Stokes para el componente x es

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right) = \mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x \tag{3.7-36}$$

Además, $\partial v_x/\partial t = 0$ para estado estacionario, $v_y = 0$, $v_z = 0$, $\partial v_x/\partial x = 0$ y $\partial^2 v_x/\partial x^2$. Nótese que $\partial v_x/\partial z = 0$, puesto que no hay variación de v_x con respecto a z. Entonces, $\partial^2 v_x/\partial z^2 = 0$. Al efectuar estas sustituciones en la ecuación (3.7-36) se obtiene

$$\frac{\partial p}{\partial x} - \rho g_x = \mu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \tag{3.8-2}$$

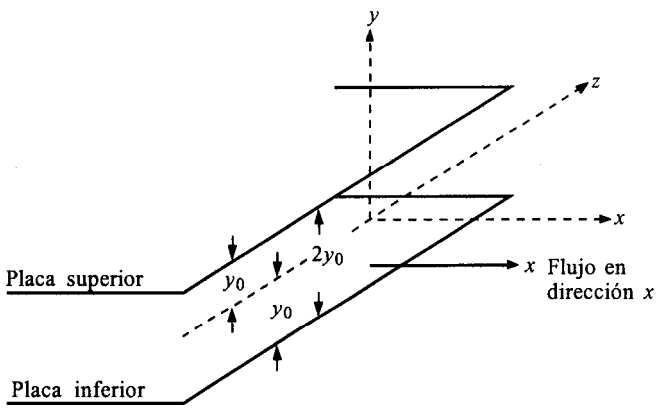


FIGURA 3.8-l. *Flujo entre las dos placas paralelas del ejemplo 3.8-l.*

En problemas de flujo de fluidos, la fuerza gravitacional sólo interesa en el sentido vertical g_x, que equivale a g, esto es, la fuerza gravitacional en m/s^2. Procederemos a combinar la presión estática p con la fuerza gravitacional en una sola expresión de p como sigue (nótese que para el presente caso de una tubería horizontal $g_x = 0$, lo que no resulta así para una tubería no horizontal):

$$p = p + \rho gh \tag{3.8-3}$$

donde h es la distancia hacia arriba desde cualquiera que sea el plano de referencia seleccionado (h está en dirección opuesta a la gravedad). Entonces, la ecuación (3.8-2) se transforma en

$$\frac{\partial p}{\partial x} - \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \qquad (3.8\text{-}4)$$

Nótese que p no es función de z. Además, suponiendo que $2y_0$ es pequeño, p no es función dey. (Algunos textos de referencia evitan este problema y simplemente usanp como una presión dinámica, lo cual, en rigor, es correcto, pues los gradientes de presión dinámica causan flujos. En un fluido en reposo, el gradiente de presión total es el gradiente de presión hidrostática y el gradiente total de presión dinámica es cero). Además, $\partial p/\partial x$ es una constante en este caso, pues v_x no es función de x. Entonces, la ecuación (3.8-4) se transforma en una ecuación diferencial común:

$$\frac{d^2 v_x}{dy^2} = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx} = \text{const} \qquad (3.8\text{-}5)$$

Al integrar la ecuación (3.8-5) una vez con la condición $dv_x/dy = 0$ cuando, por simetría, $y = 0$,

$$\frac{dv_x}{dy} = \left(\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}\right) y \qquad (3.8\text{-}6)$$

Integrando nuevamente, ahora con $v_x = 0$ cuando y = yo,

$$v_x = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}\left(y^2 - y_0^2\right) \qquad \textbf{(3.8-7)}$$

La velocidad máxima en la ecuación (3.8-7) se presenta cuando y = 0, por lo cual

$$v_{x\,\text{máx}} = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}\left(-y_0^2\right) \qquad \textbf{(3.8-8)}$$

Al combinar las ecuaciones (3.8-7) y (3.8-8),

$$v_x = v_{x\,\text{máx}} \left[1 - \left(\frac{y}{Y_0}\right)^2\right] \qquad (3.8\text{-}9)$$

Por consiguiente, se obtiene un perfil de velocidades parabólico. Éste es el mismo resultado que se obtuvo en la ecuación (2.9-9) cuando se aplicó el balance de momento lineal de recinto.

Los resultados obtenidos en el ejemplo 3.8-l también podrian haberse obtenido con un balance de fuerza en un elemento diferencial de fluido, usando la simetría del sistema para omitir ciertos términos.

EJEMPLO 3.8-2. Flujo laminar entre placas verticales con una placa que se mueve

Un fluido newtoniano está confinado entre dos placas paralelas y verticales como se muestra en la figura 3.8-2 (W6). La superficie de la izquierda es estacionaria y la otra se mueve verticalmente a una velocidad constante v_0. Suponiendo que el flujo es laminar, encuentre el perfil de velocidad.

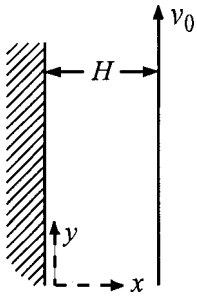


FIGURA *3.8-2. Flujo entre placas paralelas verticales del ejemplo 3.8-2.*

Solución: La ecuación que se debe usar es la de Navier-Stokes para la coordenada y, ecuación (3.7-37).

$$\rho\left(\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)=\mu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right)-\frac{\partial p}{\partial y}+\rho g_y \qquad (3.7\text{-}37)$$

En estado estacionario, $\partial v_y/\partial t = 0$. Las velocidades v_x y $v_z = 0$. Además, $\partial v_y/\partial y = 0$ de la expresión de continuidad, $\partial v_y/\partial z = 0$, y $\rho g_y = -pg$. Las derivadas parciales se convierten en derivadas y la ecuación (3.7-37) se convierte en

$$\frac{d^2 v_y}{dx^2}-\frac{dp}{dy}-\rho g=0 \qquad (3.8\text{-}10)$$

Ésta es semejante a la ecuación (3.8-2) del ejemplo 3.8-l. El gradiente de presión dp/dy es constante. Integrando la ecuación (3.8-10) una vez resulta

$$\frac{dv_y}{dx}-\frac{x}{\mu}\left(\frac{dp}{dy}+\rho g\right)=C_1 \qquad (3.8\text{-}1\,1)$$

Al integrar otra vez se obtiene

$$v_y-\frac{x^2}{2\mu}\left(\frac{dp}{dy}+\rho g\right)=C_1x+C_2 \qquad (3.8\text{-}12)$$

Las condiciones de frontera están en x = 0, $v_y = 0$ y en x = H, $v_y = v_0$. Despejando las constantes, $C_1 = v_0/H - (H/2\mu)(dp/dy + pg)$ y $C_2 = 0$. En consecuencia, la ecuación (3.8-12) se transforma en

$$v_y=-\frac{1}{2\mu}\left(\frac{dp}{dy}+\rho g\right)\left(Hx-x^2\right)+v_0\frac{x}{H} \qquad (3.8\text{-}13)$$

3.8C Ecuaciones diferenciales de continuidad y movimiento de flujo en cilindros estacionarios y rotatorios

Se darán varios ejemplos para el flujo en cilindros estacionarios y rotatorios.

EJEMPLO 3.8-3. Flujo laminar en un tubo circular

Deduzca la ecuación para flujo viscoso de estado estacionario en un tubo horizontal de radio r_0, cuando el fluido está alejado de la entrada. El fluido es incompresible y μ es constante. El flujo es impulsado en una dirección por un gradiente de presión constante.

Solución: Se supondrá que el fluido fluye en la dirección z en el tubo, tal como lo muestra la figura 3.8-3. La direcciónу es vertical y lax es horizontal. Puesto que v_x y v_y son iguales a cero, la ecuación de continuidad se transforma en $\partial v_z/\partial z = 0$. Para estado estacionario, $\partial v_z/\partial t = 0$. Entonces, sustituyendo en la ecuación (3.7-38) para el componente z, se obtiene

$$\frac{dp}{dz} = \mu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}\right) \tag{3.8-14}$$

Para resolver la ecuación (3.8-14), introdúzcanse las coordenadas cilíndricas de la ecuación (3.6-26),

$$z = z \qquad x = r\cos\theta \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta$$
$$r = +\sqrt{x^2 + y^2} \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} \tag{3.6.26}$$

Al sustituir en la ecuación (3.8-14),

$$-\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dz} = \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} \tag{3.8-15}$$

El flujo es simétrico con respecto al eje z, por lo que $\partial^2 v_z/\partial\theta^2$ es cero en la ecuación (3.8- 15). Como antes, *dp/dz es* una constante; luego la ecuación (3.8- 15) se transforma en

$$\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dz} = \text{const} = \frac{d^2 v_z}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv_z}{dr} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_z}{dr}\right) \tag{3.8-16}$$

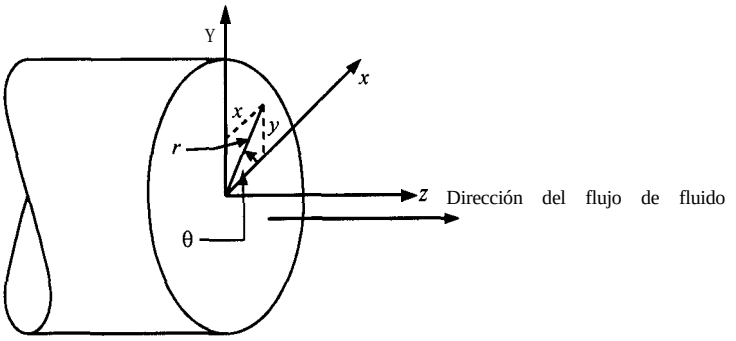


FIGURA 3.8-3. ***Flujo horizontal en el tubo del ejemplo 3.8-3.***

De manera alterna, puede usarse la ecuación (3.7-42) con coordenadas cilíndricas para la componente z y los términos que son cero se descartan.

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}$$
$$+\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right]+\rho g_z \qquad (3.7\text{-}42)$$

Como antes, $\partial v_z/\partial t = 0$, $\partial^2 v_z/\partial\theta^2 = 0$, $v_r = 0$, $\partial v_z/\partial q = 0$, $\partial v_z/\partial z = 0$. Entonces la ecuación (3.7-42) se vuelve idéntica a la ecuación (3.8-16).
Las condiciones frontera para la primera integración son $dv_z/dr = 0$, cuando $r = 0$. Para la segunda integración, $v_z = 0$ cuando $r = r_0$ (radio del tubo). El resultado es éste

$$v_z = \frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dz}\left(r^2 - r_0^2\right) \qquad (3.8\text{-}17)$$

Al convertir a velocidad máxima como antes,

$$v_z = v_{z\,\text{máx}}\left[1-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right] \qquad (3.8\text{-}18)$$

Cuando se integra la ecuación (3.8-17) respecto a el corte transversal de la tubería, empleando la ecuación (2.9-10) para obtener la velocidad promedio $v_{z\,\text{prom}}$,

$$v_{z\,\text{prom}} = -\frac{r_0^2}{8\mu}\frac{dp}{dz} \qquad (3.8\text{-}19)$$

Al integrar para obtener la caída de presión desde z = 0 parap $= p_1$, hasta z $= L$ parap $= p_2$, se obtiene

$$p_1 - p_2 = \frac{8\mu v_{z\,\text{prom}} L}{r_0^2} = \frac{32\mu v_{z\,\text{prom}} L}{D^2} \qquad (3.8\text{-}20)$$

donde $D = 2r_0$. Ésta es la ecuación de Hagen-Poiseuille obtenida anteriormente en las expresiones de la ecuación (2.9-l 1).

EJEMPLO 3.8.4. Flujo laminar en un anillo cilíndrico
Deduzca la ecuación para el flujo laminar de estado estacionario dentro del anillo que se encuentra entre dos tuberías horizontales concéntricas. Este tipo de flujo se presenta a menudo en los intercambiadores de calor de tuberías concéntricas.

Solución: En este caso todavía es válida la ecuación (3.8-16); sin embargo, la velocidad en el anillo alcanzará un máximo para algún radio $r = r_{\text{máx}}$, que está entre r_1 y r_2, como se muestra en la figura 3.8-4. Para la primera integración de la ecuación (3.8-16), las condiciones de frontera son $dv_z/dr = 0$ en $r = r_{\text{máx}}$, lo cual da

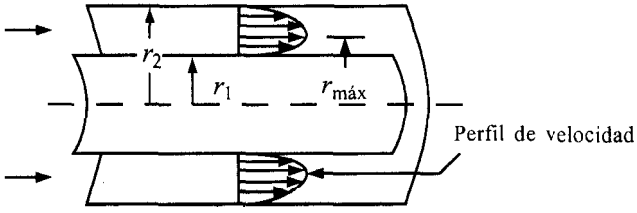


FIGURA 3.8-4. *Flujo a través de un anillo cilíndrico*

$$\frac{r\,dv_z}{dr} = \left(\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dz}\right)\left(\frac{r^2}{2} - \frac{r_{máx}^2}{2}\right) \tag{3.8-21}$$

Además, para la segunda integración de la ecuación (3.8-21), $v_z = 0$ en la pared interna, donde $r = r_1$, de lo que resulta

$$v_z = \left(\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dz}\right)\left(\frac{r^2}{2} - \frac{r_1^2}{2} - r_{máx}^2 \ln\frac{r}{r_1}\right) \tag{3.8-22}$$

Repitiendo la segunda integración pero para $v_z = 0$ en la pared exterior, donde $r = r_2$, obtenemos

$$v_z = \left(\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dz}\right)\left(\frac{r^2}{2} - \frac{r_2^2}{2} - r_{máx}^2 \ln\frac{r}{r_2}\right) \tag{3.8-23}$$

Al combinar las ecuaciones (3.8-22) y (3.8-23) y despejando $r_{máx}$,

$$r_{máx} = \sqrt{\frac{1}{\ln(r_2/r_1)}\left(r_2^2 - r_1^2\right)/2} \tag{3.8-24}$$

En la figura 3.8-4 se grafica el perfil de velocidad pronosticado por la ecuación (3.8-23). Para el caso en que $r_1 = 0$, $r_{máx}$ de la ecuación (3.8-24) se vuelve cero y la ecuación (3.8-23) se reduce a la ecuación (3.8-17) para una tubería circular sencilla.

EJEMPLO 3.8-S. Distribución de la velocidadpara el flujo entre cilindros coaxiales Considere el flujo laminar tangencial de un fluido newtoniano con densidad constante entre dos cilindros coaxiales verticales, de los cuales el exterior está girando (S4) con una velocidad angular ω, como se muestra en la figura 3.8-5. Puede suponerse que los efectos de los extremos son despreciables. Determine la velocidad y las distribuciones del esfuerzo de corte para este flujo.

Solución: En términos físicos, el fluido se mueve con movimiento circular; la velocidad v,. en la dirección radial es cero y v_z en la dirección axial es cero. Además, $\partial\rho/\partial t = 0$ en estado

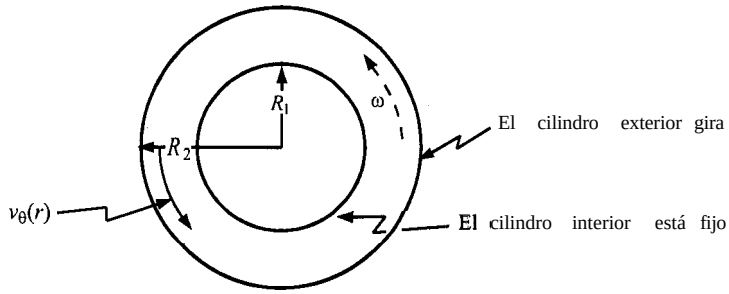


FIGURA 3.8-5. *Flujo laminar en la región entre dos cilindros coaxiales del ejemplo 3.8-S.*

estacionario. No hay gradiente de presión en la dirección θ. La ecuación de continuidad en coordenadas cilíndricas, como se dedujo antes, es

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial (\rho r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial (\rho v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z} = 0 \tag{3.6-27}$$

En esta ecuación todos los términos son cero.
Las ecuaciones del movimiento en coordenadas cilíndricas, ecuaciones (3.7-40) (3.7-41) y (3.7-42), se reducen a las siguientes, respectivamente:

$$-\rho \frac{v_0^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} \text{ (componente } r) \tag{3.8-25}$$

$$0 = \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d(r v_\theta)}{dr}\right) \text{ (componente } \theta) \tag{3.8-26}$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z \text{ (componente z)} \tag{3.8-27}$$

Al integrar la ecuación (3.8-26),

$$v_\theta = C_1 r + \frac{C_2}{r} \tag{3.8-28}$$

Para despejar las constantes de integración C_1 y C_2, se usan las siguientes condiciones de frontera: en $r = R_1$, $v_\theta = 0$; en $r = R_2$, $v_\theta = \omega R_2$. La ecuación final es

$$v_\theta = \frac{\omega}{\left(R_1^2 - R_2^2\right)/\left(R_1 R_2^2\right)}\left[\frac{R_1}{r} - \frac{r}{R_1}\right] \tag{3.8-29}$$

Al usar la componente del esfuerzo de corte para fluidos newtonianos en coordenadas cilíndricas,

$$\tau_{r\theta} = -\mu\left[r\frac{\partial (v_\theta/r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right] \tag{3.7-31}$$

El último término de la ecuación (3.7-3 1) es cero. Sustituyendo la ecuación (3.8-29) en la (3.7-3 1) y diferenciando se obtiene

$$\tau_{r\theta} = -2\mu\omega R_2^2\left(\frac{1}{r^2}\right)\left[\frac{R_1^2/R_2^2}{1-R_1^2/R_2^2}\right] \tag{3.8-30}$$

El momento de torsión Tque se necesita para hacer girar el cilindro exterior es el producto de la fuerza por el brazo de palanca.

$$\begin{aligned} T &= (2\pi R_2 H)(-\tau_{r\theta})\big|_{r=R_2}(R_2) \\ &= 4\pi\mu H\omega R_2^2\left[\frac{R_1^2/R_2^2}{1-R_1^2/R_2^2}\right] \end{aligned} \tag{3.8-31}$$

donde H es la longitud del cilindro. Este tipo de dispositivo se ha usado para medir viscosidades de fluidos a partir de observaciones de velocidades angulares y momento de torsión, y también se ha usado como modelo para algunas chumaceras de fricción.

EJEMPLO 3.8-6. Líquido que gira en un recipiente cilíndrico

Un fluido newtoniano de densidad constante está en un cilindro vertical de radio R (figura 3.8-6) y el cilindro gira en torno a su eje con una velocidad angular ω (B2). En estado estacionario, encuentre la forma de la superficie libre.

Solución: El sistema puede describirse en coordenadas cilíndricas, Como en el ejemplo 3.8-5 en estado estacionario, $v_r = v_z = 0$ y $g_r = g_\theta = 0$. Las ecuaciones finales en coordenadas cilíndricas que se dan en seguida son iguales que las ecuaciones (3.8-25) a (3.8-27) para el ejemplo 3.8-5 excepto que en la ecuación (3.8-27) $g_z = -g$.

$$\rho = \frac{v_\theta^2}{r} = \frac{\partial p}{\partial r} \tag{3.8-32}$$

$$0 = \mu\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_\theta)}{\partial r}\right) \tag{3.8-33}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \tag{3.8-34}$$

Se integra la ecuación. (3.8-33) se obtiene la misma ecuación que en el ejemplo 3.8-5.

$$v_\theta = C_1 r + \frac{C_2}{r} \tag{3.8-28}$$

La constante C_2 debe ser cero puesto que v_θ no puede ser infinita a $r = 0$. A $r = R$, la velocidad es $v_\theta = Ro$. Por lo pronto, $C_1 = \omega$ y se obtiene:

$$v_\theta = \omega r \tag{3.8-35}$$

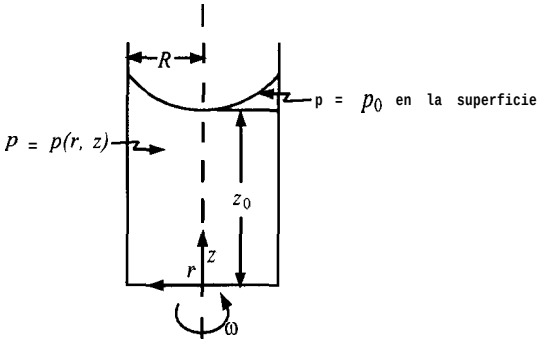


FIGURA 3.8-6. *Líquido que se hace girar en un recipiente con una superficie libre, del ejemplo 3.8-6.*

Al combinar las ecuaciones (3.8-35) y (3.8-32)

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho\omega^2 r \qquad (3.8\text{-}36)$$

Por lo tanto, se ve que las ecuaciones (3.8-36) y (3.8-34) muestran que la presión depende de r debido a la fuerza centrífuga y de z debido a la fuerza gravitacional.

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \qquad (3.8\text{-}34)$$

Puesto que el términop está en función de la posición, podemos escribir la diferencial total de presión como

$$dp = \frac{\partial p}{\partial r}dr + \frac{\partial p}{\partial z}dz \qquad (3.8\text{-}37)$$

Combinando las ecuaciones (3.8-34) y (3.8-36) con la (3.8-37) e integrando,

$$p = \frac{\rho\omega^2 r^2}{2} - \rho g z + C_3 \qquad (3.8\text{-}38)$$

La constante de integración puede determinarse porquep $= p_0$ en $r = 0$ y $z = z_0$. La ecuación se convierte en

$$p - p_0 = \frac{\rho\omega^2 r^2}{2} + \qquad (z_0 - z) \qquad (3.8\text{-}39)$$

La superficie libre consta de todos los puntos de esta superficie en $p = p_0$. Por consiguiente,

$$z - z_0 = \left(\frac{\omega^2}{2g}\right) r^2 \qquad (3.8\text{-}40)$$

Esto indica que la superficie libre tiene forma de parábola.

3.9 OTROS MÉTODOS PARA LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE MOVIMIENTO

3.9A Introducción

En la sección 3.8 se estudiaron ejemplos en los que las ecuaciones diferenciales de Navier-Stokes del movimiento podían resolverse analíticamente. Estos casos se usaron cuando sólo había una componente de la velocidad que no desaparece. Resolver estas ecuaciones para flujos en dos y tres direcciones es bastante complicado.

En esta sección analizaremos algunas aproximaciones que simplifican las ecuaciones diferenciales para permitirnos obtener soluciones analíticas. Se omitirán los términos que sean muy pequeños comparados con los términos que se conservan.

Se estudiaran tres casos en esta sección: el flujo no viscoso, el flujo potencial y el flujo deslizante. El cuarto caso, el flujo de capa límite, se considerara en la sección 3.10. La resolución de estas ecuaciones puede simplificarse usando una función de corriente $\psi(x, y)$, un potencial de velocidad $\phi(x, y)$ o ambos, en vez de los términos de las componentes de la velocidad v_x, v_y y v_z.

3.9B Función de corriente

La función de corriente $\psi(x, y)$, es un parámetro conveniente con el cual podemos representar el flujo incompresible, estacionario y bidimensional. Esta función de corriente, ψ en m^2/s se relaciona con las componentes de la velocidad v_x y v_y.

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{3.9-1}$$

Estas definiciones de v_x y v_y pueden utilizarse después en las componentesx y y de la ecuación diferencial del movimiento, ecuaciones (3.7-36) y (3.7-37), con $v_z = 0$ para obtener una ecuación diferencial para ψ que es equivalente a la ecuación de Navier-Stokes. Los detalles pueden verse en otras obras (B2).

La función de corriente es muy útil porque su significado físico es que, en el flujo estacionario, las líneas definidas por $\psi =$ constante son líneas de flujo que son las curvas reales trazadas por las partículas del fluido. Existe una función de corriente para todo flujo incompresible, estable y bidimensional, ya sea viscoso o no viscoso, rotatorio o no rotatorio.

EJEMPLO 3.9-l. Función de corriente y líneas de flujo

La relación de la función de corriente está dada por $\psi = xy$. Encuentre las ecuaciones para las componentes de la velocidad. También, grafique las líneas de flujo para $\psi = 4$ y $\psi = 1$ constantes.

Solución: Utilizando la ecuación (3.9-1),

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial (xy)}{\partial y} = x$$

$$v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial (xy)}{\partial x} = -y$$

Para determinar la línea de flujo para ψ = constante = 1 = xy, suponga que y = 0.5 y despeje x

$$\psi = 1 = xy = X(0.5)$$

En consecuencia, x = 2. Repitiendo, para y = 1, x = 1; para y = 2, x = 0.5; para y = 5, x = 0.2, etc. Haciendo lo mismo para ψ = constante = 4, las líneas de flujo ψ = 1 y ψ = 4 se grafican en la figura 3.9-l. Un posible modelo de flujo es el flujo alrededor de una esquina.

3.9C Ecuaciones diferenciales de movimiento para fluidos ideales (flujo no viscoso)

En *fluidos ideales*, o no viscosos, pueden obtenerse ecuaciones especiales para un fluido con densidad constante y viscosidad cero. A estas expresiones se les llama *ecuaciones de Euler*. Entonces, las ecuaciones (3.7-36) a (3.7-39) para los exponentes x, y y z del momento lineal se transforman en

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x \tag{3.9-2}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y \tag{3.9-3}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_z \tag{3.9-4}$$

A números de Reynolds sumamente altos, las fuerzas viscosas son muy pequeñas comparadas con las fuerzas de inercia, y la viscosidad puede considerarse cero. Estas ecuaciones son necesarias para calcular la distribución de presión en el borde externo de la capa límite delgada en el flujo que pasa por cuerpos sumergidos. Lejos de la superficie que está fuera de la capa límite, esta suposición de un fluido ideal suele ser válida.

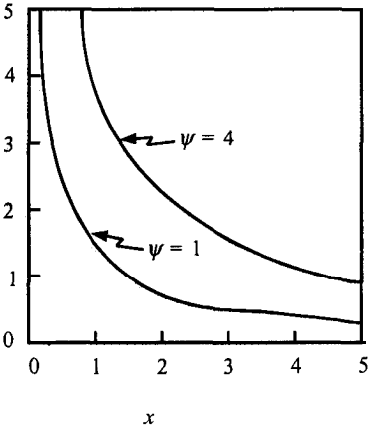


FIGURA 3.9-I. *Gráfica de líneas de flujo para $\psi = xy$ para el ejemplo 3.9-l*

3.9D Flujo potencial y potencial de velocidad

La función de potencial de velocidad o de potencial $\phi(x, y)$ en m^2/s es útil en problemas de flujo no viscoso y se define como

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} \qquad v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} \qquad v_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} \tag{3.9-5}$$

Este potencial sólo existe para un flujo con velocidad angular cero, o ausencia de rotación. Este tipo de flujo de un fluido ideal o no viscoso (ρ = constante, $\mu = 0$) se llama *flujo potencial*. Además, existe el potencial de velocidad ϕ para flujos tridimensionales, mientras que no hay una función de corriente para esos flujos.

La vorticidad de un flujo se define como sigue:

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 2\omega_z \tag{3.9-6}$$

o bien,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -2\omega_z \tag{3.9-7}$$

donde $2\omega_z$ es la vorticidad y ω_z en s^{-1} es la velocidad angular alrededor del eje z. Si $2\omega_z = 0$, el flujo es no rotatorio y existe una función de potencial.

Empleando la ecuación (3.6-24), la ecuación de conservación de masa para flujos en las direcciones x y y es como sigue para una densidad constante:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \tag{3.9-8}$$

Al diferenciar v_x en la ecuación (3.9-5) con respecto a x y v_y con respecto a y y sustituyendo en la ecuación (3.9-Q

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \tag{3.9-9}$$

Ésta es la ecuación de Laplace en coordenadas rectangulares. Si existen o se conocen condiciones de frontera adecuadas, la ecuación (3.9-9) puede resolverse para dar $f(x, y)$. Entonces, puede obtenerse la velocidad en cualquier punto utilizando la ecuación (3.9-5). Entre las técnicas para resolver esta ecuación están el uso del análisis numérico, la representación conforme y las funciones de una variable compleja, que se analizan en otros libros (B2, S3). Las ecuaciones de Euler pueden usarse entonces para hallar la distribución de la presión.

Cuando el flujo es no viscoso y no rotatorio, se obtiene un tipo similar de ecuación de Laplace a partir de la ecuación (3.9-7) para la función de corriente.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \tag{3.9-l 0}$$

Las líneas de ϕ constante se llaman líneas de igual potencial, y para el flujo potencial siempre son perpendiculares (ortogonales) a las líneas de ψ constante. Esto puede demostrarse como sigue. Una línea de ψ constante podría ser tal que el cambio en ψ sea cero.

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0 \tag{3.9-l 1}$$

Entonces, sustituyendo la ecuación (3.9-l) en la anterior,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\psi = \text{constante}} = \frac{v_y}{v_x} \tag{3.9-12}$$

Además, para líneas de ϕ constante,

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = 0 \tag{3.9-13}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\phi = \text{constante}} = -\frac{v_y}{v_x} \tag{3.9-14}$$

Por tanto,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\phi = \text{constante}} = -\frac{1}{(dy/dx)_{\psi = \text{constante}}} \tag{3.9-15}$$

Un ejemplo del uso de la función de corriente es la obtención del patrón de flujo para el flujo no rotatorio no viscoso alrededor de un cilindro de longitud infinita. El flujo que se acerca al cilindro tiene una velocidad estable y uniforme v_∞ en la dirección x. La ecuación de Laplace (3.9- 10) puede cambiarse a coordenadas cilíndricas para dar

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0 \tag{3.9-16}$$

donde las componentes de la velocidad están dadas por

$$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \qquad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \tag{3.9-17}$$

Al usar cuatro condiciones de frontera que son necesarias y el método de separación de variables se obtiene la función de corriente ψ. Convirtiendo a coordenadas rectangulares,

$$\psi = v_\infty y\left(1 - \frac{R^2}{x^2 + y^2}\right) \tag{3.9-18}$$

donde R es el radio del cilindro. Las líneas de flujo y las líneas de potencial de velocidad constante se trazaron en la figura 3.9-2 como una red de flujo.

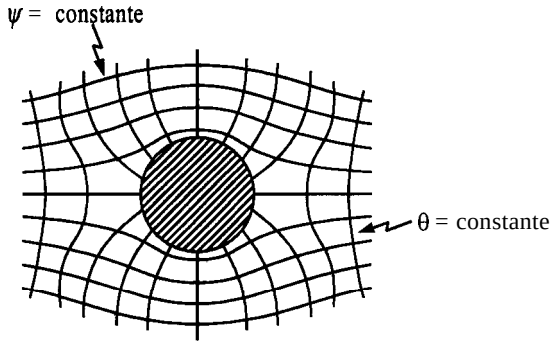


FIGURA 3.9-2. *Líneas de flujo* (ψ = constante) *y líneas de potencial de velocidad constante* (ϕ = constante) *para el flujo estable y no rotatorio de un fluido no viscoso e incompresible alrededor de un cilindro circular infinito.*

EJEMPLO 3.9-2. Función de corriente para un campo de flujo

Las componentes de la velocidad para un campo de flujo son como sigue:

$$v_x = a(x^2 - y^2) \qquad v_y = -2axy$$

Demuestre que esto satisface la conservación de la masa y determine ψ.

Solución: Primero determinemos $\partial v_x/\partial x = 2ax$ y $\partial v_x/\partial y = -$ 2ax. Sustituyendo estos valores en la ecuación (3.6-24), la conservación de la masa para el flujo bidimensional,

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \text{ o bien, } 2ax - 2ax = 0$$

Después, usando la ecuación (3.9-1), .

$$v_r = \frac{\partial \psi}{\partial y} = ax^2 - ay^2 \qquad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -2axy \qquad \textbf{(3.9-19)}$$

Al integrar la ecuación (3.9-19) para v_x

$$\psi = ax^2y - \frac{ay^3}{3} + f(x) \qquad \textbf{(3.9-20)}$$

Diferenciando la ecuación (3.9-20) con respecto a x e igualándola a la ecuación (3.9-19),

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 2axy - 0 + f'(x) = +2axy \qquad \textbf{(3.9-21)}$$

Así, $f'(x) = 0$ y $f(x)$ = C, que es una constante. Entonces, la ecuación (3.9-20) se transforma en

$$\psi = ax^2y - \frac{ay^3}{3} + c \qquad \textbf{(3.9-22)}$$

Para grafícar la función de corriente, la constante C puede hacerse igual a cero antes de graticar.

En el flujo potencial, la función de corriente y la función de potencial se usan para representar el flujo en el cuerpo principal del fluido. Estas soluciones de fluido ideal no satisfacen la condición de que $v_x = v_y = 0$ en la superficie de la pared. Cerca de la pared tenemos una resistencia viscosa y usamos la teoría de la capa límite, con la que obtenemos soluciones aproximadas para los perfiles de velocidad en esta delgada capa límite, tomando en cuenta la viscosidad. Esto se analiza en la sección 3.10. Luego empalmamos esta solución sobre la solución del flujo ideal que describe el flujo fuera de la capa límite.

3.9E Ecuaciones diferenciales del movimiento para el flujo deslizante

Cuando el número de Reynolds es muy bajo, aproximadamente inferior a 1, interviene el término *flujo deslizante* para describir el flujo a velocidades bajas. Este tipo de flujo es aplicable a la caída o sedimentación de partículas pequeñas a través de un fluido. La ley de Stokes se deduce de este tipo de flujo en problemas de asentamiento y sedimentación.

Por ejemplo, en el flujo alrededor de una esfera, el fluido cambia de velocidad y dirección de manera compleja. Si en este caso los efectos de la inercia fueran importantes, sería necesario usar todos los términos de las tres ecuaciones de Navier-Stokes. Diversos experimentos demuestran que para un número de Reynolds inferior a 1, los efectos de inercia son pequeños y pueden omitirse, por tanto, las ecuaciones de movimiento, (3.7-36) a (3.7-39) para el flujo deslizante de un fluido incompresible son

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right) \qquad (3.9\text{-}23)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right) \qquad (3.9\text{-}24)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \mu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right) \qquad (3.9\text{-}25)$$

Para el flujo alrededor de una esfera, puede utilizarse la función de corriente ψ en la ecuación de Navier-Stokes en coordenadas esféricas para obtener la ecuación para función de corriente, la distribución de la velocidad y la distribución de la presión sobre la esfera. Entonces, por integración con respecto a la totalidad de la esfera, se determina el arrastre de forma, causado por la distribución de presiones, y la fricción superficial o arrastre viscoso causada por el esfuerzo cortante en la superficie, cuya suma nos da el arrastre total:

$$F_D = 3\pi\mu D_p v \qquad \text{(SI)}$$

$$F_D = \frac{3\pi\mu D_p v}{g_c} \qquad \text{(Unidades del sistema de inglés)} \qquad (3.9\text{-}26)$$

donde F_D es la fuerza total de retardo en N, D_p es el diámetro de la partícula en m, v es la velocidad de corriente libre del fluido que pasa por la esfera en m/s y μ es la viscosidad en $kg/m \cdot s$. Ésta es la ecuación de Stokes para la fuerza de arrastre sobre una esfera.

La ecuación (3.9-26) también se conoce como

$$F_D = C_D \frac{v^2}{2} \rho A \qquad \text{(SI)}$$

(3.9-27)

$$F_D = C_D \frac{v^2}{2g_c} \rho A \qquad \text{(Unidades del sistema inglés)}$$

donde C_D es un coeficiente de resistencia al avance, igual a $24/N_{Re}$ para la ley de Stokes y A es el área proyectada de la esfera, igual a $\pi D_p^2/4$. Esta expresión se estudia con mayor detalle en la sección 3.1 para flujos alrededor de esferas.

3.10. FLUJO DE CAPA LÍMITE Y TURBULENCIA

3.10A. Flujo de capa límite

En las secciones 3.8 y 3.9 se usaron las ecuaciones de Navier-Stokes para determinar las relaciones que describen tanto el flujo laminar entre placas planas y en el interior de tubos circulares, como el flujo de fluidos ideales y el flujo deslizante. En esta sección se considerará el flujo alrededor de objetos en la región cercana a la superficie sólida, llamada *capa límite.*

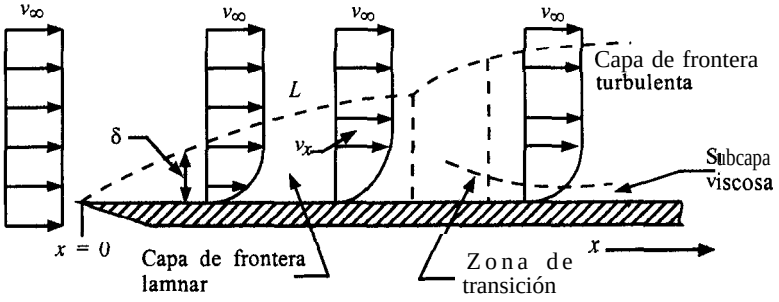


FIGURA 3.10-l. *Capa límite para un flujo que pasa por una placa plana.*

En la región de la capa límite, cercana al sólido, el movimiento del fluido resulta muy afectado por la presencia del sólido. En la masa del fluido y lejos de la capa límite, el flujo casi siempre puede describirse de manera adecuada con la teoría de los fluidos ideales de viscosidad cero. Sin embargo, en la capa límite delgada, la viscosidad es importante. Puesto que la región es delgada, pueden obtenerse soluciones simplificadas para esta región de capa límite. Prandtl fue el primero en sugerir la división de este problema en dos partes, que es el método más comunmente empleado en la dinámica de fluidos.

Para comprender mejor el concepto de capa límite, en la figura 3. 10- 1, se muestra un ejemplo de formación de capa límite en el flujo de estado estacionario de un fluido que pasa por una placa plana. La velocidad del fluido corriente arriba con respecto al borde de entrada x = 0 de la placa, es uniforme en la totalidad de la corriente y tiene un valor v_∞. La velocidad del fluido en la interfaz es cero y la velocidad v_x en la dirección x aumenta al alejarse de la placa. La velocidad v_x tiende asintóticamente a la velocidad v_∞ del grueso de la corriente.

La línea punteada L se traza de tal manera que la velocidad en uno de sus puntos sea el 99% de la velocidad general v_∞. La capa o zona entre la placa y la línea punteada constituye la capa límite. Cuando el flujo es laminar, el espesor δ de la capa límite aumenta con $\sqrt{x}$ al desplazarse en la dirección x. El número de Reynolds se define como $N_{Re,x}$ = xv, ρ/μ, donde x es la distancia corriente abajo con respecto al borde de entrada. Cuando el número de Reynolds es inferior a 2 x 10^5, el flujo es laminar, tal como lo indica la figura 3. 10- 1.

La transición de flujo laminar a turbulento en una placa lisa se presenta en un intervalo de número de Reynolds de 2 x 1 0^5 a 3 x 1 0^6, como lo indica la figura 3.1 O-l. Cuando la capa límite es turbulenta, existe una subcapa viscosa adyacente a la placa. El arrastre causado por el esfuerzo cortante viscoso en las capas límite se llama *fricción superficial* y es la única resistencia presente en el flujo sobre una placa plana.

El tipo de resistencia que se presenta cuando el fluido fluye por una forma escarpada u obtusa, tal como una esfera o un cilindro, es causada por una diferencia de presión, se llama *arrastre de forma*. Esta resistencia predomina en el flujo que pasa por este tipo de objetos con todos los valores del número de Reynolds (excepto los muy bajos), y casi siempre hay una estela presente. Cuando el flujo pasa por una forma obtusa hay un arrastre tanto de fricción superficial como de forma, y el arrastre total es la suma de ambos. (Véase también la sección 3.1A.)

3.10B Separación de la capa límite y formación de estelas

Al explicar la figura 3.1 O-2 se estudió el crecimiento de la capa límite desde el borde de entrada de una placa. Sin embargo, también existen algunos fenómenos importantes en el borde de salida de esta placa y de otros objetos. En el borde de salida o borde posterior de la placa plana, las capas están presentes en ambos lados de la placa, arriba y abajo. Las capas límite se entremezclan y desaparecen gradualmente al salir de la placa.

Si la dirección del flujo forma un ángulo recto con la placa que se muestra en la figura 3.10-2 también se presenta una capa límite en el fluido que fluye sobre la superficie que está corriente arriba. Sin embargo, al llegara1 borde de la placa, el momento lineal del fluido evita que forme una curva abrupta para rodear el borde de la placa y se producen remolinos (vórtices) considerables llamados *estelas*. Los remolinos consumen grandes cantidades de energía mecánica. Esta separación de capas límite ocurre cuando la variación de la velocidad del fluido que fluye alrededor de un objeto es demasiado grande en dirección o en magnitud como para que el fluido se adhiera a la superficie.

Puesto que la formación de estelas causa pérdidas de energía mecánica bastante grandes, suele ser necesario evitar o reducir al mínimo la separación de la capa límite moldeando aerodinámicamente los objetos o aplicando otros métodos de efecto similar. Esto también se analiza en la sección 3.1A para el flujo alrededor de objetos inmersos.

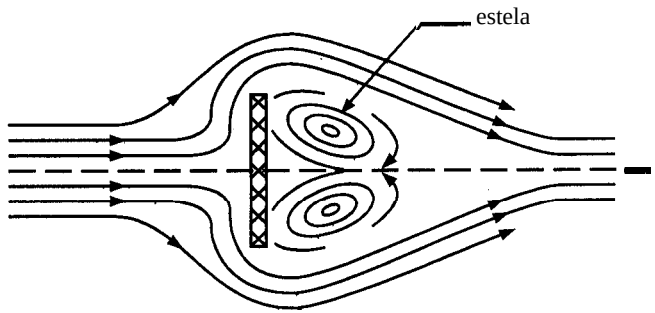


FIGURA 3.10-2. *Flujo perpendicular a una placa plana y separación de la capa limite.*

3.10C Flujo laminar y teoría de la capa límite

1. Ecuaciones de la capa límite. Cuando hay flujo laminar en una capa límite, algunos de los términos de las ecuaciones de Navier-Stokes resultan despreciables y pueden omitirse. El espesor de la capa límite δ se considera de manera convencional como la distancia de separación a la superficie donde la velocidad resulta el 99% de la velocidad de la corriente libre. El concepto de capa límite relativamente delgada conduce a simplificaciones muy importantes de las ecuaciones de Navier-Stokes.

Para el flujo laminar bidimensional en las direcciones x y y cuando el fluido tiene una densidad constante, las ecuaciones (3.7-36) y (3.7-37) se transforman en las siguientes expresiones para un flujo de estado estacionario como el de la figura 3.1 O-1, cuando se desprecian las fuerzas sobre el cuerpo g_x y g_y:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right) \tag{3.10-1}$$

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}\right) \tag{3.10-2}$$

La ecuación de continuidad para el flujo bidimensional es

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \tag{3.10-3}$$

En la ecuación (3.10-1), en el término $\mu/\rho(\partial^2 v_x/\partial x^2)$ es despreciable al compararlo con los términos restantes de la ecuación. Además puede demostrarse que todos los términos que contienen v_y y sus derivadas son pequeñas. Por consiguiente, las ecuaciones finales para dos capas límite son las ecuaciones (3.1 O-3) y (3.1 O-4):

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} + \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \tag{3.10-4}$$

2. Solución para una capa límite laminar en una placa plana. Existe un caso importante para el que se tiene una solución analítica de las ecuaciones de capa límite, y es el de una capa límite sobre una placa plana con flujo estable, tal como lo muestra la figura 3.10-l. La ecuación (3.10-4) puede simplificarse más puesto que v_∞ es constante y dp/dx es igual a cero.

Las ecuaciones finales para la capa límite se reducen a la ecuación de movimiento para la dirección x y a la ecuación de continuidad:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \tag{3.10-5}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \tag{3.1 O-3}$$

Las condiciones límite son $v_x = v_y = 0$ cuando $y = 0$ (y es la distancia desde la placa), y $v_x = v_\infty$ cuando $y = \infty$.

La solución del problema para un flujo laminar sobre una placa plana, con v_x y v_y en función de x y y, la obtuvo Blasius por primera vez y fue complementada después por Howarth (B1, B2, S3). Los detalles matemáticos de la resolución son tediosos y complejos por lo que no se analizaran aquí. Describiremos, sin embargo, el procedimiento general. Blasius redujo las dos fórmulas a una sola ecuación diferencial ordinaria no lineal. Ya que esta ecuación no puede resolverse con un valor definido, se obtuvo una serie de soluciones.

Los resultados del trabajo de Blasius son los siguientes. El espesor de la capa límite δ, donde $v_x \cong 0.99v_\infty$, está dado en forma aproximada por

$$\delta = \frac{5.0x}{\sqrt{N_{\mathrm{Re},\,x}}} = 5.0\sqrt{\frac{\mu x}{\rho v_\infty}} \tag{3.10-6}$$

donde $N_{\mathrm{Re},\,x} = xv_\infty\rho/\mu$. Por tanto, el espesor varía en función de $\sqrt{x}$.

El arrastre o resistencia al flujo que pasa por una placa plana consiste solamente en la fricción superficial y se calcula según el esfuerzo cortante en la superficie cuando y = 0 para cualquier valor de x,

$$\tau_0 = \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y\,=\,0} \tag{3.10-7}$$

De acuerdo con la relación de v_x en función de x y y obtenida de esta solución en serie, la ecuación (3.10-7) se transforma en

$$\tau_0 = 0.332\mu v_\infty\sqrt{\frac{\rho v_\infty}{\mu x}} \tag{3.10-S}$$

El retardo total está dado por la siguiente expresión para una placa de longitud L y anchura b:

$$F_D = b\int_0^L \tau_0 dx \tag{3.10-9}$$

Sustituyendo la ecuación (3.10-g) en la (3.10-9) e integrando,

$$F_D = 0.664b\sqrt{\mu\rho v_\infty^3 L} \tag{3.10-10}$$

El coeficiente de resistencia al avance C_D con respecto la resistencia total del lado de una placa con área $A = bL$ se define como

$$F_D = C_D\frac{v_\infty^2}{2}\rho A \tag{3.10-11}$$

Al sustituir en la ecuación (3.10-l 1) el valor de A y la ecuación (3.10-10),

$$C_D = 1.328\sqrt{\frac{\mu}{Lv_\infty\rho}} = \frac{1.328}{N_{\mathrm{Re},L}^{1/2}} \tag{3.10-12}$$

donde $N_{\mathrm{Re},\,L} = Lv_\infty\rho/\mu$. En la sección ll .3 se usa una forma especial de la ecuación (3.10-l 1) para el movimiento de partículas a través de un fluido. La definición de C_D en la ecuación (3.10-12) es semejante a la del factor de fricción f de Fanning para tuberías.

La ecuación obtenida para C_D sólo es aplicable a la capa límite laminar con valores de $N_{\mathrm{Re},\,L}$ inferiores a 5×10^5. Además, los resultados únicamente son válidos para posiciones en las cuales x está a bastante distancia del borde de entrada, de tal manera que x o L son mucho mayores que 6. Los resultados experimentales del coeficiente de resistencia al avance en una placa plana confirman la validez de la ecuación (3. 10- 12). Con métodos similares se han analizado las características de los flujos de capas límite alrededor de otras formas.

3.10D Naturaleza e intensidad de la turbulencia

1. Naturaleza de la turbulencia. Puesto que el flujo turbulento es importante en muchas áreas de la ingeniería, la naturaleza de la turbulencia ha sido objeto de una investigación profusa. Por ejemplo, las mediciones de fluctuaciones de velocidad de los remolinos en un flujo turbulento han ayudado a explicar la turbulencia.

Para el flujo turbulento no existen soluciones exactas a los problemas de flujo como las hay para el flujo laminar, ya que las ecuaciones aproximadas que se usan dependen de muchos supuestos. Sin embargo, se han obtenido relaciones útiles usando una combinación de datos experimentales y teoría. Algunas de estas relaciones se analizaran aquí.

La turbulencia puede generarse por contacto entre dos capas de fluido que se desplazan a diferente velocidad o por una corriente de flujo en contacto con un sólido como una pared o una esfera. Cuando un chorro de fluido pasa de un orificio a una gran masa del fluido, se puede presentar una turbulencia. En un flujo turbulento siempre se forman grandes remolinos en ciertos lugares y en determinados momentos; estos remolinos se rompen para formar otros más pequeños que terminan por desaparecer. Los remolinos pueden ser tan pequeños como 0.1 o 1 mm o tan grandes como la dimensión mínima de la corriente turbulenta. Debido a sù tamaño, el flujo dentro de un remolino es de tipo laminar.

En flujos turbulentos, la velocidad fluctúa en todas direcciones. En la figura 3.10-3 se muestra una gráfica típica de la variación de la velocidad instantánea v_x en dirección x en un punto determinado del flujo turbulento. La velocidad $\bar{v}_x'$ es la desviación con respecto a la velocidad media $\bar{v}_x$ en dirección x del flujo de la corriente. Para las direcciones y y z son válidas unas relaciones semejantes.

$$v_x = \bar{v}_x + v_x', \qquad v_y = \bar{v}_y + v_y', v_z = \bar{v}_z + v_z' \tag{3.10-13}$$

$$\bar{v}_x = \frac{1}{t}\int_0^t v_x \mathrm{d}t \tag{3.10-14}$$

donde la velocidad media $\bar{v}_x$ es la velocidad promediada en el tiempo t, v_x es la velocidad total instantánea en la dirección x, y $\bar{v}_x'$ es la velocidad fluctuante instantánea en dirección x. Las fluctuaciones también pueden tomar las direcciones y y z. El valor de v_x' fluctúa con respecto a cero como promedio, por lo tanto, los valores promediados en el tiempo $\bar{v}_x' = 0$, $\bar{v}_y' = 0$, $\bar{v}_z' = 0$. No obstante, los valores de $v_x'^2, v_y'^2$ y $v_z'^2$ no serán cero. Pueden escribirse expresiones similares para la presión, que también fluctúa.

2. La intensidad de la turbulencia. El promedio de tiempo de los componentes fluctuantes desaparece en el lapso de unos cuantos segundos. Sin embargo, el promedio de tiempo del cuadrado de las medias de los componentes fluctuantes es un valor positivo. Puesto que las fluctuaciones son desordenadas, los datos se analizan con métodos estadísticos. El nivel o intensidad de la turbulencia puede relacionarse con la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las medias de los componentes fluctuantes. La intensidad de la turbulencia es un parámetro importante en la comprobación experimental de modelos y teorías de las capas límite.

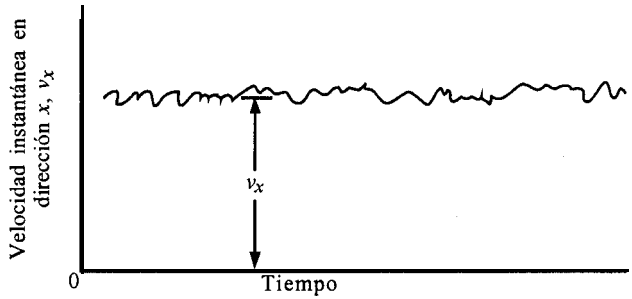


FIGURA 3.10-3. *Velocidad de la corriente en fluctuaciones turbulentas.*

La intensidad de la turbulencia I puede definirse matemáticamente como

$$I = \frac{\sqrt{\frac{1}{3}\left(\bar{v}_x'^2 + \bar{v}_y'^2 + \bar{v}_z'^2\right)}}{\bar{v}_x} \qquad (3.10\text{-E})$$

El parámetro es muy significativo. Algunos factores como transición de la capa límite, separación y coeficiente de transferencia de masa y de calor, dependen de la intensidad de la turbulencia. La simulación de flujos turbulentos en el ensayo de modelos exige que el número de Reynolds y la intensidad de la turbulencia sean los mismos. Otro método utilizado en la medición de intensidad de la turbulencia consiste en emplear un anemómetro de alambre caliente.

3.10E Corte turbulento o esfuerzos de Reynolds

En un fluido que corre en flujo turbulento aparecen fuerzas de corte siempre que exista un gradiente de velocidad a través de un plano de corte, y éstas son mucho más grandes que las que se presentan en el flujo laminar. Las fluctuaciones de la velocidad en la ecuación (3. 10- 13) dan origen a esfuerzos de corte turbulentos. Las ecuaciones de movimiento y la ecuación de continuidad aún son válidas para el flujo turbulento. Para un fluido incompresible que tiene una densidad constante ρ y una viscosidad μ, es válida la ecuación de continuidad (3.6-24).

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \qquad (3.6\text{-}24)$$

Además, la componente x de la ecuación del movimiento, ecuación (3.7-36), puede escribirse como se indica si se cumple la ecuación (3.6-24):

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_x v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_x v_z)}{\partial z} = \mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x \qquad (3.10\text{-}16)$$

Se puede reescribir la ecuación de continuidad (3.6-24) y la ecuación (3.10-16) remplazando v_x por $\bar{v}_x + v_x'$, v_y por $\bar{v}_y + v_y'$, v_z por $\bar{v}_z + v_z'$, y p por $\bar{p} + p'$.

$$\frac{\partial(\bar{v}_x + v'_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v}_y + v'_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{v}_z + v'_z)}{\partial z} = 0 \qquad \textbf{(3.10-17)}$$

$$\frac{\partial[\rho(\bar{v}_x + v'_x)]}{\partial t} + \frac{\partial[\rho(\bar{v}_x + v'_x)(\bar{v}_x + v'_x)]}{\partial x} + \frac{\partial[\rho(\bar{v}_x + v'_x)(\bar{v}_y + v'_y)]}{\partial y}$$

$$+ \frac{\partial[\rho(\bar{v}_x + v'_x)(\bar{v}_z + v'_z)]}{\partial z} = \mu\nabla^2(\bar{v}_x + v'_x) - \frac{\partial(\bar{p} + p')}{\partial x} + \rho g_x \qquad \textbf{(3.10-18)}$$

Ahora se utiliza el hecho de que el valor promediado en el tiempo de las velocidades que fluctuán es cero $(\bar{v}'_x, \bar{v}'_y, \bar{v}'_z$ son cero), y de que el producto promediado en el tiempo $\overline{v'_x v'_y}$ no es cero. Entonces las ecuaciones (3.10-17) y (3.10-18) se convierten en

$$\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} = 0 \qquad \textbf{(3.10-19)}$$

$$\frac{\partial(\rho\bar{v}_x)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\bar{v}_x\bar{v}_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho\bar{v}_x\bar{v}_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho\bar{v}_x\bar{v}_z)}{\partial z}$$

$$+ \left[\frac{\partial(\rho\overline{v'_x v'_x})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho\overline{v'_x v'_y})}{\partial y} + \frac{\partial(\rho\overline{v'_x v'_z})}{\partial z}\right] = \mu\nabla^2\bar{v}_x - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \rho g_x \qquad \textbf{(3.10-20)}$$

Comparando estas dos ecuaciones alisadas en el tiempo con las ecuaciones (3.6-24) y (3.10-16) observamos que los valores alisados en el tiempo remplazan en todos lados los valores instantáneos. Sin embargo, en la ecuación (3.10-20), en el conjunto de corchetes surgen nuevos términos que se relacionan con las fluctuaciones de la velocidad turbulenta. Por conveniencia usamos la notación

$$\bar{\tau}^t_{xx} = \rho\overline{v'_x v'_x}, \quad \bar{\tau}^t_{yx} = \rho\overline{v'_x v'_y}, \quad \bar{\tau}^t_{zx} = \rho\overline{v'_x v'_z} \qquad \textbf{(3.10-21)}$$

Éstas son las componentes del flujo de momento lineal turbulento y se llaman *esfuerzos de Reynolds.*

3.10F Longitud de mezcla de Prandtl

Para obtener los perfiles de velocidad deben resolverse las ecuaciones deducidas para el flujo turbulento. Para ello deben hacerse más simplificaciones antes de poder evaluar las expresiones para los esfuerzos de Reynolds. Se han usado varias ecuaciones semiempíricas y el modelo de difusividad de remolino de Boussinesq es uno de los primeros intentos para evaluar esos esfuerzos. Por analogía con la ecuación para el esfuerzo de corte en el flujo laminar, $\tau_{yx} = -\mu(dv_x/dy)$, el esfuerzo de corte turbulento puede escribirse como

$$\bar{\tau}^t_{yx} = -\eta_t \frac{d\bar{v}_x}{dy} \qquad \textbf{(3.10-22)}$$

donde η_t es una viscosidad turbulenta o de remolino, que es una función fuerte de la posición y el flujo. Esta ecuación también puede escribirse como sigue:

$$\bar{\tau}'_{yx} = -\rho\varepsilon_t \frac{d\bar{v}_x}{dy} \tag{3.10-23}$$

donde $\varepsilon_t = \eta_t/\rho$ y ε_t es la difusividad turbulenta del momento lineal en m^2/s por analogía con la difusividad del momento lineal μ/ρ para el flujo laminar.

Prandtl, en su modelo de longitud de mezcla, desarrolló una expresión para evaluar estos esfuerzos suponiendo que los remolinos se mueven en un fluido de manera semejante al movimiento de las moléculas en un gas. Los remolinos se mueven una distancia llamada longitud de mezcla L antes de perder su identidad.

En realidad, el remolino en movimiento o "nudo" de fluido perderá gradualmente su identidad. Sin embargo, en la definición de la longitud de mezcla de Prandtl, L, se supone que este pequeño paquete de fluido conserva su identidad mientras viaja la longitud L entera, y que luego pierde su identidad o es absorbido en la región que lo alberga.

Prandtl supuso que la fluctuación de la velocidad v'_x se debe a un "nudo" de fluido que se mueve una distancia L en la dirección y y que conserva su velocidad media. En el punto L, el nudo de fluido tendrá una velocidad media que diferirá de la del fluido adyacente por $\bar{v}_{x|y+L} - \bar{v}_{x|y}$. Entonces, el valor de $\bar{v}_{x|y}$ es

$$v'_{x|y} = v_{x|y+L} - \bar{v}_{x|y} \tag{3.10-24}$$

La longitud L es lo bastante pequeña como para que la diferencia de velocidad pueda escribirse como

$$v'_{x|y} = \bar{v}_{x|y+L} - \bar{v}_{x|y} = L\frac{d\bar{v}_x}{dy} \tag{3.10-25}$$

Por lo tanto,

$$v'_x = L\frac{d\bar{v}_x}{dy} \tag{3.10-26}$$

Prandtl también supuso que $v'_x \simeq v'_y$. Así, el promedio temporal $v'_x x'_y$ es

$$\overline{v'_x x'_y} = -L^2\left|\frac{d\bar{v}_x}{dy}\right|\frac{d\bar{v}_x}{dy} \tag{3.10-27}$$

El signo menos y el valor absoluto se usaron para hacer que la cantidad $v'_x v'_y$ concordara con los datos experimentales. Sustituyendo la ecuación (3.1 O-27) en la (3.1 O-2 1),

$$\bar{\tau}'_{yx} = -\rho L^2\left|\frac{d\bar{v}_x}{dy}\right|\frac{d\bar{v}_x}{dy} \tag{3.10-28}$$

Comparándola con la ecuación (3.10-23),

$$\varepsilon_t = L^2\left|\frac{d\bar{v}_x}{dy}\right| \tag{3.10-29}$$

3.10G Distribución universal de velocidades en un flujo turbulento

Para determinar la distribución de velocidad para el flujo turbulento en estado estacionario dentro de un tubo circular, se divide el fluido que está dentro de la tubería en dos regiones: un núcleo central donde el esfuerzo de Reynolds iguala aproximadamente el esfuerzo cortante, y una subcapa viscosa y delgada, adyacente a la pared, donde el esfuerzo cortante se debe sólo al corte viscoso y los efectos de turbulencia se suponen despreciables. Más tarde incluimos una tercera región, la zona amortiguadora, donde ambos esfuerzos son importantes.

Eliminando los subíndices y supraíndices de los esfuerzos cortantes y de la velocidad, y considerando la subcapa viscosa delgada, podemos escribir

$$\tau_0 = -\mu \frac{dv}{dy} \tag{3.10-30}$$

donde τ_0 se supone constante en esta región. Después de integrar,

$$\tau_0 y = \mu v \tag{3.10-31}$$

Al definir la velocidad de fricción como sigue y sustituyendo en la ecuación (3.10-31),

$$v^* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \tag{3.10-32}$$

$$\frac{v}{v^*} = \frac{yv^*}{\mu/\rho} \tag{3.10-33}$$

La razón de velocidad adimensional de la izquierda puede escribirse como

$$v^+ = v\sqrt{\frac{\rho}{\tau_0}} \quad \text{(SI)}$$

$$v^+ = v\sqrt{\frac{\rho}{\tau_0 g_c}} \quad \text{(Unidades del sistema inglés)} \tag{3.10-34}$$

El número adimensional de la derecha se puede escribir como

$$y^+ = \frac{\sqrt{\tau_0 \rho}}{\mu} y \quad \text{(SI)}$$

$$y^+ = \frac{\sqrt{\tau_0 g_c \rho}}{\mu} y \quad \text{(Unidades del sistema inglés)} \tag{3.10-35}$$

donde y es la distancia desde la pared del tubo. Para un tubo de radio r_0, y $= r_0 - r$, donde r es la distancia desde el centro del tubo hasta el punto en cuestión; por lo tanto, para la subcapa viscosa, la distribución de velocidad es

$$v^+ = y^+ \tag{3.10-36}$$

En seguida, considerando un núcleo turbulento donde se desprecia cualquier esfuerzo viscoso, la ecuación (3.10-28) se convierte en

$$\tau = \rho L^2 \left(\frac{dv}{dy}\right)^2 \tag{3.10.37}$$

donde dv/dy siempre es positiva y el signo de valor absoluto se elimina. Prandtl supuso que la longitud de mezcla era proporcional a la distancia desde la pared, o

$$L = Ky \tag{3.10-38}$$

y que $\tau = \tau_0$ = constante. La ecuación (3.10-37) ahora se convierte en

$$\tau_0 = \rho K^2 y^2 \left(\frac{dv}{dy}\right)^2 \tag{3.10.39}$$

Por consiguiente,

$$v^* = Ky\frac{dv}{dy} \tag{3.10-40}$$

Después de integrar,

$$v^* \ln y = Kv + K_1 \tag{3.10-41}$$

donde K_1 es una constante. La constante K_1 puede encontrarse suponiendo que v es cero a un valor pequeño de y, como y_0.

$$\frac{v}{v^*} = v^+ = \frac{1}{K}\ln\frac{y}{YO} \tag{3.10-42}$$

Al introducir la variable y^+, multiplicando el numerador y el denominador del término y/y_0 por v^*/v, donde v = μ/ρ, se obtiene

$$v^+ = \frac{1}{K}\left(\ln\frac{yv^*}{v} - \ln\frac{y_0 v^*}{v}\right) \tag{3.10-43}$$

$$v^+ = \frac{1}{K}\ln y^+ + C_1 \tag{3.10-44}$$

Nikuradse y otros han obtenido una gran cantidad de datos de distribución de velocidad para un intervalo de números de Reynolds de 4000 a 3.2×10^6, y los datos encajan en la ecuación (3.10-36) en la región de hasta y^+ de 5 y también encajan en la ecuación (3.10-44) por encima de una y^+ de 30, siendo Ky C_1 constantes universales. Para la región dey' que va de 5 a 30, que se define como la región amortiguadora, una ecuación empírica de la forma de la ecuación (3.10-44) se ajusta a los datos. En la figura 3.10-4 se grafican las siguientes relaciones, que son válidas, para dar un perfil de velocidad universal para fluidos que fluyen en tubos circulares lisos.

$$v^+ = Y^+ \qquad (0 < y^+ < 5) \tag{3.10-45}$$

$$v^+ = 5.0 \ln y^+ - 3.05 \qquad (5 < y+ < 30) \tag{3.10-46}$$

$$v^+ = 2.5 \ln y^+ + 5.5 \qquad (30 < y^+) \tag{3.10-47}$$

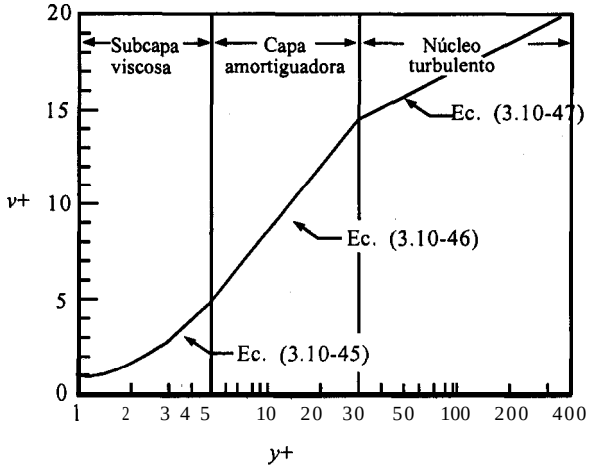


FIGURA 3.10-4. *Perfil universal de velocidades para un flujo turbulento en tubos circulares lisos.*

La figura 3.1 O-4 exhibe tres zonas perfectamente diferenciadas. La primera región, adyacente a la pared, *es* la *subcapa viscosa* (antes llamada subcapa "laminar"), representada por la ecuación (3.10-45), donde la velocidad es proporcional a la distancia desde la pared. La segunda región, la *capa intermedia,* está dada por la ecuación (3.10-46) y es una zona de transición entre la subcapa viscosa (en la cual casi no hay remolinos) y la gran cantidad de remolinos que existen en la zona central turbulenta representada por la ecuación (3.10-47). Estas ecuaciones pueden usarse y relacionarse con el factor de fricción de Fanning analizado con anterioridad. También pueden emplearse para la resolución de problemas de capas límite turbulentas.

3.10H Balance integral de momento lineal para el análisis de capa límite

1. Introducción y deducción de la expresión integral. La solución de Blasius para problemas de capa límite laminar sobre una placa plana es bastante limitativa pues se restringe a un flujo laminar sobre una placa plana, por lo que este método no es aplicable a sistemas más complejos. Cuando la configuración es más complicada o el flujo es turbulento, es posible usar un método aproximado desarrollado por von Kármán. Esto corresponde a un análisis integral aproximado, del momento lineal con respecto a la capa límite empleando una distribución de velocidades, empírica o supuesta.

Tal como se describe en la figura 3.10-5, para deducir la ecuación básica de una capa límite laminar o turbulenta se selecciona un volumen pequeño de control de dicha capa límite sobre una placa plana. La profundidad en la dirección z es b. El flujo sólo corre por las superficies A_1 y A_2 y también por la superficie curva indicada por δ. Se procede entonces a aplicar un balance integral general de momento lineal con la ecuación (2.8-8) y un balance integral general de masa mediante la ecuación (2.6-6) al volumen de control dentro de la capa límite con estado estable, y la expresión integral final de von Kármán es (B2, S3):

$$\frac{\tau_0}{\rho} = \frac{d}{dy}\int_0^{\delta} v_x(v_\infty - v_x)dy \tag{3.10-48}$$

donde τ_0 es el esfuerzo cortante en la superficie cuando y = 0 en un punto x de la placa. Además, δ y τ_0 son funciones de x.

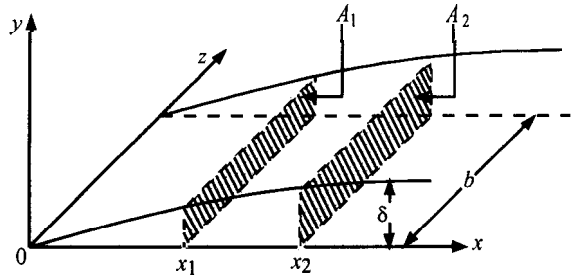


FIGURA 3.10-5. *Volumen de control para análisis integral del flujo de capa límite*

La ecuación (3.10-48) es una expresión cuya respuesta requiere un conocimiento de la velocidad v_x en función de la distancia a la superficie, Y. Claro está que la precisión de los resultados depende de la semejanza entre el perfil de velocidades supuesto y el perfil real.

2. Balance integral de momento linealpara una capa límite laminar. Antes de emplear la ecuación (3.10-48) para la capa límite turbulenta, la aplicaremos a una capa límite laminar sobre una placa plana, de tal manera que los resultados puedan compararse con la resolución exacta de Blasius, ecuaciones (3.10-6) a la (3.10-12).

En este análisis deben satisfacerse ciertas condiciones básicas de la capa límite:

$$\begin{aligned} v_x &= 0 && \text{en} \quad y = 0 \\ v_x &\cong v_\infty && \text{en} \quad y = \delta \\ \frac{dv_x}{dy} &\cong 0 && \text{en} \quad y = \delta \end{aligned} \tag{3.10-49}$$

Estas condiciones se cumplen con el siguiente perfil de velocidades supuesto, que es muy simple,

$$\frac{v_x}{v_\infty} = \frac{3}{2}\frac{y}{6} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{6}\right)^3 \tag{3.10-50}$$

El esfuerzo cortante τ_0 con determinado valor de x, se obtiene de

$$\tau_0 = \mu\left(\frac{dv_x}{dy}\right)_{y=0} \tag{3.10-51}$$

Diferenciando la ecuación (3.10-50) con respecto ay y estableciendo que y = 0,

$$\left(\frac{dv_x}{dy}\right)_{y=0} = \frac{3v_\infty}{2\delta} \tag{3.10-52}$$

Al sustituir la ecuación (3.10-52) en la (3.10-51),

$$\tau_0 = \frac{3\mu v_\infty}{2\delta} \tag{3.10-53}$$

Sustitúyase la ecuación (3.10-50) en la ecuación (3.10-48) e intégrese entre $y = 0$ y $y = \delta$, para obtener

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{280}{39} \frac{\tau_0}{v_\infty^2 \rho} \tag{3.10-54}$$

Al combinar las ecuaciones (3.10-53) y (3.10-54) e integrando entre $\delta = 0$ y $\delta = \delta$, y $x = 0$ y $x = L$,

$$\delta = 4.64\sqrt{\frac{\mu L}{\rho v_\infty}} \tag{3.10-55}$$

donde la longitud de la placa es $x = L$. Procediendo de manera similar con las ecuaciones (3.10-6) a la (3.10-12), el coeficiente de resistencia es

$$C_D = 1.292\sqrt{\frac{\mu}{L v_\infty \rho}} = \frac{1.292}{N_{\text{Re, } L}^{1/2}} \tag{3.10-56}$$

Lacomparaciónde laecuación (3.10-6) con la (3.10-55) y de la (3.10-12) con la (3.10-56) muestra el éxito de este método, donde sólo difieren un poco las constantes numéricas. Este método puede usarse con una exactitud razonable para aquellos casos en los que no puede aplicarse un análisis exacto.

3. Análisis integral del momento linealpara capa límite turbulenta. Los procedimientos empleados para el análisis integral de momento lineal de una capa límite laminar pueden aplicarse a la capa límite turbulenta sobre una placa plana. Es posible adaptar una distribución simple y empírica de las velocidades para el flujo en una tubería, válida para números de Reynolds hasta de 10^5, y aplicarse a la capa límite sobre una placa plana, obteniéndose

$$\frac{v_x}{v_\infty} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{117} \tag{3.10-57}$$

Ésta es la ley de es exponente $\frac{1}{7}$ de Blasius de uso frecuente.

La ecuación (3.10-57) se sustituye en la relación integral de la ecuación (3.10-48),

$$\frac{d}{dx}\int_0^\delta v_\infty^2 \left[\left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{2/7}\right] dy = \frac{\tau_0}{\rho} \tag{3.10-58}$$

La ecuación de la ley exponencial no es válida cuando y pasa a un valor de cero en la pared. Otra expresión útil es la correlación de Blasius para esfuerzos cortantes en el flujo por una tubería, que es congruente en la pared para el esfuerzo cortante en la misma, τ_0. Para un flujo de capa límite sobre una placa plana, la relación es

$$\frac{\tau_0}{\rho v_\infty^2} = 0.023\left(\frac{\delta v_\infty \rho}{\mu}\right)^{-1/4} \tag{3.10-59}$$

Si se integra la ecuación (3.10-58), combinando el resultado con la ecuación (3.10-59) e integrando otra vez entre $\delta = 0$ y $\delta = \delta$, y $x = 0$ y $x = L$,

$$\delta = 0.376\left(\frac{Lv_\infty\rho}{\mu}\right)^{-1/5} L = \frac{0.376L}{N_{\mathrm{Re},L}^{1/5}} \tag{3.10-60}$$

Integrando la fuerza de arrastre como antes:

$$C_D = \frac{0.072}{N_{\mathrm{Re},L}^{1/5}} \tag{3.10-61}$$

En este desarrollo se supuso que la capa límite turbulenta se prolonga hastax = 0. En realidad, cierta longitud en la parte frontal tiene una capa límite laminar. Los datos experimentales concuerdan bastante bien con la ecuación (3.10-61), donde los números de Reynolds van desde 5×10^5 hasta 10^7. Con números de Reynolds más altos se pueden obtener resultados más precisos si se emplea una distribución logarítmica de las velocidades, ecuaciones (3.10-45) a la (3.10-47).

3.11 ANÁLISIS DIMENSIONAL DE LA TRANSFERENCIA DE MOMENTO LINEAL

3.11A Análisis dimensional de ecuaciones diferenciales

En este capítulo se han deducido diversas ecuaciones diferenciales que describen diferentes tipos de flujos. La homogeneidad dimensional requiere que cada término de una ecuación tenga las mismas unidades. De esta manera, la relación entre dos términos de una ecuación es una cantidad adimensional; entonces, conocido el significado físico de cada término de la ecuación, puede obtenerse una interpretación física de todos los parámetros o números adimensionales que se forman. Estos números sin dimensiones, como el número de Reynolds y otros, son útiles para correlacionar y predecir los fenómenos de transporte en flujo laminar y turbulento.

En algunas ocasiones resulta imposible integrar la ecuación diferencial que describe una situación de flujo. Sin embargo, es posible valerse de la ecuación para determinar qué números adimensionales pueden manejarse para correlacionar los datos experimentales de la situación física considerada.

Un ejemplo importante de este tipo de casos implica el uso de la ecuación de Navier-Stokes, que casi nunca puede integrarse en una situación física real. En principio, se toma la ecuación (3.7-36) para el componente x de la ecuación de Navier-Stokes. En estado estacionario, esto equivale a

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z} = g_x + \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{3.11-1}$$

Todos los términos de esta ecuación tienen como unidades longitud/tiempo^2 o (L/t^2).

Cada uno de los términos de esta ecuación tiene un significado físico. Primero usamos una sola velocidad característica v, y una sola longitud característica L para todos los términos. De esta manera la expresión de cada término de (3.7-36) es ésta: el lado izquierdo puede expresarse como v^2/L y el lado derecho como g, $p/\rho L$ y $\mu v/\rho L^2$, respectivamente. Puede escribirse entonces,

$$\left[\frac{v^2}{L}\right] = [g] - \left[\frac{p}{\rho L}\right] + \left[\frac{\mu v}{\rho L^2}\right] \tag{3.11-2}$$

Esto expresa una igualdad dimensional y no una igualdad numérica. Todos los términos tienen como dimensiones L/t^2.

El término del lado izquierdo de la ecuación (3.1 l-2) representa la fuerza de inercia y los términos del lado derecho representan, respectivamente, la fuerza de gravedad, la fuerza de presión y la fuerza viscosa. Al dividir cada término de la ecuación (3.1 l-2) entre la fuerza de inercia $[v^2/L]$, *se* obtienen los siguientes grupos adimensionales o sus recíprocos:

$$\frac{[v^2/L]}{[g]} = \frac{\text{fuerza de inercia}}{\text{fuerza de gravedad}} = \frac{v^2}{gL} = N_{\text{Fr}} \qquad \text{(número de Froude)} \qquad \textbf{(3.11-3)}$$

$$\frac{[p/\rho L]}{[v^2/L]} = \frac{\text{fuerza de presión}}{\text{fuerza de inercia}} = \frac{p}{\rho v^2} = N_{\text{Eu}} \qquad \text{(número de Euler)} \qquad \textbf{(3.11-4)}$$

$$\frac{[v^2/L]}{[\mu v/\rho L^2]} = \frac{\text{fuerza de inercia}}{\text{fuerza viscosa}} = \frac{Lv\rho}{\mu} = N_{\text{Re}} \qquad \text{(número de Reynolds)} \qquad \textbf{(3.11-5)}$$

Obsérvese que este método no sólo proporciona los diversos grupos adimensionales para una ecuación diferencial, sino que también indica el significado físico de dichos grupos. La longitud, la velocidad, etc., que se usarán en cada caso, serán los valores que resulten más significativos. Por ejemplo, la longitud puede ser el diámetro de una esfera, la longitud de una placa plana, etcétera.

De los sistemas con semejanzas geométricas *se* dice que son *dinámicamente similares* cuando los parámetros que representan a las relaciones de fuerzas pertinentes a la situación considerada son iguales. Esto significa que los números de Reynolds, Euler o Froude, deben ser iguales en estos dos sistemas.

Esta similitud dinámica es un requisito importante para obtener datos experimentales con un modelo pequeño y aplicarlo a un prototipo a escala mucho mayor. Puesto que los experimentos con prototipos de escala industrial suelen ser difíciles y costosos, se ha hecho costumbre estudiarlos con modelos pequeños. Éste es un método muy común en el diseño de equipo químico de proceso y en el diseño de barcos y aeroplanos.

3.11B Análisis dimensional mediante el método de Buckingham

El método que se basa en la obtención de números adimensionales importantes a partir de las ecuaciones diferenciales básicas es, indudablemente, el más adecuado. Sin embargo, en muchos casos no es posible formular una ecuación diferencial evidentemente aplicable al caso en cuestión. Entonces, se requiere un procedimiento más general, que se conoce con el nombre de *método de Buckingham*. Este procedimento se inicia con la lista de las variables importantes del problema físico que se estudia y después se determina el número de parámetros adimensionales que puedan resultar de la combinación de variables, aplicando el teorema *pi* de Buckingham.

El *teorema de Buckingham* enuncia que la relación funcional entre q cantidades (o variables) cuyas unidades pueden expresarse en términos de u unidades o dimensiones fundamentales, pueden escribirse como $(q \quad u)$ grupos adimensionales independientes, a los cuales se les puede llamar *pi* (π). [Esta cantidad u es en realidad, el número máximo de variables que no constituyen un grupo adimensional. Sin embargo, es poco frecuente que u no sea igual al número de unidades fundamentales (B1).]

Considérese el siguiente ejemplo para ilustrar el uso de este método. Un flujo incompresible fluye en el interior de un tubo circular de diámetro interno D. Las variables importantes son la caída de presión Ap, la velocidad v, el diámetro D, la longitud del tubo L, la viscosidad μ y la densidad ρ. El número total de variables es $q = 6$.

Éstas son las unidades o dimensiones fundamentales: $u = 3$, y corresponden a la masa M, la longitud L y el tiempo t. Las unidades de las variables son: Ap en M/Lt^2, v en L/t, D en L, L en L, μ en M/Lt y p en M/L^3. El número de grupos adimensionales o π es q- u, o $6 - 3 = 3$. Por tanto,

$$\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3) \tag{3.11-6}$$

A continuación se selecciona un núcleo central de u (3) variables que aparezcan en todos los grupos π y que contengan entre ellas todas las dimensiones fundamentales. Además, ningún par de variables seleccionadas para el núcleo puede tener las mismas dimensiones. Al seleccionar este núcleo, por lo general se excluye la variable cuyo efecto se desea aislar (por ejemplo, Ap). Esto nos deja con las variables v, D, μ y p. (L y D tienen las mismas dimensiones.)

Seleccionaremos D, v y p como el núcleo de variables comunes a todos los grupos. Entonces, los tres grupos adimensionales son:

$$\pi_1 = D^a v^b \rho^c \Delta\rho^1 \tag{3.11-7}$$

$$\pi_2 = D^d v^e \rho^f L^1 \tag{3.11-8}$$

$$x3 = D^g v^h \rho^i \mu^1 \tag{3.1 l-9}$$

Para que sean adimensionales, las variables deben elevarse a ciertas potencias o exponentes a, b, c, etcétera.

Primero, se considera el grupo π_1.

$$\pi_1 = D^a v^b \rho^c \Delta p^1 \tag{3.1 l-7}$$

Para evaluar estos exponentes, se escribe la ecuación (3.1 l-7) dimensionalmente para sustituir las dimensiones de cada variable,

$$M^0 L^0 t^0 = 1 = L^a \left(\frac{L}{t}\right)^b \left(\frac{M}{L^3}\right)^c \frac{M}{Lt^2} \tag{3.11-10}$$

A continuación, se igualan los exponentes de L en ambos lados de la ecuación, después de M y, finalmente, de t

$$\begin{aligned} (L) \quad & 0 = a + b - 3c - 1 \\ (M) \quad & 0 = c + 1 \\ (t) \quad & 0 = -b - 2 \end{aligned} \tag{3.11-11}$$

Resolviendo estas ecuaciones, $a = 0$, $b = -2$ y $c = -1$.

Ahora sustitúyanse estos valores en la ecuación (3.1 1-7), y

$$\pi_1 = \frac{\Delta p}{v^2 \rho} = N_{Eu} \tag{3.11-12}$$

Al repetir este procedimiento para π_2 y π_3,

$$\pi_2 = \frac{L}{D} \tag{3.11-13}$$

$$\pi_3 = \frac{Dv\rho}{\mu} = N_{Re} \tag{3.11-14}$$

Por último, sustituyendo π_1, π_2 y π_3 en la ecuación (3.1 1-6),

$$\frac{\Delta p}{v^2\rho} = f\left(\frac{L}{D}, \frac{Dv\rho}{\mu}\right) \tag{3.11-15}$$

Combinando la ecuación (2.5-l 0) con el lado izquierdo de la ecuación (3.11- 15), el resultado obtenido muestra que el factor de fricción es una función del número de Reynolds (tal como se había demostrado al correlacionar empíricamente el factor de fricción y el número de Reynolds) y de la relación longitud/ diámetro. En tuberías con $L/D \gg 1$ o con un flujo desarrollado en su totalidad, se determina que el factor de fricción es independiente de L/D.

Este tipo de análisis es muy valioso para establecer correlaciones empíricas de datos. Sin embargo, tiene dos limitaciones: oculta la importancia de cada grupo adimensional, lo cual debe determinarse por experimentación, y tampoco selecciona las variables que deberán usarse.

PROBLEMAS

3.1-1. ***Fuerza sobre un cilindro en un túnel de viento.*** En un túnel de viento fluye aire a 101.3 kPa absolutos y a 25 °C con una velocidad de 10 m/s. Un cilindro largo que tiene un diámetro de 90 mm esta colocado en el túnel y el eje del cilindro se mantiene perpendicular al flujo de aire. ¿Cuál es la fuerza sobre el cilindro por metro de longitud?

Respuesta: C_D = **1.3,** F_D = *6.94 N*

3.1-2. ***Fuerza del viento en la chimenea de un calentador de vapor.*** Una chimenea cilíndrica de un calentador de vapor tiene un diámetro de 1 .O m y 30.0 m de alto. Está expuesta a un viento de 25 °C que tiene una velocidad de 50 millas/h. Calcule la fuerza ejercida sobre la chimenea del calentador.

Respuesta: C_D = 0.33, F_D = *2935 N*

3.1-3. ***Efectos de la velocidad en la fuerza sobre una esfera*** y ley ***de Stokes.*** Una esfera de 0.042 m de diámetro se sostiene en un pequeño túnel de viento y fuerza al aire a 37.8 °C y 1 atm absoluta a varias velocidades.

a) Determine el coeficiente de arrastre y la fuerza sobre la esfera para una velocidad de 2.30 $\times 10^{-4}$ m/s. Utilice la ley de Stokes si es aplicable.

b) Determine también la fuerza para velocidades 2.30 $\times 10^{-3}$, 2.30 $\times 10^{-2}$, 2.30 $\times 10^{-1}$ y 2.30 m/s. Haga una gráfica de F_D en función de la velocidad.

3.1-4. ***Fuerza de arrastre (resistencia) sobre el pilar de un puente*** en ***un río.*** El pilar cilíndrico de un puente mide 1 .O m de diámetro y está sumergido a una profundidad de 10 m. El agua del río a 20 °C fluye a su alrededor con una velocidad de 1.2 m/s. Calcule la fuerza sobre el pilar.

3.1-5. ***Área superficial en un lecho empacado.*** Un lecho empacado está compuesto por cubos de 0.020 m de lado y la densidad general del lecho empacado es de 980 kg/m^3. La densidad de los cubos sólidos es de 1500 kg/m^3.

a) Calcule ε, el diámetro efectivo D_p y a.

b) Repita para las mismas condiciones pero para cilindros con diámetro $D = 0.02$ m y longitud $h = 1.5D$.

Respuesta: a) $\varepsilon = 0.3467$, $D_p = 0.020$ m, $a = 196.0$ m^{-1}

3.1-6. ***Deducción del número departicuias en un lecho de cilindros.*** Para un lecho empacado que contiene cilindros cuyo diámetro D es igual a su longitud h, haga lo siguiente para un lecho que tiene una fracción de vacío ε.

a) Calcule el diámetro efectivo.

b) Calcule el número, n, de cilindros en 1 m^3 del lecho.

Respuesta: a) $D_p = D$

3.1-7. ***Deducción de la ecuación adimensional para un lecho empacado,*** Empezando con la ecuación (3.1-20), deduzca la ecuación adimensional (3.1-21). Muestre todos los pasos de la deducción.

3.1-8. ***Flujo y caída de presión de gases en un lecho empacado.*** Fluye aire a 394.3 K a través de un lecho empacado de cilindros que tienen un diámetro de 0.0127 m y una longitud igual al diámetro. La fracción de vacío del lecho es de 0.40 y la longitud del lecho empacado es de 3.66 m. El aire penetra en el lecho a 2.20 atm absolutas a una velocidad de 2.45 $kg/m^2 \cdot s$ basada en el corte transversal del lecho vacío. Calcule la caída de presión del aire en el lecho.

Respuesta: $\Delta p = 0.1547 \times 10^5$ Pa

3.1-9. ***Flujo de agua en un lecho de filtro.*** Fluye agua a 24 °C por gravedad por un lecho de filtro de partículas pequeñas que tienen un diámetro equivalente de 0.0060 m. La fracción de vacío del lecho mide 0.42. El lecho empacado tiene una profundidad de 1.50 m. El nivel de líquido del agua sobre el lecho se mantiene constante a 0.40 m. ¿Cuál es la velocidad v' del agua basada en el corte transversal vacío del lecho?

3.1-10. ***Diámetro medio de las partículas en un lecho empacado.*** Una mezcla de partículas en un lecho empacado contiene el siguiente porcentaje en volumen de partículas y tamaños: 15%, 10 mm; 25%, 20 mm; 40%, 40 mm; 20%, 70 mm. Calcule el diámetro medio efectivo, D_{pm}, si el factor de forma es de 0.74.

Respuesta: $D_{pm} = 18.34$ mm

3.1-11. ***Permeabilidad y ley de Darcy.*** Una muestra de sondeo de una roca porosa obtenida de un depósito de petróleo mide 8 cm de largo y 2.0 cm de diámetro. Está colocada en un soporte para muestras. Con una caída de presión de 1.0 atm, el flujo de agua a 20.2 °C que corre por la muestra se midió como 2.60 cm^3/s. ¿Cuál es la permeabilidad en darcys?

3.1-12. ***Fluidización minima y expansión del lecho fluido. Se*** van a fluidizar partículas que tienen un tamaño de 0.10 mm, un factor de forma de 0.86 y una densidad de 1200 kg/m^3, usando aire a 25 °C y 202.65 kPa de presión absoluta. La fracción de vacío en las condiciones de fluidización mínima es de 0.43. El diámetro del lecho es de 0.60 m y el lecho contiene 350 kg de sólidos.

a) Calcule la altura mínima del lecho fluidizado.

b) Calcule la caída de presión en las condiciones de fluidización mínima.

c) Calcule la velocidad mínima para la fluidización.

d) Utilizando el cuádruplo de la velocidad mínima, estime la porosidad del lecho.

Respuesta: a) $L_{mf} = 1.810$ m, b) $\Delta p = 0.1212 \times 10^5$ Pa, **c) $v'_{mf} = 0.004374$ m/s**, d) $\varepsilon = 0.604$

3.1-13. ***Velocidad de fluidización mínima usando un líquido.*** Una torre que tiene un diámetro de 0.1524 m se está fluidizando con agua a 20.2 °C. Las cuentas esféricas uniformes del lecho de la torre tienen un diámetro de 4.42 mm y una densidad de 1603 kg/m^3. Calcule la velocidad de fluidización mínima y compárela con el valor experimental de 0.02307 m/s de Wilhem y Kwauk (W5).

3.1-14. ***Fluidización de un filtro de lecho de arena.*** Para limpiar un filtro de lecho de arena, se fluidiza en las condiciones mínimas usando agua a 24 "C. Las partículas redondas de arena tienen una densidad de 2550 kg/m^3 y un tamaño promedio de 0.40 mm. La arena tiene las propiedades que se dan en la Tabla 3.1-2.

a) El diámetro del lecho es de 0.40 m y la altura deseada del lecho en esas condiciones de fluidización mínima es de 1.75 m. Calcule la cantidad de sólidos que se necesita.
b) Calcule la caída de presión en esas condiciones y la velocidad mínima para la fluidización.
c) Usando 4.0 veces la velocidad mínima, estime la porosidad y la altura del lecho expandido.

3.2-l. ***Medida de flujo usando un tubo de Pitot. Se*** usa un tubo de Pitot para medir el gasto del agua a 20 °C en el centro de una tubería que tiene un diámetro interior de 102.3 mm. La lectura del manómetro es 78 mm de tetracloruro de carbono a 20 "C. El coeficiente del tubo Pitot es de 0.98.

a) Calcule la velocidad en el centro y la velocidad promedio.
b) Calcule la tasa de flujo volumétrico del agua.

Respuesta: a) $v_{máx} = 0.9372$ m/s, $v_{prom} = 0.773$ m/s, b) 6.35×10^{-3} m^3/s

3.2-2. Tasa de flujo del gas usando un tubo Pitot. Mediante un tubo de Pitot se está midiendo el gasto de aire a 37.8 °C en el centro de un ducto que tiene un diámetro de 800 mm. La lectura de la diferencia de presión en el manómetro es de 12.4 mm de agua. En la posición del tubo de Pitot, la lectura de la presión estática es de 275 mm de agua por arriba de una atmósfera absoluta. El coeficiente del tubo de Pitot es de 0.97. Calcule la velocidad en el centro y el gasto volumétrico del aire.

3.2-3. Paso por un tubo de Pitotpara medir el flujo. En el paso por un tubo de Pitot de una tubería que tiene un diámetro interior de 155.4 mm, en la cual fluye agua a 20 °C, se obtuvieron los siguientes datos.

Distancia desde la pared (mm)	*Lectura en el manómetro (mm de tetracloruro de carbono)*
26.9	122
52.3	142
77.7	157
103.1	137
128.5	112

El coeficiente del tubo de Pitot es de 0.98.

a) Calcule la velocidad máxima en el centro.
b) Calcule la velocidad promedio. *[Sugerencia:* Utilice la ecuación (2.6-17) y realice una integración gráfica.]

3.2-4. Medición de Flujo con Venturi. Un medidor Venturi con diámetro de garganta de 38.9 mm se instala en una línea cuyo diámetro interior mide 102.3 mm. Se usa para medir un flujo de agua con una densidad de 999 kg/m^3. La caída de presión medida por el Venturi es de 156.9 kPa. El coeficiente del Venturi, C_v, es 0.98. Calcúlese el gasto en gal/min y m^3/s.

Respuesta: 330 gal/min, 0.0208 m^3/s

3.2-S. Uso de un Venturipara medir el flujo de agua. Fluye agua a 20 °C en una tubería de acero de calibre 40 de 2 pulg. Su gasto se mide con un medidor Venturi que tiene un diámetro de garganta de 20 mm. La lectura del manómetro es de 214 mm de mercurio. El coeficiente del Venturi es de 0.98. Calcule el gasto.

3.2-6. Medición del flujo de aceitepor un ***orificio.*** Un aceite pesado a 20 °C que tiene una densidad de 900 kg/m^3 y una viscosidad de 6 cp fluye por una tubería de acero de cédula 40 de 4 pulg.

Cuando el gasto es de 0.0174 m^3/s, se desea tener en el manómetro una lectura de caída de presión equivalente a 0.93 $\times 10^5$ Pa. ¿De qué tamaño debe ser el orificio que se usa si se supone que el coeficiente del orificio es de 0.61? ¿Cuál es la pérdida de presión permanente?

3.2-7. ***Gasto*** de ***agua en*** un ***canal de*** irrigación. Por el canal abierto de un sistema de irrigación fluye una corriente de agua. Se usa un vertedero rectangular con longitud de cresta L = 1.75 pies. La medición de la carga del vertedero indica que h_0 = 0.47 pie. Calcúlese el gasto en pie^3/s y m^3/s.

Respuesta: 1.776 pie^3/s, 0.0503 m^3/s

3.3-l. Potencia al freno de una bomba centrífuga. Procédase a lo siguiente empleando la figura 3.3-2 y un gasto de 60 gal/min:

a) Cálculese la potencia al freno de la bomba cuando se usa agua con una densidad de 62.4 lb_m/pie^3. Compárese con el valor de la curva.

b) Hágase lo mismo para un líquido no viscoso con una densidad de 0.85 g/cm^3.

Respuesta: b) hp al freno = 0.69 (0.51 kW)

3.3-2. Potencia de un ventilador. Se desea usar un ventilador centrífugo para succionar un gas de chimenea en reposo (velocidad cero) a temperatura de 352.6 K y presión de 749.3 mm de Hg, para descargarlo a una presión de 800.1 mm de Hg y velocidad de 38.1 m/s. El gasto volumétrico de flujo del gas de 56.6 m^3/min de gas en condiciones normales (294.3 K y 760 mm de Hg). Calcúlese la potencia al freno del ventilador si su eficiencia es de 65% y el gas tiene un peso molecular de 30.7. Supóngase un flujo incompresible.

3.3-3. Compresión adiabática de aire. Se usa un compresor que opera adiabáticamente para comprimir 2.83 m^3/min de aire a 29.4 °C y 102.7 kN/m^2 a 3 ll .6 kN/m^2. Calcúlese la potencia necesaria con una eficiencia de 75%. Calcúlese además, la temperatura de salida.

3.4-l. ***Potencia para la agitación de un líquido.*** Se desea agitar un líquido que tiene una viscosidad de 1.5 $\times 10^{-3}$ Pa · s y densidad de 969 kg/m^3 en un tanque de 0.91 m de diámetro. El agitador será una turbina abierta de seis aspas con un diámetro de 0.305 m, que opera a 180 rpm. El tanque tiene cuatro deflectores verticales, todos ellos con un ancho J de 0.076 m. Calcúlese los kilowatts necesarios. Véase la curva 2, figura 3.4-4.

Respuesta: N_p = 2.5, potencia = 0.172 kW (0.231 hp)

3.4-2. Potencia para la agitación y aumento de escala. Un agitador de turbina que tiene seis aspas planas y un disco tiene un diámetro de 0.203 m y se usa en un tanque cuyo diámetro es de 0.61 m y cuya altura también es de 0.61 m. El ancho W = 0.0405 m. Se usan cuatro deflectores que tienen un ancho de 0.051 m. La turbina opera a 275 rpm en un líquido cuya densidad es de 909 kg/m^3 y cuya viscosidad es de 0.020 Pa · s.

(a) Calcule la potencia en kW de la turbina y los kW/m^3 de volumen.

(b) Aumente la escala de este sistema hasta un recipiente que tenga un volumen 100 veces mayor que el original para el caso de iguales tasas de transferencia de masa.

Respuesta: a) P = 0.1508 kW, P/V = 0.845 kW/m^3,
b) P_2 = 15.06 kW, P_2/V_2 = 0.845 kW/m^3

3.4-3. Disminución de escala de un sistema de agitación para procesos. Un proceso de agitación existente trabaja usando el mismo sistema de agitación y fluido que se describió en el ejemplo 3.4-la. Se desea diseñar una pequeña unidad piloto con un volumen de recipiente de 2.0 litros, de manera que los efectos de las diferentes variables del proceso en el sistema se pueden estudiar en el laboratorio. Las tasas de transferencia de masa parecen ser importantes en este sistema, así que la disminución de escala debe basarse en ellas. Diseñe el nuevo sistema especificando tamaños, rpm y potencia en kilowatts.

3.4-4. Sistema de agitación de ancla. Un agitador de tipo ancla, semejante al que se describió para la ecuación (3.4-3), va a usarse para agitar un fluido que tiene una viscosidad de 100 Pa · s

y una densidad de 980 kg/m^3. El tamaño del recipiente es D_t = 0.90 m y $H = 0.90$ m. Las rpm son 50. Calcule la potencia necesaria.

3.4-S. Diseño de un sistema de agitación. Se va a diseñar un sistema de agitación para un fluido que tiene una densidad de 950 kg/m^3 y una viscosidad de 0.005 Pa . s. El volumen del recipiente es de 1.50 m^3 y se va a usar una turbina abierta estándar de seis aspas, con las aspas a 45" (curva 3, figura 3.4-4) con $D_a/W = 8$ y $D_a/D_t = 0.35$. Para el diseño preliminar se va a usar una potencia de 0.5 kW/m^3 volumen. Calcule las dimensiones del sistema de agitación, las rpm y la potencia en kilowatts.

3.4-6. Aumento de escala de los tiempos de mezcla para una turbina. Para aumentar la escala de un sistema agitado por turbina, haga lo siguiente:

a) Deduzca la ecuación (3.4-17) para la misma potencia/volumen unitario.
b) Deduzca la ecuación (3.4-18) para los mismos tiempos de mezcla.

3.4-7. Tiempo de mezcla en un sistema agitado por turbina. Haga lo siguiente:

a) Pronostique el tiempo de mezcla para el sistema de turbina del ejemplo 3.4-la.
b) Usando el mismo sistema de el inciso a) pero con un tanque que tenga un volumen de 10.0 m^3 y la misma potencia/volumen unitario, prediga el nuevo tiempo de mezcla.

Respuesta: a) $f_t = 4.1$, $t_T = 17.7$ s

3.5-l. ***Caída de presión para un líquido de ley exponencial; puré de plátano.*** Un fluido biológico que obedece la ley exponencial y es puré de plátano fluye a 23.9 °C con velocidad de 1.018 m/s por una tubería lisa de 6.10 m de largo *con* un diámetro interno de 0.01267 m. Las propiedades de flujo de este puré son K = 6.00 N . $s^{0.454}/m^2$ y n = 0.454. La densidad del fluido es 976 kg/m^3.

a) Calcule el número de Reynolds generalizado y la caída de presión mediante la ecuación (3.5-9). Asegúrese de convertir K a K' antes de proceder.
b) Repita a), pero a través del método de factor de fricción.

Respuesta: a) $N_{Re,\,gen}$ = 63.4, Ap = 245.4 kN/m^2 (5120 lb_f/ pie*)

3.5-2. Caída de presión con un fluido seudoplástico. Un fluido seudoplástico que obedece la ley exponencial y que tiene densidad de 63.2 lb_m/pie^3, fluye a través de 100 pies de una tubería con diámetro interno de 2.067, a velocidad promedio de 0.500 pies/s. Las propiedades de flujo del fluido son $K = 0.280$ $lb_f \cdot s^n/pie^2$ y n = 0.50. Calcúlese el número de Reynolds generalizado y la caída de presión, usando el método del factor de fricción.

3.5-3. Flujo turbulento de un fluido no newtoniano; puré de manzana. Un fluido de puré de manzana, cuyas propiedades de flujo se incluyen en la Tabla 3.5-1, fluye por una tubería lisa con diámetro interno de 50.8 mm y una longitud de 3.05 m a una velocidad de 4.57 m/s.

a) Calcule el factor de fricción y la caída de presión en la tubería lisa.
b) Repita el cálculo para un tubo comercial con el mismo diámetro interior pero con una rugosidad de $\varepsilon = 4.6 \times 10^{-5}$ m.

Respuesta: a) $N_{Re,\,gen}$ = 4855, $f = 0.0073$, b) $f = 0.0100$

3.5-4. Agitación de un líquido no newtoniano. Un líquido seudoplástico que tiene las siguientes propiedades: $n = 0.53$, $K = 26.49$ N $\cdot s^{n'}/m^2$, y $\rho = 975$ kg/m^3 se está agitando en un sistema como el de la figura 3.5-4, donde $D_a = 0.304$ m, $D_a = 0.151$ m, y N = 5 rev/s. Calcule μ_a, $N'_{Re,\,n}$, y la potencia en kilowatts para este sistema.

Respuesta: μ_a = **4.028** Pa $\cdot$ s, $N'_{Re,\,n} = 27.60$, $N_P = 3.1$, $P = 0.02966$ kW

3.5-S. Propiedades de flujo de un fluido no newtoniano a partir de los datos de un viscosímetro rotatorio. Los siguientes datos se obtuvieron de un fluido usando el viscosímetro rotatorio de Brookfield.

R P M	0.5	1	2.5	5	10	20	50
Momento de torsión (din-cm)	86.2	168.9	402.5	754	1365	2379	4636

El diámetro del árbol rotatorio concéntrico interior es de 25.15 mm, el diámetro del cilindro exterior es de 27.62 mm y la longitud efectiva es de 92.39 mm. Determine las propiedades de flujo de este fluido no newtoniano,

Respuesta: $n = 0.870$

3.6-1. ***Ecuación de continuidad en un cilindro.*** Un fluido de densidad constante ρ fluye en la dirección z por un tubo circular de simetría axial. La dirección radial se designa como r.

a) Usando un balance de recinto cilíndrico con dimensiones *dr* y *dz*, deduzca la ecuación de continuidad del sistema.

b) Use la ecuación de continuidad con coordenadas cilíndricas para deducir la ecuación.

3.6-2. Cambio de coordenadas para la ecuación de continuidad. Empleando la ecuación general de continuidad con coordenadas rectangulares, transfórmela a la ecuación (3.6-27), que corresponde a coordenadas cilíndricas. Aplique las expresiones de la ecuación (3.6-26).

3.7-1. ***Combinación de ecuaciones de continuidad y movimiento.*** Mediante la ecuación de continuidad y las del movimiento para los componentes x, y y z deduzca la expresión de la ecuación (3.7-13).

3.8-1. ***Velocidad promedio en un tubo circular.*** Usando la ecuación (3.8-17) para la velocidad en un tubo circular en función del radio r,

$$v_z = \frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dz}\left(r^2 - r_0^2\right) \qquad \textbf{(3.8-17)}$$

dedúzcase la ecuación (3.8-19) para la velocidad promedio:

$$v_{z\ \text{prom}} = \frac{r_0^2}{8\mu}\frac{dp}{dz} \qquad \textbf{(3.8-19)}$$

3.8-2. Flujo laminar en un anillo cilíndrico. Deduzca todas las ecuaciones dadas en el ejemplo 3.8-4 mostrando todos los pasos. Además, deduzca la ecuación para la velocidad promedio $v_{z\ \text{prom}}$. Por último, integre para obtener la caída de presión de z = 0 para $p = p_0$ a z = L para $p = p_L$.

Respuesta:
$$v_{z\ \text{prom}} = -\frac{1}{8\mu}\frac{dp}{dz}\left[r_2^2 + r_1^2 - \frac{r_2^2 - r_1^2}{\ln(r_2/r_1)}\right]$$

$$v_{z\ \text{prom}} = \frac{p_0 - p_L}{8\mu L}\left[r_2^2 + r_1^2 - \frac{r_2^2 - r_1^2}{\ln(r_2/r_1)}\right]$$

3.8-3. Perfil de velocidades en una torre de paredes mojadas. El fluido en el interior de una torre vertical de paredes mojadas resbala en forma de una película delgada de δ m de espesor, con un flujo laminar en la dirección vertical z. Deduzca la ecuación para el perfil de velocidades v_z en función de x, esto es, la distancia desde la superficie del líquido hasta la pared. El fluido está a una gran distancia de la entrada. Dedúzcanse además, expresiones para $v_{z\ \text{prom}}$ y $v_{z\ \text{máx.}}$ *(Sugerencia:* Cuando x = δ, que corresponde a la pared, v_z = 0. Cuando $x = 0$, que es la superficie del líquido, $v_z = v_{z\ \text{máx}}$.) Muestre todos los pasos.

Respuesta: $v_z = (\rho g\delta^2/2\mu)\,[1 - (x/\delta)^2], v_{z\ \text{prom}} = \rho g\delta^2/3\mu, v_{z\ \text{máx}} = \rho g\delta^2/2\mu$

3.84. Perfil de velocidad en una película descendente y balance de momento lineal diferencial. Un líquido newtoniano fluye como película descendente sobre una superficie plana inclinada. La superficie forma un ángulo β con la vertical. Suponga que en este caso la sección que se considera está lo bastante lejos de ambos extremos como para que no haya efectos sobre el perfil de velocidad. El grosor de la película es de 6. El aparato es parecido al de la figura 2.9-3, pero no es vertical. Haga lo siguiente.

a) Deduzca la ecuación para el perfil de velocidad de v_z como función de x en esta película usando la ecuación de balance de momento lineal diferencial.
b) ¿Cuáles son la velocidad máxima y la velocidad promedio?
c) ¿Cuál es la ecuación para la distribución de flujo específico de momento lineal de τ_{xz}? [Sugerencia: ¿Puede usarse aquí la ecuación (3.7-19)?]

Respuesta: a) $v_z = (\rho g \delta^2 \cos \beta/2\mu)[1 - (x/\delta)^2]$
c) $\tau_{xz} = p_{gx} \cos \beta$

3.8-S. Perfiles de velocidadpara el flujo entreplacasparalelas. En el ejemplo 3.8-2, un fluido fluye entre placas paralelas verticales y una de las placas se mueve. Haga lo siguiente.
a) Determine la velocidad promedio y la velocidad máxima.
b) Haga un bosquejo del perfil de velocidad para tres casos, en los que la superficie se mueve hacia arriba, hacia abajo, y permanece estacionaria.

3.8-6. Conversión de los esfuerzos cortantes en términos del movimento del fluido. Empezando con la componente x del movimiento, la ecuación (3.7-10), que esta en términos de los esfuerzos cortantes, se convierte en la ecuación del movimiento, ecuación (3.7-36), en términos de gradientes de velocidad, para un fluido newtoniano con p y μ constantes. Note que en este caso $(V \cdot \nabla) v = 0$. Ademas, deberá considerar el uso de las ecuaciones (3.7-14) a (3.7-20).

3.8-7. Deducción de la ecuación de continuidad en coordenadas cilíndricas. Mediante un balance de masa sobre un elemento estacionario cuyo volumen es $r\,\Delta r\,\Delta\theta\,\Delta z$, deduzca la ecuación de continuidad en coordenadas cilíndricas.

3.8-8. Flujo entre dos cilindros coaxiales rotatorios. La geometría de dos cilindros coaxiales es igual que en el ejemplo 3.8-5, pero en este caso ambos cilindros están girando: el interior gira con una velocidad anular de ω_1 y el exterior con ω_2. Determine las distribuciones de velocidad y de esfuerzo de corte usando la ecuación diferencial del momento lineal.

Respuesta: $$v_\theta = \frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}\left[r\left(\omega_2 - \frac{\omega_1 R_1^2}{R_2^2}\right) - \frac{R_1^2}{r}(\omega_2 - \omega_1)\right]$$

3.9-l. ***Función de potencial.*** La función de potencial ϕ para una situación de flujo dada es $\phi = C(x^2 - y^2)$, donde C es una constante. Verifique si satisface la ecuación de Laplace. Determine las componentes de la velocidad v_x y v_y.

Respuesta: $v_x = 2Cx$, $v_y = -2Cy$ (C = constante)

3.9-2. Determinación de velocidades a partir de la función de potencial. La función de potencial para el flujo está dada por $\phi = Ax + By$, donde A y B son constantes. Determine las velocidades v_x Y v_y.

3.9-3. Función de corriente y vector de velocidad. El flujo de un fluido en dos dimensiones está dado por la función de corriente $\psi = Bxy$, donde $B = 50\ s^{-1}$ y las unidades de x y y están en centímetros. Determine el valor de v_x, v_y y el vector de velocidad en $x = 1$ cm y $y = 1$ cm.

Respuesta: v = 70.7 cm/s

3.9-4. Función de corriente y función de potencial. Un líquido fluye en forma paralela al eje x. El flujo es uniforme y está representado por $v_x = U$ y $v_y = 0$.
a) Encuentre la función de corriente ψ para este campo de flujo y grafíque las líneas de flujo.
b) Halle la función de potencial y grafíque las líneas de potencial.

Respuesta: a) $\psi = Uy + C$ (C = constante)

3.9-5. Componentes de la velocidad y función de corriente. Un líquido fluye de manera uniforme a un ángulo β con respecto al eje x. Las componentes de su velocidad son $v_x = U \cos \beta$ y $v_y = U$ sen β. Encuentre la función de corriente y la función de potencial.

Respuesta: $\psi = Uy \cos \beta - Ux$ sen $\beta + C$ (C = constante)

3.9-6. Campo de flujo con líneas de flujo concéntricas. El flujo de un fluido que tiene líneas de flujo concéntricas tiene una función de corriente representada por $\psi = 1/(x^2 + y^2)$. Halle las

componentes de la velocidad v_x y v_y. También defina si el flujo es rotatorio, y si lo es, determine la vorticidad, $2\omega_z$.

3.9-7. Función de potencial y campo de velocidad. En el ejemplo 3.9-2 se dieron las componentes de la velocidad. Indique si existe un potencial de velocidad y, si lo hay, determine también ϕ.

Respuesta: $\phi = ax^3/3 \quad axy^2 + C$ (C = constante)

3.9-8. Ecuación de Euler para el movimiento de un fluido ideal. Usando las ecuaciónes de Euler (3.9-2) a (3.9-4) para fluidos ideales con densidad constante y viscosidad cero, obtenga la siguiente ecuación:

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\nabla p + \rho g$$

3.10-I.. Capa límite laminar en una placa plana. Por una placa plana fluye agua a 20 °C y 0.914 m/s. La placa tiene 0.305 m de ancho.

a) Calcule el número de Reynolds a 0.305 m del borde de entrada para determinar si el flujo es laminar
b) Calcule el espesor de la capa límite a x = 0.152 y x = 0.305 m del borde de entrada.
c) Calcule el arrastre total en la placa de 0.305 m de longitud.

Respuesta: a) $N_{Re,\,L} = 2.77 \times 10^5$, b) $\delta = 0.0029$ m cuando x = 0.305 m

3.10-2. ***Flujo de aire en una placa.*** Por una placa plana fluye aire a 294.3 K y 6.1 m/s. Calcule el espesor de la capa límite a una distancia de 0.3 m del borde de entrada y el arrastre total para una placa de 0.3 m de ancho.

3.10-3. ***Flujo de capa límite por una placa plana.*** Por una placa plana fluye agua a 293 K y 0.5 m/s. Procédase a lo siguiente:

a) Calcule el espesor de la capa límite en metros en un punto situado a 0.1 m del borde de entrada.
b) Calcule el esfuerzo cortante en el punto τ_0 en la misma localización. Calcule también el coeficiente total de retardo.

3.104. ***Punto de transición de una capa límite turbulenta.*** Por una placa plana y lisa fluye aire a 101.3 kPa y 293 K a 100 pie/s. La turbulencia en la corriente de aire es tal que la transición de capa límite laminar a capa límite turbulenta se presenta cuando $N_{Re,\,L} = 5 \times 10^5$.

a) Calculese la distancia al borde de entrada donde se verifica la transición.
b) Calculese el espesor δ de la capa límite a 0.5 pie y 3.0 pies del borde de entrada. Calculese también el coeficiente de arrastre para ambas distancias, *L = 0.5 y 3.0* pies.

3.11-1. ***Análisis dimensional para el flujo que pasa por un cuerpo.*** Un fluido fluye por la parte externa de un cuerpo sólido. La fuerza F que se desarrolla sobre el cuerpo es una función de la velocidad del fluido v, de la densidad del fluido p, de la viscosidad del fluido μ y de la dimensión L del cuerpo. Obtenga por análisis dimensional los grupos adimensionales formados a partir de las variables señaladas. (Nota: Use el sistema de unidades M, L y t. Las unidades de F son ML/t^2. Seleccione v, p y L como el núcleo de variables.)

Respuesta: $\pi_1 = (F/L^2)/\rho v^2$, $\pi_2 = \mu/Lv\rho$

3.11-2. ***Análisis dimensional para la formación de burbujas.*** Se va a usar el análisis dimensional para correlacionar los datos del tamaño de burbuja con las propiedades del líquido al formarse burbujas de gas cuando un gas sale por un pequeño orificio por debajo de la superficie del líquido. Suponga que las variables significativas son el diámetro de la burbuja D, el diámetro del orificio d, la densidad del líquido p, la tensión superficial σ en N/m, la viscosidad del líquido μ, y g. Elija d, p y g como las variables centrales.

Respuesta: $\pi_1 = D/d$, $\pi_2 = \sigma/\rho d^2 g$, $\pi_3 = \mu^2/\rho^2 d^3 g$

REFERENCIAS

(A1) ALLIS **CHALMERS** MFG. Co. *Bull.*, 1659.

(A2) Asociación Americana de Gas, "Orifice Metering of Natural Gas", *Gas Measurement Rept.* 3. Nueva York, 1955.

(B1) **BENNETT, C. O., y MYERS, J. E.** *Momentum, Heat, and Mass Transfer.* **3a.** ed. **Nueva York:** McGraw-Hill, Book Company, 1982.

(B2) BIRD, R. B., **STEWART,** W. E. y **LIGHTFOOT,** E. *N. Transport Phenomena.* Nueva York: John Wiley & Sons, Inc., 1960.

033) **BATES,** R. L., **FONDY,** P. L. y **CORPSTEIN, R. R.** *I.E. C. Proc. Des. Dev., 2, 3* **10** (1963).

(B4) BROWN, *G. G.*, et al. *Unit Operations.* Nueva York: John Wiley & Sons, Inc., 1950.

(B5) BIGGS, R. D., *A.I.Ch.E.J., 9, 636* (1963)

(C1) **CHARM,** *S.* E. *The Fundamentals of Food Engineering.* 2a. ed. Westport, Conn.: Avi Publishing Co., Inc., 1971.

(C2) CARMAN, P. *C. Trans. Inst. Chem. Eng. (Londres),* 15, 150 (1937).

(C3) **CALDERBANK,** P. H. En *Mixing: Theory and Practice,* Vol. 2, V. W. Uhl y J. B. Gray (eds.). Nueva York: academic Press, Inc., 1967.

(D1) DREW, T. B. y HOOPES, J. W., Jr. *Advances in Chemical Engineering.* Nueva York: Academic Press, Inc., 1956.

(D2) **DODGE,** D. W., **y** METZNER, A. B. *A.I.Ch.E. J., 5,* 189 (1959).

(E1) ERGUN, *S. Chem. Eng. Progr., 48, 89* (1952)

(F1) FOX, E. A. y GEX, V. E. *A.I.Ch.E.J., 2, 539* (1956).

(G1) **GODLESKI,** E. S. y **SMITH,** J. *C. A.I.Ch.E.J., 8,* 617 (1962).

(H1) HARPER, J. C. **y** EL **SAHRIGI.** *J. Food Sci., 30, 470* (1965).

(H2) Ho, F. C. y **KWONG,** A. *Chem. Eng.,* julio 23, 94 (1973).

(K1) **KUNII,** D. **y LEVENSPIEL,** *0. Fluidization Engineering.* Nueva York: John Wiley & Sons, Inc., 1969.

(K2) **KRIEGER, 1.** M. **y MARON,** *S.* H. *J. Appl. Phys., 25, 72* (1954).

(L1) **LEAMY,** G. H. *Chem. Eng.,* octubre 15, 115 (1973).

(L2) **LEVA,** M., **WEINTRAUB,** M., **GRUMMER,** M., **POLLCHIK,** M. y **STORCH,** H. H. *U. S. Bur. Mines Bull., 504* (1951).

(M1) METZNER, A. B., **FEEHS,** R. H., **RAMOS,** H. L., **OTTO,** R. E. y **TUTHILL,** J. D. *A.I. Ch.E.J., 7,* 3 (1961).

(M2) MCCABE, W. L., **SMITH,** J. C. y **HARRIOTT,** P. *Unit Operations of Chemical Engineerin., 4a.* ed. Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1985.

(M3) METZNER, A. B. *y* **REED,** J. *C. A.I.Ch.E.J.,* 1, 434 (1955).

(M4) **MOHSENIN,** *N. N. Physical Properties of Plant and Animal Materials.* Vol. 1, Parte II. Nueva York: Gordon & Breach, Inc., 1970.

(M5) **MOO-YUNG,** TICHAR, M. **K. y DULLIEN,** F. A. L. *A.I.Ch.E.J.,* 18, 178 (1972).

(M6) MCKELVEY, **J.** M. *Polymer Processing.* Nueva York: John Wiley & Sons, Inc., 1962.

(N1) **NORWOOD,** K. W. y **METZNER,** A. B. *A.I.Ch.E.J., 6, 432* (1960).

(P1) **PERRY, R. W. y GREEN,** D. *Perry's, Chemical Engineer's Handbook,* 6a ed. Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1984.

(P2) **PINCHBECK,** P. H. **y POPPER,** F. *Chem, Eng. Sci., 6, 57* (1956).

(P3) **PATTERSON,** W. I., **CARREAU,** P. J. y **YAP,** *C. Y. A.I.Ch.E.J., 25, 208* (1979).

(P4) **PERRY,** R. H. **y** CHILTON, *C.* H. *Chemical Enginner's Handbook,* 5a. ed. Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1973.

(R1) **RUSHTON,** J. H., **COSTICH,** D. W. y **EVERETT,** H. J. *Chem. Eng. Progr., 46, 395, 467* (1950).

(R2) **RAUTZEN, J. H., COSTICH, D. W. y EVERETT,** H. J. *Chem. Eng.,* octubre 25, 119 (1976).

(S1) STEVENS, W. E. Ph. D. thesis, Universidad de Utah, 1953.
(S2) SKELLAND, A. H. P. *Non-Newtonian Flow and Heat Transfer.* Nueva York: John Wiley & Sons. Inc., 1967.
(S3) STEETER, V. L. *Handbook of Fluid Dynamics.* Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1961.
(S4) SCHLICHTING, H. *Boundary Layer Theory.* Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1955.
(T1) TREYBAL, R. E. *Liquid Extraction* 2a. ed. Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1953.
(T2) TREYBAL, R. E. *Mass Transfer Operations.* 3a. ed. Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1980.
(U1) UHL, V. W. *y* GRAY, J. B. (eds.). *Mixting: Theory and Practice.* Vol. 1. Nueva York: Academic, 1969.
(W1) WEISMAN, J. y EFFERDING, L. E. *A.I.Ch.E.J., 6,* 419 (1960).
(W2) WINNING, M. D. M. Sc. thesis, Universidad de Alberta, 1948.
(W3) WALTERS, K. *Rheometry.* Londres: Chapman & Hall Ltd., 1975.
(W4) WEN, *C. Y. y* YU, *Y.* H. *A.I.Ch.E.J.,* **12, 610** (1966).
(W5) WILHELM, R. H. y KWAUK, M. *Chem. Eng. Progr., 44,* 201 (1948).
(W6) WELTY, J. R., WICKS, C. E. y WILSON, R. E. *Fundamentals of Momentums, Heat and, Mass Transfer,* 3a. ed. Nueva York: John Wiley & Sons, 1984.
(Z1) ZLOKARNIK, M. y JUDAT, H. *Chem. Eng. Tech., 39,* 1163 (1967).

CAPÍTULO 4

Principios de transferencia de calor en estado estacionario

4.1 INTRODUCIÓN Y MECANISMOS DE LA TRANSFERENCIA DE CALOR

4.1A Introdución a la transferencia de calor en estado estacionario

La transferencia de energía en forma de calor es muy común en muchos procesos químicos y de otros tipos. La transferencia de calor suele ir acompañada de otras operaciones unitarias, tales como el secado de maderas o alimentos, la destilación de alcohol, la quema de combustible y la evaporación. La transferencia de calor se verifica debido a la fuerza impulsora debido a una diferencia de temperatura por la cual el calor fluye de la región de alta temperatura a la de temperatura más baja.

En la sección 2.3 dedujimos una ecuación para un balance de propiedades generales de momento lineal, energía térmica o masa en estado no estacionario escribiendo la ecuación (2.3-7). Si escribimos una ecuación semejante pero específica para la transferencia de calor,

$$\begin{pmatrix}\text{velocidad de}\\ \text{entrada de calor}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\text{velocidad de}\\ \text{generacióndecalor}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{velocidad de}\\ \text{salida de calor}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\text{velocidad de}\\ \text{acumulación de calor}\end{pmatrix} \quad \textbf{(4.1-1)}$$

Si suponemos que la transferencia de calor ocurre solamente por conducción, podemos reescribir la ecuación (2.3-14), que es la *ley de Fourier,* como

$$\frac{q_x}{A} = -k\frac{dT}{dx} \tag{4.1-2}$$

Si hacemos un balance de calor de estado no estacionario para la dirección x, sólo sobre el elemento de volumen o volumen de control de la figura 4.1-1, y si utilizamos las ecuaciones (4. l-l) y (4.1-2) y consideramos que el área de corte transversal es $A\ \text{m}^2$, obtenemos

$$q_x|_x + \dot{q}(\Delta x \cdot A) = q_x|_{x+\Delta x} + \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}(\Delta x \,.\, A) \tag{4.1-3}$$

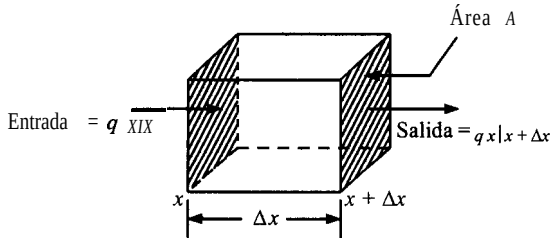


FIGURA 4.1-I. *Balance de transferencia de calor en estado no estacionario para un volumen de control.*

donde $\dot{q}$ es la cantidad de calor generado por volumen unitario. Podemos suponer que no hay generación de calor y también que hay una transferencia de calor en estado estacionario, en el cual la velocidad de acumulación es cero, y entonces la ecuación (4.1-3) se convierte en

$$q_{x|x} = q_{x|x + \Delta x} \tag{4.1-4}$$

Esto significa que la velocidad de entrada de calor por conducción = la velocidad de salida de calor por conducción; esto es, q_x es constante en el tiempo para la transferencia de calor en estado estacionario.

En este capítulo nos interesa el volumen de control, cuya velocidad de acumulación de calor es cero y tenemos transferencia de calor en estado estacionario. Por consiguiente, la velocidad de transferencia de calor es constante en lo que respecta al tiempo y las temperaturas de los diversos puntos del sistema no varían con el tiempo. Para resolver problemas de transferencia de calor en estado estacionario, es necesario integrar diversas expresiones mecanísticas en forma de ecuaciones diferenciales, tales como la ley de Fourier, para las diferentes formas de transferencia de calor. En este capítulo se obtendrán las expresiones para el perfil de temperaturas y el flujo específico de calor.

En el capítulo 5 se usará nuevamente la expresión de conservación de la energía, ecuaciones (2.7-2) y (4.1-3), para los casos en los que la velocidad de acumulación no es cero y hay una transferencia de calor en estado no estacionario. Se empleará la expresión mecanística de la ley de Fourier en forma de ecuación diferencial parcial, para aplicarla a aquellas situaciones en las que las temperaturas de los diversos puntos y la transferencia de calor cambian con respecto al tiempo. En la sección 5.6 se deducirá una ecuación diferencial general de los cambios de energía, que se integrará para varios casos específicos, con el objeto de determinar el perfil de temperaturas y el flujo específico de calor.

4.1B Mecanismos básicos de transferencia de calor

La transferencia de calor puede verificarse por medio de uno o más de los tres mecanismos de transferencia: conducción, convección o radiación.

1. Conducción. Por este mecanismo, el calor puede ser conducido a través de sólidos, líquidos y gases. La conducción se verifica mediante la transferencia de energía cinética entre moléculas adyacentes. En un gas las moléculas "más calientes", que tienen más energía y movimiento, se encargan de impartir energía a moléculas colindantes que están a niveles energéticos más bajos. Este tipo de transferencia siempre está presente, en mayor o menor grado, en sólidos, líquidos y gases en los que existe un gradiente de temperatura. En la conducción la energía también se transfiere por medio de electrones "libres", un proceso muy importante en los sólidos metálicos. Entre los ejemplos en los que la transferencia se verifica ante todo por conducción, se cuentan la transferencia a través de paredes o intercambiadores de una nevera, el tratamiento térmico en el forjado de acero, la congelación del suelo durante el invierno, etcétera.

2. *Convección.* La transferencia de calor por convección implica el transporte de calor en un volumen y la mezcla de elementos macroscópicos de porciones calientes y frías de un gas o un líquido. Además, con frecuencia incluye también el intercambio de energía entre una superficie sólida y un fluido. Conviene aclarar que hay una diferencia entre la transferencia de calor por convección forzada en la que se provoca el flujo de un fluido sobre una superficie sólida por medio de una bomba, un ventilador, u otro dispositivo mecánico y la convección libre o natural, en la cual un fluido más caliente o más frío que está en contacto con la superficie sólida causa una circulación debido a la diferencia de densidades que resulta del gradiente de temperaturas en el fluido. Entre los ejemplos de transferencia de calor por convección puede citarse la pérdida de calor en el radiador de un automóvil (un ventilador hace circular aire), la cocción de alimentos en un recipiente que se agita, el enfriamiento de una taza de café caliente al soplar en su superficie, etcétera.

3. Radiación. La radiación difiere de la conducción y la convección en cuanto a que no se requiere un medio ñsico para la transferencia. La radiación es la transferencia de energía a través del espacio por medio de ondas electromagnéticas, de manera similar a las ondas electromagnéticas que propagan y transfieren la luz. La transferencia radiante de calor se rige por las mismas leyes que dictan el comportamiento de la transferencia de luz. Los sólidos y los líquidos tienden a absorber la radiación que está siendo transferida a través de ellos, por lo que la radiación es más importante en la trasferencia a través del espacio o de gases. El ejemplo de radiación más ilustrativo es el transporte de calor del Sol a la Tierra. Otros ejemplos son la cocción de alimentos cuando se hacen pasar bajo calentadores eléctricos al rojo, el calentamiento de fluidos en serpentines dentro de un horno de combustión, etcétera.

4.1C Ley de Fourier para la conducción de calor

Los tres tipos principales de procesos de velocidad de transferencia -transferencia de momento lineal, transferencia de calor y transferencia de masa- están caracterizados en su aspecto más fundamental por el mismo tipo de ecuación básica (la transferencia de corriente eléctrica también puede incluirse en esta categoría):

$$\text{velocidad de un proceso de transferencia} = \frac{\text{fuerza impulsora}}{\text{resistencia}} \qquad \textbf{(2.3-l)}$$

Esta igualdad establece un principio que ya conocíamos de manera intuitiva: para que se pueda transferir una propiedad como el calor o la masa, es necesario que exista una fuerza impulsora que contrarreste la resistencia.

La transferencia de calor por conducción también obedece esta ecuación básica y se expresa como la ley de Fourier para la conducción de calor en fluidos y sólidos.

$$\frac{q_x}{A} = -k\frac{dT}{dx} \qquad (4.1\text{-}2)$$

donde q_x es la velocidad de transferencia de calor en la dirección x, en watts (W), A *es* el área de corte transversal normal a la dirección del flujo de calor en m^2, í"es la temperatura en K, x la distancia en m y k es la conductividad térmica en W/m · K en el sistema SI. La cantidad q_x/A se llama flujo específico (flux) de calor y se expresa en W/m^2. La cantidad dT/dx es el gradiente de temperatura en la dirección x. El signo negativo de la ecuación (4.1-2) se incluye debido a que si el flujo de calor es positivo en determinado sentido, la temperatura disminuye en ese mismo sentido.

La ecuación 4.1-2 también puede expresarse en unidades cgs con q_x en cal/s, A en cm^2, k en cal/s . °C· cm, *Ten* °C y x en cm. En el sistema inglés, q_x se expresa en btu/h, A en pie^2, *Ten* "F, x en pie, k en btu/h · °F . pie y q_x/A en btu/h . pie^2. De acuerdo con el apéndice A.l, los factores de conversión para la conductividad térmica son

$$1 \text{ btu/h} \cdot \text{pie} \cdot {}^\circ\text{F} = 4.1365 \times 10^{-3} \text{ cal/s} \cdot \text{cm} \cdot {}^\circ\text{C} \tag{4.1-5}$$

$$1 \text{ btu/h} \cdot \text{pie} \cdot {}^\circ\text{F} = 1.73073 \text{ W/m} \cdot \text{K} \tag{4.1-6}$$

Para el flujo específico de calor y la potencia,

$$1 \text{ btu/h} \cdot \text{pie}^2 = 3.1546 \text{ W/m}^2 \tag{4.1-7}$$

$$1 \text{ btu/h} = 0.29307 \text{ W} \tag{4.1-8}$$

La ley de Fourier, ecuación (4.1-2), puede integrarse para el caso de transferencia de calor en estado estacionario a través de una pared plana con área de corte transversal constante A, donde la temperatura interior en el punto 1 es T_1 y T_2 es la temperatura del punto 2 a una distancia de $x_2 - x_1$ m. Reordenando la ecuación (4.1-2),

$$\frac{q_x}{A}\int_{x_1}^{x_2} dx = -k\int_{T_1}^{T_2} dT \tag{4.1-9}$$

Se integra, suponiendo que k es constante y no varía con temperatura, y eliminando por conveniencia el subíndice x de q_x,

$$\frac{q}{A} = \frac{k}{x_2 - x_1}(T_1 - T_2) \tag{4.1-10}$$

EJEMPLO 4.1-I. Pérdida de calor a través de una pared con aislamiento

Calcule la pérdida de calor por m^2 de área de superficie para una pared constituida por una plancha de fibra aislante de 25.4 mm de espesor, cuya temperatura interior es de 352.7 K y la exterior de 297.1 K.

Solución: Con base en el apéndice A.3, laconductividad térmica de la fibra aislante es 0.048 W/m . K. El espesor es $x_2 - x_1 = 0.0254$ m. Sustituyendo en la ecuación (4.1-10),

$$\frac{q}{A} = \frac{k}{x_2 - x_1}(T_1 - T_2) = \frac{0.048}{0.0254}(352 - 297.1)$$

$$= 105.1 \text{ W/m}^2$$

$$= \frac{1}{(3.1546 \text{W/m}^2)(\text{btu/h} \cdot \text{pie}^2)} = 33.30 \text{ btu/h} \cdot \text{pie}^2$$

4.1D Conductividad térmica

La expresión de definición de la conductividad térmica es la ecuación (4.1-2), y las mediciones experimentales de las conductividades térmicas de diversos materiales, se basan en esta definición.

En la tabla 4.1-1 se agrupan algunas conductividades térmicas de materiales como base de comparación. En el apéndice A.3 se incluyen mayores datos para materiales orgánicos e inogánicos y en el A.4, para materiales biológicos. Obsérvese en la tabla 4.1-1 que los gases tienen valores de conductividad térmica bastante bajos, los líquidos tienen valores intermedios y los metales sólidos tienen valores muy altos.

1. Gases. El mecanismo de conducción térmica de los gases es bastante simple. Las moléculas poseen un movimiento continuo y desordenado y chocan entre sí intercambiando energía y momento lineal. Si una molécula se desplaza de una región de temperatura elevada a otra de temperatura inferior, transporta energía cinética a esa región y la cede al chocar con moléculas de baja energía. Puesto que las moléculas se mueven con más rapidez cuanto menor es su tamaño, los gases como el hidrógeno tienen conductividades térmicas más elevadas, como lo señala la tabla 4.1-1.

Las teorías que se explican en la bibliografía (R1) con respecto a la predicción de conductividades térmicas de gases, son bastantes precisas. La conductividad térmica aumenta aproximadamente según la raíz cuadrada de la temperatura absoluta y es independiente de la presión por lo menos hasta algunas atmósferas. Sin embargo, a presión muy baja (vacío) la conductividad térmica tiende a cero.

2. Líquidos. El mecanismo físico de conducción de energía en los líquidos es bastante similar al de los gases, ya que las moléculas de energía más alta chocan con las de energía menor. Sin embargo, las moléculas de los líquidos están mucho más juntas entre sí y los campos de fuerza moleculares ejercen un efecto considerable sobre el intercambio de energía. Puesto que no existe una teoría molecular adecuada para los líquidos, la mayoría de las correlaciones para predecir sus conductividades son de tipo empírico. Reid y Sherwood (R1) han estudiado esto en forma detallada. La conductividad térmica de los líquidos varía de manera moderada con la temperatura, variación que casi siempre puede expresarse con una función lineal,

$$k = a + bT \tag{4.1-11}$$

donde a y b son constantes empíricas. Las conductividades térmicas de los líquidos son esencialmente independientes de la presión.

El agua tiene una conductividad térmica elevada en comparación con los líquidos orgánicos como el benceno. Tal como indica la tabla 4. l-l, la conductividad térmica de la mayoría de los alimentos sin congelar, como la leche descremada, o el puré de manzana que contiene grandes cantidades de agua, tienen conductividades térmicas cercanas a la del agua pura.

3. *Sólidos.* Las conductividades térmicas de los sólidos homogéneos son muy variables, como indica la escala de valores de la tabla 4. 1- 1. Los sólidos metálicos como el cobre y el aluminio tienen valores muy elevados, mientras que algunos materiales aislantes no metálicos, del tipo de la lana mineral y el corcho, tienen conductividades muy bajas.

La conducción de calor o energía a través de los sólidos se verifica mediante dos mecanismos. En el primero, que se aplica principalmente a los sólidos metálicos, el calor, al igual que la electricidad, es conducido por los electrones libres que se mueven en la red estructural del metal. En el segundo, que existe en todos los sólidos, el calor es conducido por la transmisión de energía vibracional entre átomos adyacentes.

TABLA 4.1-I. *Conductividades térmicas de algunos materiales a 101.325 kPa (1 atm) de presión (k se da en W/m K)*

Sustancia	Temp. (K)	k	Ref.	Sustancias	Temp. (K)	k	Ref.
Gases				Sólidos			
Aire	273	0.0242	(K2)	Hielo	273	2.25	(C1)
	373	0.0316		Ladrillo de arcilla	473	1.00	(Pl)
H_2	273	0.167	(K2)	Papel	–	0.130	(M1)
n-Butano	273	0.0135	(P2)	Caucho duro	273	0.151	(M1)
Líquidos				Corcho prensado	303	0.043	(MI)
Agua	273	0.569	(P1)	Asbesto	311	0.168	(M1)
	366	0.680		Lana mineral	266	0.029	(K1)
Benceno	303	0.159	(P1)	Acero	291	45.3	(P1)
	333	0.151			373	45	
Materiales biológicos y alimentos				Cobre	273	388	(P1)
					373	377	
Aceite de Oliva	293	0.168	(P1)	Aluminio	273	202	(P1)
	373	0.164					
Carne de res magra	263	1.35	(C1)				
Leche descremada	275	0.538	(C1)				
Puré de manzana	296	0.692	(C1)				
Salmón	277	0.502	(C1)				
	248	1.30					

Las conductividades térmicas de los materiales aislantes, como la lana mineral, son similares a la del aire, pues contienen grandes cantidades de aire atrapado en espacios vacíos. Los superaislantes que se destinan a materiales criogénicos como el hidrógeno líquido, están formados por capas múltiples de materiales altamente reflectivos, separados por espacios aislantes al vacío. Los valores de la conductividad térmica son, entonces, bastante más bajos que para el aire.

El hielo tiene una conductividad térmica (Tabla 4.1-1) mucho mayor que la del agua. Por consiguiente, las conductividades térmicas de alimentos congelados que se incluyen en la tabla 4.1-1 son bastante más elevadas que las de los mismos alimentos sin congelar.

4.1E Coeficiente convectivo de transferencia de calor

Es un hecho muy conocido que un material se enfría con mucha mayor rapidez cuando se sopla sobre él o se le aplica una corriente de aire. Cuando el fluido que rodea a la superficie del sólido tiene un movimiento convectivo natural o forzado, la velocidad de transferencia de calor del sólido al fluido (o viceversa) se expresa mediante la siguiente ecuación:

$$q = hA\,(T_w - T_f) \tag{4.1-12}$$

donde q es la velocidad de transferencia de calor en W, A es el área en m^2, T_w es la temperatura de la superficie del sólido en K, $Tfes$ la temperatura promedio o general del fluido en K y h es el coeficiente convectivo de transferencia de calor en W/m^2 . K. En unidades del sistema inglés, h se da en btuk . pie^2 · °F.

El coeficiente h es una función de la geometría del sistema, de las propiedades del fluido, de la velocidad del flujo y de la diferencia de temperaturas. En muchos casos existen correlaciones empíricas

para predecir este coeficiente, pues es muy común que no pueda determinarse por medios teóricos. Puesto que sabemos que cuando un fluido fluye por una superficie hay una capa delgada casi estacionaria adyacente a la pared que presenta la mayor parte de la resistencia a la transferencia de calor, a menudo h se llama *coeficiente de película.*

En la tabla 4.1-2 se muestran valores de h de diversos órdenes de magnitud para diferentes mecanismos de convección libre o natural, convección forzada, ebullición y condensación. El agua tiene los coeficientes de transferencia de calor de valor más alto.

Para transformar el coeficiente de transferencia de calor h de unidades del sistema inglés a SI,

$$1 \text{ btu/h} \cdot \text{pie}^2 \cdot {}^\circ\text{F} = 5.6783 \text{ w} / \text{m}^2 \cdot \text{K}$$

TABLA 4.1-2. *Magnitudes aproximadas de algunos coeficientes de transferencia de calor*

Mecanismos	*Intervalo de valores de h*	
	btu/h pie² °F	*W/m² K*
Condensación de vapor	1000-5000	5700-28000
Condensación de líquidos orgánicos	200-500	1100-2800
Líquidosen ebullición	300-5000	1700-28000
Agua en movimiento	50-3000	280-I 7000
Hidrocarburos en movimiento	1 O-300	055-I 700
Aire en reposo	0.5–4	02.8-23
Corrientes de aire	2-10	ll .3-55

4.2 TRANSFERENCIA DE CALOR POR CONDUCCIÓN

4.2A Conducción a través de una placa plana o una pared

En esta sección se usará la ley de Fourier, ecuación (4.1-2), para obtener expresiones de la conducción de calor unidimensional en estado estacionario a través de algunas geometrías simples. Para una placa plana o pared en la que el área de corte transversal A y k para la ecuación (4.1-2) son constantes, se obtuvo la ecuación (4.1-10), que puede escribirse como

$$\frac{q}{A} = \frac{k}{x_2 - x_1}(T_1 - T_2) = \frac{k}{\Delta x}(T_1 - T_2) \tag{4.2-l}$$

Esto se ilustra en la figura 4.2-1, donde $\Delta x = x_2 - x_1$. La ecuación (4.2-l) indica que si T es sustituida por T_2 y x por x_2, la temperatura varia linealmente con la distancia, como ilustra la figura 4.2-lb.

Si la conductividad térmica no es constante, sino que presenta una variación lineal con la temperatura, entonces, al sustituir la ecuación (4. l-l 1) en la (4.2-2) e integrar:

$$\frac{q}{A} = \frac{a + b\dfrac{T_1 + T_2}{2}}{\Delta x}(T_1 - T_2) = \frac{km}{\Delta x}(T_1 - T_2) \tag{4.2-2}$$

donde

$$k_m = a + b\frac{T_1 + T_2}{2} \tag{4.2-3}$$

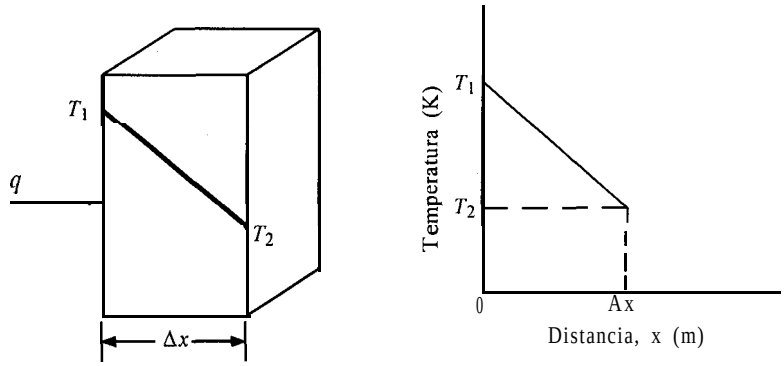


FIGURA *4.2-I. Conducción de calor en una pared plana: a) geometría de la pared, b) gráfica de la temperatura.*

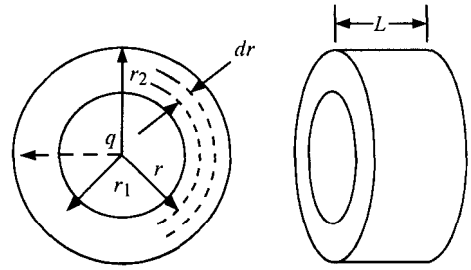


FIGURA *4.2-2. Conducción de calor en un cilindro*

Esto significa que el valor medio de k (esto es, k_m) que debe sustituirse en la ecuación (4.2-2), es el valor que se obtiene con el promedio lineal de T_1 y T_2.

Como se mencionó en la introducción al establecer la ecuación (2.3-1), la velocidad del proceso de transferencia es igual a la fuerza impulsora sobre la resistencia. Ahora, la ecuación (4.2-l) puede escribirse en esta forma:

$$q = \frac{T_1 - T_2}{\Delta x/kA} = \frac{T_1 - T_2}{R} = \frac{\text{fuerza impulsora}}{\text{resistencia}} \qquad (4.2\text{-}4)$$

donde $R = \Delta x/kA$ y corresponde a la resistencia en K/W o h . °F/btu.

4.2B Conducción a través de un cilindro hueco

En muchos casos en las industrias de proceso, el calor se transfiere a través de las paredes de un cilindro de paredes gruesas, esto es, una tubería que puede estar aislada. Considérese el cilindro hueco de la figura 4.2-2, con radio interior r_1, donde la temperatura es T_1; un radio externo r_2 a temperatura T_2 y de longitud L m. Supóngase que hay un flujo radial de calor desde la superficie interior hasta la exterior. Volviendo a escribir la ley de Fourier, ecuación (4.1-2), con la distancia dr en lugar de dx,

$$\frac{q}{A} = -k\frac{dT}{dr} \qquad (4.2\text{-}5)$$

El área de corte transversal normal al flujo de calor es

$$A = 2\pi rL \tag{4.2-6}$$

Al sustituir la ecuación (4.2-6) en la (4.2-5), y reordenar e integrar,

$$\frac{q}{2\pi L}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dT}{dr} = -k\int_{T_1}^{T_2} dT \tag{4.2-7}$$

$$q = k\,\frac{2\pi L}{\ln\left(r_2/r_1\right)}\,(T_1 - T_2) \tag{4.2-8}$$

Multiplicando el numerador y el denominador por $(r_2 - r_1)$,

$$q = kA_{1\,m}\,\frac{T_1 - T_2}{r_2 - r_1} = \frac{T_1 - T_2}{(r_2 - r_1)/(kA_{1\,m})} = \frac{T_1 - T_2}{R} \tag{4.2-9}$$

donde

$$A_{1\,m} = \frac{\left(2\pi Lr_2\right) - \left(2\pi Lr_1\right)}{\ln\left(2\pi Lr_2/2\pi Lr_1\right)} = \frac{A_2 \quad A_1}{\ln\left(A_2/A_1\right)} \tag{4.2-10}$$

$$R = \frac{r_2 - r_1}{kA_{1\,m}} = \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi kL} \tag{4.2-11}$$

La media logarítmica del área es $A_{1\,m}$. En cálculos de ingeniería, cuando $A_2/A_1 < 1.5/1$, la media lineal del área de $(A_1 + A_2)/2$ se diferenciará de la media logarítmica un máximo de 1.5%. En la ecuación (4.2-8), al sustituir r_2 por r y T_2 por T, la temperatura es una función lineal de $\ln r$ en lugar de r, como en el caso de una pared plana. Si la conductividad térmica varía con la temperatura como en la ecuación (4.1 -10), puede demostrarse que el valor medio que debe manejarse en un cilindro también corresponde al de k_m en la ecuación (4.2-3).

EJEMPLO 4.2-l. Longitud de tubo para un serpentín de enfriamiento

Un tubo cilíndrico de caucho duro y paredes gruesas, cuyo radio interior mide 5 mm y el exterior 20 mm, se usa como serpentín de enfriamiento provisional en un baño. Por su interior fluye una corriente rápida de agua fría y la temperatura de la pared interna alcanza 274.9 K, y la temperatura de la superficie exterior es 297.1 K. El serpentín debe extraer del baño un total de 14.65 W (50 btu/h). ¿Cuántos metros de tubo se necesitan?

Solución: De acuerdo con el apéndice A.3, la conductividad térmica a 0 °C (273 K) es k = 0.15 1 W/m . K. Puesto que no se dispone de datos a otras temperaturas, se usará este valor para el intervalo de 274.9 a 297.1 K.

$$r_1 = \frac{5}{1000} = 0.005 \text{ m} \qquad r_2 = \frac{20}{1000} = 0.02 \text{ m}$$

El cálculo se iniciará para una longitud de tubo de 1 .0 m. Despejando las áreas A_1, A_2 y $A_{1\,m}$ en la ecuación (4.2-10),

$$A_1 = 2\pi L r_1 = 2\pi(1.0)(0.005) = 0.0314 \text{ m}^2 \qquad A_2 = 0.1257 \text{ m}^2$$

$$A_{1\,m} = \frac{A_2 - A_1}{\ln(A_2/A_1)} = \frac{0.1257 - 0.0314}{2303 \log (0.1257/0.0314)} = 0.0680 \text{ m}^2$$

Al sustituir en la ecuación (4.2-9) y resolver,

$$q = kA_{1m}\frac{T_1 - T_2}{r_2 - r_1} = 0.151(0.0682)\left(\frac{297.1 - 274.9}{0.02 - 0.005}\right)$$
$$= -15.2 \text{ W } (51.9 \text{ btu/h})$$

El signo negativo indica que el flujo de calor va de r_2 en el exterior a r_1 en el interior. Puesto que una longitud de 1 m elimina 15.2 W, la longitud necesaria es

$$\text{longitud} = \frac{14.65 \text{ W}}{152 \text{ W/m}} = 0.964 \text{ m}$$

Nótese que la conductividad térmica del caucho es bastante pequeña. Casi siempre se usan metales para los serpentines, pues la conductividad térmica de éstos es muy alta. Las resistencias de las películas líquidas son en este caso bastante pequeñas y se desprecian.

4.2C Conducción a través de una esfera hueca

La conducción de calor a través de una esfera hueca es otro caso de conducción unidimensional. Si utilizamos la ley de Fourier para la conductividad térmica constante con la distancia dr donde r es el radio de la esfera,

$$\frac{q}{A} = -k\frac{dT}{dr} \tag{4.2-5}$$

El área de corte transversal normal al flujo de calor es

$$A = 4\pi r^2 \tag{4.2-12}$$

Se sustituye la ecuación (4.2-12) en la (4.2-5), se reordena y se integra para obtener

$$\frac{q}{4\pi}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = -k\int_{T_1}^{T_2} dt \tag{4.2-13}$$

$$q = \frac{4\pi k(T_1 - T_2)}{1/r_1 - 1/r_2} = \frac{T_1 - T_2}{(1/r_1 - 1/r_2)4\pi k} \tag{4.2-14}$$

Puede demostrarse fácilmente que la temperatura varía hiperbólicamente con el radio. (Véase el problema 4.2-5.)

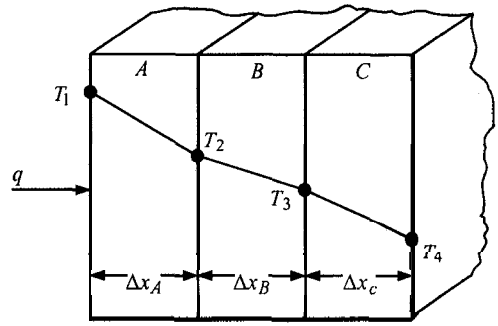


FIGURA 4.3-1. *Flujo de calor a través de una pared de placas múltiples.*

4.3 CONDUCCIÓN A TRAVÉS DE SÓLIDOS EN SERIE

4.3A Paredes planas en serie

En aquellos casos en los que hay una pared de planchas múltiples constituidas por más de un material, como muestra la figura 4.3-1, es útil el siguiente procedimiento: primero, se determinan los perfiles de temperaturas en los tres materiales *A, B* y C. Puesto que el flujo de calor q debe ser el mismo en cada plancha, es posible aplicar la ecuación de Fourier a cada una de ellas:

$$q = \frac{k_A A}{\Delta x_A}(T_1 - T_2) = \frac{k_B A}{\Delta x_B}(T_2 - T_3) = \frac{k_C A}{\Delta x_C}(T_3 - T_4) \tag{4.3-1}$$

Despejándo AT de estas ecuaciones,

$$T_1 - T_2 = q\frac{\Delta x_A}{k_A A} \qquad T_2 - T_3 = q\frac{\Delta x_B}{k_B A} \qquad T_3 - T_4 = q\frac{\Delta x_C}{k_C A} \tag{4.3-2}$$

Al sumar las ecuaciones para $T_1 - T_2$, $T_2 - T_3$ y $T_3 - T_4$ se eliminan las temperaturas internas T_2 y T_3 y la ecuación ya reordenada es

$$q = \frac{T_1 - T_4}{\Delta x_A/(k_A A) + \Delta x_B/(k_B A) + \Delta x_C/(k_C A)} = \frac{T_1 - T_4}{R_A + R_B + R_C} \tag{4.3-3}$$

donde la resistencia $R_A = \Delta x_A/k_A A$; la resistencia es similar para las otras planchas.

Por consiguiente, la ecuación final está en términos de la caída total de temperatura $T_1 - T_4$ y de la resistencia total, $R_A + R_B + R_C$.

EJEMPLO 4.3-1. Flujo de calor a través de la pared aislada de un cuarto frio

Un cuarto de almacenamiento refrigerado se construye con una plancha interna de 12.7 mm de pino, una plancha intermedia de 101.6 mm de corcho prensado y una plancha externa de 76.2 mm de concreto. La temperatura superficial de la pared interna es de 255.4 K y la exterior del concreto es de 297.1 K.

Empleando las conductividades del apéndice A.3 en unidades SI: 0.15 1 para el pino; 0.0433 para el corcho prensado; y 0.762 para el concreto, todas en W/m . K. Calcúlese la pérdida de calor en W para 1 m^2, así como la temperatura en la interfaz de la madera y el corcho prensado.

Solución: Si T_1 = 255.4, T_4 = 297.1 K, *A* al pino, *B* al corcho y C al concreto, se obtiene la siguiente tabulación de propiedades y dimensiones:

k_A = 0.151 k_B = 0.0433 k_C = 0.762

Δx_A = 0.0127m

Δx_B = 0.1016 m

Δx_A = 0.0762 m

Las resistencias de los materiales calculadas con la ecuación (4.3-3) para una área *A* de 1 m^2 son:

$$R_A = \frac{(\Delta x_A 0\ 1\ 2\ 7}{0.15\ 1(1)} = 0.0841 \text{ K/W}$$

$$R_B = \frac{\Delta x_B}{k_B A} = \frac{0.1016}{0.0433(1)} = 2.346$$

$$R_A = \frac{\Delta x_C}{k_C A} = \frac{0.0762}{0.762(1)} = 0.100$$

Al sustituir en la ecuación (4.3-3),

$$q = \frac{T_1 - T_4}{R_A + R_B + R_C} = \frac{255.4 - 297.1}{00841 + 2346 + 0.100}$$

$$= \frac{-4L7}{2530} = -16.48 \text{ W } (-56.23 \text{ btu/h})$$

Puesto que la respuesta es negativa, el calor fluye del el exterior al interior.

Para calcular la temperatura T_2 en la interfaz entre el pino y el corcho,

$$q = \frac{T_1 - T_2}{R_A}$$

Al sustituir los valores conocidos y resolver,

$$-16.48 = \frac{255.4 \quad T_2}{0.0841} \text{ y } T_2 = 256.79 \text{ K en la interfase}$$

Existe otro método para calcular T_2 que consiste en aplicar el hecho de que la disminución de temperatura es proporcional a la resistencia.

$$T_1 - T_2 = \frac{R_A}{R_A + R_B + R_C} (T_1 - T_4) \qquad (4.3\text{-}4)$$

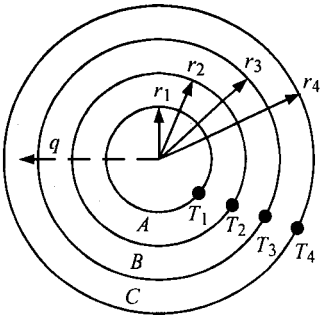


FIGURA *4.3-2. Flujo radial de calor a través de cilindros múltiples en serie.*

Al sustituir,

$$255.4 - T_2 = \frac{0.0841(255.4 - 297.1)}{2.530} = -1.39\text{K}$$

Por consiguiente, T_2 = 256.79 K, como se calculó antes.

4.3B Cilindros de capas múltiples

La transferencia de calor en las industrias de proceso suele ocurrir a través de cilindros de capas múltiples, como sucede cuando se transfiere calor a través de las paredes de una tubería aislada. La figura 4.3-2 muestra una tubería con dos capas de aislamiento a su alrededor; es decir, un total de tres cilindros concéntricos. La disminución de temperatura es $T_1 \quad T_2$ a través del material A, $T_2 - T_3$, a través de B y $T_3 - T_4$ a través de C.

Evidentemente, la velocidad de transferencia de calor, q, será igual en todas las capas, pues se trata de un estado estacionario. Dada una ecuación similar a la (4.2-9) para cada cilindro concéntrico,

$$q = \frac{T_1 - T_2}{(r_2 - r_1)/(k_A A_{A\,1\text{m}})} = \frac{T_2 - T_3}{(r_3 - r_2)/(k_B A_{B\,1\text{m}})} = \frac{T_3 - T_4}{(r_4 - r_3)/(k_C A_{C\,1\text{m}})} \tag{4.3-5}$$

donde

$$A_{A\,1\text{m}} = \frac{A_2 - A_1}{\ln(A_2/A_1)} \quad A_{B\,1\text{m}} = \frac{A_3 - A_2}{\ln(A_3/A_2)} \quad A_{C\,1\text{m}} = \frac{A_4 - A_3}{\ln(A_4/A_3)} \tag{4.3-6}$$

Con el mismo método para combinar las ecuaciones que se aplicó al problema de las paredes en serie con el objeto de eliminar T_2 y T_3, las expresiones finales son

$$q = \frac{T_1 - T_4}{(r_2 - r_1)/(k_A A_{A\,1\text{m}}) + (r_3 - r_2)/(k_B A_{B\,1\text{m}}) + (r_4 - r_3)/(k_C A_{C\,1\text{m}})} \tag{4.3-7}$$

$$q = \frac{T_1 - T_4}{R_A + R_B + R_C} = \frac{T_1 - T_4}{\sum R} \tag{4.3-8}$$

Por consiguiente, la resistencia general vuelve a ser la suma de las resistencias individuales en serie.

EJEMPLO 4.3-2. Pérdida de calor en una tubería aislada

Un tubo de paredes gruesas de acero inoxidable *(A)* con k = 21.63 W/m . K y dimensiones de 0.0254 m (DI) y 0.0508 m (DE), se recubre con una capa de 0.0254 m de aislante de asbesto (B), k = 0.2423 W/m · K. La temperatura de la pared interna del tubo es 811 K y la de la superficie exterior del aislante es 310.8 K. Para una longitud de 0.305 m (1 .O pie) de tubería, calcule la pérdida de calor y la temperatura en la interfaz entre el metal y el aislante.

Solución: Si T_1 = 811 K, T_2 en la interfaz y T_3 = 310.8 K, las dimensiones son

$$r_1 = \frac{0.0254}{2} = 0.0127 \text{ m} \qquad r_2 = \frac{0.0508}{2} = 0.0254 \text{ m} \qquad r_3 = 0.0508 \text{ m}$$

Las áreas para L = 0.305 m son las siguientes:

$$A_1 = 2\pi L r_1 = 2\pi(0.305)(0.0127) = 0.0243 \text{ m}^2$$
$$A_2 = 2\pi L r_2 = 2\pi(0.305)(0.0254) = 0.0487 \text{ m}^2$$
$$A_3 = 2\pi L r_3 = 2\pi(0.305)(0.0508) = 0.0974 \text{ m}^2$$

Con base en la ecuación (4.3-6), las medias logarítmicas de las áreas para el acero inoxidable *(A)* y el asbesto (B) son

$$A_{A1m} = \frac{A_2 - A_1}{\ln(A_2/A_1)} = \frac{0.0487 - 0.0243}{\ln(0.0487/0.0243)} = 0.0351 \text{ m}^2$$

$$A_{B1m} = \frac{A_3 - A_2}{\ln(A_3/A_2)} = \frac{0.0974 - 0.0487}{\ln(0.0974/0.0487)} = 0.0703 \text{ m}^2$$

De acuerdo con la ecuación (4.3-7), las resistencias son

$$R_A = \frac{r_2 - r_1}{k_A A_{A1m}} = \frac{0.0127}{21.63(0.0351)} = 0.01673 \text{ K/W}$$

$$R_B = \frac{r_3 - r_2}{k_B A_{B,m}} = \frac{0.0254}{0.2423(0.0703)} = 1.491 \text{ K/W}$$

Por lo que la velocidad de trasferencia de calor es

$$q = \frac{T_1 - T_3}{R_A + R_B} = \frac{811 - 310.8}{0.01673 + 1.491} = 331.7 \text{ W } (1132 \text{ btu/h})$$

Para calcular la temperatura T_2,

$$q = \frac{T_1 - T_2}{R_A} \qquad 331.7 = \frac{811 - T_2}{0.01673}$$

Al resolver $811 - T_2$ = 5.5 K y T_2 = 805.5 K. Sólo hay una caída de temperatura pequeña a través de la pared metálica, debido a su alta conductividad térmica.

4.3C Conducción a través de materiales en paralelo

Supónga que dos sólidos planos A y B se colocan uno junto al otro en paralelo, y que la dirección del flujo de calor es perpendicular al plano de la superficie expuesta de cada sólido. Entonces, el flujo total de calor es la suma del flujo de calor a través del sólido A más el que pasa por B. Escribiendo la ecuación de Fourier para cada sólido y sumando,

$$q_T = q_A + q_B = \frac{k_A A_A}{\Delta x_A}(T_1 - T_2) + \frac{k_B A_B}{\Delta x_B}(T_3 - T_4) \qquad \textbf{(4.3-9)}$$

donde q_T es el flujo total de calor, T_1 y T_2 son las temperaturas frontal y posterior del sólido A, T_3 y T_4 las del sólido B.

Si se supone que $T_1 = T_3$ (las mismas temperaturas frontales para A y B) y que $T_2 = T_4$ (temperaturas posteriores iguales),

$$q_T = \frac{T_1 - T_2}{\Delta x_A/k_A A_A + \Delta x_B/k_B A_B} = \left(\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B}\right)(T_1 - T_2) \qquad \textit{(4.3-10)}$$

Un ejemplo sería la pared aislada *(A)* de un horno de ladrillo en el cual hay soleras de refuerzo de acero (B) en paralelo, que penetran en la pared. Aun cuando el área A_B del acero sea pequeña en comparación con el área de ladrillo aislante A_A, la mayor conductividad del metal (que puede ser cientos de veces más elevada que la del ladrillo) podría causar que gran parte del calor se perdiese por conducción en el acero,

Otro ejemplo constituye un método para aumentar la conducción de calor con el objeto de acelerar el secado por congelación de carnes. Las agujas de metal introducidas en la carne congelada conducen el calor con más rapidez hacia el interior de la carne.

Debe mencionarse que algunos casos pueden presentar un flujo de calor bidimensional cuando las conductividades térmicas de los materiales en paralelo son bastante diferentes. En estas condiciones, los resultados obtenidos con la ecuación (4.3-10) serían inexactos.

4.3D Combinación de convección y conducción y coeficientes generales

En muchas situaciones prácticas, no se conocen las temperaturas superficiales (o las condiciones límites en la superficie), pero se sabe que ambos lados de las superficies sólidas están en contacto con un fluido. Considérese la pared plana de la figura 4.3-3a con un fluido caliente a temperatura T_1 en la superficie interior y un fluido frío a T_4 en la superficie exterior. El coeficiente convectivo externo es h_0 W/m^2 · K y en el interior es h_i. (En la sección 4.4 de este mismo capítulo se analizarán los métodos para predecir el valor convectivo de h).

Las ecuaciones (4.1-12) y (4.3-l) proporcionan la velocidad de transferencia de calor

$$q = h_i A(T_1 - T_2) = \frac{k_A A}{\Delta x_A}(T_2 - T_3) = h_0 A(T_3 - T_4) \qquad \textbf{(4.3-l 1)}$$

Al expresar $1/h_iA$, $\Delta x_A/k_AA$ y $1/h_{0A}$ como resistencias y combinando las ecuaciones como *antes,*

$$q = \frac{T_1 - T_4}{1/h_i A + \Delta x_A/k_A A + 1/h_0 A} = \frac{T_1 - T_4}{\sum R} \qquad \textbf{(4.3-12)}$$

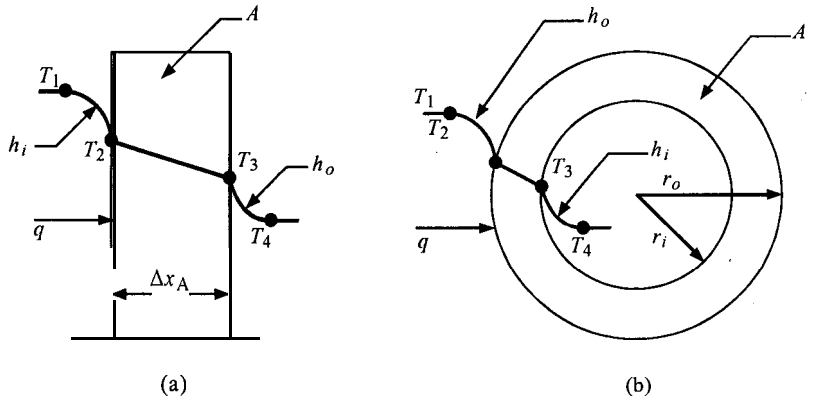


FIGURA *4.3-3. Flujo de calor con límites convectivos:* ***a) pared plana,*** *b)* ***pared*** *cilíndrica.*

La transferencia total de calor por combinación de conducción y convección suele expresarse en términos de un coeficiente total de transferencia de calor, U, que se define como

$$q = UA\Delta T_{\text{total}} \tag{4.3-13}$$

donde $\Delta T_{\text{total}} = T_1 \quad T_4$ *y* U *es*

$$q = \frac{T_1 - T_4}{1/h_i + \Delta x_A/k_A + 1/h_0} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}} \left(\frac{\text{btu}}{\text{h} \cdot \text{pie}^{2.\circ}\text{F}} \right) \tag{4.3-14}$$

Otra aplicación importante es la transferencia de calor desde un fluido en el exterior de un cilindro que pasa a través de la pared hacia el fluido que está en el interior, situación muy frecuente en los intercambiadores de calor. En la figura 4.3-3b se ilustra este caso.

Usando el procedimiento anterior, la velocidad total de transferencia de calor a través del cilindro es

$$q = \frac{T_1 - T_4}{1/h_i A_i + (r_0 - r_i)/k_A A_{A\,1\,\text{m}} + 1/h_0 A_0} = \frac{T_1 - T_4}{\sum R} \tag{4.3-15}$$

donde A_i representa a $2\pi L r_i$, esto es, el área interior del tubo metálico; $A_{A\,1\,\text{m}}$ es la media logarítmica del área del tubo metálico; y A_0 es el área exterior.

El coeficiente total de transferencia de calor Upara el cilindro puede basarse en el área interior A_i o en la exterior A_0 del tubo. De esta manera,

$$q = U_i A_i (T_1 - T_4) = U_0 A_0 (T_1 \quad T_4) = \frac{T_1 - T_4}{\sum R} \tag{4.3-16}$$

$$U_i = \frac{1}{1/h_i + (r_0 - r_i) A_i / k_A A_{A\,1\,\text{m}} + A_i / A_0 h_0} \tag{4.3-17}$$

$$U_0 = \frac{1}{A_0 / A_i h_i + (r_0 - r_i) A_0 / k_A A_{A\,1\,\text{m}} + 1/h_0} \tag{4.3-18}$$

EJEMPLO 4.3-3. Pérdidas de calor por convección y conducción y U total

Considere una corriente de vapor saturado a 267 °F que fluye en el interior de una tubería de acero de $\frac{3}{4}$ pulg con un DI de 0.824 pulg. y DE de 1.050 pulg. La tubería está aislada con 1.5 pulg de aislamiento en el exterior. El coeficiente convectivo para la superficie interna de la tubería en contacto con el vapor se estima como $h_i = 1000$ btu/h . pie^2 . °F, mientras que la estimación del coeficiente convectivo en el exterior de la envoltura es de $h_0 = 2$ btu/ h . pie^2 . "F. La conductividad media del metal es de 45 W/m . k o 26 btu/h . pie . °F y 0.064 W/m . K o 0.037 btuk . pie . °F para el aislante.

a) Calcule la pérdida de calor para 1 pie de tubería usando resistencias, cuando la temperatura del aire es de 80 "F.
b) Repita el cálculo usando el U_i total basado en el área interna A_i.

Solución: Si r_i en el radio interno de la tubería de acero, r_1 el radio externo y r_0 el radio externo de la envoltura, entonces,

$$r_l = \frac{0.412}{12} \text{ pie} \qquad r_i = \frac{0525}{12} \text{pie} \qquad r_0 = \frac{2.025}{12} \text{pie}$$

Para 1 pie de tubería, las áreas son las siguientes:

$$A_i = 2\pi L r_i = 2\pi(1)\left(\frac{0.412}{12}\right) = 0.2157 \text{ pie}^2$$

$$A_1 = 2\pi L r_1 = 2\pi(1)\left(\frac{0525}{12}\right) = 0.2750 \text{ pie}^2$$

$$A_0 = 2\pi L r_0 = 2\pi(1) = \left(\frac{2.025}{12}\right) = 1.060 \text{ pie}^2$$

Con base en la ecuación (4.3-6), las medias logarítmicas de las áreas para la tubería de acero (A) y la envoltura (B) son

$$A_{A\ 1\ m} = \frac{A_1 - A_i}{\ln\left(A_1/A_i\right)} = \frac{02750 - 02157}{\ln(1.060/0.2157)} = 0.245$$

$$A_{B\ 1\ m} = \frac{A_0 - A_1}{\ln\left(A_0/A_1\right)} = \frac{LO60 - 02750}{\ln(1.060/0.2750)} = 0.583$$

Las diversas resistencias a partir de la ecuación (4.3-15) son éstas:

$$R_i = \frac{1}{h_i A_i} = \frac{1}{1000(0.2157)} = 0.00464$$

$$R_A = \frac{r_1 - r_i}{k_A A_{A\ 1\ m}} = \frac{(0525 - 0.412)/12}{26(0.245)} = 0.00148$$

$$R_B = \frac{r_0 - r_i}{k_B A_{B\ 1\ m}} = \frac{(2.025 - 0525)/12}{0.037(0583)} = 5.80$$

$$R_o = \frac{1}{h_0 A_0} = \frac{1}{2(1.060)} = 0.472$$

Mediante una expresión similar a la ecuación (4.3-15),

$$q = \frac{267 - 80}{R_i + R_A + R_B + R_0 = 0.00464 + 0.00148 + 580 + 0.472} \qquad \textbf{(4.3-19)}$$

$$= \frac{267 - 80}{6278} = 29.8 \text{ btu/h}$$

Para el inciso b), la relación entre U_i y q corresponde a la ecuación (4.3-l 6), que puede igualarse a la ecuación (4.3- 19):

$$q = U_i A_i (T_i - T_0) = \frac{T_i - T_0}{\sum R} \qquad \textbf{(4.3-20)}$$

Al despejar U_i

$$U_i = \frac{1}{A_i \sum R} \qquad \textbf{(4.3-21)}$$

Al sustituir los valores conocidos,

$$U_i = \frac{1}{02157(6278)} = 0.738 \frac{\text{btu}}{\text{h} \cdot \text{pie}^2 \cdot {}^\circ\text{F}}$$

Entonces, para calcular q,

$$q = U_i A_i (T_i \quad T_0) = 0.738(0.2157)(267 \quad 80) = 29.8 \text{ btu/h } (8.73 \text{ W})$$

4.3E Conducción con generación interna de calor

En algunos sistemas se genera calor en el interior del medio conductor; esto es, hay una fuente de calor distribuida uniformemente. Algunos casos de este tipo son los calentadores de resistencia eléctrica y las varillas de combustible nuclear. Además, cuando se verifica en el medio una reacción química de manera uniforme, hay un desprendimiento de calor de reacción. En los campos agrícolas y de saneamiento, la composta y los desperdicios dan lugar a actividad biológica que produce calor.

Otros ejemplos importantes son el procesamiento de alimentos donde hay calor por la respiración de frutas y vegetales frescos. El calor generado puede llegar a ser de 0.3 hasta 0.6 W/kg o 0.5 a 1 btu/h . $1b_m$.

1. Generación de calor en una pared plana. En la figura 4.3-4 se muestra el diagrama de una pared plana con generación interna de calor. La conducción de calor sólo se verifica en la dirección x, pues se supone que las otras caras están aisladas. La temperarura T_w en K se mantiene constante entre los límites x = L y x = -L. La velocidad volumétrica de generación de calor es $\dot{q}$ W/m^3 y la conductividad térmica del fluido es k W/m . K

A fin de deducir la ecuación para este caso de generación de calor en estado estacionario, empezamos con la ecuación (4.1-3) pero omitimos el término de acumulación.

$$q_{x|x} + \dot{q}(\Delta x \cdot A) = q_{x|x} + {}_{\Delta x} + 0 \qquad \textbf{(4.3-22)}$$

donde A es el área de corte transversal de la placa. Si se reordena, se divide entre Δx y se hace que Δx tienda a cero,

$$\frac{-dq_x}{dx} + \dot{q} \cdot A = 0 \qquad (4.3\text{-}23)$$

Si sustituimos q_x por la ecuación (4.1-2),

$$\frac{-d^2T}{dx^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \qquad (4.3\text{-}24)$$

La integración con $\dot{q}$ constante produce el siguiente resultado:

$$T = -\frac{q}{2k}\, x^2 + C_1 x + C_2 \qquad (4.3\text{-}25)$$

donde C_1 y C_2 son constantes de integración. Las condiciones limitantes son x = L o $-L$, $T = T_w$ y x = 0, $T = T_0$ (temperatura del centro). Entonces, el perfil de temperatura es

$$T = -\frac{q}{2k}\, x^2 + T_0 \qquad (4.3\text{-}26)$$

La temperatura central es

$$T_0 = \frac{\dot{q}L^2}{2k} + T_w \qquad (4.3\text{-}27)$$

El calor total perdido en las dos caras con estado estable es igual al calor total generado, $\dot{q}_T$, en W.

$$\dot{q}_T = \dot{q}(2LA) \qquad (4.3\text{-}28)$$

donde A es el área de corte transversal (área de superficie a T_w) de la placa o pared.

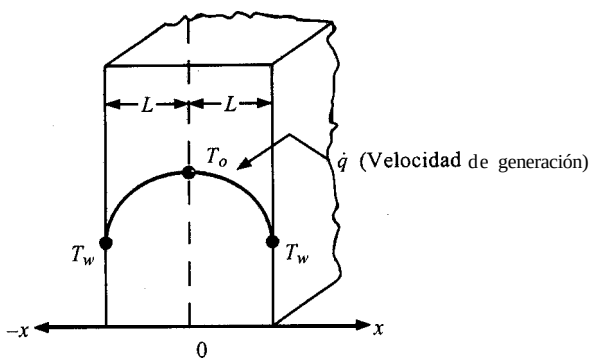


FIGURA *4.3-4. Pared plana con generación interna de calor en estado estacionario.*

2. Generación de calor en un cilindro. Puede seguirse el mismo procedimiento para deducir la ecuación para un cilindro de radio R con fuentes de calor distribuidas uniformente y conductividad térmica constante. Se supone que el calor sólo fluye en sentido radial; esto es, los extremos se desprecian o están aislados. La ecuación final para el perfil de temperaturas es

$$T = \frac{q}{4k}\mathrm{v}\,(R^2 - r^2) + T_w \tag{4.3-29}$$

donde r es la distancia desde el centro. La temperatura central T_0 *es*

$$T_0 = \frac{\dot{q}R^2}{4k} + T_w \tag{4.3-30}$$

EJEMPLO 4.3-4. Generación de calor en un cilindro

Por un alambre de acero inoxidable con radio R de 0.001268 m se hace pasar una corriente eléctrica de 200 A. El alambre tiene una longitud L = 0.91 m y su resistencia R *es 0.126* Ω. La temperatura de la superficie exterior es T_w y se mantiene constante a 422.1 K. La conductividad térmica promedio es k = 22.5 W/m · K. Calcule la temperatura central.

Solución: Primero debe calcularse el valor de $\dot{q}$. Puesto que potencia = I^2R, donde I es la corriente en amperes y R la resistencia en ohms.

$$I^2R = \text{watts} = \dot{q}\pi R^2 L \tag{4.3-31}$$

Al sustituir los valores conocidos y resolver,

$$(200)^2(0.126) = \dot{q}\pi(0.001268)^2(0.91)$$
$$\dot{q} = 1.096 \times 10^9\ \mathrm{W/m^3}$$

Al sustitur en la ecuación (4.3-30) y despejar, T_0 = 441.7 K.

4.3F Grosor crítico del aislante para un cilindro

En la figura 4.3-5 se instala una capa de aislante en tomo a un cilindro cuyo radio r_1 es fijo y tiene una longitud L. El cilindro tiene una alta conductividad térmica y la temperatura interna T_1 en el punto r_1 fuera del cilindro es fija. Un ejemplo de este tipo es una tubería de metal con vapor saturado adentro. La superficie exterior aislante en T_2 está expuesta a un ambiente a T_0 donde ocurre una transferencia de calor por convección. No es evidente que al añadir más aislante con una conductividad térmica de k disminuya la velocidad de transferencia de calor.

En estado estacionario, la velocidad de transferencia de calor q a través del cilindro y el aislante es igual a la tasa de convección desde la superficie.

$$q = h_0 A(T_2 - T_0) \tag{4.3-32}$$

A medida que se agrega más aislante, el área exterior, que es $A = 2\pi r_2 L$, aumenta, pero T_2 disminuye.

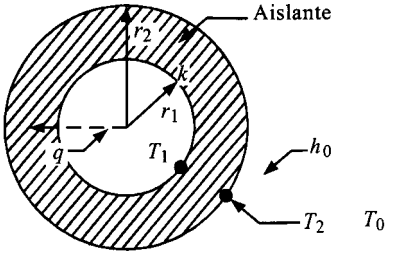


FIGURA *4.3-5. Radio critico del aislante de un cilindro o tuberia*

Sin embargo, no es evidente si q aumenta o disminuye. Para determinarlo se escribe una ecuación semejante a la (4.3-15), en donde la resistencia del aislamiento se representa con la ecuación (4.2-ll), y se usan las dos resistencias.

$$q = \frac{2\pi L(T_1 - T_0)}{\frac{\ln(r_2/r_1)}{k} + \frac{1}{r_2 h_0}} \tag{4.3-33}$$

Para determinar el efecto del grosor del aislante sobre q, tomamos la derivada de q con respecto a r_2, igualamos este resultado a cero y obtenemos lo siguiente para el flujo de calor máximo.

$$\frac{dq}{dr_2} = \frac{-2\pi L(T_1 - T_0)\left(1/r_2 k - 1/r_2^2 h_0\right)}{\left[\frac{\ln(r_2/r_1)}{k} + \frac{1}{r_2 h_0}\right]^2} = 0, \tag{4.3-34}$$

Se resuelve y queda

$$(r_2)_{cr} = \frac{k}{h_0} \tag{4.3-35}$$

donde $(r_2)_{cr}$ *es* el valor del radio crítico cuando la velocidad de transferencia de calor es máxima. Por consiguiente, si el radio exterior r_2 es menor que el valor crítico, al agregar más aislante aumentará la velocidad de transferencia de calor q. Del mismo modo, si el radio exterior es mayor que el crítico, al agregar más aislante disminuirá la velocidad de transferencia de calor. Usando los valores típicos de k y h_0 que se suelen encontrar, el radio crítico es de sólo unos cuantos milímetros, y en consecuencia, al agregar más aislante a los cables eléctricos pequeños podría incrementarse la pérdida de calor. Al agregar aislante a tuberías grandes disminuye la velocidad de transferencia de calor.

EJEMPLO 4.3-5. Aislante de un cable eléctrico y radio crítico

Un cable crítico eléctrico que tiene un diámetro de 1.5 mm y que está cubierto con un aislante plástico (grosor = 2.5 mm) está expuesto al aire a 300 K y $h_0 = 20$ W/m$^2 \cdot$ K. El aislante tiene una k de 0.4 W/m $\cdot$ K. Se supone que la temperatura en la superficie del cable es constante a 400 K y no se ve afectada por la cubierta.

a) Calcule el valor del radio crítico.
b) Calcule la pérdida de calor por metro de longitud de cable sin aislante.
c) Repita b) con aislante.

Solución: Para el inciso (a), si usamos la ecuación (4.3-35),

$$(r_2)_{cr} = \frac{k}{h_0} = \frac{0.4}{20} = 0.020 \text{ m} = 20 \text{ mm}$$

Para el inciso b), $L = 1.0$ m, $r_2 = 1.5/(2 \times 1000) = 0.75 \times 10^{-3}$ m, $A = 2\pi r_2 L$. Al sustituir en la ecuación (4.3-32),

$$q = h_0 A(t_2 - T_0) = (20)(2\pi \times 0.75 \times 10^{-3} \times 1)(400 - 300) = 9.42 \text{ w}$$

Para el inciso c) con aislante $r_1 = 1.5/(2 \times 1000) = 0.75 \times 10^{-3}$ m, $r_2 = (2.5 + 1.5/2)/1000 = 3.25 \times 10^{-3}$ m. Al sustituir en la ecuación (4.3-33),

$$q = \frac{2\pi(1.0)(400 - 300)}{\dfrac{\ln(3.25 \times 10^{-3}/0.75 \times 10^{-3})}{0.4} + \dfrac{1}{(3.25 \times 10^{-3})(20)}} = 32.98 \text{ w}$$

Por consiguiente, agregar aislante hace aumentar en gran medida la pérdida de calor.

4.3G Resistencia de contacto en una interfaz

En las ecuaciones deducidas en esta sección para la conducción a través de sólidos en serie (véase la figura 4.3-l) se supuso que las superficies adyacentes en contacto estaban a la misma temperatura, es decir, las superficies hacían contacto perfecto entre sí. En muchos diseños de ingeniería en la industria, esta suposición es razonablemente adecuada; pero en casos como en las plantas de energía nuclear, donde hay flujos de calor sumamente altos, puede presentarse en la interfaz una significativa caída de temperatura. Esta resistencia en la interfaz, llamada *resistencia de contacto,* se presenta cuando los dos sólidos no encajan perfectamente y entre las dos superficies queda atrapada una fina capa de fluido estancado. En algunos puntos los sólidos se tocan a través de picos de las superficies y en otros el fluido ocupa el espacio abierto.

La resistencia en la interfaz es una función compleja de la aspereza de las dos superficies, de la presión aplicada para mantener las superficies en contacto, de la temperatura en la interfaz y del fluido en la interfaz. La transferencia de calor ocurre por conducción, radiación y convección a través del fluido atrapado y también por conducción a través de los puntos de contacto de los sólidos. No existen correlaciones o teorías empíricas completamente confiables para predecir las resistencias de contacto para todo tipo de materiales. En las referencias (C7, R2), se encontraran análisis más detallados.

La ecuación de la resistencia de contacto se da como sigue:

$$q = h_c A\, \Delta T = \frac{\Delta T}{1/h_c A} = \frac{\Delta T}{R_c} \qquad \textbf{(4.3-36)}$$

donde h_c es el coeficiente de resistencia de contacto en $W/m^2 \cdot K$, AT la caída de temperatura a través de la resistencia de contacto en K y R_c la resistencia de contacto. La resistencia de la ecuación

(4.3-3) para incluir este efecto para los sólidos en serie. Para el contacto entre dos superficies pulidas de metal se han obtenido valores de h_c de un orden de magnitud de cerca de 0.2×10^4 a 1×10^4 $W/m^2 \cdot K$.

Se puede obtener una aproximación de la resistencia de contacto máxima si se calcula el claro máximo Ax entre las superficies. Después, suponiendo que la transferencia de calor a través del claro se realiza por conducción sólo a través del fluido estancado, h_c se calcula así:

$$h_c = \frac{k}{\Delta x} \tag{4.3-37}$$

Si hay realmente cualquier convección, radiación o contacto de punto a punto se reduce la resistencia supuesta.

4.4 CONDUCCIÓN EN ESTADO ESTACIONARIO Y FACTORES DE FORMA

4.4A Introducción y métodos gráficos para la conducción bidimensional

En secciones anteriores de este capítulo se analizó la conducción de calor en estado estacionario en una dirección. Sin embargo, en muchos casos la conducción de calor en estado estacionario ocurre en dos direcciones, es decir se presenta conducción bidimensional. Las soluciones bidimensionales son más complejas y en la mayoría de los casos no se dispone de soluciones analíticas. Una buena manera aproximada de resolver estos problemas es usar un método numérico que se estudia con detalle en la sección 4.15, y otra es el método gráfico, que es sencillo y aporta respuestas razonablemente precisas para la velocidad de transferencia de calor. Este método se aplica en especial a los sistemas que tienen fronteras isotérmicas.

En el método gráfico primero notamos que en la conducción de calor unidimensional a través de una plancha plana (véase la Fig. 4.2-1), la dirección del flujo de calor o de las líneas de flujo siempre es perpendicular a las isotermas. El método gráfico para la conducción bidimensional también se basa en el requisito de que las líneas de flujo de calor y las líneas isotermas se intersequen entre sí en ángulos rectos formando una red de cuadrados curvilíneos. Esto significa, como se muestra en la figura 4.4.-1, que podemos esbozar las isotermas y también las líneas de flujo hasta que se intersequen en ángulos rectos (hasta que sean perpendiculares entre sí). Con cuidado y experiencia se obtienen resultados razonablemente exactos. Los pasos generales para el método gráfico son los siguientes.

1. Dibuje un modelo a escala del sólido bidimensional. Establezca las fronteras isortérmicas. En la figura 4.4-1, T_1 y T_2 son fronteras isotérmicas.
2. Seleccione un número N que sea el número de subdivisiones de igual temperatura entre las fronteras isotérmicas. En la figura 4.4-1, $N = 4$ subdivisiones entre T_1 y T_2. Trace las líneas isotermas y el flujo de calor o líneas de flujo de manera que sean perpendiculares unas a otras en las intersecciones. Note que las isotermas son perpendiculares a las fronteras adiabáticas (aisladas) y también las líneas de simetría.
3. Continúe ajustando las isotermas y las líneas de flujo hasta que cada cuadrado curvilíneo se satisfaga la condición Ax = Ay.

Para calcular el flujo específico de calor usando los resultados de las gráficas, primero se supone una profundida unitaria del material. El flujo de calor q' a través del corte curvilíneo mostrado en la figura 4.4-l está dado por la ley de Fourier.

$$q' = -kA\frac{dT}{dy} = k(\Delta x \cdot 1)\frac{\Delta T}{\Delta y} \tag{4.4-1}$$

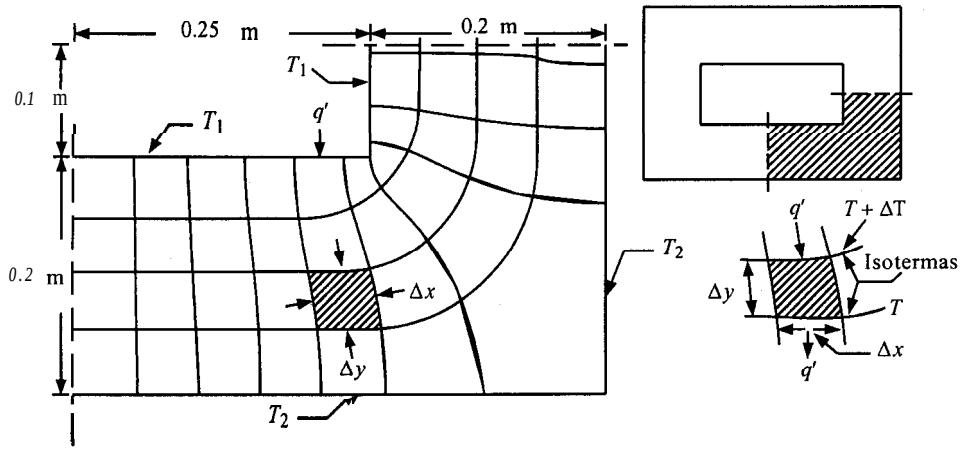


FIGURA 4.4-1. *Método gráfico de cuadrados curvilíneos para conducción de calor bidimensional en una chimenea rectangular.*

Este flujo de calor q' será igual a través de cada cuadrado curvilíneo dentro de esta trayectoria de flujo de calor. Como Δx = Ay, todas las subdivisiones de temperatura ΔT son iguales. Esta subdivisión de temperatura puede expresarse en términos de la diferencia global de temperatura T_1 T_2. y N, que es el número de subdivisiones iguales.

$$\Delta T = \frac{T_1 - T_2}{N} \tag{4.4-2}$$

Además, el flujo de calor q' a través de cada trayectoria es igual porque Δx = Ay en la construcción y en la ecuación (4.4-l). Por lo tanto, la transferencia de calor total q a través de todas las trayectorias es

$$q = Mq' = Mk\,\Delta T \tag{4.4-3}$$

donde Mes el número total de trayectorias de flujo de calor según se determinó con el procedimiento gráfico. Si se sustituye la ecuación (4.4-2) en la (4.4-3), resulta

$$q = \frac{M}{N} k(T_1 - T_2) \tag{4.4-4}$$

EJEMPLO 4.4-l. Conducción bidimensional por el procedimiento gráfico

Determine la transferencia de calor total a través de las paredes del conducto que se muestra en la figura 4.4-l si T_1 = 600 K, T_2 = 400 K, k = 0.90 W/m · K, y L (longitud del conducto) = 5 m.

Solución: En la figura 4.4-1, N = 4 subdivisiones de temperaturas y M = 9.25. La velocidad total de transferencia de calor a través de las cuatro secciones idénticas con una profundidad o longitud L = 5 m se obtiene utilizando la ecuación (4.4-4).

$$q = 4\left[\frac{M}{N} kL(T_1 - T_2)\right] = 4\left[\frac{9.25}{4}(0.9)(5.0)(600 - 400)\right]$$

$$= 8325 \text{ W}$$

4.4B Factores de forma en la conducción

En la ecuación (4.4-4), el factor M/N se denomina factor de forma en la conducción S, donde

$$S = \frac{M}{N} \tag{4.4-5}$$

$$q = kS(T_1 - T_2) \tag{4.4-6}$$

Este factor de forma S se expresa en metros y se usa para conducción de calor bidimensional en la que sólo intervienen dos temperaturas. Ya se han obtenido los factores de forma para varias geometrías, y algunos de ellos se dan en la tabla 4.4-l.

En una geometría tridimensional, como un horno, se usan factores de forma separados para obtener el flujo de calor por las secciones de los bordes y de las esquinas. Cuando todas las dimensiones interiores son mayores que la quinta parte del grosor de la pared, los factores de forma son los siguientes para un grosor uniforme de pared T_w:

$$S_{\text{pared}} = \frac{A}{T_w} \qquad S_{\text{borde}} = 0.54L \qquad S_{\text{esquina}} = 0.15T_w \tag{4.4-7}$$

donde A es el área interior de la pared y L la longitud del borde interior. Para una geometría completamente cerrada, hay 6 secciones de pared, 12 bordes y 8 esquinas. Nótese que para una sola pared plana, $q = kS_{\text{pared}}(T_1 - T_2) = k(A/T_w)(T_1 - T_2)$ que es igual que la ecuación (4.2-l) para la conducción a través de una sola placa plana.

En un cilindro hueco largo de longitud L como el de la figura 4.2-2,

$$S = \frac{2\pi L}{\ln (r_2/r_1)} \tag{4.4-8}$$

, En una esfera hueca, a partir de la ecuacion (4.2-14),

$$S = \frac{4\pi r_2 r_1}{r_2 - r_1} \tag{4.4-9}$$

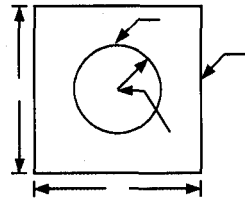
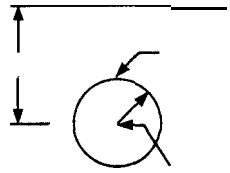
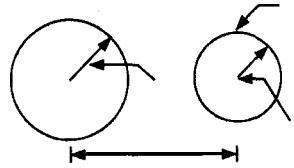
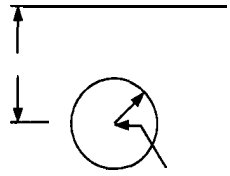
4.5 TRANSFERENCIA DE CALOR POR CONVECCIÓN FORZADA DENTRO DE TUBERÍAS

4.5A Introducción y números adimensionales

En la mayoría de las situaciones que implican transferencia de calor en un líquido o un gas, por lo general se presenta una transferencia convectiva de calor además de la conductiva. En la transferencia de calor de muchos procesos industriales, el calor pasa de un fluido a otro a través de una pared sólida. En la figura 4.5-l se muestra la transferencia de calor del flujo de fluido caliente al flujo de fluido frío. Se incluye también el perfil de temperaturas.

Cuando se trata de un flujo turbulento, el gradiente de velocidad muestra una pendiente muy grande en la zona cercana a la pared donde hay una subcapa viscosa sin turbulencia. En esta región, el calor se transfiere principalmente por conducción con una gran diferencia de temperaturas T_2 T_3 en el fluido caliente. Al alejamos de la pared, nos aproximamos a la región turbulenta, donde los movimientos

TABLA 4.4-l. Factores de forma de conducción para $q = kS(T_1 - T_2)$*

Cilindro de longitud L en un cuadrado		$S = \dfrac{2\pi L}{\ln\left(0.54\ a/r_1\right)}$
Cilindro horizontal enterrado de longitud L		$S = \dfrac{2\pi L}{\ln\left(2H/r_1\right)} \left(H > 3r_1\right)$
Dos cilindros paralelos de longitud L		$S = \dfrac{2\pi L}{\cosh^{-1}\left[\dfrac{H^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1 r_2}\right]}$
Esfera enterrada		$S = \dfrac{4\pi r_1}{1 - r_1/2H}$

*La conductividad térmica del medio es k.

rápidos de los remolinos tiende a igualar la temperatura. Por consiguiente, el gradiente de temperatura es más bajo y la diferencia $T_1 - T_2$ es menor. La temperatura promedio del fluido A es un poco más baja que el valor máximo T_1. El mismo razonamiento es aplicable al perfil de temperaturas del fluido frío.

El coeficiente convectivo de transferencia de calor a través de un fluido

$$q = hA(T - T_w) \qquad \textbf{(4.5-1)}$$

donde h es coeficiente convectivo en $W/m^2 \cdot K$, A es el área en m^2, T es la temperatura general o promedio del fluido en K, T_w es la temperatura de la pared en contacto con el fluido en K y q es la velocidad de transferencia de calor en W. En unidades del sistema inglés, q se da en btu/h, h en btu/h . pie^2 °F, A en pie^2 y T y T_w en °F.

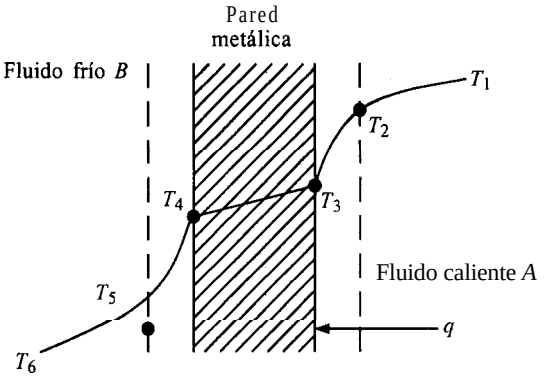


FIGURA 4.5-1. *Perfil de temperaturas para la transferencia convectiva de calor de un fluido a otro.*

El tipo de flujo, ya sea laminar o turbulento, del fluido individual, ejerce un efecto considerable sobre el coeficiente de transferencia de calor h, que suele llamarse coeficiente de película, pues la mayor parte de la resistencia a la transferencia de calor está localizada en la película delgada cercana a la pared. Cuanto más turbulento sea el flujo, más alto será el coeficiente de transferencia de calor.

Hay dos clasificaciones principales de la transferencia convectiva de calor. La primera es la *convección natural* o libre, donde el movimiento del fluido es el resultado de variaciones de densidad en la transferencia de calor. El efecto de flotación produce una circulación natural del fluido, por lo que éste se desliza por la pared sólida. En el segundo tipo, llamado *convecciónforzada,* el flujo se produce por diferencias de presión producidas por una bomba, un ventilador, etcétera.

La mayoría de las correlaciones para predecir coeficientes de película h son semiempíricas y dependen de las propiedades físicas del fluido, del tipo y velocidad del flujo, de la diferencia de temperaturas y de la geometría del sistema físico individual considerado. En la tabla 4.1-2 se incluyen algunos valores aproximados de coeficientes convectivos. En las siguientes correlaciones pueden usarse unidades SI o del sistema inglés puesto que las ecuaciones son adimensionales.

Para establecer las relaciones de datos de los coeficientes de transferencia de calor se usan números adimensionales como los de Reynolds y Prandtl. El número de Prandtl es la relación entre el componente cortante de la difusividad para el momento lineal μ/ρ, y la difusividad de calor, $k/\rho c_p$, y correlaciona físicamente el espesor relativo de la capa hidrodinámica con el de la capa límite térmica.

$$N_{\mathrm{Pr}} = \frac{\mu/\rho}{k/\rho c_p} = \frac{c_p \mu}{k} \qquad (4.5\text{-}2)$$

En el apéndice A.3 se dan los valores de los N_{Pr} para gases, que fluctúan entre 0.5 y 1 .0. Los valores para líquidos están en el intervalo de 2 hasta bastante más de 10^4. El número de Nusselt adimensional, N_{Nu} se usa para relacionar los datos para el coeficiente de transferencia de calor h con la conductividad térmica k del fluido y una dimensión característica D.

$$N_{\mathrm{Nu}} = \frac{hD}{k} \qquad \textbf{(4.5-3)}$$

Por ejemplo, para el flujo dentro de una tubería, D es el diámetro.

4.5B Coeficiente de tranferencia de calor para el flujo laminar dentro de una tubería

Obviamente, el proceso de transferencia convectiva de calor de mayor importancia industrial es el enfriamiento o el calentamiento de un fluido que pasa por un conducto o tuberia circular. Se requieren diferentes tipos de correlaciones para el coeficiente convectivo para flujo laminar (N_{Re} inferior a 2100), para flujo totalmente turbulento (N_{Re} superior a 10^4) y para la región de transición (N_{Re} entre 2 1 OO y 6000).

Para el flujo laminar de fluidos en el interior de tubos horizontales, se usan las siguientes ecuaciones de Sieder Tate (SI) para $N_{Re} < 2100$:

$$(N_{Nu})_a = \frac{h_a D}{k} = 1.86\left(N_{Re} N_{Pr} \frac{D}{L}\right)^{1/3} \left(\frac{\mu_b}{\mu_w}\right)^{0.14} \tag{4.5-4}$$

donde D = diámetro de la tubería en m, L = longitud.de tuberia en m antes de que se verifique el mezclado, μ_b = viscosidad del fluido a la temperatura de volumen promedio en Pa · s, μ_w = viscosidad a la temperatura de la pared, c_p = capacidad calorífica en J/kg · K, k = conductividad térmica en W/m · K, h_a = coeficiente promedio de transferencia de calor en W/m^2 . K y N_{Nu} = número adimensional de Nusselt. Todas las propiedades físicas se determinan a la temperatura general del fluido, excepto μ_w. El número de Reynolds es

$$N_{Re} = \frac{Dv\rho}{\mu} \tag{4.5-S}$$

y el número de Prandtl,

$$N_{Pr} = \frac{c_p \mu}{k} \tag{4.5-6}$$

Esta ecuación es válida para $(N_{Re}\, N_{Pr}\, D/L) > 100$. Cuando se usa con valores de $(N_{Re}\, N_{Pr}\, D/L) > 10$, todavía tiene una exactitud de ±20% (B1). Hay otra ecuación para el caso en que $(N_{Re}\, N_{Pr}\, D/L) < 100$ (P1).

En el flujo laminar, el coeficiente promedio h_a depende en alto grado de la longitud calentada. Para calcular la velocidad de transferencia de calor q se usa entonces la diferencia de temperatura promedio (media aritmética) AT, en la ecuación:

$$q = h_a A\, \Delta T_a = h_a A\, \frac{\left(T_w - T_{bi}\right) + \left(T_w - T_{bo}\right)}{2} \tag{4.5-7}$$

donde T_w es la temperatura de la pared en K, T_{bi} es la temperatura en el volumen de entrada del fluido y T_{bo} es la temperatura en el volumen de salida del mismo.

Para diámetros de tubería grandes y diferencias de temperatura AT considerables entre la pared del tubo y la totalidad del fluido, los efectos de la convección natural pueden aumentar el valor de h (P 1). También hay ecuaciones para flujo laminar en tubos verticales.

4.5C Coeficiente de transferencia de calor para el flujo turbulento en tuberías

Cuando el número de Reynolds es superior a 2100, el flujo es turbulento. Puesto que la velocidad de transferencia de calor es mayor en la región turbulenta, muchos procesos industriales de transferencia de calor se diseñan para flujo turbulento.

Se ha determinado que la siguiente ecuación es válida para tubos pero también se usa para cañerías. Esto es válido para $N_{Re} > 6000$, para N_{Pr} entre 0.7 y 16000, y $LID > 60$:

$$N_{Nu} = \frac{h_L D}{k} = 0.027 N_{RE}^{0.8} N_{Pr}^{1/3} \left(\frac{\mu_b}{\mu_w}\right)^{0.14} \tag{4.5-8}$$

donde h_L es el coeficiente de transferencia de calor basado en la media logarítmica de la fuerza impulsora ΔT_{lm} (véase la sección 4.5H). A excepción de μ_w, las propiedades del fluido se evalúan a la temperatura media general. Si esta temperatura media general del fluido varía de la entrada a la salida del tubo, se usa la media de las temperaturas de entrada y salida. Para corregir con un valor de $LID < 60$, donde 'la entrada presenta una contracción abrupta, se puede aplicar una corrección aproximada que consiste en multiplicar el lado derecho de la ecuación (4.5-8) por un factor de corrección dado en la sección 4.5F.

La ecuación (4.5-8) puede resolverse por aproximaciones sucesivas, pues es necesario conocer h_L para evaluar T_w y, por tanto, μ_w a la temperatura de la pared. Ademas, si la temperatura media del volumen aumenta o disminuye en la longitud del tubo debido a la transferencia de calor, tiene que estimarse la temperatura del volumen en la longitud L para contar con una temperatura media del volumen entre la entrada y la salida.

El coeficiente de transferencia de calor para flujo turbulento es un poco más alto para un tubo rugoso que para otro liso. El efecto es menos pronunciado que en la fricción de fluidos y casi siempre se desprecia en los cálculos. Además, cuando se trata de metales líquidos con números de-Prandtl $<< 1$, hay que usar otras correlaciones para predecir el coeficiente de transferencia de calor (ver sección 4.5G). Para formas de tubos diferentes a la circular, se usa el diámetro equivalente que se estudió en la sección 4.5E.

Para el caso del aire a una presión total de 1 atm, puede ser útil la siguiente ecuación simplificada:

$$h_L = \frac{352 v^{0.8}}{D^{0.2}} \quad \text{(SI)}$$
$$h_L = \frac{352 v_s^{0.8}}{(D')^{0.2}} \quad \text{(Unidades del sistema inglés)} \tag{4.5-9}$$

donde D *se* de en m, v en m/s y h_L en W/m^2 · K en unidades SI; en unidades del sistema inglés, D' se da en pulg, v_s en pie/s y h_L en btu/h . pie^2 · °F.

El uso del agua es muy común en los equipos de transferencia de calor. Una ecuación simplificada que se aplica en un intervalo de temperaturas de $T = 4$ a 105 °C (40 – 220 °F) es

$$h_L = 1429(1 + 0.0146T\ ^\circ C)\frac{v^{0.8}}{D^{0.2}} \quad \text{(SI)}$$
$$h_L = 150(1 + 0.011T\ ^\circ F)\frac{v_s^{0.8}}{(D')^{0.2}} \quad \text{(Unidades del sistema inglés)} \tag{4.5-10}$$

La siguiente es una ecuación muy simplificada que puede usarse como aproximación (P3) para líquidos orgánicos:

$$h_L = 423\frac{v^{0.8}}{D^{0.2}} \quad \text{(SI)}$$
$$h_L = 60\frac{v_s^{0.8}}{(D')^{0.2}} \quad \text{(Unidades del sistema inglés)} \tag{4.5-l 1}$$

Para flujos en serpentines helicoidales con valores de N_{Re} superiores a 10^4, la predicción del coeficiente de película de tuberías rectas se aplica aumentándolo por un factor de $(1 + 3.5\, D/D_{ser})$.

EJEMPLO 4.5-l. Calentamiento de aire con flujo turbulento

Una corriente de aire que está a 206.8 kPa y a un promedio de 477.6 K se calienta a medida que fluye por un tubo de 25.4 mm de diámetro interior a una velocidad de 7.62 m/s. El medio de calentamiento es vapora 488.7 K que se condensa en el exterior del tubo. Puesto que el coeficiente de transferencia de calor para vapor condensado es de varios miles de W/m^2. K y la resistencia de la pared metálica es muy pequeña, se supondrá que la temperatura superficial de la pared metálica en contacto con el aire es 488.7 K. Calcule el coeficiente de transferencia de calor para una relación $L/D > 60$ y el flujo específico de calor q/A.

Solución: Las propiedades físicas del aire tomadas del apéndice A.3 son, a477.6 K(204.4 "C), $\mu_b = 2.60 \times 10^{-5}$ Pa . s, $k = 0.03894$ W/m, $N_{Pr} = 0.686$. A 488.7 K (215.5 "C), $\mu_w = 2.64 \times 10^{-5}$ Pa · s.

$$\mu_b = 2.60 \times 10^{-5}\ \text{Pa} \cdot \text{s} = 2.60 \times 10^{-5}\ \text{kg/m} \cdot \text{s}$$

$$\rho = (28.97)\left(\frac{1}{22.414}\right)\left(\frac{2068}{10133}\right)\left(\frac{273.2}{477.6}\right) = 1.509\ \text{kg/m}^3$$

El número de Reynolds, calculado a la temperatura del volumen del fluido de 477.6 K es

$$N_{Re} = \frac{Dv\rho}{\mu} = \frac{0.0254(7.62)(1.509)}{2.6 \times 10^{-5}} = 1.122 \times 10^4$$

Por consiguiente, el flujo es turbulento y se usará la ecuación (4.5-8). Sustituyendo en dicha expresión:

$$N_{Nu} = \frac{h_L D}{k} = 0.027 N_{Re}^{0.8} N_{Pr}^{1/3}\left(\frac{\mu_b}{\mu_w}\right)^{0.14}$$

$$\frac{h_L(0.0254)}{0.03894} = 0.027(1.22 \times 10^4)^{0.8}(0.686)^{1/3}\left(\frac{0.0260}{0.0264}\right)^{0.14}$$

Al despejar, $h_L = 63.2$ W/m² · K (11.13 btu/h · pie² . "F).

Para el flujo específico q/A,

$$\frac{q}{A} = h_L(T_w - T) = 63.2(488.7 - 477.6)$$
$$= 701.1\ \text{W/m}^2\ (222.2\ \text{btu/h} \cdot \text{pie}^2)$$

4.5D Coeficiente de transferencia de calor para flujo de transición en el interior de una tubería

En la región de transición, cuando N_{Re} está entre 2100 y 6000, las ecuaciones empíricas no están bien definidas, al igual que sucede para el caso de factores de fricción en fluidos. No existe una

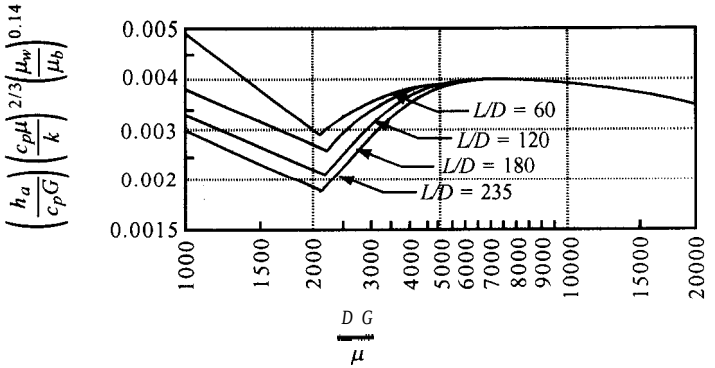


FIGURA *4.5-2. Correlación de parámetros de transferencia de calor para la región de transición con números de Reynolds entre 2100 y 6000. (Tomado de R. H. Perry y C. H. Chilton, Chemical Engineers' Handbook, 5a. ed., Nueva York, McGraw-Hill Book Company. 1973. Reproducido con permiso.)*

ecuación simple para lograr una transición coherente entre una transferencia de calor de flujo laminar a otra de flujo turbulento, esto es, la transición de la ecuación (4.5-4) con $N_{Re} = 2100$ a la ecuación ***(4.5-8)*** con $N_{Re} = 6000$.

La gráfica de la figura 4.5-2 representa una relación aproximada aplicable para diversos parámetros de transferencia de calor y números de Reynolds entre 2100 y 6000. Cuando N_{Re} es inferior a 2100, las curvas representan a la ecuación (4.5-4), y por encima de 104, ecuación (4.5-8). Con el valor que h_a tiene en la figura 4.5-2 debe usarse la media AT, de la ecuación (4.5-7).

4.5E Coeficiente de transferencia de calor para conductos no circulares

Un sistema de transferencia de calor muy común es aquel en el que los fluidos fluyen a diferentes temperaturas por tubos concéntricos. El coeficiente de transferencia de calor del fluido en un espacio anular puede predecirse con las mismas ecuaciones de tubos circulares. Sin embargo, debe tenerse presente el diámetro equivalente definido en la sección 2.10G. Para un espacio anular, D_{eq} es el DI de la tubería exterior D_1, menos el ***DE*** de la tuberia interior, D_2. El diámetro equivalente también puede usarse para otras geometrias.

EJEMPLO 4.5-2. Calentamiento de agua con vapor y resolución por aproximaciones sucesivas

Una corriente de agua fluye por un tubo de acero de 1 pulg, de cédula 40, a una temperatura promedio de 65.6 "C. con velocidad de 2.44 m/s, y se calienta por condensación de vapor a 107.8 °C en el exterior de la pared del tubo. Se estima que el coeficiente del lado del vapor es $h_0 = 10500$ W/m^2 · K.

a) Calcule el coeficiente convectivo h_i del agua en el interior del tubo.
b) Estime el coeficiente general U_i con base en el área de la superficie interna.
c) Calcule la velocidad de transferencia de calor q para 0.305 m de tuberia con temperatura promedio del agua de 65.6 "C.

Solución: Según el apéndice A.5, las dimensiones son $D_i = 0.0266$ m $D_0 =$ 0.0334 m. Para agua a temperatura general promedio de 65.6 °C y en el apéndice A.2, $N_{Pr} = 2.72$, $p = 0.980$ (1000) = 980 kg/m^3, $k = 0.633$ W/m . K y $\mu = 4.32 \times 10^{-4}$ Pa · s = 4.32 $\times 10^{-4}$ kg/m . s.

Se necesita la temperatura de la pared metálica interna y se estimará que corresponde (para la primera aproximación) a un tercio de la diferencia entre 65.6 y 107.8, por encima de la temperatura inferior, esto es, 80 °C = T_w por consiguiente, μ_w a 80 °C = 3.56×10^{-4} Pa . s. Primero se calcula el número de Reynoldds a la temperatura general promedio:

$$N_{\text{Re}} = \frac{D_i v \rho}{\mu} = \frac{0.0266(2.44)(980)}{432 \times 10^{-4}} = 1{,}473 \times 10^5$$

Por tanto, el flujo es turbulento. Usando la ecuación (4.5-8) y sustituyendo los valores conocidos,

$$\frac{h_L D}{k} = 0.027 N_{\text{Re}}^{0.8} N_{\text{Pr}}^{1/3} \left(\frac{\mu_b}{\mu_w}\right)^{0.14}$$

$$\frac{h_L(0.0266)}{0.663} = 0.027(1.473 \times 10^5)^{0.8}(2.72)^{1/3}\left(\frac{4.32 \times 10^{-4}}{356 \times 10^{-4}}\right)^{0.14}$$

Al resolver, $h_L = h_i = 13324$ W/m^2 . K.

Para el inciso b), las diversas áreas para una tubería de 0.305 m son:

$$A_i = \pi D_i L = \pi(0.0266)(0.305) = 0.0255 \text{ m}^2$$

$$A_{1\text{m}} = \pi \frac{(0.0266 + 0.0334)0.305}{2} = 0.0287 \text{ m}^2$$

$$A_0 = \pi (0.0334)(0.305) = 0.0287 \text{ m}^2$$

El valor de k para el acero es 45.0 W/m . K. Las resistencias son

$$R_i = \frac{1}{h_i A_i} = \frac{1}{(13\,324)0.0255} = 0.002943$$

$$R' = \frac{r - r_i}{k A_{1\text{m}}} = \frac{0.0334 - 0.0266}{45.00(0.0287)} = \frac{1}{0.002633}$$

$$R_0 = \frac{r_0 - r_i}{h_0 A_0} = \frac{1}{(10500)(0.0320)} = 0.002976$$

$$\sum R = 0.002643 + 0.002633 + 0.002976 = 0.008552$$

La diferencia total de temperatura es (107.8 – 65.6) °C = 42.2 °C = 42.2 K. La caída de temperatura en la película del agua es

$$\text{caída de temperatura} = \frac{R_i}{\sum R}(42.2) = \left(\frac{0.002943}{0.008852}\right)(42.2) = 14.5 \text{ K} = 14.5 \text{ °C}$$

Por consiguiente, T_w = 65.6 + 14.5 = 80.1 °C. Este valor es muy cercano a la estimación original de 80 “C. La única propiedad física que cambiaría en la segunda estimación sería uy. Esto tendría un efecto despreciable sobre h_i por lo que la segunda estimación es innecesaria.

Para el inciso (b), el coeficiente general con la ecuación (4.3-16) es

$$q = U_i A_i (T_0 - T_i) = \frac{T_0 - T_i}{\sum R}$$

$$U_i = \frac{1}{A_i \sum R} = \frac{1}{0.0255(0.008552)} = 4586 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$$

Para el inciso (c), con el agua a temperatura promedio de 65.6 °C,

$$T_0 - T_i = 107.8 - 65.6 = 42.2°\text{C} = 42.2 \text{ K}$$

$$q = U_i A_i (T_0 - Ti) = 4586(0.0255)(42.2) = 4935 \text{ W}$$

4.5F Efecto de la región de entrada sobre el coeficiente de transferencia de calor

Cerca de la entrada de una tubería donde se está calentando el fluido, el perfil de temperatura no está completamente desarrollado y el coeficiente local h es mayor que el coeficiente de transferencia de calor completamente desarrollado h_L para el flujo turbulento. En la entrada misma, donde no se ha establecido gradiente de temperatura alguno, el valor de h es infinito. El valor de h cae rápidamente y es casi igual que h_L en $L/D \cong 60$, donde L es la longitud de entrada. Estas relaciones para el flujo turbulento dentro de una tubería son las siguientes, cuando la entrada es una reducción abrupta.

$$\frac{h}{h_L} = 1 + \frac{D}{L}^{0.7} \qquad 2 < \frac{L}{D} < 20 \tag{4.5-12}$$

$$\frac{h}{h_L} = 1 + 6 \frac{D}{L} \qquad 20 < \frac{L}{D} < 60 \tag{4.5-13}$$

donde h es el valor promedio para un tubo de longitud infinita L y h_L es el valor para un tubo muy largo.

4.5G Coeficiente de transferencia de calor de metales líquidos

Los metales líquidos a veces se usan como fluido para transferir calor en aquellos casos en que se necesita un fluido que esté por encima de una amplia gama de temperaturas a presiones relativamente bajas. Los metales líquidos se usan a menudo en reactores nucleares y tienen altos coeficientes de transferencia de calor, así como una alta capacidad calorífica por volumen unitario. Los altos coeficientes de transferencia de calor se deben a conductividades térmicas sumamente altas y, por tanto, a números de Prandtl bajos. En los metales líquidos en tuberías, la transferencia de calor por conducción es muy importante en todo el núcleo turbulento debido a la alta conductividad térmica, y con frecuencia es más significativa que los efectos de convección.

Para el flujo turbulento completamente desarrollado en tubos con un flujo de calor uniforme se puede emplear la siguiente ecuación (L 1)

$$N_{Nu} = \frac{h_L D}{k} = 0.625 \, N_{Pe}^{0.4} \tag{4.5-14}$$

donde el número de Peclet $N_{Pe} = N_{Re} N_{Pr}$. Esto se cumple para $L/D > 60$ y N_{Pe} entre 100 y 10^4. Para temperaturas constantes de la pared,

$$N_{Nu} = \frac{h_L D}{k} = 5.0 + 0.025 N_{Pe}^{0.8} \tag{4.5-15}$$

para $L/D > 60$ y $N_{Pe} > 100$. Todas las propiedades físicas se evalúan a la temperatura general promedio.

EJEMPLO 4.5-3. Transferencia de calor de metal líquido dentro de un tubo

Un metal líquido fluye a razón de 4.00 kg/s por un tubo que tiene un diámetro interior de 0.05 m. El líquido entra a 500 K y se calienta hasta 505 K en el tubo. La pared del tubo se mantiene auna temperatura de 30 K arriba de la temperatura general del fluido y se conserva constante el flujo de calor. Calcule la longitud necesaria del tubo. Las propiedades físicas promedio son: $\mu = 7.1 \times 10^{-4}$ Pa · s, $p = 7400$ kg/m^3, $c_p = 120$ J/kg . K, $k = 13$ W/m · K.

Solución: El área es $A = \pi D^2/4 = \pi(0.05)2/4 = 1.963 \times 10^{-3}$ m^2. Entonces G = 4.01 $1.963 \times 10^{-3} = 2.038 \times 10^3$ kg/m^2 · s. El número de Reynolds es

$$N_{Re} = \frac{DG}{\mu} = \frac{0.05(2.038 \times 10^3)}{7.1 \times 10^{-4}} = 1.435 \times 10^5$$

$$N_{Pr} = \frac{c_{pr}\cdot\mu}{k} = \frac{120(7.1 \times 10^{-4})}{13} = 0.00655$$

Si se utiliza la ecuación (4.5-14),

$$h_L = \frac{k}{D}(0.625) N_{Pe}^{0.4} = \frac{13}{0.05}(0625)(1.435 \times 105 \times 0.00655)^{0.4}$$
$$= 2512 \text{ W/m}^2 . \text{ K}$$

Cuando se efectúa un balance de calor, queda

$$q = mc_p \text{ AT}$$
$$= 4.00(120)(505 - 500) = 2400 \text{ W} \tag{4.5-16}$$

Y si se sustituye en la ecuación (4.5-1), se obtiene

$$\frac{q}{A} = \frac{2400}{A} = h_L = (T_w - T) = 2512(30) = 75360 \text{ W/m}^2$$

Por consiguiente, $A = 2400/75360 = 3.185 \times 10^{-2}$ m^2. Entonces,

$$A = 3.185 \times 10^{-2} = \pi DL = \pi(0.05)(L)$$

Después de resolver se obtiene $L = 0.203$ m.

4.5H Variación del gradiente de temperatura y media logarítmica de la diferencia de temperatura

Tal como están escritas, las ecuaciones (4.5-l) y (4.3-12) sólo son aplicables cuando la caída de temperatura (T_i – Te) es constante para todas las partes de la superficie de calentamiento. Por tanto, la ecuación

$$q = U_i A_i(T_i - T_0) = U_0 A_0(T_i - T_0) = UA(\Delta T) \qquad \textbf{(4.5-17)}$$

únicamente es válida en un punto del aparato cuando los fluidos se están calentando o enfriando. No obstante, a medida que los fluidos se desplazan a través de un intercambiador de calor, se enfrían o se calientan y presentan variaciones de T_i y T_0, o de T_i o T_0. Entonces, *(Ti* – T_0) *o* AT varían con la posición, y es necesario usar alguna media, *AT,,* con respecto a la totalidad del aparato.

En un intercambiador de calor típico, un fluido caliente que circula por el interior de la tubería se enfría de T_1' a T_2' por medio de un fluido frío que fluye por la superficie de una tubería doble a contracorriente (en dirección inversa) y que se calienta de T_2 a T_1, como muestra la figura 4.5-3a. El valor de AT (que se ilustra) varía con la distancia. Por lo tanto, AT en la ecuación (4.5-17) cambia a medida que el área *A* pasa de 0 en la entrada a *A* en la salida del intercambiador.

Para el flujo a contracorriente de los dos fluidos, como en la figura 4.5-3a, la velocidad de transferencia de calor es

$$q = UA\ \mathrm{AT_m} \qquad (4.5\text{-}l\ 8)$$

donde AT, es una diferencia de temperaturas media conveniente que hay que determinar. Para el área dA, un balance de calor del fluido caliente y del frío da

$$dq = -m' c_p' dT' = mc_p dT \qquad (4.5\text{-}l\ 9)$$

donde la *m* es el gasto en kg/s. Se supone que los valores de m, *m'*, c_p, c_p' y U son constantes.

Además,

$$dq = U(T' - T)dA \qquad (4.5\text{-}20)$$

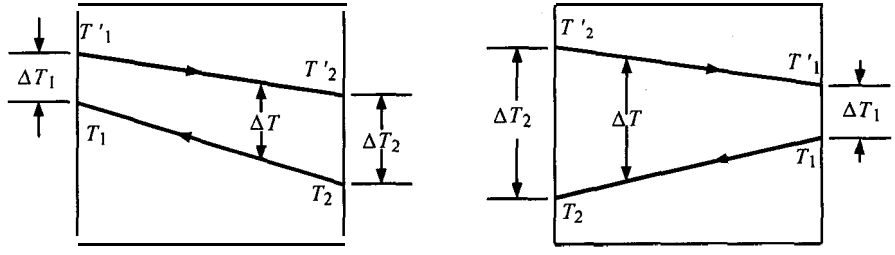


FIGURA 4.5-3. *Perfiles de temperatura para intercambiadores de calor de doble tubo y un paso: a) flujo a contracorriente, b) flujo paralelo.*

A partir de la ecuación (4.5-19), $dT' = -dq/m'c'_p$ y $dT = dq/mc_p$. Por tanto,

$$dT' - dT = d(T' - T) = -dq\left(\frac{1}{m'c'_p} + \frac{1}{mc_p}\right) \tag{4.5-21}$$

Si se sustituye la ecuación (4.520) en la (4.5-21)

$$\frac{d(T' - T)}{T' - T} = -U\left(\frac{1}{m'c'_p} + \frac{1}{mc_p}\right) dA \tag{4.522}$$

Se integra entre los puntos 1 y 2 y se obtiene

$$\ln\left(\frac{T'_2 - T_2}{T'_1 - T_1}\right) = -UA\left(\frac{1}{m'c'_p} + \frac{1}{mc_p}\right) \tag{4.523}$$

Después de hacer un balance de calor entre la entrada y la salida,

$$q = m'c'_p\left(T'_1 - T'_2\right) = mc_p(T_2 - T_1) \tag{4.5-24}$$

Luego se despeja $m'c'_p$ y mc_p en la ecuación (4.5-24) y se sustituye en la ecuación (4.5-23), de lo que resulta

$$q = \frac{UA\left[(T'_2 - T_2) - (T'_1 - T_1)\right]}{\ln\left[(T'_2 - T_2)/(T'_1 - T_1)\right]} \tag{4.5-25}$$

Si se comparan las ecuaciones (4.5-18) y (4.5-25), se ve que AT,,, es la diferencia de temperatura media logarítimica $\Delta T_{1\,m}$. Por consiguiente, en el caso en el que el coeficiente total de transferencia de calor U es constante en todo el equipo y las capacidades caloríficas de ambos fluidos no varían, puede demostrarse que la fuerza impulsora de la temperatura que puede aplicarse con propiedad en la totalidad del aparato, es la media logarítmica de la fuerza impulsora,

$$q = UA \text{ A } T_{1\,m} \tag{4.5-26}$$

donde

$$\text{A } T_{1\,m} = \frac{\text{AT,-AT,}}{\ln\left(\Delta T_2/\Delta T_1\right)} \tag{4.5-27}$$

También puede demostrarse que para un flujo paralelo como el de la figura 4.5-3b, debe aplicarse la media logarítmica de la diferencia de la temperatura. En algunos casos en los que hay condensación de vapor, T'_1 y T'_2 pueden ser iguales. Las ecuaciones aún son válidas para esta situación. Cuando U varía con la distancia o se presentan otras complicaciones, es necesario consultar las referencias (B2, P3, W1).

EJEMPLO 4.5-4. Área de transferencia de calor y media logarítmica de la diferencia de temperaturas

Un aceite de hidrocarburos pesados con una c_{pm} = 2.30 kJ/kg . K se está enfriando en un intercambiador desde 371.9 K hasta 349.7K, y fluye por el interior de una tubería a una velocidad de 3630 kg/h. El enfriamiento consiste en un flujo de 1450 kg de agua/h que está a 288.6 K y fluye por el exterior.

a) Calcule la temperatura de salida del aguay el área de transferencia de calor cuando U_i total es 340 W/m^2 · K y los flujos están a contracorriente.
b) Repitapara flujo paralelo.

Solución: Suponga que c_{pm} = 4.187 kJ/kg . K o para el agua. En la entrada de agua, T_2 = 288.6 K y en la salida, la temperatura es T_1, para la entrada de aceite, T_1' = 371.9 y para la salida T_2' = 349.7 K. Calculando la pérdida de calor del aceite.

$$q = \left(3630 \frac{\text{kg}}{\text{h}}\right)\left(230 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}\right)(3719 - 349.7)\text{K}$$

$$= 185400 \text{ kJ/h o } 51490 \text{ W } (175700 \text{ btu/h})$$

Efectuando un balance de calor, el valor de q debe ser igual al calor ganado por el agua.

$$q = 185400 \text{ kJ/h} = \left(1450 \frac{\text{kg}}{\text{h}}\right)\left(4.187 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}\right)(T_1 - 288.6) \text{ K}$$

Al despejar, T_1 = *3* 19.1 K.

Para determinar la media logarítmica de la diferencia de temperaturas, $AT;! = T_2' - T_2 = 349.7 - 288.6 = 61.1$ K, $\Delta T_1 = T_1' - T_1 = 371.9 - 319.1 = 52.8$ K. Sustituyendo en la ecuación (4.5-27).

$$\Delta T_{1\,m} = \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\ln (\Delta T_2/\Delta T_1)} = \frac{61.1 - 52.8}{\ln (61.1/52.8)} = 56.9 \text{ K}$$

Al usar la ecuación (4.5-26)

$$q = U_i A_i \Delta T_{1\,m}$$
$$51490 = 340 \text{ (Ai)}(56.9)$$

Al despejar A_i = *2.66* m^2,

Para el inciso b), la salida del agua sigue siendo T_1 = 3 19.1 K. Con respecto a la figura 4.5-3b, ΔT_2 = 371.9 – 288.6 = 83.3 K y ΔT_1 = 349.7 – 319.1 = 30.6 K. Otra vez, usando la ecuación (4.5-27) y despejando, $\Delta T_{1\,m}$ = 52.7 K. Al sustituir en la ecuación (4.5-26), A_i = 2.87 m^2. Ésta es un área mayor que la de la contracorriente; esto se debe a que la contracorriente produce fuerzas impulsoras de temperatura de más consideración, razón por la cual se prefiere sobre el flujo paralelo.

EJEMPLO 4.5-5. Transferencia de calor laminar y aproximaciones sucesivas

Un aceite de hidrocarburos a 150 °F entra al interior de una tubería con diámetro interior de 0.0303 pies y 15 pies de longitud, con velocidad de flujo de 80 lb$_m$/h. Se supone que la

superficie interior de la tubería está a una temperatura constante de 350 °F, pues en el exterior se condensa vapor y la pared del tubo tiene un coeficiente de transferencia de calor muy alto. Las propiedades del aceite son c_{pm} = 0.50 btu/1b$_m$. °F y k_m = 0.083 btu/h . pie . "F. La viscosidad del aceite varía con la temperatura como sigue: 150 °F, 6.50 cp; 200 °F, 5.05 cp; 250 "F, 3.80 cp; 300 °F, 2.82 cp; 350 °F, 1.95 cp. Pronostique el coeficiente de transferencia de calor y la temperatura de salida del aceite T_{bo}.

Solución: Éste es un problema con solución por aproximaciones sucesivas, pues se desconoce la temperatura de salida T_{bo} del aceite. Se supondrá, para empezar, un valor de T_{bo} = 250 "F. La temperatura media del volumen que se usará para las propiedades físicas es (150 + 250)/2 o 200 °F. La viscosidad a 200 °F es

$$\mu_b = 5.05(2.4191) = 12.23 \frac{\text{lb}_m}{\text{pie}^2 \cdot \text{h}}$$

A la temperatura de 350 °F de la pared,

$$\mu_w = 1.952(2.4191) = 4.72 \frac{\text{lb}_m}{\text{pie} \cdot \text{h}}$$

El área de corte transversal A de la tubería es

$$A = \frac{\pi D_i^2}{4} = \frac{\pi(0.0303)^2}{4} = 0.000722 \text{ pie}^2$$

$$G = \frac{m}{A} = \frac{80 \text{ lb}_m/\text{h}}{0000722 \text{ pie}^2} = 111000 \frac{\text{lb}_m}{\text{pie}^2 \cdot \text{h}}$$

El número de Reynolds a la temperatura media general es

$$N_{\text{Re}} = \frac{D_i v \rho}{\mu} = \frac{D_i G}{\mu} = \frac{0.0303(11\,1000)}{1223} = 2755$$

El número de Prandtl

$$N_{\text{Pr}} = \frac{c_p \mu}{k} = \frac{0.050(12.23)}{0.083} = 73$$

Puesto que N_{Re} es inferior a 2100, el flujo corresponde a la región laminar y se usa la ecuación (4.5-4). El flujo es también laminar a la temperatura de salida de 250 "F. Sustituyendo,

$$(N_{\text{NU}})_a = \frac{h_a D}{k} = 1.86\left(N_{\text{Re}} N_{\text{Pr}} \frac{D}{L}\right)^{1/3}\left(\frac{\mu_b}{\mu_w}\right)^{0.14}$$

$$\frac{h_a(0.0303)}{0.083} = 1.86\left[2755(7.37)\left(\frac{0.0303}{15.0}\right)\right]^{1/3}\left(\frac{12.23}{4.72}\right)^{0.14}$$

Al despejar, h_a = 20.1 btu/h · pie^2 · °F (114 W/m^2 . K).

Ahora, efectuando un balance de calor del aceite,

$$q = mc_{pm}(T_{bo} - T_{bi}) = 80.00(0.50)(T_{bo} \quad 150) \tag{4.5-28}$$

Al usar la ecuación (4.5-7),

$$q = h_a A\, \Delta T_a \tag{4.5-7}$$

Para AT,,

$$\Delta T_a = \frac{(T_w - T_{bi}) + (T_w - T_{bo})}{2}$$
$$= \frac{(350 - 150) + (350 - T_{bo})}{2}$$
$$= 275 - 0.5\, T_{bo}$$

Al igualar la ecuación (4.5-28) con la (4.5-7) y sustituir,

$$80.0(0.50)(T_{bo} - 150) = hA\Delta T_a$$
$$= 20.1[\pi(0.0303)(15)](275 - 0.5T_{bo})$$

Al despejar, $T_{bo} = 255$ "F.

Este valor es más alto que el supuesto de 250°F. Para la segunda aproximación, la temperatura media general del aceite sería (150 + 255)/2 o 202.5 °F. La nueva viscosidad es 5.0 cp en comparación con 5.05 de la primera aproximación. Esto sólo afecta al factor $(\mu_b/\mu_w)^{0.14}$ de la ecuación (4.5-4), pues el efecto de la viscosidad sobre (N_{Re}) (N_{Pr}) se cancela. El coeficiente de transferencia de calor variará a menos de 0.2%, que es despreciable. De esta manera, la temperatura de salida $T_1 = 255$ °F (123.9 "C) es correcta.

4.6 TRANSFERENCIA DE CALOR POR CONVECCIÓN FORZADA EN EL EXTERIOR DE DIFERENTES GEOMETRÍAS

4.6A Introducción

En muchos casos, un fluido pasa sobre cuerpos completamente sumergidos en él, tales como esferas, tubos, placas, etc., y la transferencia de calor sólo se verifica entre el fluido y el sólido. Muchas de estas formas tienen importancia práctica en la ingeniería de procesos. La esfera, el cilindro y la placa plana, son quizá las que revisten mayor importancia en lo que se refiere a la transferencia de calor entre estas superficies y un fluido en movimiento.

Cuando hay una transferencia de calor durante un flujo sumergido, el flujo específico depende de la geometría del cuerpo, de su posición (frontal, lateral, posterior, etc.), de la proximidad de otros cuerpos, de la velocidad del flujo y de las propiedades del fluido. El coeficiente de transferencia de calor varía en diferentes partes del cuerpo. En las relaciones empíricas que se estudian en las siguientes secciones se usa un coeficiente promedio de transferencia de calor.

En general, el coeficiente promedio de transferencia de calor en cuerpos sumergidos es

$$N_{Nu} = C N_{Re}^{m} N_{Pr}^{1/3} \tag{4.6-1}$$

donde C y m son constantes que dependen de las diversas configuraciones. Las propiedades del fluido se evalúan a la temperatura de película $T_f = (T_w + T_b)/2$, donde T_w es la temperatura superficial o de la pared y T_b es la temperatura del volumen promedio del fluido. La velocidad en N_{Re} es la velocidad v de corriente libre sin perturbaciones del fluido que se aproxima al objeto.

4.6B Flujo paralelo a una placa plana

Cuando el fluido fluye paralelo a una placa plana y hay transferencia de calor entre la totalidad de la placa de longitud L m y el fluido, el valor de N_{Nu} es, para un $N_{Re,L}$ inferior a 3×10^5 en la región laminar y un $N_{Pr} > 0.7$,

$$N_{Nu} = 0.664 N_{Re,L}^{0.5} N_{Pr}^{1/3} \tag{4.6-2}$$

donde $N_{Re} = Lv\rho/\mu$.

Para la región completamente turbulenta con N_{Re}, L superior a 3×10^5 (K1, K3) y $N_{Pr} > 0.7$,

$$N_{Nu} = 0.0366 N_{Re,L}^{0.8} N_{Pr}^{1/3} \tag{4.6-3}$$

Sin embargo, la turbulencia puede empezar con un $N_{Re,L}$ inferior a 3×10^5 si la placa es rugosa (K3) y entonces se cumple la ecuación (4.6-3) que dará un N_{Nu} mayor que el de la ecuación (4.6-2). Por debajo de un valor de $N_{Re,L}$ de 2×10^4, la ecuación (4.6-2) dará el valor más alto de N_{Nu}.

EJEMPLO 4.6-l. Enfriamiento de una aleta de cobre

Una aleta de cobre plana, lisa y delgada, que sobresale de un tubo, es un cuadrado de 5 1 mm por 5 1 mm. Su temperatura es aproximadamente uniforme e igual a 82.2 °C. Una corriente de aire de enfriamiento a 15.6 °C y 1 atm abs fluye paralela a la aletas a una velocidad de 12.2m/s.

a) Calcule el coeficiente de transferencia de calor, h, para flujo laminar.
b) Calcule h cuando el borde de entrada de la aleta es rugoso, de tal manera que la capa o película límite adyacente a la aleta es completamente turbulenta.

Solución: Las propiedades del fluido se evalúan a la temperatura de película $T_f = (T_w + T_b)/2$

$$T_f = \frac{T_w + T_b}{2} = \frac{(0.051)(12.2)(1.097)}{1.95 \times 10^{-5}} = 48.9\ °C (322.1\ K)$$

Del apéndice A.3, las propiedades físicas del aire a 48.9 °C son $k = 0.0280$ W/m . K, $p = 1.097$ kg/m^3 m $= 1.95 \times 10^{-5}$ Pa · s, $N_{Pr} = 0.704$. El numero de Reynolds para $L = 0.051$ m,

$$N_{Re,L} = \frac{Lv\rho}{\mu} = \frac{(0.051)(12.2)(1.097)}{1.95 \times 10^{-5}} = 3.49 \times 10^4$$

Al sustituir en la ecuación (4.6-2),

$$N_{Nu} = \frac{hL}{k} 0.664 N_{Re,L}^{0.5} N_{Pr}^{1/3}$$

$$\frac{h(0.051)}{(0.0280)} = 0.664(3.49 \times 10^4)^{0.5}(0.704)^{1/3}$$

Al despejar, $h = 60.7$ W/m^2 · K (10.7 btu/h · pies^2 · °F).

Para el inciso (b), sustitúyase en la ecuación (4.6-3) y despéjese, $h = 77.2$ W/m^2 . K (13.6 btu/h . pies^2 · °F).

4.6C Cilindro con el eje perpendicular al flujo

Sucede con frecuencia que un cilindro que contiene un fluido en su interior se calienta o se enfría por medio de otro fluido que circula perpendicularmente a su eje. La ecuación para predecir el coeficiente promedio de transferencia de calor en el exterior del cilindro para gases y líquidos es (K3, P3), la ecuación (4.6-1), donde los valores de C y m se dan en la tabla 4.6-l. El valor de $N_{Re} = Dv\rho/\mu$, donde D es el diámetro exterior del tubo y todas las propiedades físicas se evalúan a la temperatura de película, T_f. La velocidad es la que corresponde a una corriente libre sin perturbación que se aproxima al cilindro.

4.6D Flujo que pasa por una sola esfera

Cuando una esfera se calienta o enfria mediante un fluido que pasa por ella, se puede usar la siguiente ecuación para predecir el coeficiente promedio de transferencia de calor para un $N_{Re} = Dv\rho/\mu$ entre 1 a 70000 y un N_{Pr} de 0.6 a 400:

$$N_{Nu} = 2.0 + 0.60 N_{Re.L}^{0.5} N_{Pr}^{1/3} \qquad (4.6\text{-}4)$$

Las propiedades del fluido se evalúan a la temperatura de película T_f. Otras referencias (S2) analizan una correlación más precisa para un intervalo de N_{Re} entre 1 y 17000, que toma en consideración los efectos de la convección natural a estos números de Reynolds tan bajos.

EJEMPLO 4.6-2. Enfriamiento de una esfera

Usando las mismas condiciones del ejemplo 4.6-1, con un flujo de aire a 1 atm abs y 15.6 °C auna velocidad de 12.2 m/s, predígase el coeficiente promedio de transferencia de calor para el flujo de aire que pasa por una esfera de 51 mm de diámetro y con temperatura superficial promedio de 82.2 “C. Compare este valor con el $h = 77.2$ W/m^2 · K del caso de una placa plana con flujo turbulento.

Solución: Las propiedades físicas a temperaturas promedio de película de 48.9 °C son iguales a las del ejemplo 4.6-l. El N_{Re} es

$$N_{Re} = \frac{Dv\rho}{\mu} = \frac{(0.051)(12.2)(1.097)}{1.95 \times 10^{-5}} = 3.49 \times 10^4$$

TABLA 4.6-1. *Constantes para la ecuación (4.6-I) de transferencia de calor en cilindros con el eje perpendicular al flujo ($N_{Re} > 0.6$)*

N_{Re}	m	C
1 - 4	0.330	0.989
4 - 40	0.385	0.911
40 – 4 × 10^3	0.466	0.683
4 × 10^3 - 4 × 10^4	0.618	0.193
4 × 104 - 2.5 × 10^5	0.805	0.0266

Al sustitur, en la ecuación (4.6-4) para una esfera,

$$N_{Nu} = \frac{hD}{k} \quad h = \frac{(0.05\ 1)}{.0280} = 2.0 + 0.60\ N_{Re,\ L}^{0.5} N_{Pr}^{1/3}$$
$$= 2.0 + (0.60)(3.49 \times 10^4)^{0.5}(0.704)^{1/3}$$

Al despejar, $h = 56.1$ W/m^2 · K (9.88 btu/h . pie^2 . °F). Este valor es un poco inferior al de $h = 77.2$ W/m^2 . K (13.6 btu/h · pie^2 . °F) para una placa plana.

4.6E Flujo que pasa por baterías de tubos o cilindros

Muchos intercambiadores de calor comerciales se construyen con hileras múltiples de tubos, en los cuales el fluido fluye perpendicularmente a la batería de tubos. Un ejemplo es el calentador de gas en el que fluido caliente en el interior de los tubos calienta un gas que pasa por las superficies de éstos. Otro ejemplo es el de una corriente líquida fría en el interior de tubos, que se calienta con un fluido caliente que fluye en el exterior.

La figura 4.6-l muestra la distribución de baterías de tubos en hileras alineadas y alternadas, donde D es el DE del tubo en m (o pies), S_n es la distancia en m (o pies) en dirección norma1 al flujo entre los centros de los tubos, y S_p la separación en dirección paralela al flujo. El aire disponible para el flujo en el caso de tubos alineados es $(S_n - D)$ y $(S_p - D)$ y para tubos alternados es $(S_n - D)$ y $(S'_p - D)$. En la tabla 4.6-2 se incluyen los valores de C y m que deben intervenir en la ecuación (4.6-l) para un intervalo de números de Reynolds de 2000 a 40000 para la transferencia de calor de baterías de tubos que contienen más de 10 hileras transversales en la dirección del flujo. La tabla 4.6-3 muestra los factores de corrección para menos de diez hileras.

Cuando S_n/D y S_p/D no son iguales entre sí, el lector deberá consultar la referencia de Grimison (G1) para datos adicionales. En los intercambiadores con deflectores, donde hay desviaciones y no todo el flujo es normal a los tubos, los valores promedio de h que se obtengan deben multiplicarse por 0.6 (P3). El número de Reynolds se calcula mediante el área mínima disponible para la velocidad del flujo. Todas las propiedades físicas se evalúan a la temperatura T_f.

EJEMPLO 4.6-3. Calentamiento de aire con una batería de tubos

Una corriente de aire a 15.6 °C y 1 atm abs fluye por una batería de tubos que contiene cuatro hileras transversales en la dirección del flujo y 10 hileras normales al flujo, a velocidad de

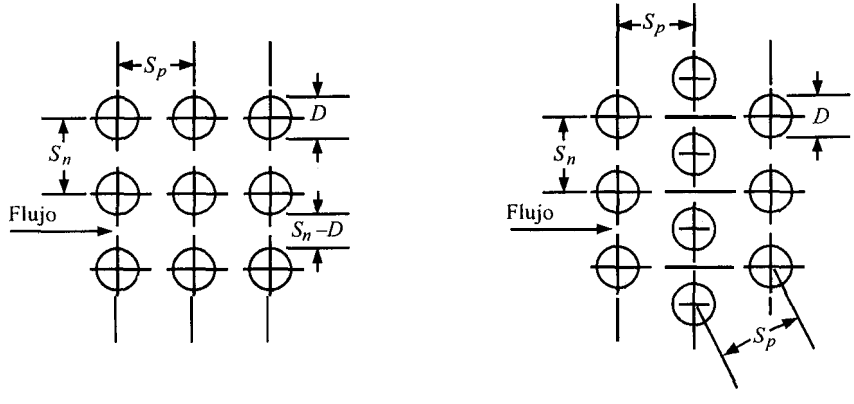


FIGURA 4.6-1. *Nomenclatura para las baterias de tubos incluidas en la tabla 4.6-2: a) hileras de tubos alineados, b) hileras de tubos alternados.*

7.62 m/s al entrar ala batería de tubos. Las superficies de los tubos se mantienen a 57.2 "C. El diámetro externo de los tubos es 25.4 mm y están alineados. La separación S_n de los tubos en dirección normal al flujo es 38.1 mm y S_p, esto es, la separación en paralelo al flujo, también es 38.1 mm, Calcule la velocidad de transferencia de calor para una longitud de 0.305 m de batería de tubos.

TABLA *4.6-2. Valores de C y m para la ecuación (4.6-1) para transferencia de calor en baterias de tubos con más de 10 hileras transversales*

	$\frac{S_n}{D} = \frac{S_p}{D} = 1.25$		$\frac{S_n}{D} = \frac{S_p}{D} = 1.50$		$\frac{S_n}{D} = \frac{S_p}{D} = 2.0$	
Distribución	*C*	*m*	*C*	*m*	*c*	*m*
Alineados	0.386	0.592	0.278	0.620	0.254	0.632
Alternados	0.575	0.556	0.511	0.562	0.535	0.556

Tomado de: E. D. Grimison, Trans. ASME, 59, 583 (1937).

Solución: Con respecto a la figura 4.6-la.

$$\frac{S_n}{D} = \frac{38.1}{25.4} = \frac{1.5}{1} \qquad \frac{S_n}{D} = \frac{38.1}{25.4 - 1} = \frac{1.5}{1}$$

Puesto que el aire se calienta al pasar por las cuatro hileras transversales, se supondrá una temperatura general de 2 1.1 °C Entonces, la temperatura general promedio es

$$T_b = \frac{15.6 + 21.1}{2} = 18.3\ ^\circ\text{C}$$

La temperatura promedio de película es

$$T_f = \frac{T_w - T_b}{2} = \frac{57.2 + 18.3}{2} = 37.7\ ^\circ\text{C}$$

Del apéndice A.3 para aire a 37.7°C

$$k = 0.02700\ \text{W/m} \cdot \text{K} \qquad N_{\text{Pr}} = 0.705$$
$$c_p = 1.0048\ \text{kJ/kg} \cdot \text{K} \qquad \rho = 1.137\ \text{kg/m}^3$$
$$\mu = 1.90 \times 10^{-5}\ \text{Pa} \cdot \text{s}$$

TABLA *4.6-3. Relación de h para N hileras transversales a h para 10 hileras transversales (combínese con la tabla 4.6-2)*

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Relación para tubos alternados	0.68	0.75	0.83	0.89	0.92	0.95	0.97	0.98	0.99	1.00
Relación para tubos alineados	0.64	0.8	0.87	0.9	0.92	0.94	0.96	0.98	0.99	1.00

Tomado de: W. M. Kays y R. K. Lo, *Stanford Univ. Teach. Rept. 15*, Navy Contract N6-ONR-251 T.0.6, 1952.

La relación entre el área mínima de flujo y el área frontal total es $(S_n - D)/S_n$. La velocidad máxima en la batería de tubos será

$$v_{máx} = \frac{vS_n}{S_n - D} = \frac{7.62(0.0381)}{(0.0381 - 0.0254)} = 22.86 \text{ m/s}$$

$$N_{Re} = \frac{Dv_{máx}\rho}{\mu} = \frac{0.0254(22.86)(1.137)}{1.90 \times 10^{-5}} = 3.47 \times 10^4$$

Para $S_n/D = S_p/D = 1.511$, los valores de C y m en la tabla.4.62, son 0.278 y 0.620, respectivamente. Sustituyendo en la ecuación (4.6-l) y despejando h,

$$h = \frac{k}{D} C N_{Re}^m N_{Pr}^{1/3} = \left(\frac{0.02700}{0.0254}\right)(0.278)(3.47 \times 10^4)^{0.62}(0.705)^{1/3}$$
$$= 171.8 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$$

Éste es el valor de h para 10 hileras. Para sólo 4 hileras en dirección transversal, h debe multiplicarse por 0.90, como indica la tabla 4.6-3.

Puesto que hay 10 × 4 o 40 tubos, el área total de transferencia de calor por cada 0.305 m de longitud es

$$A = 40\pi DL = 40\pi(0.0254)(0.305) = 0.973 \text{ m}^2$$

La cantidad total de transferencia de calor q con un promedio aritmético de diferencia de temperaturas entre la pared y el volumen de fluido, es

$$q = hA(T_w - T_b) = (0.90 \times 171.8)(0.973)(57.2 - 18.3) = 5852 \text{ W}$$

Después se procede a un balance de calor con respecto al aire, para determinar su elevación de temperatura AT, puesto que ya calculamos el valor de q. Primero, es necesario calcular el gasto másico m. El área frontal total de la batería de tubos de 10 hileras con longitud de 0.305 m cada uno, es

$$A_t = 10S_n(1.0) = 10(0.0381)(0.305) = 0.1162 \text{ m}^2$$

La densidad del aire de entrada a 15.6 °C es $\rho = 1.224 \text{ kg/m}^3$. El gasto másico m es

$$m = v\rho A_t(3600) = 7.62(1.224)(0.1162) = 1.084 \text{ kg/s}$$

El valor medio de c_p del aire a 18.3 °C para el balance de calor, es 1.0048 kJ/kg . K por lo que

$$q = 5852 = mc_p\Delta T = 1.084(1.0048 \times 10^3)\Delta T$$

Al despejar, AT = 5.37 "C.

Por consiguiente, la temperatura general calculada para el gas de salida es 15.6 + 5.37 = 20.97 "C, un valor cercano al de 21.1 °C supuesto. Si se procediera a una segunda aproximación, el nuevo valor promedio de T_b sería (15.6 + 20.97)/2 o 18.28 °C.

4.6F Transferencia de calor para flujo en lechos empacados

Las correlaciones para los coeficientes de transferencia de calor para lechos empacados son útiles en el diseño de sistemas de lecho fijo como los reactores catalíticos, los secadores para sólidos y

los intercambiadores de calor de lecho de guijarros. En la sección 3.1C se consideró la caída de presión en los lechos empacados y se analizaron los factores de geometría en esos lechos. Para determinar la velocidad de transferencia de calor en los lechos empacados para una longitud diferencial dz en m,

$$dq = h(a\ S\ dz)(T_1 - T_2) \tag{4.6-5}$$

donde a es el área superficial de la partícula sólida por volumen unitario del lecho en m^{-1}, S el área de corte transversal vacía del lecho en m^2, T_1 la temperatura general del gas en K y T_2 la temperatura superficial del sólido.

Para la transferencia de calor de los gases en lechos de esferas (G2, G3) y con un intervalo de números de Reynolds de 10 a 10000,

$$\varepsilon J_H = \varepsilon \frac{h}{c_p v' \rho}\left(\frac{c_p \mu}{k}\right)_f^{2/3} \frac{-2876}{N_{Re}} + \frac{03023}{N_{Re}^{0.35}} \tag{4.6-6}$$

donde v' es la velocidad superficial basada en el corte transversal del recipiente vacío en m/s [véase la ecuación (3.1- ll)], ε es la fracción de vacío, $N_{Re} = D_p G'/m_f$ y G' = $v'\rho$ es la velocidad de masa superficial en kg/m^2. s. El subíndice f indica las propiedades evaluadas a la temperatura de la película, mientras que las otras lo están a la temperatura general. Esta correlación también puede usarse para un lecho fluidizado. Una ecuación alterna que puede usarse en lugar de la ecuación (4.6-6) para lechos fijos y fluidizados es la (7.3-36) para un intervalo de números de Reynolds de 10 a 4000. El término J_H se denomina factor J de Colburn y se define como en la ecuación (4.6-6) en términos de h.

Las ecuaciones de transferencia de calor a cilindros no circulares como un hexágono, etc., se dan en otro sitio (H1, J1 P3).

4.7 TRANSFERENCIA DE CALOR POR CONVECCIÓN NATURAL

4.7A Introducción

La transferencia de calor por convección natural se presenta cuando una superficie sólida está en contacto con un gas o un líquido a temperatura diferente de la superficie. Las diferencias de densidad en el fluido debidas al proceso de calentamiento, proporcionan la fuerza de flotación requerida para el movimiento del fluido. La convección libre o naturales es entonces una consecuencia del movimiento del fluido. Un ejemplo de transferencia de calor por convección natural es un radiador para calentar una habitación. El aire frío que llega al radiador se calienta, elevándose por convección natural debido al efecto de flotación, por ser más ligero. La deducción teórica de las ecuaciones para los coeficientes de transferencia de calor por convección natural requiere la resolución de las ecuaciones de movimiento y de energía.

Un importante sistema de transferencia de calor que se presenta en ingeniería de procesos es aquel en el cual el calor se transfiere por convección natural desde una placa vertical caliente hacia un gas o líquido adyacente a ella. El fluido no se mueve por convección forzada, sino sólo por convección natural o libre. En la figura 4.7-1, la placa plana vertical se calienta y se forma la capa límite de convección libre. El perfil de velocidad difiere de aquel de un sistema de convección forzada en que la velocidad en la pared es cero y también es cero en el otro borde de la capa límite, ya que la velocidad de corriente libre es cero para la convección natural. Inicialmente la capa límite es laminar, como se muestra, pero a cierta distancia del borde de entrada empieza a volverse turbulenta. La temperatura en la pared es T_w K y la temperatura general es T_b.

La ecuación diferencial de balance de momento lineal se escribe para las direccionesx yy para el volumen de control $(dx\ dy \cdot 1)$. La fuerza impulsora es fuerza de flotación en el campo gravitatorio y se debe a la diferencia de densidad del fluido. El balance de momento lineal se transforma en

$$\rho\left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = g(\rho_b - \rho) + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \tag{4.7-1}$$

donde ρ_b es la densidad a la temperatura general T_b y p a la T. La diferencia de densidad puede expresarse en términos del coeficiente volumétrico de expansión β y sustituirse de nuevo en la ecuación (4.7-l).

$$\beta = \frac{\rho_b - \rho}{\rho(T - T_b)} \tag{4.7-2}$$

Para gases, $\beta \simeq 1/T$. La ecuación de balance de energía se puede expresar así:

$$\rho c_p\left(v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y}\right) = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{4.7-3}$$

Las soluciones de esas ecuaciones se han obtenido usando los métodos integrales de análisis estudiados en la sección 3.10. Ya se han obtenido los resultados para una placa vertical, que es el caso más sencillo y que sirve para introducir el número adimensional de Grashof que se analiza en seguida. Sin embargo, en otras geometrías físicas las relaciones son demasiado complejas y las correlaciones que se han obtenido son empíricas. Éstas se estudian en las siguientes secciones.

4.7B Convección natural con diferentes geometrías

1. Convección natural en planos y cilindros verticales. Para una superficie o placa vertical isotérmica con altura L inferior a 1 m (P3), el coeficiente promedio de transferencia de calor por convección natural puede expresarse mediante la siguiente ecuación:

$$N_{\mathrm{Nu}} = \frac{hL}{k} = a\left(\frac{L^3 \rho^2 g\beta\ \mathrm{AT}\ c_p \mu}{\mu^2 \qquad k}\right)^m = a(N_{\mathrm{Gr}} N_{\mathrm{Pr}})^m \tag{4.7-4}$$

donde a y m son constantes de la tabla 4.7-1, N_{Gr} es el número de Grashof, p es la densidad en $\mathrm{kg/m^3}$, μ es la viscosidad en $\mathrm{kg/m \cdot s}$, AT es la diferencia positiva de temperaturas entre la pared y la totalidad del fluido (o viceversa) en K, k es la conductividad térmica en $\mathrm{W/m \cdot K}$, c_p es la capacidad calorífica en $\mathrm{J/kg \cdot K}$, β es el coeficiente volumétrico de expansión del fluido en $1/\mathrm{K}$ (el valor de β para gases es $1\ (T_f \mathrm{K})$ y g es $9.80665\ \mathrm{m/s^2}$. Todas las propiedades físicas se evalúan a la temperatura de la película $T_f = (T_w + T_b)/2$. En general, para un cilindro vertical de longitud L m se usan las mismas ecuaciones de una placa vertical. En unidades del sistema inglés, β es $1/(T_f\ ^\circ\mathrm{F} + 460)$ en $1/^\circ\mathrm{R}$ y g es $32.171 \times (3600)^2$ pie/h^2.

El número de Grashof se interpreta físicamente como un número adimensional que representa la relación de las fuerzas de flotación con las fuerzas viscosas en la convección libre y su papel es similar al del número de Reynolds en la convección forzada.

EJEMPLO 4.7-1. Convección natural de una pared vertical de un horno

La pared vertical caliente de 1 .0 pies (0.305 m) de altura de un horno para cocinar alimentos tiene una temperatura en su superficie que asciende a 450 °F (505.4 K) y, está en contacto con aire a 100 °F (3 ll K). Calcule, en unidades del sistema inglés y SI, el coeficiente de transferencia de calor y transferencia de calor/pie (0.305 m) de la anchura de la pared. Note que no se considera la transferencia de calor por radiación. Use unidades SI y del sistema inglés.

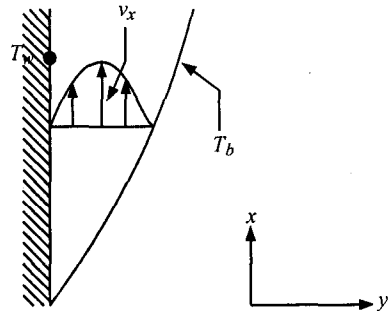


FIGURA 4.7-1. *Perfil de velocidad de capa límite para transferencia de calor por convección natural desde una placa vertical calentada.*

TABLA 4.7-I. *Constantes para la ecuación (4.7-4) de convección natural*

Geometía Física	$N_{Gr}N_{Pr}$	*a*	*m*	*Ref.*
Planos y cilindros verticales [altura vertical L < 1 m (3 pies)]				
	$<10^4$	1.36	1 5	(P3)
	10^4–10^9	0.59	$\frac{1}{4}$	(M1)
	$>10^9$	0.13	$\frac{1}{3}$	(M1)
Cilindros horizontales [diámetro D usado para L y D < *0.20* m (0.66 pie)]				
	$<10^{-5}$	0.49	0	(P3)
	1 o-5-1 0^{-3}	0.71	$\frac{1}{2}$5	(P3)
	10-J-l	1.09	$\frac{1}{10}$	(P3)
	l-104	1.09	$\frac{1}{3}$	(P3)
	10^4–10^9	0.53	$\frac{1}{4}$	(M1)
	$>10^9$	*0.13*	$\frac{1}{3}$	(P3)
Placas horizontales				
Superficie superior	10^5–2 x 10^7	0.54	$\frac{1}{4}$	(M1)
de placas calentadas o superficie inferior de placas enfriadas	2 x 107-3 x 10^{10}	0.14	$\frac{1}{3}$	(M1)
Superficie inferior de placas calentadas o superficie superior de placas enfriadas	10^5–10^{11}	0.58	$\frac{1}{5}$	(F1)

Solución: La temperatura de película es

$$T_f = \frac{T_w + T_b}{2} = \frac{450 + 100}{2} = 275\,^\circ\text{F} = \frac{505.4 + 311}{2} = 408.2\ \text{K}$$

Las propiedades físicas del aire a 275°F son $k = 0.0198$ btu/h . pie . °F, 0.0343 W/m . K; $\rho = 0.0541\ \text{lb}_m/\text{pie}^3$, 0.867 kg/m^3; $N_{Pr} = 0.690$; $\mu = (0.0232\ \text{cp}) \times (2.4191) = 0.0562\ \text{lb}_m/\text{pie} \cdot \text{h} = 2.32 \times 10^{-5}\ \text{Pa} \cdot \text{s}$; $\beta = 1/408.2 = 2.45 \times 10^{-3}$ K-t, $\beta = 1/(460 + 275) = 1.36 \times 10^{-3}$ °R^{-1}; AT= $T_w - T_b = 450 - 100 = 350$°F (194.4 K). El número de Grashof en unidades inglesas es

$$N_{Gr} = \frac{L^3 \rho^2 g \beta \Delta T}{\mu^2} = \frac{(1.0)^3(0.0541)^2(32.174)(3600)^2(1.36 \times 10^{-3})(350)}{(0.0562)}$$

$$= 1.84 \times 10^8$$

En unidades SI es

$$N_{Gr} = \frac{(0.305)^3(0.867)^2(9.806)(2.45 \times 10^{-3})(194.4)}{(2.32 \times 10^{-5})^2} = 1.84 \times 10^8$$

Resulta evidente, como muestran estos cálculos, que el número de Grashof debe ser el mismo, cualquiera que sea el sistema de unidades:

$$N_{Gr} N_{Pr} = (1.84 \times 10^8)(0.690) = 1.270 \times 10^8$$

Por tanto, con base en la tabla 4.7-1, $a = 0.59$ y $m = \frac{1}{4}$ para la ecuación (4.7-4). Despejando h de esta igualdad y sustituyendo los valores conocidos,

$$h = \frac{k}{L} a(N_{Gr} N_{Pr})^m = \left(\frac{0.0198}{1.0}\right)(0.59)(1.270 \times 10^8)^{1/4} = 1.24\ \text{btu/h . pie}^2\ .\ ^\circ\text{F}$$

$$h = \left(\frac{0.0343}{0.305}\right)(0.59)(1.27 \times 10^8)^{1/4} = 7.03\ \text{W/m}^2\ .\ \text{K}$$

Para una anchura de 1 .O pie de pared, $A = 1 \times 1 = 1.0\ \text{pie}^2$ (0.305 × 0.305 m^2). Entonces,

$$q = hA(T_w - T_b) = (1.24)(1.0)(450 - 100) = 433\ \text{btu/H}$$

$$q = 7.03(0.305 \times 0.0305)(194.4) = 127.1\ \text{W}$$

También se perderá una cantidad de calor considerable por radiación. Esto se analizará en la sección 4.10.

En la tabla 4.7-2 se muestran ecuaciones simplificadas para la transferencia de calor por convección natural del aire a planos y cilindros verticales, a 1 atm abs de presión. En unidades SI, la ecuación para el intervalo de $N_{Gr}\ N_{Pr}$ entre 10^4 y 10^9 es la mas común y válida para valores de $(L^3 \Delta T)$ inferiores a unos 4.7 m^3 . K y temperaturas de película entre 255 y 533 K. Para corregir el valor de h a presiones diferentes de 1 atm, los valores de la tabla 4.7-2 se multiplican por $(p/101.32)^{1/2}$ para N_{Gr} Np,. de 10^4 a 10^9 y por $(p/1\,101.32)^{2/3}$ para $N_{Gr}\ N_{Pr} > 10^9$, donde p = presión en kN/m^2. En unidades del sistema inglés, el intervalo de $N_{Gr}\ N_{Pr}$ de 10^4 a 10^9 es válido cuando $(L^3\ \Delta T)$ es inferior a 300 pie^3 . °F. El valor de h puede

corregirse para presiones diferentes a 1 .0 atm abs multiplicando el valor h por $p^{1/2}$ para $N_{Gr}\,N_{Pr}$ entre 10^4 a 10^9 y por $p^{2/3}$ para $N_{Gr}\,N_{Pr}$ superiores a 10^9, donde p = atm abs de presión. Existen también ecuaciones simplificadas para agua y líquidos orgánicos.

TABLA *4.7-2. Ecuaciones simplificadas para convección natural desde diversas superficies*

Geometría física	$N_{GR}N_{Pr}$	*Ecuación* h = btu/h pie^2 °F, L = pie, AT = °F, D = pie	*Ecuación* h = W/m^2 K, $L = m, AT = K$, $D = m$	*Ref.*
	Aire a 101.32 k Pa (1 atm) abs de presión			
Planos y cilindros verticales				
	10^4–10^9	$h = 0.28(\Delta T/L)^{1/4}$	$h = 1.37(\Delta T/L)^{1/4}$	(P1)
	$>10^9$	$h = 0.18(\Delta T/L)^{1/3}$	$h = 1.24\,\Delta T^{1/3}$	(P1)
Cilindros horizontales	10^3–10^9	$h = 0.27(\Delta T/L)^{1/4}$	$h = 1.32(\Delta T/L)^{1/4}$	(M1)
	$>10^9$	$h = 0.18(\Delta T)^{1/3}$	$h = 1.24\,\Delta T^{1/3}$	(M1)
Placa horizontal				
Placa calentada hacia arriba o enfriada hacia bajo	10^{-5}–2×10^7	$h = 0.27(\Delta T/L)^{1/4}$	$h = 1.32(\Delta T/L)^{1/4}$	(M1)
	2×10^7–3×10^{10}	$h = 0.22(\Delta T)^{1/3}$	$h = 1.52\,\Delta T^{1/3}$	(M1)
Placa calentada hacia abajo o placa enfriada hacia arriba	3×10^5–3×10^{10}	$h = 22(\Delta T/L)^{1/4}$	$h = 0.59(\Delta T/L)^{1/4}$	(M1)
	Agua a 70 °F(294 K)			
Planos y cilindros verticales	10^4–10^9	$h = 26(\Delta T/L)^{1/4}$	$h = 127(\Delta T/L)^{1/4}$	(P1)
	Líquidos orgánicos a 70 F(294 K)			
Planos y cilindros verticales	10^4–10^9	$h = 12(\Delta T/L)^{1/4}$	$h = 59(\Delta T/L)^{1/4}$	(P1)

EJEMPLO 4.7-2. Convección natural y una ecuación simplificada

Repita el ejemplo 4.7-l usando la ecuación simplificada.

Solución: La temperatura de película de 408.2 K está en el intervalo de 255-533 K. Además,

$$L^3\,\mathrm{AT} = (3.305)^3(194.4) = 5.5.$$

Este valor es ligeramente superior al de 4.7 que se da como el máximo aproximado para usarse con la ecuación simplificada. Sin embargo, en el ejemplo 4.7-1, el valor de $N_{Gr}\,N_{Pr}$ es inferior a 10^9, por lo que se usará la ecuación simplificada de la tabla 4.7-2:

$$h = 1.37\left(\frac{\Delta T}{L}\right)^{1/4} = 1.37\left(\frac{194.4}{0.305}\right)^{1/4}$$
$$= 6.88\ \mathrm{W/m^2 \cdot K}\ (1.21\ \mathrm{btu/h\ pie^2\ °F})$$

La velocidad de transferencia de calor q es

$$q = hA(T_w - T_b) = 6.88(0.305 \times 0.305)(194.4) = 124.4\ \mathrm{W}\ (424\ \mathrm{btu/h})$$

Este valor es razonablemente cercano al de 127.1 W del ejemplo 4.7-1.

2. Convección natural desde cilindros horizontales. Para un cilindro horizontal con diámetro externo D m, es útil la ecuación (4.7-4) con las constantes de la tabla 4.7-l. El diámetro D reemplaza a L en la ecuación. En la tabla 4.7-2 se muestran ecuaciones simplificadas. El caso común para tuberías es un intervalo de valores de $N_{Gr}N_{Pr}$ de 10^4 a 10^9 (M1).

3. *Convección natural desde placas horizontales.* La ecuación (4.7-4) también puede aplicarse para placas horizontales, con las constantes de la tabla 4.7-l y las ecuaciones simplificadas de la tabla 4.7-2. La dimensión L es la longitud de un lado de una placa cuadrada, la medida lineal de las dos dimensiones de un rectángulo, o 0.9 veces el diámetro de un disco circular.

4. Convección natural en espacios encerrados. La convección libre en espacios encerrados se presenta en varias aplicaciones de procesamiento. Un ejemplo es en una ventana doble cerrada en la cual dos capas de vidrio están separadas por una capa de aire para conservar la energía. Los fenómenos de flujo dentro de estos espacios encerrados son complejos, ya que pueden ocurrir varios tipos diferentes de patrones de flujo. A bajos números de Grashof, la transferencia de calor sucede principalmente por conducción a través de la capa de fluido. A medida que aumenta el número de Grashof, se presentan diferentes regímenes de flujo.

El sistema de dos placas verticales de altura L m que contienen el fluido con una separación de δ m se muestra en la figura 4.7-2, donde las superficies de las placas están a las temperaturas T_1 y T_2. El número de Grashof se define como

$$N_{Gr,\,\delta} = \frac{\delta^3 \rho^2 g \beta (T_1 - T_2)}{\mu^2} \tag{4.7-5}$$

El número de Nusselt se define como

$$N_{Nu,\,\delta} = \frac{h\delta}{k} \tag{4.7-6}$$

El flujo de calor se calcula a partir de

$$\frac{q}{A} = h\,(T_1 - T_2) \tag{4.7-7}$$

Las propiedades físicas se evalúan a la temperatura media entre las dos placas.

Para los gases encerrados entre placas verticales y $L/\delta > 3$ (H1, J1, K1, P1),

$$N_{Nu,\,\delta} = \frac{h\delta}{k} = 1.0 \qquad (N_{Gr,\,\delta} N_{Pr} < 2 \times 10^3) \tag{4.7-8}$$

$$N_{Nu,\,\delta} = 0.20 \frac{(N_{Gr,\,\delta} N_{Pr})^{1/4}}{(L/\delta)^{1/9}} \qquad (6 \times 10^3 < N_{Gr,\,\delta} N_{Pr} < 2 \times 10^5) \tag{4.7-9}$$

$$N_{Nu,\,\delta} = 0.073 \frac{(N_{Gr,\,\delta} N_{Pr})^{1/3}}{(L/\delta)^{1/9}} \qquad (2 \times 10^5 > N_{Gr,\,\delta} N_{Pr} < 2 \times 10^7) \tag{4.7-10}$$

Para líquidos en placas verticales

$$N_{Nu,\,\delta} = \frac{h\delta}{k} 1.0 \qquad (N_{Gr,\,\delta} N_{Pr} < 1 \times 10^3) \tag{4.7-l 1}$$

$$N_{Nu,\,\delta} = 0.28 \frac{(N_{Gr,\,\delta} N_{Pr})^{1/4}}{(L/\delta)^{1/4}} \qquad (1 \times 10^3 < N_{Gr,\,s}\ N_{Pr} < 2 \times 10^7) \tag{4.7-12}$$

Para gases o líquidos en un anillo vertical se cumplen las mismas ecuaciones que para placas verticales.

Para gases en placas horizontales, de las cuales la inferior está más caliente que la superior,

$$N_{Nu,\,s} = 0.21\,(N_{GR,\,\delta} N_{Pr})^{1/4} \qquad (7 \times 10^3 < N_{Gr,\,\delta} N_{Pr} < 3 \times 10^5) \tag{4.7-13}$$

$$N_{Nu,\,s} = 0.061 (N_{Gr,\,\delta} N_{Pr})^{1/3} \qquad (N_{Gr,\,\delta} N_{Pr} < 3 \times 10^5) \tag{4.7-14}$$

Para líquidos en placas horizontales, de las cuales la inferior está más caliente que la superior (G5),

$$N_{Nu,\delta} = 0.069 (N_{Gr,\,\delta} N_{Pr})^{1/3} N_{Pr}^{0.074} \qquad (1.5 \times 10^5 < N_{Gr,\,\delta} N_{Pr} < 1 \times 10^9) \tag{4.7-15}$$

EJEMPLO 4.7-3. Convección natural en un espacio vertical encerrado

Hay aire a 1 atm de presión absoluta encerrado entre dos placas verticales donde $L = 0.6$ m y δ = 30 mm. Las placas miden 0.4 m de ancho. Las temperaturas de las placas son $T_1 = 394.3$ K y T_2 = 366.5 K. Calcule la velocidad de transferencia de calor a través de la brecha de aire.

Solución: La temperatura media entre las placas se usa para evaluar las propiedades físicas $T_f = (T_1 + T_2)/2$ = (394.3 + 366.5)/2 = 308.4 K. Además, δ = 30/1000 = 0.030 m. Según el apéndice A.3, ρ = 0.9295 kg/m^3, μ = 221 × 10^{-5} Pa · s, k = 0.03219 W/m . K, N_{Pr} = 0.693, $\beta = 1/T_f$ = 11380.4 = 2.629 × 10^{-3} K^{-1}.

$$N_{Gr,\,\delta} = \frac{(0.030)^3 (0.9295)^2 (9.806)(2.629 \times 10^{-3})(394.3 - 366.5)}{(2.21 \times 10^{-5})^2}$$

$$= 3.423 \times 10^4$$

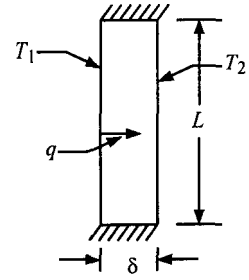


FIGURA 4.7-2. *Convección natural en un espacio vertical cerrado.*

Además, $N_{Gr,\delta} N_{Pr} = (3.423 \times 10^4)0.693 = 2.372 \times 10^4$. Si se utiliza la ecuación (4.7-9),

$$h = \frac{k}{\delta}\frac{(0.20)(N_{Gr,\delta} N_{Pr})^{1/4}}{(L/\delta)^{1/9}} = \frac{0.03219(0.20)(2.352 \times 10^4)^{1/4}}{0.030(0.6/0.030)^{1/9}}$$

$$= 1.909 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$$

El área $A = (0.06 \times 0.4) = 0.24 \text{ m}^2$. Al sustituir en la ecuación (4.7-7),

$$q = hA(T_1 - T_2) = 1.909(0.24)(394.3-366.5) = 12.74 \text{ W}$$

5. Convección natural desde otras formas. Para esferas, bloques y espacios de aire cerrados deben consultarse otras referencias (H1, K1, M1, P1, P3). En algunos casos, cuando se fuerza un fluido sobre una superficie caliente a velocidades bajas en la región laminar, existe una transferencia de calor que combina convección forzada y convección natural. Para más detalles de este tipo de situación, véanse las referencias (H1, K1, M1).

4.8 EBULLICIÓN Y CONDENSACIÓN

4.8A Ebullición

1. Mecanismos de ebullición. La transferencia de calor a un líquido en ebullición es muy importante en la evaporación y destilación, así como en otros tipos de procesos químicos y biológicos, tales como la tecnología del petróleo, el control de temperatura en las reacciones químicas, la evaporación de alimentos líquidos, etc. El líquido a ebullición suele estar encerrado en un recipiente, con superficie de calentamiento en forma de tubos o placas verticales u horizontales que suministran el calor para la ebullición. Las superficies de calentamiento pueden funcionar con electricidad o bien con un fluido caliente o que se condensa del otro lado de la superficie calentada.

Durante la ebullición, la temperatura del líquido es el punto de ebullición de éste a la presión a la que opera el equipo. Evidentemente, la superficie de calentamiento debe estar a una temperatura superior a dicho punto de ebullición. En la superficie calentada se generan burbujas de vapor que se elevan a través de la masa del líquido. El vapor se acumula en el espacio situado por encima del nivel del líquido y de ahí se extrae.

La ebullición es un fenómeno complejo. Supóngase que se considera un pequeño tubo horizontal (o alambre) calentado que se sumerge en un recipiente que contiene agua a ebullición a 373.2K (1 OO "C). El flujo de calor es q/A W/m^2, $AT = T_w - 373.2$ K, donde T_w es la temperatura de la pared del tubo (o alambre) y h es el coeficiente de transferencia de calor en W/m$^2 \cdot$ K. Empezando con un valor bajo de AT, se miden los valores de q/A y h. Esto se repite con valores de ΔT más altos y los datos obtenidos se presentan como en la figura 4.8-1, graficando q/A contra AT.

En la primera región de la figura 4.8-1, zona A, que corresponde a caídas de temperaturas bajas, el mecanismo de ebullición es esencialmente una transferencia de calor a un líquido por convección natural. La variación de h con $\Delta T^{0.25}$ es casi igual ala de una convección natural hacia placas o cilindros horizontales. Las pocas burbujas que se forman se desprenden en la superficie y se elevan sin perturbar de manera apreciable la convección natural.

En la zona B de núcleos de ebullición, que corresponde a un AT de más o menos 5 25 K (9 45 °F), la velocidad de formación de burbujas aumenta, incrementándose la velocidad de circulación del líquido. El coeficiente de transferencia de calor h aumenta, incrementándose la velocidad de circulación del líquido. El coeficiente de transferencia de calor h aumenta con rapidez y es proporcional a ΔT^2 hasta ΔT^3 en esta región.

En la región C de ebullición de transición, se forman muchas burbujas con tal rapidez que tienden a aglomerarse formando una capa de vapor aislante. Al aumentar el valor de ΔT se incrementa el espesor de esta capa y el flujo específico de calor y h disminuyen a medida que ΔT aumenta. En la región D de ebullición de película, las burbujas se separan de manera regular y se elevan. Cuando se alcanzan a valores altos de AT, la radiación a través de la capa de vapor adyacente a la superficie contribuye a aumentar q/A y h.

La curva de h contra AT tiene la misma forma aproximada de la figura 4.8- 1. Los valores de h son bastante altos. Al principio de la región B en la figura 4.8- 1 correspondiente a la formación de núcleos de ebullición, h tiene un valor aproximado de 5700 -11400 W/m^2 . K o 1000-2000 btu h . pie^2 · °F y al final de esta región h tiene un valor máximo de casi 57000 W/m^2 · K o 10000 btu/h · pie^2 . "F. Estos valores son bastantes elevados y en muchos casos el porcentaje de resistencia de la película en ebullición es sólo un pequeño porcentaje de la resistencia global a la transferencia de calor.

Las zonas de interés comercial son las regiones de núcleos y película de ebullición (P3). La ebullición nucleada existe en los rehervidores de tipo marmita (Kettle) y en los de circulación natural.

2. Ebullición nucleada. En la región de ebullición nucleada, el flujo de calor depende de AT, de la presión, naturaleza y geometría de la superficie y del sistema, y de las propiedades físicas del vapor y del líquido. Rohesenow y colaboradores (P1) han deducido las ecuaciones para este caso, aplicables a tubos simples o a superficies planas, aunque son bastantes complejas.

Se han obtenido también (J2) ecuaciones empíricas simplificadas para estimar los coeficientes de transferencia de calor para ebullición de agua en el exterior de superficies sumergidas, a 1 .O atm abs de presión.

Para una superficie horizontal (unidades del sistema inglés y SI),

$$h,\ \text{btu/h . pie}^2\ .\ °\text{F} = 151(\Delta T\ °\text{F})^{1/3} \qquad q/A,\ \text{btu/h . pie}^2,\ < 5000$$
$$h,\ \text{W/m}^2\ .\ \text{K} = 1043(\Delta T\text{K})^{1/3} \qquad q/A,\ \text{kW/m}^2,\ <16 \qquad (4.8\text{-}1)$$

$$h,\ \text{btu/h . pie}^2\ \cdot\ °\text{F} = 0.168(\Delta T\ °\text{F})^3 \qquad 5000 < q/A,\ \text{btu/h} \cdot \text{pie}^2,\ < 75000$$
$$h,\ \text{W/m}^2\ .\ \text{K} = 5.56(\Delta T\text{K})^3 \qquad 16 < q/A,\ \text{kW/m}^2,\ < 240 \qquad (4.8\text{-}2)$$

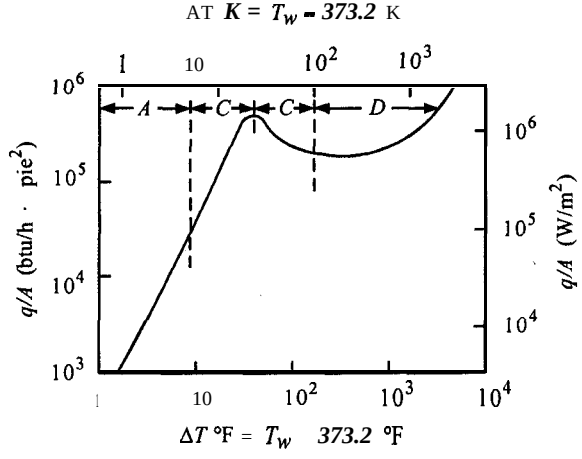


FIGURA *4.8-l. Mecanismos de ebullición de agua a presión atmosférica, flujo de calor en función del gradiente de temperatura: A) convección natural, B) ebullición nucleada, C) ebullición de transición, D) ebullición de película.*

Para una superficie vertical

$$\begin{aligned} &h,\ \text{btu/h} \cdot \text{pie}^2 \cdot {}^\circ\text{F} = 87\ (\text{AT}\ {}^\circ\text{F})^{1/7} && q/A,\ \text{btu/h} \cdot \text{pie}^2,\ < 1000 \\ &h,\ \text{W/m}^2 \cdot \text{K} = 537\ (\Delta T\text{K})^{1/7} && q/A,\ \text{kW/m}^2,\ < 3 \end{aligned} \tag{4.8-3}$$

$$\begin{aligned} &h,\ \text{btu/ h} \cdot \text{pie}^2 \cdot {}^\circ\text{F} = 0.240\ (\text{AT}\ {}^\circ\text{F})^3 && 5000 < q/A,\ \text{btu/h} \cdot \text{pie}^2,\ < 20000 \\ &h,\ \text{W/m}^2 \cdot \text{K} = 7.95\ (\Delta T\text{K})^3 && 16 < q/A,\ \text{kW/m}^2,\ < 63 \end{aligned} \tag{4.8-4}$$

donde AT = T_w T_{sat} K o "F.

Si la presión esp atm abs, los valores de h a 1 atm se multiplican por $(p/1)^{0.4}$. Las ecuaciones (4.8-1) y (4.8-3) corresponden a la región de convección natural. Para ebullición por convección forzada en el interior de los tubos, se tiene la siguiente relación simplificada (53).

$$\begin{aligned} &h = 2.55\ (\Delta T\text{K})^3\ e^{p/1551}\ \text{W/m}^2 \cdot \text{K} && \text{(SI)} \\ &h = 0.077(\Delta T\ {}^\circ\text{F})^3\ e^{p/225}\ \text{btu/h} \cdot \text{pie}^2 \cdot {}^\circ\text{F} && \text{(Unidades del sistema inglés)} \end{aligned} \tag{4.8-5}$$

donde p (en este caso) está en kPa (unidades SI) y 1b/pulg abs (unidades del sistema inglés).

3. Ebullición en película. En la región de ebullición en película, la velocidad de transferencia de calor es baja debido al gran gradiente de temperatura que se usa y que no es muy efectivo. La ebullición en película ha sido el tema de numerosos análisis teóricos. Bromley (B3) proporciona la siguiente ecuación para predecir el coeficiente de transferencia de calor en la región de ebullición de la película sobre un tubo horizontal:

$$h = 0.62\left[\frac{k_v^3 \rho_v (\rho_l - \rho_v) g \left(h_{fg} + 0.4 c_{pv} \Delta T\right)}{D \mu_v \Delta T}\right]^{1/4} \tag{4.8-6}$$

donde k_v es la conductividad térmica del vapor en W/m . K, ρ_v *es* la densidad del vapor en kg/m^3, ρ_l es la densidad del líquido en kg/m^3, h_{fg} es el calor latente de vaporización en J/kg, AT = T_w - T_{sat}, T_{sat} es la temperatura del vapor saturado en K, D es el diámetro exterior del tubo en m, μ_v es la viscosidad del vapor en Pa · s y g es la aceleración de la gravedad en m/s^2. Las propiedades físicas del vapor se evalúan a la temperatura de la película $T_f = (T_w + T_{sat})/2$ y h_{fg} a la temperatura de saturación. Si la diferencia de temperaturas es bastante alta, habrá una transferencia de calor adicional por radiación (H1).

EJEMPLO 4.8-l. Cantidad de transferencia de calor en una olla enchaquetada

Se hierve agua a 1 atm abs de presión en una olla enchaquetada, con vapor de agua que se condensa a 115.6 °C en la chaqueta. El diámetro interior de la olla es 0.656 m y su altura 0.984 m. El fondo tiene una ligera curvatura, pero se supondrá que es plano. Tanto el fondo como las paredes laterales están enchaquetadas hasta una altura de 0.656 m. La superficie de la chaqueta para transferencia de calor es 3.2 mm de acero inoxidable con valor de k de 16.27 W/m · K. El coeficiente del vapor condensado h_i dentro de la chaqueta tiene un valor estimado de 10200 W/m^2 . K. Prediga el coeficiente de transferencia de calor por ebullición h_0 para la superficie inferior de la olla.

Solución: En la figura 4.8-2 se muestra un diagrama de la olla. Se usarán las ecuaciones simplificadas para el coeficiente de ebullición h_0. La resolución se obtendrá por aproximaciones sucesivas, pues se desconoce la temperatura interna del metal T_w. Suponiendo que T_w = 110 "C,

$$\Delta T = T_w - T_{sat} = 110 - 100 = 10\ °C = 10K$$

Al sustituir en la ecuación (4.8-2),

$$h_0 = 5.56(\Delta T)^3 = 5.56(10)^3 = 5560\ W/m^2 \cdot K$$

$$\frac{4}{A} = h\Delta T = 5560(10) = 55600\ W/m^2$$

Para comprobar el valor supuesto de T_w, es necesario calcular las resistencias R_i del vapor condensado, R_w de la pared metálica, y R_0 del líquido a ebullición. Suponiendo áreas iguales de las resistencias para A = 1 m^2, entonces por medio de la ecuación (4.3-12),

$$R_i = \frac{1}{h_i A} = \frac{1}{200(1)} = 9.80 \times 10^{-5}$$

$$R_w = \frac{\Delta x}{kA} = \frac{3.2/1000}{16.27(1.0)} = 19.66 \times 10^{-5}$$

$$R_0 = \frac{1}{h_0 A} = \frac{1}{5560(1)} = 17.98 \times 10^{-5}$$

$$\sum R = 9.80 \times 10^{-5} + 19.66 \times 10^{-5} + 17.98 \times 10^{-5} = 47.44 \times 10^{-5}$$

Luego, la caída de temperatura a través de la película de ebullición es

$$AT = \frac{R_0}{\sum R}(115.6 - 100) = \frac{17.98 \times 10^{-5}}{47.44 \times 10^{-5}}(15.6) = 5.9\ °C$$

Por consiguiente, T_w = 100 + 5.9 = 105.9 °C. Este valor es más bajo que el supuesto de 110 °C.

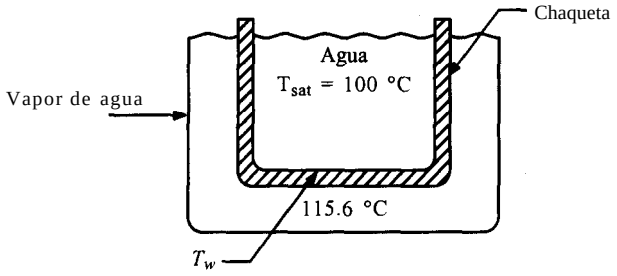


FIGURA *4.8-2. Olla con chaqueta para vapor de agua y agua en ebullición para el ejemplo 4.8-I*

Para la segunda aproximación se usará T_w = 108.3 "C. Entonces, AT= 108.3 – 100 = 8.3 °C y, con la ecuación (4.8-2), el nuevo h_0 es 3 180. Calculando R_0 se obtiene 31.44 x 10^{-5} y

$$\Delta T = \left(\frac{31.44 \times 10^{-5}}{60.90 \times 10^{-5}}\right)(115.6 - 100) = 8.1\ °C$$

Entonces,

$$T_w = 100 + 8.1 = 108.1\ °C$$

Este valor es bastante cercano al supuesto de 108.3 °C, por lo que no son necesarias más aproximaciones.

4.8B Condensación

1. Mecanismos de la condensación. Tanto la condensación de un vapor para formar un líquido, como la vaporización de un líquido para producir un vapor, implican cambios de fase de un fluido con valores de coeficientes de transferencia de calor bastante elevados. La condensación se verifica cuando un vapor saturado, como el vapor de agua, entra en contacto con un sólido cuya temperatura superficial es inferior a la temperatura de saturación, formándose un líquido como el agua.

Por lo general, cuando un vapor se condensa sobre una superficie, como un tubo vertical u horizontal u otras superficies, se forma una película de condensado en la superficie y fluye sobre ella por la acción de la gravedad. Es esta película de líquido entre la superficie y el vapor lo que constituye la principal resistencia a la transferencia de calor. Esto se llama *condensación tipo película.*

Puede existir otro tipo de condensación, llamada condensación en gotas, cuando se forman gotas pequeñas sobre la superficie. Durante esta condensación, hay grandes áreas del tubo libres de líquido que quedan expuestas directamente al vapor. En estas áreas desnudas existen velocidades de transferencia de calor muy altas. El coeficiente promedio puede ser hasta de 110000 W/m^2 · K (20000 btu/h . pie^2 . °F), de 5 a 10 veces mayor que los coeficientes para condensación de tipo película, que suelen ser mucho mayores que los de convección forzada y son del orden de varios miles de W/m^2 . K o mayores.

La condensación en gotas es muy común en superficies contaminadas y cuando hay impurezas presentes. La condensación de tipo película es mas predecible y frecuente. Por tanto, para los propósitos normales de diseño, se supone una condensación tipo película.

2. Coeficientes de condensación tipo película para superficies verticales. La condensación de tipo película sobre una pared o tubo vertical puede analizarse suponiendo un flujo laminar de la película condensada hacia abajo de la pared. El espesor de la película es cero en la parte superior de la pared o tubo y aumenta a medida que fluye hacia abajo, debido a la condensación. Nusselt (H1 ,W 1) supuso que la transferencia de calor desde el vapor condensado a T_{sat} K, a través de la película líquida para llegar a la pared a T_w K, se verifica por conducción. Igualando esta transferencia de calor por conducción con la que se produce por la condensación del vapor, puede obtenerse una expresión para el coeficiente promedio de transferencia de calor en la totalidad de la superficie.

En la figura 4.8-3a, se condensa vapor a T_{sat} sobre una pared cuya temperatura es T_w K. El condensado fluye hacia abajo con flujo laminar. Si suponemos un grosor unitario, la masa del elemento con densidad líquida ρ_l de la figura 4.8-3b es (6 – y) $(dx \cdot 1)\rho_l$. La fuerza hacia abajo sobre este elemento es la fuerza gravitacional menos la fuerza de flotación o $(\delta - y)\ (dx) \times (\rho_l - p,)$ g donde ρ_v es la densidad del vapor saturado. Estas fuerzas están balanceadas por la fuerza de corte viscosa en el plano y de μ_l *(dvldy)* (*dx* . 1). Si se igualan estas fuerzas,

$$(\delta - y)(dx)(\rho_l - \rho_v)g = \mu_l \left(\frac{dv}{dy}\right)(dx) \qquad (4.8\text{-}7)$$

Si se integra y se usa la condición límite v = 0 en $y = 0$,

$$v = \frac{g(\rho_l - \rho_v)}{\mu_l}(\delta y \quad y^2/2) \tag{4.8-8}$$

El gasto másico del condensado en forma de película en cualquier punto x por profundidad unitaria es

$$m = \int_0^{\delta} \rho_l v \; dy = \int_0^{\delta} \rho_l \frac{g(\rho_l - \rho_v)}{\mu_l}(\delta y - y^2/2) \tag{4.8-9}$$

Después de integrar,

$$m = \frac{\rho_l g(\rho_l - \rho_v)\delta^3}{3\mu_l} \tag{4.8-10}$$

En la pared, para el área $(dx \cdot 1)$ m^2, la velocidad de transferencia de calores como sigue si se supone una distribución lineal de temperatura en el líquido entre la pared y el vapor:

$$qx = -k_l (dx \cdot 1)\frac{dT}{dy}\Big)_{y=0} = k_l \, dx \frac{T_{sat} - T_w}{\delta} \tag{4.8-l 1}$$

En una distancia dx, la velocidad de transferencia de calor es qx. Además en estas distancia dx, el aumento de masa por la condensación es dm. Al utilizar la ecuación (4.8-10),

$$dm = d\left[\frac{\rho_l g(\rho_l - \rho_v)\delta^3}{3\mu_l}\right] = \frac{\rho_l g(\rho_l - \rho_v)\delta^2 \, d\delta}{\mu_l} \tag{4.8-12}$$

Cuando se hace un balance de calor para la distancia dx, el gasto másico dm por el calor latente h_{fg} debe ser igual a la q_x de la ecuación (4.8-l 1).

$$h_{fg} \frac{\rho_l g(\rho_l - \rho_v)\delta^2 \, d\delta}{\mu_l} = k_l \, dx \frac{T_{sat} - T_w}{\delta} \tag{4.8-13}$$

Si se integra con $\delta = 0$ en $x = 0$ y $\delta = \delta$ en $x = x$,

$$\delta = \left[\frac{4\mu_l k_l \, x(T_{sat} - T_w)}{g h_{fg} \rho_l (\rho_l - \rho_v)}\right]^{1/4} \tag{4.8-14}$$

Se usa el coeficiente de transferencia de calor local h_x en x para que un balance de calor de

$$h_x(dx \cdot 1)(T_{sat} - T_w) = k_l(dx \cdot 1)\frac{T_{sat} - T_w}{\delta} \tag{4.8-l 5}$$

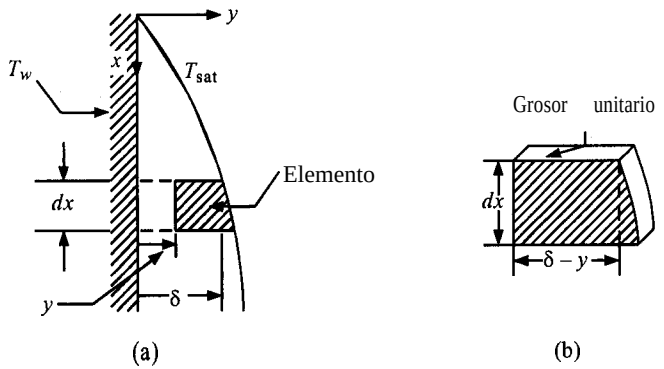


FIGURA 4.8-3. *Condensación en película en una placa vertical: (a) aumento del grosor de la película con la posición, (b) equilibrio en un elemento del condensado.*

Esto da

$$h_x = \frac{k_l}{\delta} \tag{4.8-16}$$

Al combinar las ecuaciones (4.8-14) y (4.8-16),

$$h_x = \left[\frac{\rho_l(\rho_l - \rho_v)gh_{fg}k_l^3}{4\mu_l x(T_{sat} - T_w)}\right]^{1/4} \tag{4.8-17}$$

Cuando se integra sobre longitud total L, el valor promedio de h se obtiene como sigue.

$$h = \frac{1}{L}\int_0^L h_x\,dx = \tfrac{4}{3}h_{x=L} \tag{4.8-18}$$

$$h = 0.943\left[\frac{\rho_l(\rho_l - \rho_v)gh_{fg}k_l^3}{\mu_l L(T_{sat} - T_w)}\right]^{1/4} \tag{4.8-19}$$

Sin embargo, para el flujo laminar los datos experimentales suelen ser un 20% mayores que los de la ecuación (4.8-19).

La fórmula final recomendada para superficies verticales con flujo laminar es (M1):

$$N_{Nu} = \frac{hL}{k_l} = 1.13\left(\frac{\rho_l(\rho_l - \rho_v)gh_{fg}L^3}{\mu_l k_l \Delta T}\right)^{1/4} \tag{4.8-20}$$

donde ρ_l es la densidad del líquido en kg/m^3 y ρ_v la de vapor, g es 9.8066 m/s^2, L es la altura vertical de la superficie o tubo en m, μ_l es la viscosidad del líquido en Pa . s, k_l es la conductividad térmica del líquido en W/m . K, AT = $T_{sat} - T_w$ en K y h_{fg} es el calor latente de condensación en J/kg a T_{sat}. Todas las propiedades físicas del líquido, excepto h_{fg} deben evaluarse a la temperatura de la película

$(T_f + T_w)/2$. En superficies verticales largas, el flujo de la parte inferior puede ser turbulento. El número de Reynolds se define como

$$N_{Re} = \frac{4m}{\pi D \mu_l} = \frac{4\Gamma}{\mu_l} \qquad \text{(tubo vertical, diámetro } D\text{)} \tag{4.8-21}$$

$$N_{Re} = \frac{4m}{W\mu_l} = \frac{4\Gamma}{\mu_l} \qquad \text{(placa vertical, ancho } W\text{)} \tag{4.8-22}$$

donde m es el total de kg masa/s de condensado en el extremo inferior del tubo o de la placa y $\Gamma = m/\pi D$ o m/W. El valor de N_{Re} debe ser inferior a aproximadamente 1800 para que la ecuación (4.8-20) sea válida. Tómese en cuenta que algunas referencias definen N_{Re} como Γ/μ. Entonces, este N_{Re} debe ser inferior a 450.

Para flujo turbulento, cuando $N_{Re} > 1800$ (M1),

$$N_{Nu} = \frac{hL}{k_l} = 0.0077\left(\frac{g\rho_l^2 L^3}{\mu_l^2}\right)^{1/3} (N_{Re})^{0.4} \tag{4.8-23}$$

La resolución de esta ecuación requiere aproximaciones sucesivas, pues es necesario suponer un valor de N_{Re} para calcular h.

EJEMPLO 4.8-2. Condensación en un tubo vertical

Un vapor de agua saturada a 68.9 kPa (10 lb/pulg abs) se condensa en un tubo vertical de 0.305 m (1 .O pie) de longitud con un DE de 0.0254 m (1 .O pulg) y una temperatura superficial de 86.11 °C (187 "F). Calcule el coeficiente promedio de transferencia de calor en unidades inglesas y SI.

Solución: Del apéndice A.2,

$$T_{sat} = 193\ ^\circ\text{F}(89.44\ ^\circ\text{C}) \qquad T_w = 187^\circ\text{F}(86.11\ ^\circ\text{C})$$

$$T_f = \frac{T_w + T_{sat}}{2} = \frac{187 + 193}{2} \quad 190\ ^\circ\text{F}\ (87.8\ ^\circ\text{C})$$

calor latente $h_{fg} = 1143 - 161.0 = 982.3$ btu/lb$_m$

$$= 2657.8 \quad 374.6 = 2283.2\ \text{kJ/kg} = 2.283 \times 10^6\ \text{J/kg}$$

$$\rho_l = \frac{1}{0.01657} = 60.3\ \text{lb}_m/\text{pie}^3 = 60.3\ (16.018) = 966.7\ \text{kg/m}^3$$

$$p_v = \frac{1}{4095} = 0.0244\ \text{lb}_m/\text{pie}^3 = 0.391\ \text{kg/m}^3$$

$$\mu_l = (0.324\ \text{cp})(2.4191) = 0.784\ \text{lb}_m/\text{pie . h} = 3.24 \times 10^{-4}\ \text{Pa . s}$$

$$k_l = 0.390\ \text{btu/pie . h . °F} = (0.390)(1.7307) = 0.675\ \text{W/m . K}$$

$$L = 1\ \text{pie} = 0.305\ \text{m} \qquad \Delta T = T_{sat} - T_w = 193 - 187 = 6\ ^\circ\text{F}\ (3.33\ \text{K})$$

Sea una película laminar y la ecuación (4.8-20) en unidades del sistema inglés y SI, y despreciando ρ_v en comparación con ρ_l

$$N_{Nu} = 1.13\left(\frac{\rho_l^2 g h_{fg} L^3}{m_l k_l \Delta T}\right)^{1/4}$$

$$= 1.13\left[\frac{(60.3)^2(32.174)(3600)^2(982.3)(1.0)^3}{(0.784)(0.390)(6)}\right]^{1/4} = 6040$$

$$N_{Nu} = 1.13\left[\frac{(966.7)^2(9.806)(2.283 \times 10^6)(0.305)}{(3.24 \times 10^{-4})(0.675)(3.33)}\right]^{1/4} = 6040$$

$$N_{Nu} = \frac{hL}{k_l} = \frac{h(1.0)}{0.390} = 6040 \qquad \text{en unidades SI: } \frac{h(0.305)}{0.675} = 6040$$

despejando para $h = 2350$ btu/h . pie^2 · °F = 13350 W/m^2 . K.

Después calcularemos N_{Re} para saber si se tiene flujo laminar como se supuso. Para calcular la transferencia de calor por área de tubo

$$A = \pi DL = \pi(1/2)(1.0) = \pi/12 \text{ pie}^2, \quad A = \pi(0.0254)(305) \text{ m}^2$$

$$q = hAAT \tag{4.8-24}$$

Sin embargo, esta q debe ser igual a la obtenida por condensación de m en lb_m/h o en kg/s. Por lo que,

$$q = hA\,\Delta T = h_{fg}\,m \tag{4.8-25}$$

Sustituyendo los valores dados y despejando m,

$$2350\,(x/12)(193 - 187) = 982.3\,(m) \qquad m = 3.77 \text{ lb}_m/\text{h}$$

$$13.350(\pi)(0.0254)(0.305)(3.33) = 2.284 \times 10^6(m) \qquad m = 4.74 \times 10^{-4} \text{ kg/s}$$

Al sustituir en la ecuación (4.8-21),

$$N_{Re} = \frac{4m}{\pi D\mu_l} = \frac{4(3.77)}{\pi(1/12)(0.784)} = 73.5 \qquad N_{Re} = \frac{4(4.74 \times 10^{-4})}{\pi(0.0254)(3.24 \times 10^{-4})} = 73.5$$

Por lo que el flujo es laminar, como se supuso.

3. Coeficiente de condensación en película fuera de cilindros horizontales. El análisis tipo Nusselt puede ampliarse al caso práctico de la condensación fuera de un tubo horizontal. Para un solo tubo, la película comienza con un espesor cero en la parte alta del tubo e incrementa su espesor conforme fluye alrededor hasta el fondo, donde gotea saliendo del tubo. Si se tiene un grupo de tubos horizontales, el condensado del tubo superior escurre sobre el tubo de abajo y así sucesivamente.

Para una hilera vertical de N tubos horizontales (colocados uno debajo de otro) y con diámetro externo D (M1),

$$N_{NU} = \frac{hD}{k_l} = 0.725\left(\frac{\rho_l(\rho_l - \rho_v)gh_{fg}D^3}{N\mu_l k_l\,\Delta T}\right)^{1/4} \tag{4.8-26}$$

En la mayoría de las aplicaciones prácticas, el flujo corresponde a la región laminar y la ecuación (4.8-26) es válida (C3, M1).

4.9 INTERCAMBIADORES DE CALOR

4.9A Tipos de intercambiadores

1. Introducción. En las industrias de proceso, la transferencia de calor entre dos fluidos casi siempre se lleva a cabo en intercambiadores de calor. El tipo más común es uno en el cual el fluido caliente y el frío no entran en contacto directo el uno con el otro, sino que están separados por una pared de tubos o una superficie plana o curva. La transferencia de calor se efectúa por convección desde el fluido caliente a la pared o la superficie de los tubos, a través de la pared de tubos o placa por conducción, y luego por convección al fluido frío. En las secciones anteriores de este capítulo se han analizado los procedimientos de cálculo para estas diversas etapas. Ahora estudiaremos algunos de los tipos de equipos utilizados y el análisis térmico general de los intercambiadores. Se han elaborado métodos de diseño completos y detallados, pero no serán considerados aquí.

2. Intercambiador de calor de doble tubo. El intercambiador más simple es el intercambiador de doble tubo o de tubos concéntricos. Este se muestra en la figura 4.9-1, donde uno de los fluidos fluye en el interior de una tubería y el otro lo hace en el espacio anular entre ambas tuberías. Los fluidos pueden circular en paralelo o a contracorriente. El intercambiador puede fabricarse con un simple par de tubos adptando las conexiones en los extremos, o con varios pares interconectados en serie. Este tipo de intercambiador es útil principalmente para velocidades de flujo bajas.

3. Intercambiadores de tubos *y coraza.* Cuando se manejan flujos más grandes se usa un intercambiador de tubos y coraza, que es el tipo más importante en las industrias de proceso. Los flujos de estos intercambiadores son continuos. Se usan muchos tubos en paralelo con uno de los fluidos circulando en su interior. Los tubos, distribuidos en forma de manojo, están encerrados en una sola coraza y el otro fluido fluye por el exterior de los tubos, dentro de la coraza. En la figura 4.9-2a se muestra el modelo más simple de intercambiador de tubos y coraza que corresponde a un solo paso por los tubos y un solo paso por la coraza, es decir, se trata de un intercambiador l-l a contracorriente. El fluido frío entra y circula por los tubos en paralelo en un solo paso, mientras que el fluido caliente entra por el otro extremo y fluye a contracorriente por el exterior de los tubos. Se usan deflectores transversales de tal manera que el fluido se ve forzado a fluir perpendicularmente por la batería de tubos en lugar de hacerlo en paralelo. Esta turbulencia adicional generada por el flujo transversal, aumenta el coeficiente de transferencia de calor de la coraza.

En la figura 4.9-2b se muestra un intercambiador 1-2 paralelo-contracorriente. El líquido en los tubos fluye pasando dos veces (tal como se indica) y el líquido de la coraza fluye en un solo paso. En

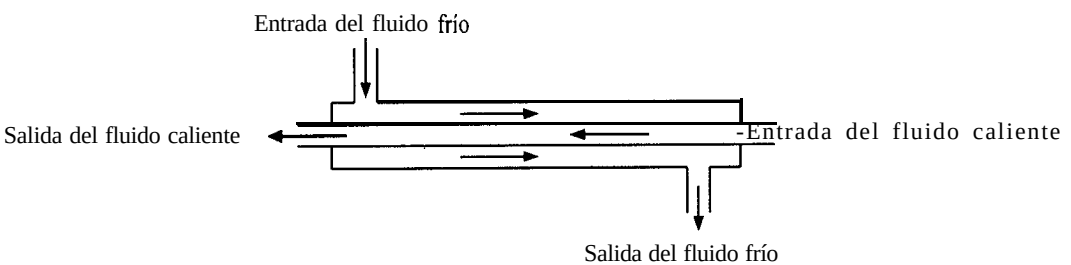


FIGURA 4.9-l. *Flujo en un intercambiador de calor de doble tubo.*

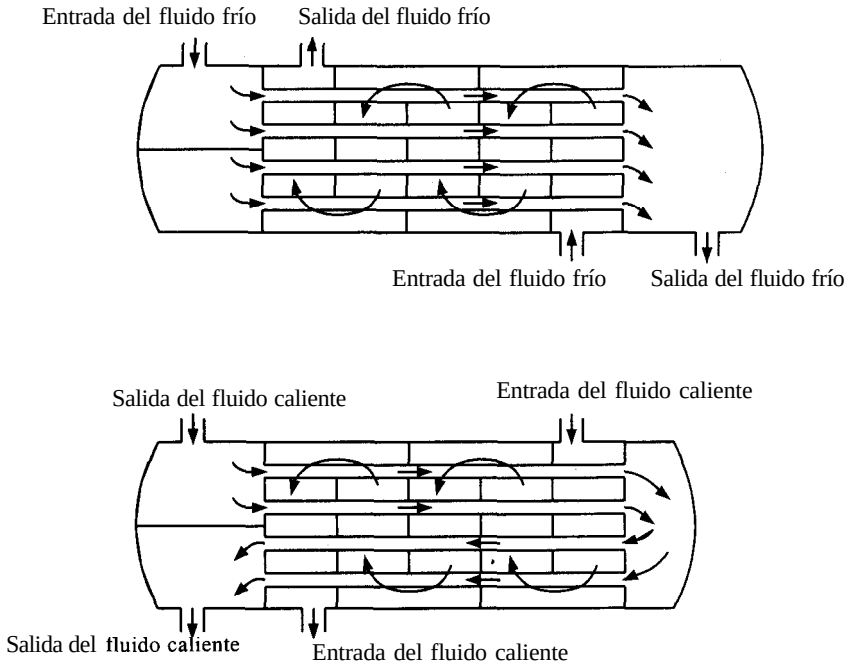

Entrada del fluido frío
Salida del fluido frío
Entrada del fluido frío
Salida del fluido frío
Salida del fluido caliente
Entrada del fluido caliente
Salida del fluido caliente
Entrada del fluido caliente

FIGURA 4.9-2. *Intercambiadores de calor de tubos y coraza: a) un paso por la coraza y un paso por los tubos, (intercnmbiador I-I); b) un paso por la coraza y dos pasos por los tubos (intercambiador I-2).*

el primer paso por los tubos, el fluido frío fluye a contracorriente del fluido caliente de la coraza y en el segundo paso por los tubos fluye en paralelo con el fluido caliente. Otro tipo de intercambiador opera con 2 pasos por la coraza y 4 pasos por el tubo. Se usan también otras combinaciones de número de pasos y las más comunes son l-2 y l-4.

4. Intercambiador de flujo cruzado. Cuando se va a calentar o enfriar un gas como el aire, uno de los dispositivos de uso más común es el intercambiador de calor de flujo transversal que se muestra en la figura 4.9-3a. Uno de los fluidos, que es un líquido, fluye dentro de tubos y el gas exterior fluye a través del manojo de tubos por convección forzada o a veces natural. El fluido del interior de los tubos se considera sin mezcla, ya que está confinado y no puede mezclarse con ninguna otra corriente. El flujo de gas en el exterior de los tubos está mezclado, dado que puede moverse libremente entre los tubos y habrá una tendencia a que la temperatura del gas se iguale en la dirección normal al flujo. En el fluido no mezclado del interior de los tubos habrá un gradiente de temperatura paralelo y normal a la dirección del flujo.

Un segundo tipo de intercambiador de calor de flujo transversal, que se muestra en la figura 4.9-3b, se usa comúnmente en aplicaciones de calefacción de espacios y aire acondicionado. En este tipo, el gas fluye a través de un manojo de tubos con aletas y no se mezcla porque queda confinado en canales de flujo separados entre las aletas conforme el gas pasa sobre los tubos. El fluido dentro de los tubos no se mezcla.

El análisis de otros tipos de equipo de transferencia de calor especializado se posterga hasta la sección 4.13. El resto de esta sección trata principalmente de los intercambiadores de calor de flujo transversal y de coraza y tubos.

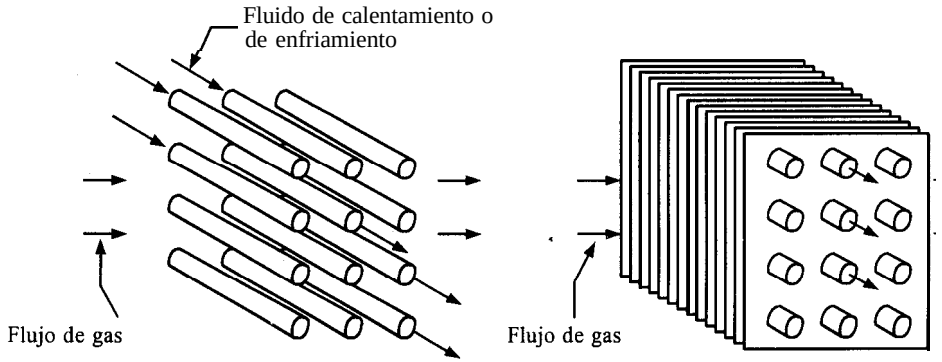


FIGURA 4.9-3. *Patrones de flujo intercambiadores de calor de flujo transversal: a) un fluido mezclado (gas) y un fluido sin mezclar; b) ambos fluidos sin mezclar.*

4.9B Factores de correción para la media logarítmica de la diferencia de temperaturas

En la sección 4.5H se indicó que, cuando los fluidos caliente y frío de un intercambiador de calor circulan con flujo a contracorriente verdadero o con flujo paralelo, debe usarse la media logarítmica de las diferencias de temperaturas,

$$\Delta T_{lm} = \frac{\Delta T_2 + \Delta T_1}{\ln\left(\Delta T_2 / \Delta T_1\right)} \qquad \textbf{(4.9-l)}$$

donde ΔT_2 es la diferencia de temperaturas en un extremo del intercambiador y ΔT_1 en el otro extremo. Esta expresión de $\Delta T_{1\,m}$ es válida para un intercambiador de calor de doble tubo, así como para un intercambiador l-l de un paso por la coraza y un paso por los tubos, con flujo a contracorriente 0 en paralelo.

Cuando se trata de un intercambiador de calor de pasos múltiples, es necesario obtener otra igualdad diferente para la medida de la diferencia de temperatura, que depende de la configuración de los pasos por tubos y coraza. Considerando primero un paso por la coraza y dos por los tubos, como corresponde a la figura 4.9-2b, el fluido frío en el primer paso por los tubos está en paralelo al fluido caliente. Por tanto, la media logarítmica de las diferencias de temperaturas que es aplicable a flujo en paralelo o en contracorriente pero no a una mezcla de ambos, como el intercambiador 1-2, no puede usarse para calcular el gradiente real de temperatura sin incluir correcciones.

La deducción matemática de la ecuación para la temperatura media adecuada, es bastante compleja. El procedimiento común es usar en factor de corrección F_T que también se define de modo que cuando se multiplica por $\Delta T_{1\,m}$, el producto es el gradiente correcto de la temperatura media AT, que debe usarse. Al usar los factores de corrección F_T, es intrascendente si el fluido más caliente fluye a través de los tubos o de la coraza (K1). El factor F_T se ha calculado (B4) para un intercambiador l-2 y se muestra en la figura 4.9-4a. Se usan dos relaciones adimensionales, que son las siguientes:

$$Z = \frac{T_{hi} - T_{h0}}{T_{c0} - T_{ci}} \qquad \textit{(4.9-2)}$$

$$Y = \frac{T_{c0} - T_{ci}}{T_{hi} - T_{ci}} \qquad \textit{(4.9-3)}$$

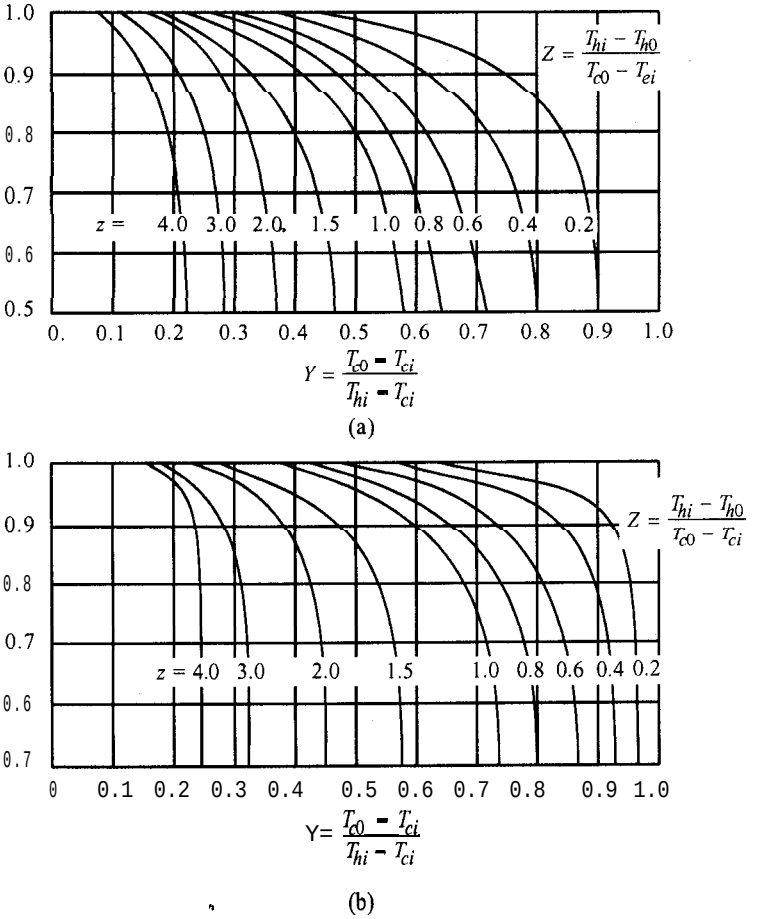


FIGURA *4.9-4. Factor de corrección FT para la media logarítmica de las diferencias de temperaturas: a) intercambiadores 1-2, b) intercambiadores 2-4. [Tomado de R. A. Borman, A. C. Mueller y W. M. Nagle, Trans. A.S.M.E., 62. 284, 285 (1940). Reproducido con autorización.]*

donde T_{hi} = temperatura de entrada del fluido caliente en K (°F), T_{ho} = temperatura de salida del fluido caliente, T_{ci} = temperatura de entrada del fluido frío y T_{co} = temperatura de salida del fluido frío.

En la figura 4.9-4b se muestra el factor F_T (B4) para un intercambiador 2-4. En general, no se recomienda un intercambiador de calor cuando $F_T < 0.75$.

Debe usarse otro arreglo de tubos y coraza. Los factores de corrección para dos tipos de intercambiadores de flujo transversal se dan en la figura 4.9-5. Otros tipos se pueden consultar aparte (B4, P1).

Al usar la nomenclatura de las ecuaciones (4.9-2) y (4.9-3), la $\Delta T_{1\,m}$ de la ecuación (4.9-l) puede escribirse como

$$\Delta T_{1\,m} = \frac{(T_{hi} - T_{c0}) - (T_{h0} - T_{ci})}{\ln\left[(T_{hi} - T_{c0})/T_{h0} \quad T_{ci}\right]} \tag{4.9-4}$$

Entonces, la ecuación para un intercambiador es:

$$q = U_i A_i \Delta T_m = U_0 A_0 \Delta T_m \tag{4.9-5}$$

donde

$$\Delta T_{ml} = F_T \Delta T_{lm} \qquad (4.9\text{-}6)$$

EJEMPLO 4.9-l. Factor de corrección de la temperatura para un intercambiador de calor

Un intercambiador 1-2 funcionando con un paso por la coraza y dos pasos por los tubos, calienta 2.52 kg/s de agua desde 2 1.1 hasta 54.4 °C, usando agua caliente a presión que entra a 115.6 y sale a 48.9 "C. El área de la superficie externa de los tubos del intercambiador es A_0 = 9.30 m^2.

a) Calcule la media de las diferencias de temperatura ΔT_{ml}, en el intercambiador y el coeficiente total de transferencia de calor U_0.

b) ¿Cuál será el valor de ΔT_{ml}, para las mismas temperaturas en un intercambiador 2-4?

Solución: Las temperaturas son las siguientes:

T_{hi} = 115.6 °C T_{h0} = 48.9 °C T_{ci} = 21.1 °C T_{co} = 54.4 °C

Primero se lleva a cabo un balance de calor con respecto al agua fría, suponiendo un c_{pm} para el agua de 4187 J/kg . K y $T_{co} - T_{ci}$ = (54.4 - 21.1) °C = 33.3 °C = 33.3 K,

$$q = mc_{pm}(T_{co} - T_{ci}) = (2.52)(4187)(54.4 - 2\,1.1) = 348200 \text{ W}$$

La media logarítmica de las diferencias de temperatura en la ecuación (4.9-4) es

$$\Delta T_{lm} = \frac{(115.6 - 54.4) - (48.9 - 2\,1.1)}{\ln\left[(115.6 - 54.4)/(48.9 - 21.1)\right]} = 42.3 \text{ °C} = 42.3 \text{ K}$$

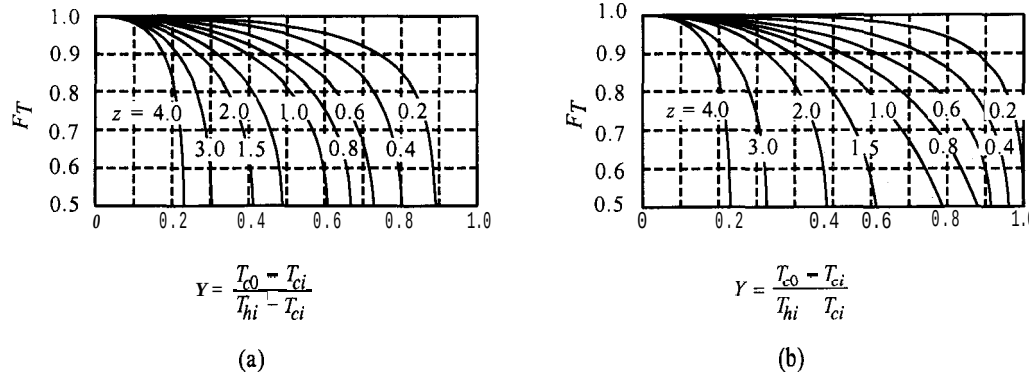


FIGURA 4.9-S. *Factor de corrección F_T para la media logarítmica de las diferencias de temperatura para intercambiadores de flujo transversal [Z = $(T_{hi} - T_{ho})/(T_{co} - T_{ci})$]: a) paso sencillo, fluido mezclado en la coraza, otro fluido no mezclado, b) paso sencillo, ambos fluidos no mezclados. (Tomado de R. A. Borman. A. C. Mueller y W. M. Nagle, Trans. A.S.M.E., 62, 284, 285 (1940). Reproducido con autorización.)*

Al sustituir en las ecuaciones (4.9-2) y (4.9-3),

$$Z = \frac{T_{hi} - T_{h0}}{T_{ci} - T_{c0}} = \frac{115.6\text{-}489}{54.4\text{-}211} = 2.00 \quad (4.9\text{-}2)$$

$$Y = \frac{T_{c0} - T_{ci}}{T_{hi} - T_{ci}} = \frac{54.4 - 21.1}{115.6 - 21.1} = 0.352 \quad (4.9\text{-}3)$$

Con base en la figura 4.9-4a, F_T = 0.74. Entonces, de acuerdo con la ecuación (4.9-6),

$$\text{AT,} = F_T \Delta T_{lm} = 0.74(42.3) = 31.3\ ^\circ\text{C} = 31.3\ \text{K} \quad (4.9\text{-}6)$$

Al reordenar la ecuación (4.9-5), despejar U_0 y sustituir los valores conocidos:

$$U_0 = \frac{q}{A_0 \Delta T_m} = \frac{348200}{(930)(313)} = 1196\ \text{W/m}^2 \cdot \text{K}\ (211\ \text{btu/h} \cdot \text{pie}^2 \cdot {}^\circ\text{F})$$

Para el inciso b), en un intercambiador 2-4 y la figura 4.9-4b, F_T = 0.94. Entonces,

$$\Delta T_m = F_T \Delta T_{lm} = 0.94(42.3) = 39.8\ ^\circ\text{C} = 39.8\ \text{K}$$

Por consiguiente, el intercambiador 2-4 utiliza en mayor grado la fuerza impulsora de temperatura disponible.

4.9C Eficacia del intercambiador de calor

1. Introducción. En la sección anterior se usó la media logarítmica de la diferencia de temperatura en la ecuación $q = U A$ AT,,,, para el diseño de intercambiadores de calor. Esta forma es conveniente cuando las temperaturas de entrada y de salida de los dos fluidos se conocen o pueden determinarse mediante un balance de calor. Entonces se puede determinar el área superficial si se conoce U. Sin embargo, cuando las temperaturas de los fluidos que salen del intercambiador no se conocen y se va a usar un intercambiador determinado, es necesario utilizar un tedioso procedimiento de aproximaciones sucesivas. En estos casos se usa un método llamado eficacia ε del intercambiador de calor que no implica ninguna de las temperaturas de salida.

La eficacia del intercambiador de calor se define como la razón de la cantidad real de transferencia de calor en un intercambiador dado a la cantidad máxima posible de transferencia de calor. Si se dispusiera de un área infinita de transferencia de calor. El perfil de temperaturas para un intercambiador de calor a contracorriente se muestra en la figura 4.9-6.

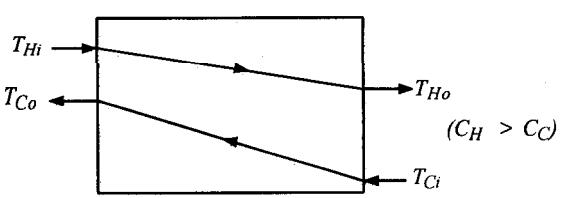


FIGURA 4.9-6. *Perfil de temperaturas para un intercambiador de calor a contracorriente.*

2. Deducción de la ecuación de eficacia. El balance de calor para los fluidos frío (C) y caliente (H) es

$$q = (mc_p)_H(T_{Hi} - T_{Ho}) = (mc_p)_C(T_{Co} - T_{Ci}) \tag{4.9-7}$$

Si se denomina $(mc_p)_H = C_H$ y $(mc_p)_C = C_C$, entonces en la figura 4.9-6, $C_H > C_C$ y el fluido frío experimenta un mayor cambio de temperatura que el fluido caliente. Por lo tanto, se designa C_C como $C_{mín}$ o capacidad calorífica mínima. Así, si se dispone de un área infinita para la transferencia de calor, $T_{Co} = T_{Hi}$ de modo que la eficacia ε es

$$\varepsilon = \frac{C_H(T_{Hi} - T_{Ho})}{C_H(T_{Hi} - T_{Ho})} = \frac{C_{máx}(T_{Hi} - T_{Ho})}{C_{mín}(T_{Hi} - T_{Ci})} \tag{4.9-8}$$

Si el fluido caliente es el fluido mínimo, $T_{Ho} = T_{Ci}$ y

$$\varepsilon = \frac{C_C(T_{Co} - T_{Ci})}{C_H(T_{Hi} - T_{Ci})} = \frac{C_{máx}(T_{Co} - T_{Ci})}{C_{mín}(T_{Hi} - T_{Ci})} \tag{4.9-9}$$

En ambas ecuaciones, los denominadores son iguales y el numerador da la transferencia de calor real

$$q = \varepsilon C_{mín}(T_{Hi} - T_{Ci}) \tag{4.9-10}$$

Adviértase que la ecuación (4.9-10) usa sólo las temperaturas de entrada, lo cual es una ventaja cuando se conocen las temperaturas de salida y se desea predecir las temperaturas de salida para un intercambiador dado. En el caso de intercambiadores a contracorriente de paso simple, se combinan las ecuaciones (4.9-8) y (4.9-9) y se obtiene

$$\varepsilon = \frac{C_H(T_{Hi} - T_{Ho})}{C_{mín}(T_{Hi} - T_{Ci})} = \frac{C_C(T_{Co} - T_{Ci})}{C_{mín}(T_{Hi} - T_{Ci})} \tag{4.9-11}$$

Consideramos primero el caso de que el fluido frío sea el fluido mínimo. Si se reescribe la ecuación (4.5-25) usando la presente nomenclatura,

$$q = C_C(T_{Co} - T_{Ci}) = U A \frac{(T_{Ho} - T_{Ci}) - (T_{Hi} - T_{Co})}{\ln\left[(T_{Ho} - T_{Ci})/T_{Hi} - T_{Co}\right]} \tag{4.9-12}$$

Al combinar la ecuación (4.9-7) con el lado izquierdo de la ecuación (4.9-11) y despejar T_{Hi},

$$T_{Hi} = T_{Ci} + \frac{1}{\varepsilon}(T_{Co} - T_{Ci}) \tag{4.9-13}$$

Se resta T_{Co} de ambos lados y resulta

$$T_{Hi} - T_{Co} = T_{Ci} - T_{Co} + \frac{1}{\varepsilon}(T_{Co} - T_{Ci}) = \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)(T_{Co} - T_{Ci}) \tag{4.9-14}$$

A partir de la ecuación (4.9-7) para $C_{mín} = C_C$ y $C_{máx} = C_H$

$$T_{Ho} = T_{Hi} - \frac{C_{mín}}{C_{máx}}(T_{Co} - T_{Ci}) \tag{4.9-15}$$

Esto puede reordenarse para dar lo siguiente:

$$T_{Ho} \quad T_{Ci} = T_{Hi} - T_{Ci} - \frac{C_{mín}}{C_{máx}}(T_{Co} \quad T_{Ci}) \tag{4.9-16}$$

Si se sustituye la ecuación (4.9-13) en la (4.9-16)

$$T_{Ho} - T_{Ci} = \frac{1}{\varepsilon}(T_{Co} - T_{Ci}) - \frac{C_{mín}}{C_{máx}}(T_{Co} - T_{Ci}) \tag{4.9-17}$$

Por último, se sustituyen las ecuaciones (4.9-14) y (4.9-17) en la (4.9-12), se reordenan, se toman los antilogarítmos de ambos lados y se despeja ε para obtener

$$\varepsilon = \frac{1 - \exp\left[-\frac{UA}{C_{mín}}\left(1 - \frac{C_{mín}}{C_{máx}}\right)\right]}{1 - \frac{C_{mín}}{C_{máx}}\exp\left[\frac{UA}{C_{mín}}\left(1 - \frac{C_{mín}}{C_{máx}}\right)\right]} \tag{4.9-18}$$

El NUT se define como el número de unidades de transferencia como sigue:

$$\text{NUT} = \frac{UA}{C_{mín}} \tag{4.9-19}$$

Se habría obtenido el mismo resultado si $C_H = C_{mín}$.

Para el flujo paralelo se obtiene

$$\varepsilon = \frac{1 - \exp\left[-\frac{UA}{C_{mín}}\left(1 + \frac{C_{mín}}{C_{máx}}\right)\right]}{1 + \frac{C_{mín}}{C_{máx}}} \tag{4.9-20}$$

En la figura 4.9-7, las ecuaciones (4.9-18) y (4.9-20) se graficaron de forma conveniente. Se dispone de gráficas adicionales para diferentes arreglos de coraza y de tubos, y de flujo transversal (K1).

EJEMPLO 4.9-2. Eficacia de un intercambiador de calor

Cierta cantidad de agua que fluye auna velocidad de 0.667 kg/s entra en un intercambiador de calor a contracorriente a 308 K y es calentada por una corriente de aceite que entra a 383 K auna velocidad de 2.85 kg/s (c_p = 1.89 kJ/kg . K). La U global = 300 W/m^2 . K y el área A = 15.0 m^2. Calcule la velocidad de transferencia de calor y la temperatura del agua de salida.

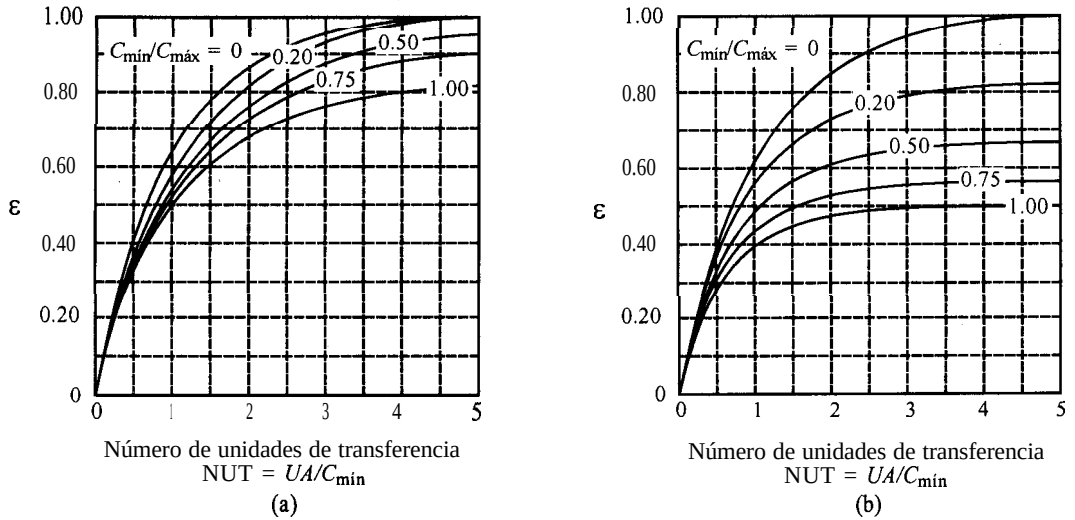


FIGURA *4.9-7. Eficiencia ε de un intercambiador de calor: a) intercambiador a contracorriente, b) intercambiador de flujo en paralelo.*

Solución: Si se supone que la temperatura del agua de salida es de cerca de 370 K, el c_p para el agua a una temperatura promedio de (308 + 370)/2 = 339 K es 4.192 kJ/kg . K (apéndice A.2). Entonces, $(mc_p)_H = C_H = 2.85\ (1.89 \times 10^3) = 5387$ W/K y $(mc_p)_C = C_C = 0.667\ (4.192 \times 10^3) = 2796$ W/K = $C_{mín}$. Como C_C es el mínimo, $C_{mín}/C_{máx} = 2796/5387 = 0.519$.

Si se utiliza la ecuación (4.9-19), NUT = $UA/C_{mín} = 300\ (15.0)/2796 = 1.607$. Al usar la figura (4.9-7a) para un intercambiador a contracorriente, ε = 0.71. Después de sustituir en la ecuación (4.9-10), resulta

$$q = \varepsilon C_{mín}(T_{Hi} \quad T_{Ci}) = 0.71(2796)(T_{Co} - 308) = 148900\text{W}$$

Se usa la ecuación (4.9-7) y se obtiene

$$q = 148900 = 2796\ (T_{Co} - 308)$$

Al resolver, se tiene que $T_{Co} = 361.3$ K.

4.9D Factores de ensuciamiento y valores *U* globales típicos

En la práctica cotidiana, las superficies de transferencia de calor rara vez permanecen limpias. La suciedad, el hollín, las incrustaciones y otros depósitos, se van acumulando sobre una o ambas superficies de los tubos de los intercambiadores y de otras superficies para intercambio de calor. Estos depósitos constituyen una resistencia adicional al flujo de calor y reducen el coeficiente general *U* de transferencia de calor. En los procesos del petróleo acumularse coque y otras sustancias; también pueden existir incrustaciones de cieno y lodos o formarse productos de corrosión, que recubren las superficies y constituyen una resistencia considerable a la transferencia de calor. Además, pueden originarse crecimientos biológicos de algas y otros organismos cuando se trabaja con agua de enfriamiento y en las industrias biológicas.

Para evitar o aminorar estos problemas de ensuciamiento suelen añadirse inhibidores químicos que reducen al mínimo la corrosión, la formación de depósitos de sales y el crecimiento de algas. Para ayudara evitar estos depósitos se emplean por lo general velocidades de agua superiores a 1 m/s. Las diferencias de temperaturas elevadas pueden causar formación excesiva de sólidos sobre las superficies y conviene evitarlas cuando sea posible. Por lo general, el efecto de estos depósitos se toma en cuenta en el diseño añadiendo a la ecuación (4.3-17) un término que corresponde al efecto de los depósitos en el exterior y en el interior del tubo:

$$U = \frac{1}{1/h_i + 1/h_{di} + (r_o - r_i) A_i/k_A A_{A\,lm} + A_i/A_o h_o + A_i/A_o h_{do}} \qquad \textbf{(4.9-21)}$$

donde h_{di} es el coeficiente de ensuciamiento para el interior y h_{do} el mismo para el exterior del tubo en $W/m^2 \cdot K$. Puede escribirse una fórmula similar para U_o, con la ecuación (4.3-18).

Muchas referencias (P3, N1) contienen tablas de coeficientes de ensuciamiento recomendadas para el diseño de equipo de transferencia de calor. En la tabla 4.9-l se incluye una pequeña lista de coeficientes de ensuciamiento típicos.

Para hacer un estimado preliminar de los tamaños de los intercambiadores de calor de coraza y tubos, en la tabla 4.9-2 se dan los valores típicos de los coeficientes de transferencia de calor global. Estos valores pueden resultar útiles como una verificación de los resultados de los métodos de diseño descritos en este capítulo.

TABLA 4.9-1. *Coeficientes de ensuciamientos íípicos (P3. NI)*

	h_d (W/m^2 K)	h_d (btu/h pie^2 °F)
Agua destilada y de mar	11350	2000
Agua municipal	5680	1000
Agua fangosa	1900-2840	350-500
Gases	2840	500
Líquidos volátiles	2840	500
Aceites vegetales y minerales	1990	350

4.10 INTRODUCCIÓN A LA TRANSFERENCIA DE CALOR POR RADIACIÓN

4.10A Introducción y ecuaciones básicas para la radiación

1. Naturaleza de la transferencia de calor por radiación. En las secciones anteriores de este capítulo se estudió la transferencia de calor por conducción y por convección. En la conducción, el calor se transfiere de una parte de un cuerpo a otra, produciéndose un calentamiento del material que esta entre ambas partes. En la convección, el calor se transfiere por el mezclado de los materiales y por conducción. En la transferencia radiante de calor, el medio a través del cual se transfiere el calor casi nunca se calienta. Básicamente, este mecanismo consiste en una transferencia de calor por radiación electromagnética.

La radiación térmica es una forma de radiación electromagnética similar a los rayos X, las ondas de luz, los rayos gamma, etc, y la única diferencia es la longitud de onda. Obedece las mismas leyes que la luz: se desplaza en línea recta, puede transmitirse a través del espacio y del vacío, etc. Es un mecanismo de transferencia de calor muy importante, en especial cuando hay grandes diferencias de temperatura, como en un horno de tubos de vapor, en secadores radiantes y en hornos para cocción de alimentos. La radiación suele ir acompañada de conducción y convección. En esta sección se estudiara la transferencia radiante de calor de manera elemental y en la sección 4.11 se analizara con mas detalle.

TABLA 4.9-2. ***Valores*** *típicos de los coeficientes de transferencia de calor globales en los intercambiadores de tubo y coraza (HI, P3, WI)*

	U ($W/m^2\ K$)	U ($btu/h \cdot pie^2\ °F$)
De agua a agua	1140-1700	200-300
De agua a solución salina	570-1140	100-200
De agua a líquidos orgánicos	570-1140	100-200
De agua a vapor de condensación	1420-2270	250-400
De agua a gasolina	340-570	60-100
De agua a gas de petróleo	140-340	25-60
De agua a aceite vegetal	110–285	20-50
De gas de petróleo a gasóleo	110-285	20-50
De vapor a agua hirviendo	1420-2270	250-400
De agua a aire (tubo con aletas)	110-230	20-40
De orgánicos ligeros a orgánicos ligeros	230-425	40-75
De orgánicos pesados a orgánicos pesados	55-230	10-40

En su sentido más elemental, el mecanismo de transferencia de calor por radiación está constituido por tres etapas 0 fases:

1. La energía térmica de una fuente de calor, como pared de un horno a T_1, se convierte en la energía de las ondas de radiación electromagnética.
2. Estas ondas se desplazan a través del espacio en línea recta y llegan a un objeto frío a T_2, como un tubo que contiene el agua que se desea calentar.
3. Las ondas electromagnéticas que chocan contra el cuerpo son absorbidas por éste y se vuelven a transformar en energía 0 calor.

2. Absortividad ***y cuerpos negros.*** Cuando la radiación térmica (igual que las ondas de luz) incide sobre un cuerpo, parte de ella es absorbida por éste en forma de calor, otra parte se refleja de regreso al espacio y otra se transmite a través del cuerpo, Para la mayoría de los propósitos de la ingenería de procesos, los cuerpos se consideran opacos a la transmisión, por lo que ésta puede despreciarse. Por tanto, en el caso de cuerpos opacos,

$$\alpha + \rho = 1.0 \tag{4.10-l}$$

donde α es la absortividad o fracción absorbida, y ρ es la reflectividad o fracción reflejada.

Un ***cuerpo negro*** se define como aquel que absorbe toda la energía radiante y no refleja porción alguna de la misma. Por eso para un cuerpo negro, ρ es 0 y $\alpha = 1$ .O. En realidad, en la práctica no hay cuerpos negros perfectos, pero una aproximación muy cercana sería un pequeño orificio en un cuerpo cilíndrico hueco, como se muestra en la figura 4.10-l. La superficie interior del cuerpo hueco se ennegrece con carbón. La radiación penetra por el orificio e incide en la pared de enfrente; parte se absorbe allí mismo y parte se refleja en todos sentidos. Los rayos reflejados vuelven a incidir sobre las paredes, una parte se absorbe y otra se refleja, continuando así el proceso. De esta manera, casi toda la energía que penetra es absorbida y el área del orificio actúa como un cuerpo négro perfecto. La superficie de la pared interior es "rugosa" y los rayos se dispersan en todos sentidos, a diferencia de un espejo, donde se reflejarían en ángulos definidos.

Como ya se mencionó, un cuerpo negro absorbe toda la energía radiante que incide sobre él y no refleja ninguna porción. Un cuerpo negro también emite radiación, dependiendo de su temperatura, y no refleja porción alguna. La relación entre el poder de emisión de una superficie y el de un cuerpo negro se llama *emisividad* ε y es 1.0 para un cuerpo negro. La ley de Kirchhoff enuncia que a una misma temperatura T_1, los valores α_1 y el de una determinada superficie son iguales, esto es,

$$\alpha_1 = \varepsilon_1 \tag{4.10-2}$$

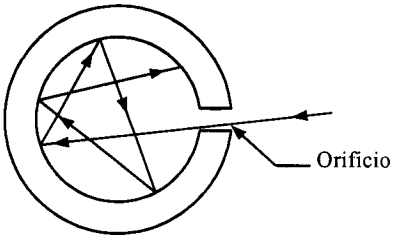


FIGURA 4. 10- 1 *Concepto de un cuerpo negro perfecto.*

La ecuación (4.1 O-2) es válida para cualquier superficie sólida negra o no negra.

3. Radiación de un cuerpo y emisividad. La ecuación básica de transferencia de calor por radiación de un cuerpo negro perfecto con emisividad $\varepsilon = 1.0$ es

$$q = A\sigma T^4 \tag{4.10-3}$$

donde q es el flujo de calor en W, A es el área superficial del cuerpo en m^2, σ es una constante igual a 5.676×10^{-8} W/m^2 . K^4 (0.1714×10^{-8} btu/h · pie · °R^4) y T es la temperatura del cuerpo negro en K (OR).

Para un cuerpo no negro con emisividad $\varepsilon < 1$ .0, el poder de emisión se reduce por un factor igual a ε, es decir,

$$q = A\varepsilon\sigma T^4 \tag{4.10-4}$$

Las sustancias que tienen emisividades inferiores a 1.0 reciben el nombre de *cuerpos grises.* Todos los materiales reales tienen emisividades $\varepsilon < 1$.

Puesto que la emisividad ε y la absortividad α de un cuerpo son iguales a la misma temperatura, la emisividad, a semejanza de la absortividad, es mínima para superficies metálicas pulidas y alta para superficies metálicas oxidadas. En la tabla 4.10-l se agrupan valores típicos que varían con la temperatura. La mayoría de las sustancias no metálicas presentan valores elevados. En el apéndice A.3 se incluyen datos adicionales.

4.10B Radiación del medio circundante a un objeto pequeño

Cuando se tiene el caso de un objeto gris pequeño de área A_1 m^2 a temperatura T_1, circundado por una gran masa auna temperatura más alta T_2, habrá una radiación neta hacia el objeto pequeño. Dicho cuerpo emite cierta cantidad de radiación expresada por la ecuación (4.10-4) como $A_1, \varepsilon_1 \sigma T_1^4$ La emisividad ε_1 de este cuerpo se toma a T_1. El cuerpo pequeño también absorbe energía de los alrededores a T_2 expresada como $A_1\alpha_{12}\sigma T_2^4$. El término α_{12} es la absortividad del cuerpo 1 para la radiación del medio circundante a T_2. El valor de α_{12} es aproximadamente igual a la emisividad del cuerpo a T_2. Entonces el calor neto de absorción es, de acuerdo con la ecuación de Stefan - Boltzmann,

$$q = A_1\varepsilon_1\sigma T_1^4 - A_1\alpha_{12}\sigma T_2^4 = A_1\sigma\left(\varepsilon_1 T_1^4 - \alpha_{12} T_2^4\right) \tag{4.10-5}$$

Para fines de ingeniería, la ecuación (4.1 O-5) se simplifica empleando una emisividad del cuerpo pequeño a T_2. De esta forma,

$$q = A_1 \varepsilon \sigma \left(T_1^4 - T_2^4\right) \tag{4.10-6}$$

TABLA *4.1* 0-1. *Emisividades totales,* ε, *de diversas superficies*

Superficie	*T(K)*	*T(°F)*	*Emisividad,* ε
Aluminio pulido	500	440	0.039
	850	1070	0.057
Hierro pulido	450	350	0.052
Hierro oxidado	373	212	0.74
Cobre pulido	353	176	0.018
Lámina de asbesto	296	74	0.96
Pinturas de aceite, todos los colores	373	212	0.92-0.96
Agua	273	32	0.95

EJEMPLO 4.10-l. Radiación a un tubo metálico

Un tubo horizontal, pequeño y oxidado con DE de 0.0254 m (1 pulg) y longitud igual a 0.61 m (2 pies) tiene una temperatura superficial de 588 K (600 °F) y está encerrado en un horno con paredes de ladrillo refractario a temperatura de 1088 K (1500 "F). La emisividad del tubo metálico es 0.60 a 1088 K y 0.46 a 588 K. Calcule la transferencia de calor al tubo por radiación en unidades SI y del sistema inglés.

Solución: Puesto que el medio circundante constituido por el horno es muy grande en comparación con el tubo que está en su interior, dicho medio, aun siendo gris, puede considerarse desde el punto de vista del objeto pequeño como un cuerpo negro, por lo que se aplica la ecuación (4.10-6). Sustituyendo los valores conocidos en esta ecuación con ε K y

$$A_1 = \pi DL = \pi(0.0254)(0.61)\ \text{m}^2 = \pi(1/12)(2.0)\ \text{pie}^2$$

$$q = A_1 \varepsilon \sigma \left(T_1^4 - T_2^4\right) = [\pi(0.0254)(0.61)](0.6)(5.676 \times 10^{-8})\ [(588)^4 - (1088)^4]$$

$$= -2130\ \text{W}$$

$$= [\pi(1/12)](0.6)(0.1714 \times 10^{-8})[(1060)^4 - (1960)^4] = -7270\ \text{btu/h}$$

Otros ejemplos de objetos pequeños encerrados en medios circundantes grandes en las industrias de proceso son una hogaza de pan que recibe radiación de las paredes de un horno, un paquete de carne o alimentos irradiando calor a las paredes, un paquete de carne o alimentos que irradian calor a las paredes de un congelador, un lingote caliente de hierro sólido que se enfría e irradía calor en una cámara grande y un termómetro que mide la temperatura en un ducto de gran tamaño.

4.10C Combinación de transferencia de calor por radiación y convección

Cuando una superficie transfiere calor por radiación casi siempre hay también una transferencia térmica convectiva, a menos que dicha superficie esté en el vacío. Si la superficie radiante está a temperatura uniforme, es posible calcular la transferencia de calor por convección natural o forzada

con los métodos descritos en las secciones anteriores de este capítulo. La transferencia de calor por radiación se determina mediante la expresión de Stefan-Boltzmann, ecuación (4.1 O-6). Por tanto, la velocidad total de transferencia es la suma de la convección y la radiación.

De esta manera, la velocidad total de transferencia de calor por convección y el coeficiente convectivo están dados por

$$q_{\text{conv}} = h_c A_1 (T_1 - T_2) \tag{4.10-7}$$

Donde q_{conv} es la velocidad de transferencia de calor por convección en W, h_c es el coeficiente convectivo natural o forzado en $\text{W/m}^2 \cdot \text{K}$, T_1 es la temperatura de la superficie, y T_2 es la temperatura del aire y del material que forma la cámara donde se aloja el objeto. El coeficiente radiante de transferencia de calor, h_r en $\text{W/m}^2 \cdot \text{K}$, puede definirse como

$$q_{\text{rad}} = h_r A_1 (T_1 - T_2) \tag{4.10-8}$$

donde q_{rad} es la velocidad de transferencia de calor por radiación en W. La transferencia total de calor es la suma de las ecuaciones (4.10-7) y (4.10-8),

$$q = q_{\text{conv}} + q_{\text{rad}} = (h_c + h_r) A_1 (T_1 - T_2) \tag{4.10-9}$$

Para obtener una expresión para h_r se igualan las ecuaciones (4.10-6)-(4.10-8) y se despeja h_r,

$$h_r = \frac{\varepsilon\sigma\left(T_1^4 - T_2^4\right)}{T_1 - T_2} = \varepsilon(5.67)\frac{(T_1/100)^4 - (T_2/100)^4}{T_1 - T_2} \quad \text{(SI)}$$

$$h_r = \varepsilon(0.1714)\frac{(T_1/100)^4 - (T_2/100)^4}{T_1 - T_2} \quad \text{(Inglesas)} \tag{4.10-10}$$

En la figura 4.10-2 se muestra una gráfica muy conveniente que da los valores de h_r en unidades del sistema inglés, calculados con la ecuación (4.10-10) y con $\varepsilon = 1.0$. Para usar los valores de esta figura, el valor leído debe multiplicarse por ε para determinar el valor de h_r que debe emplearse en la ecuación (4.1 O-9). Si la temperatura del aire es diferente de T_2, las ecuaciones (4.1 O-7) y (4.1 O-8) deben emplearse por separado y no en combinación, como en la ecuación (4.10-9).

EJEMPLO 4.10-2. Combinación de convección y radiación desde un tubo

Vuelva a calcular el ejemplo 4.10-l para una combinación de radiación y convección hacia el tubo horizontal de 0.0254 m.

Solución: El área A del tubo es = ~(0.0254) (0.61) = 0.0487 m^2. Para el coeficiente de convección natural al tubo de 0.0254 m, se usará la ecuación simplificada de la tabla 4.7-2 como aproximación, aun cuando la temperatura de película es bastante alta:

$$h_c = 1.32\left(\frac{\Delta T}{D}\right)^{1/4}$$

Al sustituir los valores conocidos:

$$h_c = 1.32\left(\frac{1088 - 588}{0.0254}\right)^{1/4} = 15.64 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$$

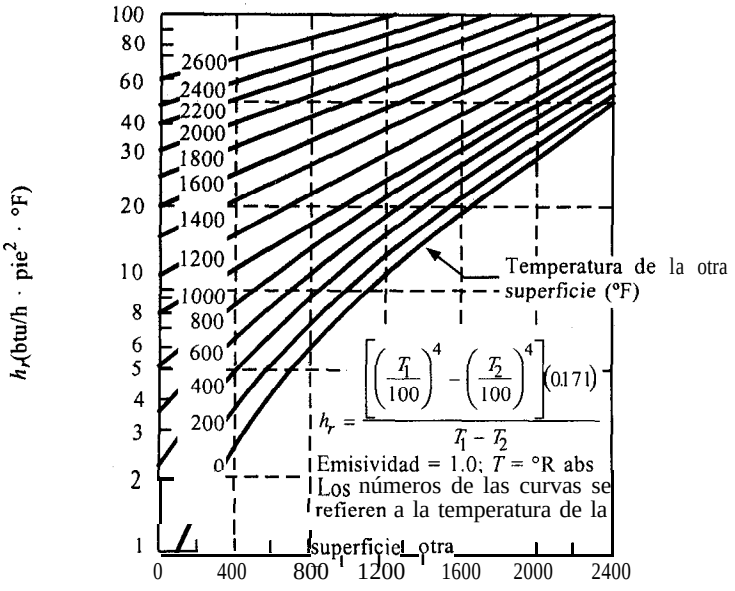


FIGURA 4.1 O-2. *Coeficiente de transferencia de calor radiante en función de la temperatura. (Tomada de R. H. Perry y C. H. Chilton, Chemical Engineer's Handbook, Sn. ed., Nueva York: MacGraw-Hill, Inc., 1974. Reproducido con autorización.)*

Al usar la ecuación (4.10-10) y $\varepsilon = 0.6$,

$$h_r = (0.60)(5.676)\frac{(1088/100)^4 - (588/100)^4}{1088 - 588} = 87.3 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$$

Al sustituir en la ecuación (4.1 0-9),

$$q = (h_c + h_r)A_1(T_1 - T_2) = (15.64 + 87.3)(0.0478)(588 \quad 1088)$$
$$= -2507 \text{ W}$$

Por lo tanto, la pérdida de calor de -2130 W para la radiación sólo aumenta a -2507 W cuando se considera también la convección natural. En este caso, y debido a la gran diferencia de temperaturas, la radiación es el factor más importante.

Perry y Green (P3, pp. 10-14) incluyen una tabla útil de coeficientes de convección natural más radiación $(h_c + h_r)$ para tubos de acero horizontales simples y oxidados, en función del diámetro externo y de la diferencia de temperaturas. Los coeficientes para tuberías con aislamiento son iguales que para tubos sin recubrimiento (excepto que intervienen temperaturas superficiales más bajas para los tubos con aislamiento), pues la emisividad de la envoltura que aísla al tubo casi es igual a la del acero oxidado, aproximadamente 0.8. En la sección 4.11 se hará un análisis más detallado de la radiación.

4.11 PRINCIPIOS AVANZADOS DE TRANSFERENCIA DE CALOR POR RADIACIÓN

4.11A Introducción y espectro de radiación

1. Introducción. Esta sección describe algunos principios básicos y también algunos temas avanzados sobre la radiación que no se mencionaron en la sección 4.10. El intercambio de radiación entre dos superficies depende del tamaño, la forma y la orientación relativa de estas dos superficies, y también de sus emisividades y absortividades. En los casos que se van a considerar, las superficies están separadas por un medio no absorbente, como el aire. Si hay presentes gases como el CO_2 y el H_2O, ocurre cierta absorción por parte de los gases, la cual se considerá más adelante en esta sección.

2. Espectro de radiación y radiación térmica. La energía se transporta en forma de ondas electromagnéticas que viajan a la velocidad de la luz. Los cuerpos emiten muchas formas de energía radiante, como rayos gamma, energía térmica, ondas de radio, etc.; de hecho, hay un espectro continuo de radiación electromagnética. Este espectro electromagnético se divide en varios intervalos de longitudes de onda, como rayos cósmicos ($\lambda < 10^{-13}$ m), rayos gamma (λ, 10^{-13} a $1\ 0^{-10}$ m), radiación térmica (λ, $1\ 0^{-7}$ a 10^{-4} m), etc. La radiación electromagnética producida únicamente debido a la temperatura del emisor se llama radiación térmica y se encuentra entre las longitudes de onda de 10^{-7} y 10^{-4} m. Esta porción del espectro electromagnético es importante en la transferencia de calor térmica radiante. Las ondas electromagnéticas con longitudes de onda de 3.8×10^{-7} a 7.6×10^{-7} m, denominadas *radiación visible,* pueden ser detectadas por el ojo humano. La radiación visible pertenece al intervalo de la radiación térmica.

Cuando se calientan diferentes superficies a la misma temperatura, no emiten o absorben la misma cantidad de energía térmica radiante. Un cuerpo que absorbe y emite la máxima cantidad de energía a una temperatura dada se llama *cuerpo negro, y es* un estándar contra el que pueden compararse otros cuerpos.

3. Ley de Planck y potencia emisiva. Cuando un cuerpo negro se calienta hasta una temperatura T, emite fotones desde la superficie, los cuales tienen una distribución definida de energía.

La ecuación de Planck relaciona la potencia emisiva monocromática $E_{B\lambda}$ en W/m^3 a una temperatura *Ten* K con una longitud de onda λ en m.

$$e_{B\lambda} = \frac{3.7418 \times 10^{-16}}{\lambda^5 \left[e^{1.438 \times 10^{-2}/\lambda T} - 1 \right]} \qquad \textbf{(4.11-1)}$$

En la figura 4.11- 1 se ilustra una gráfica de la ecuación (4.11- 1) que muestra que la energía despedida aumenta con *T.* Además, para una *T* dada, la potencia emisiva alcanza un valor máximo a una longitud de onda que disminuye conforme aumenta la temperatura *T.* A una temperatura dada, la radiación emitida abarca un espectro de longitudes de onda. El espectro de la luz visible ocurre en la región de valores bajos de λ. El Sol tiene una temperatura cercana a 5800 K y el espectro solar rebasa por los dos extremos el intervalo visible.

Auna temperatura dada, la longitud de onda a la cual la potencia emisiva del cuerpo negro es máxima puede determinarse diferenciando la ecuación (4.11- 1) con respecto a λ a *T* constante e igualando a cero el resultado. Éste es el siguiente *y se* conoce como *ley del desplazamiento de Wien:*

$$\lambda_{máx}\ T = 2.898 \times 10^{-3}\ \text{m} \cdot \text{K} \qquad \textbf{(4.11-2)}$$

El lugar geométrico donde se encuentran los valores máximos se muestra en la figura 4.11-l.

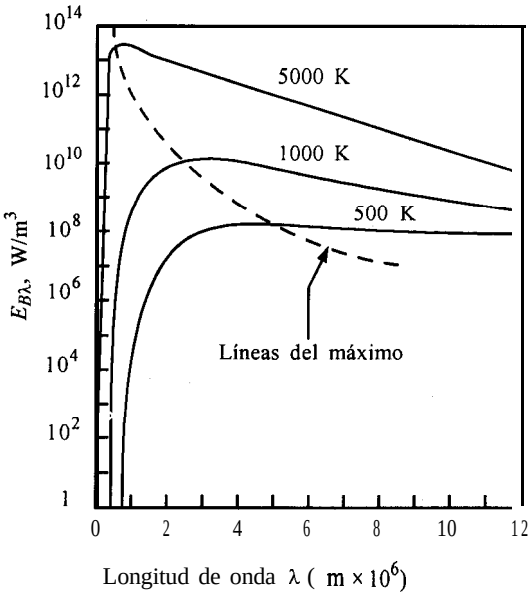


FIGURA 4.11-1. *Distribución espectral de la energía total emitida por un cuerpo negro a diferentes temperaturas del cuerpo negro.*

4. Ley de Stefan-Boltzmann. La potencia emisiva total es la cantidad total de energía de radiación por área unitaria que sale de una superficie a una temperatura T sobre todas las longitudes de onda. Para un cuerpo negro, la potencia emisiva total está dada por la integral de la ecuación (4.1 l-l) a una T determinada sobre todas las longitudes de onda o por el área bajo la curva de la figura 4.11-l.

$$E_B = \int_0^\infty E_{B\lambda}\, d\lambda \tag{4.11-3}$$

Esto da

$$E_B = \sigma T^4 \tag{4.11-4}$$

El resultado es la ley de Stefan-Boltzmann con $\sigma = 5.676 \times 10^{-8}$ W/m^2 K^4. Las unidades de E_B, son W/m^2.

5. Emisividad y ley de Kirchhoff. Una propiedad importante de la radiación es la emisividad de una superficie, que se define como la energía total emitida por la superficie dividida entre la energía total emitida por un cuerpo negro a la misma temperatura.

$$\varepsilon = \frac{E}{E_B} = \frac{E}{\sigma T^4} \tag{4.1 l-5}$$

Como un cuerpo negro emite la cantidad máxima de radiación, ε siempre es < 1.0.

Se puede deducir una relación entre la absortividad α_1 y la emisividad ε_1 de un material colocándolo en un recinto isotérmico y permitiendo que el cuerpo y el recinto alcancen la misma temperatura en equilibrio térmico. Si G es la radiación sobre el cuerpo, la energía absorbida debe ser igual a la energía emitida.

$$\alpha_1 G = E_1 \tag{4.11-6}$$

Si se quita el cuerpo y se remplaza por un cuerpo negro de igual tamaño, entonces, en el equilibrio,

$$\alpha_2 G = E_B \tag{4.11-7}$$

Al dividir la ecuación (4.11-6) entre la (4.1 1-7),

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{E_1}{E_B} \tag{4.11-8}$$

Pero $\alpha_2 = 1.0$ para un cuerpo negro. Por consiguiente, puesto que $E_1/E_B = \varepsilon_1$

$$\alpha_1 = \frac{E_1}{E_B} = \varepsilon_1 \tag{4.11-9}$$

Ésta es la ley de Kirchhoff, que establece que en el equilibrio térmico $a = \varepsilon$ de un cuerpo. Cuando un cuerpo no está en equilibrio con sus alrededdores, el resultado no es válido.

6. *Concepto de cuerpo gris.* Un cuerpo gris se define como una superficie en la cual las propiedades monocromáticas son constantes en todas las longitudes de onda. Para una superficie gris,

$$\varepsilon_\lambda = \text{const.}, \qquad \alpha_\lambda = \text{const.} \tag{4.11-10}$$

Por consiguiente, la absortividad total α y la absortividad monocromática α_λ de una superficie gris son iguales, como lo son ε y ε_λ.

$$a = \alpha_\lambda, \qquad \varepsilon = \varepsilon_\lambda \tag{4.11-11}$$

Si se aplica la ley de Kirchhoff a un cuerpo gris, $\alpha_\lambda = \varepsilon_\lambda$ y.

$$\alpha = \varepsilon \tag{4.11-12}$$

Como resultado, la absortividad y la emisividad totales son iguales para un cuerpo gris, aun si el cuerpo no está en equilibrio térmico con sus alrededores.

Los cuerpos grises no existen en la práctica, y este concepto es una idealización. La absortividad de una superficie varía en realidad con la longitud de onda de la radiación incidente. En ingeniería, muchas veces los cálculos pueden basarse con razonable precisión en la suposición de que el cuerpo es gris. *a se* supone constante aunque haya una variación de λ en la radiación incidente. Además, en sistemas reales varias superficies pueden estar a diferentes temperaturas. En este caso el valor de *a* de una superficie se evalúa determinando la emisividad, no a la temperatura real de la superficie, sino *a* la temperatura de la otra superficie de la fuente radiante o emisora , ya que ésta es la temperatura que la superficie absorbente habrá de alcanzar si el absorbente y el emisor llegan al equilibrio térmico. La temperatura del absorbente tiene un efecto muy ligero sobre la absortividad.

4.11B Deducción de los factores de observación en la radiación para diferentes geometrías

1. Introducción. Los conceptos y definiciones presentados en la sección 4.11 A constituyen un fundamento suficiente para determinar el intercambio radiante neto entre superficies. Si dos superficies están dispuestas de manera que se intercambie energía de la superficie más caliente la más fría se producirá un flujo de neto energía de la más caliente a la más fría. El tamaño, la forma y la

orientación de dos superficies radiantes o de un sistema de superficies son factores que contribuyen a determinar la velocidad de flujo de calor neto entre ellas. Para simplificar el análisis suponemos que las superficies están separadas por un medio no absorbente, como el aire, suposición que resulta adecuada para muchas aplicaciones de ingeniería. Sin embargo, en casos como el de un horno, la presencia de vapores de CO;! y de H_2O hace imposible dicha simplificación, dadas sus grandes absortividades.

Primero se considerará el intercambio de radiación entre placas paralelas infinitas, la configuración geométrica más simple. Esta suposición implica que no hay efectos de borde en el caso de superficies finitas. Trataremos en primer lugar el caso más simple, en el cual las superficies son cuerpos negros, y después analizaremos algunas geometrías más complicadas y cuerpos grises.

2. Factor de observación para planos negros paralelos infinitos. Si dos planos negros infinitos y paralelos a T_1 y T_2 irradian uno hacia el otro, el plano 1 emite una radiación σT_1^4 hacia el plano 2, que éste absorbe en su totalidad. Además, el plano 2 emite una radiación σT_2^4 hacia el plano 1, que éste absorbe en su totalidad. Entonces, con respecto al plano 1, la radiación neta del plano 1 al 2 es

$$q_{12} = A_1\sigma\left(T_1^4 - T_2^4\right) \tag{4.11-13}$$

En este caso, toda la radiación de 1 a 2 es interceptada por 2; es decir, la fracción de radiación de 1 que es interceptada por 2 es F_{12}, igual a 1 .O. El factor F_{12} se llama factor geométrico de observación o factor de vista. De esta manera,

$$_{912} = F_{12}A_1\sigma\left(T_1^4 - T_2^4\right) \tag{4.11-14}$$

donde F_{12} *es* la fracción de radiación emitida por 1 en todos sentidos y que es interceptada por la superficie 2. Además,

$$q_{21} = F_{21}A_2\sigma\left(T_1^4 - T_2^4\right) \tag{4.11-15}$$

En este caso de placas paralelas, $F_{12} = F_{21} = 1.0$ y el factor geométrico simplemente se omite.

3. Factor de observación para planos grises paralelos infinitos. Si ambas placas paralelas A_1 *y* A_2 son grises, con emisividades y absortividades $\varepsilon_1 = \alpha_1$ y $\varepsilon_2 = \alpha_2$, respectivamente, se puede proceder como sigue. Puesto que cada superficie tiene una observación no obstruida de la otra, el factor de observación es 1 .O. En una unidad de tiempo, la superficie A_1 emite una radiación $\varepsilon_1 A_1\sigma T_1^4$ hacia A_2. De este total, se absorbe la fracción ε_2 (donde $\alpha_2 = \varepsilon_2$):

$$\text{absorbida por } A_2 = \varepsilon_2\,(\varepsilon_1 A_1\sigma T_1^4) \tag{4.11-16}$$

Además, la fracción $(1 - \varepsilon_2)$, esto es, la cantidad $(1 - \varepsilon_2)(\varepsilon_1 A_1\sigma T_1^4)$, se refleja de regreso a A_1. De esta cantidad, A_1 vuelve a reflejar hacia A_2 una fracción $(1 - \varepsilon_1)$, o la cantidad $(1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2)(\varepsilon_1 A_1\sigma T_1^4)$. La superficie A_2 absorbe la fracción ε_2, o

$$\text{absorbida por } A_2 = \varepsilon_2\,(1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2)(\varepsilon_1 A_1\sigma T_1^4) \tag{4.11-17}$$

La cantidad que vuelve a reflejarse hacia A_1, desde A_2, *es* $(1 - \varepsilon_2)(1 - \varepsilon_1)(1 \quad \varepsilon_2)(\varepsilon_1 A_1 \sigma T_1^4)$. Entonces A_1, absorbe ε_1 y vuelve a reflejar hacia A_2 una cantidad $(1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2)(1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2) \times (-\varepsilon_1 A_1 \sigma T_1^4)$. Entonces, la superficie A_2 absorbe

$$\text{absorbida por } A_2, = \varepsilon_2(1 \quad \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2)(1 - \varepsilon_1)(1 \quad \varepsilon_2)(\varepsilon_1 A_1 \sigma T_1^4) \tag{4.11-18}$$

Este proceso continúa y la cantidad total absorbida por A_2 es la suma de las ecuaciones (4.11- 16), (4.11-17), (4.1 1-18), etcétera.

$$q_{1\to 2} = A_1 \sigma T_1^4 [\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 (1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2) + \varepsilon_1 \varepsilon_2 (1 - \varepsilon_1)^2 (1 - \varepsilon_2)^2 + \cdots] \tag{4.11-19}$$

El resultado es una serie geométrica (MI).

$$q_{1\to 2} = A_1 \sigma T_1^4 \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{1 - (1 - \varepsilon_1)} = A_1 \sigma T_1^4 \frac{1}{1/\varepsilon_1 + 1/\varepsilon_2 - 1} \tag{4.11-20}$$

Al repetir el procedimiento para la cantidad absorbida por A_1 que proviene de A_2,

$$q_{1\to 2} = A_1 \sigma T_1^4 \frac{1}{1/\varepsilon_1 + 1/\varepsilon_2 - 1} \tag{4.11-21}$$

La radiación neta es la diferencia de las ecuaciones (4.1 l-20) y (4.1 l-2 1).

$$q_{12} = A_1 \sigma \left(T_1^4 - T_2^4\right) \frac{1}{1/\varepsilon_1 + 1/\varepsilon_2 - 1} \tag{4.11-22}$$

Si $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1.0$ para cuerpos negros, la ecuación (4.1 l-22) se transforma en la (4.11-13).

EJEMPLO 4.11-1. Radiación entre planos paralelos

Dos planos grises paralelos de gran tamaño tienen emisividades $\varepsilon_1 = 0.8$ y $\varepsilon_2 = 0.7$; la superficie 1 s encuentra a 1100 °F (866.5 K) y la superficie 2 a 600 °F (588.8 K). Use unidades SI y del sistema inglés para contestar las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es la radiación neta de 1 a 2?

b) ¿Cuál sería la radiación neta si ambas superficies fueran negras?

Solución: Para el inciso a), usando la ecuación (4.1 l-22) y sustituyendo los valores conocidos,

$$\frac{q_{12}}{A_1} = \frac{\sigma\left(T_1^4 - T_2^4\right)}{1/\varepsilon_1 \quad 1/\varepsilon_2 - 1} = (0.174 \times 10^{-8}) \frac{(1100 + 460)^4 - (600 + 460)}{1/08 + 1/0.7 - 1}$$

$$= 4750 \text{ btu/h} \cdot \text{pie}^2$$

$$\frac{q_{12}}{A_1} = (5.676 \times 10^{-8}) \frac{(8665)^4 - (5888)^4}{1/08 \quad 0.7 - 1} = 15010 \text{ W/m}^2$$

Para las superficies negras del inciso b), con la ecuación (4.1 1-13),

$$q = 7960 \text{ btu/h} \cdot \text{pie}^2 \quad \text{o} \quad 25\,110 \text{ w/m}^2$$

Note la gran disminución de radiación cuando las emisividades son inferiores a 1 .0.

El ejemplo anterior demuestra el notable efecto que tienen las emisividades menores de 1 .O sobre la radiación. Este hecho se utiliza para reducir las pérdidas o ganancias por radiación utilizando planos como escudo para la radiación. Por ejemplo, para dos superficies paralelas de emisividad ε a T_1 y T_2 la ecuación (4.1 l-22) indica que el intercambio es

$$\frac{(q_{12})_0}{A} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{2/\varepsilon - 1} \tag{4.1 l-23}$$

El subíndice 0 indica que no existen planos entre las dos superficies. Supóngase ahora que se intercalan uno o más planos de radiación entre las superficies originales. Entonces, puede demostrarse que

$$\frac{(q_{12})_N}{A} = \frac{1}{N+1}\frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{2/\varepsilon - 1} \tag{4.11-24}$$

donde N es el número de planos o escudos de radiación entre las superficie originales. Por tanto, estos planos producen una gran disminución de las pérdidas de calor por radiación.

4. Deducción de la ecuación general para el factor de observación entre cuerpos negros. Considérese una radiación entre dos planos negros paralelos de tamaño finito, como los de la figura 4.11-2a. Puesto que los planos no son intinitos, parte de la radiación emitida por la superficie 1 no incide sobre la 2 y viceversa. Por lo mismo, el intercambio neto de radiación es inferior, pues una parte se pierde en el medio circundante. La fracción de radiación que emite la superficie 1 en todos sentidos y que es interceptada por la superficie 2, se expresa como F_{12} *y* tiene que determinarse para cada geometría mediante elementos diferenciales de superficie e integrando para el total de las superficies.

Antes de que podamos deducir una relación general para los factores de vista entre dos cuerpos finitos, debemos considerar y analizar dos cantidades, un ángulo sólido y la intensidad de la radiación. Un ángulo sólido ω es una cantidad adimensional que es la medida de un ángulo en geometría de sólidos. En la figura 4.1 1-3a, el ángulo sólido diferencial $d\omega_1$ es igual a la proyección normal de dA_2 dividida entre el cuadrado de la distancia entre el punto P *y* el área dA_2.

$$do, = \frac{dA_2 \cos \theta_2}{r^2} \tag{4.11-25}$$

Las unidades de un ángulo sólido son estererradianes o sr. Para un hemisferio, el número de sr subtendidos por esta superficie es 2π.

La intensidad de la radiación para un cuerpo negro I_B, es la cantidad de radiación emitida por área unitaria proyectada en una dirección normal a la superficie y por ángulo sólido unitario en una dirección específica, como se muestra en la figura 4.1 1-3b. La proyección de dA sobre la línea entre los centros *es* $dA \cos \theta$.

$$I_B = \frac{dq}{dA \cos d\, o} \tag{4.11-26}$$

donde q *se* da en W e I_B se da en $W/m^2 \cdot$ sr. Suponemos que el cuerpo negro es una superficie difusa que emite con igual intensidad en todos sentidos, es decir, I = constante. La potencia emisiva E_B que

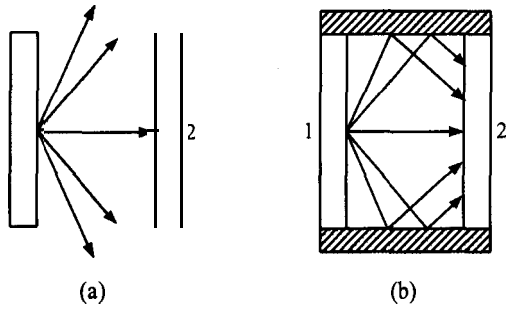


FIGURA 4.11-2. *Radiación entre dos superficies negras: a) dos planos simples, b) dos planos conectados por paredes refractarias que reflejan la radiación.*

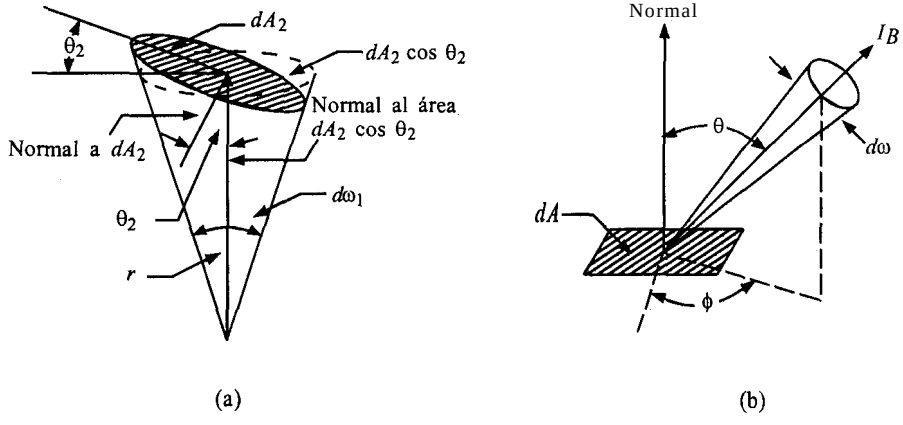


FIGURA 4.11-3. *Geometría para un ángulo sólido e intensidad de radiación: a) geometria del ángulo sólido, b) intensidad de radiación desde el área emisora dA.*

sale de la superficie plana de un cuerpo negro se determina integrando la ecuación (4.1 l-26) sobre todos los ángulos sólidos subtendidos por un hemisferio que cubre la superficie. El resultado final es el siguiente. (Véanse los detalles en las referencias (C3, H1,K1).)

$$E_B = \pi I_B \tag{4.11-27}$$

donde E_B *se* da en W/m^2.

Para determinar la velocidad de transferencia de calor por radiación entre dos superficies negras debemos determinar el caso general para la fracción de calor radiante total que sale de una superficie y llega a otra. Utilizando únicamente superficies negras, consideramos el caso que se muestra en la figura 4.11-4, en el cual la energía radiante se intercambia entre elementos de área dA_1 y dA_2. La línea r es la distancia entre las áreas, y los ángulos entre esta línea y las normales a las dos superficies son θ_1 y θ_2. La energía radiante que sale de dA_1 en la dirección dada por el ángulo θ_1 es $I_{B1}\, dA \cos \theta_1$. La energía que sale de dA_1 y llega a dA_2 está dada por la ecuación (4.1 l-28)

$$dq_{1\to 2} = I_{B1}\, dA \cos \theta_1\, d\omega_1 \tag{4.11-28}$$

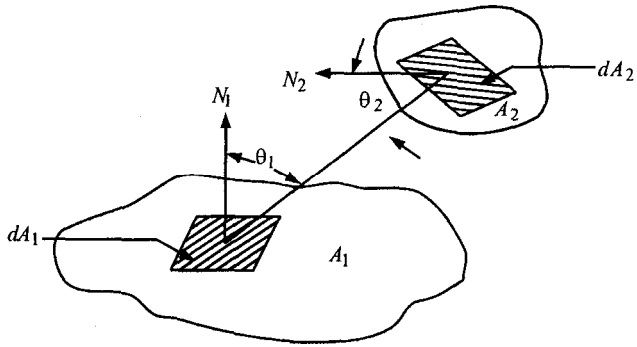


FIGURA *4.1 1-4. Elementos de brea para el factor de forma de la radiación.*

donde $d\omega_1$ es el ángulo sólido subtendido por el área dA_2, como se observa desde dA_1. Al combinar las ecuaciones (4.11-25) y (4.11-28) resulta

$$d_{q1\to2} = \frac{I_{B1} dA_1 \cdot \cos\theta_1 \cos\theta_2 \, dA_2}{r^2} \tag{4.11-29}$$

A partir de la ecuación (4.11-27), $I_{B1} = E_{B1}/\pi$. Si se sustituye I_{B1} por E_{B1}/π en la ecuación (4.11-29),

$$d_{q1\to2} = \frac{E_{B1} \cos\theta_1 \cos\theta_2 \, dA_1 \, dA_2}{\pi r^2} \tag{4.11-30}$$

La energía que sale de dA_2 y llega dA_1 es

$$d_{q2\to1} = \frac{E_{B2} \cos\theta_2 \cos\theta_1 \, dA_2 \, dA_1}{\pi r^2} \tag{4.11-31}$$

Al sustituir E_{B1} por σT_1^4 y E_{B2} por $\sigma T^4{}_2$ de la ecuación (4.11-4) y tomar la diferencia de las ecuaciones (4.1 l-30) y (4. 1 l-3 1) para el flujo de calor neto,

$$d_{q12} = \sigma\left(T_1^4 - T_2^4\right) = \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2 \, dA_1 \, dA_2}{\pi r^2} \tag{4.11-32}$$

Al realizar las dobles integraciones sobre las superficies A_1 y A_2 se obtendrá el flujo de calor neto total entre las áreas finitas.

$$q_{12} = \sigma\left(T_1^4 - T_2^4\right) = \int_{A_2}\int_{A_1} \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2 \, dA_1 \, dA_2}{\pi r^2} \tag{4.11-33}$$

La ecuación (4.11-33) también puede escribirse como

$$q_{12} = A_1 F_{12} \sigma\left(T_1^4 - T_2^4\right) = A_2 F_{21} \sigma\left(T_1^4 - T_2^4\right) \tag{4.11-34}$$

donde F_{12} es un factor de forma geométrica o factor de observación y designa la fracción de la radiación total que sale de A_1 y llega a A_2 y F_{21} representa la fracción que sale de A_2 y llega a A_1. Además, existe la siguiente relación,

$$A_1F_{12} = A_2F_{21} \tag{4.11-35}$$

que es válida tanto para superficies negras como para superficies que no lo son. Así, el factor de vista F_{12} es

$$F_{12} = \frac{1}{A_1}\int_{A_2}\int_{A_1} \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2 \, dA_1 \, dA_2}{\pi r^2} \tag{4.11-36}$$

Los valores del factor de vista pueden calcularse para varias configuraciones geométricas.

5. Factores de observación entre cuerpos negros para varias geometrías. En seguida se dan varias relaciones básicas entre los factores de observación.

La relación de reciprocidad dada por la ecuación (4.1 l-35) es

$$A_1F_{12} = A_2F_{21} \tag{4.11-35}$$

Esta relación puede aplicarse a dos superficies cualesquiera *i y j*.

$$A_iF_{ij} = A_jF_{ji} \tag{4.11-37}$$

Si la superficie *A*, sólo puede observar la superficie A_2, entonces $F_{12} = 1.0$.

Si la superficie A_1 observa varias superficies A_2, A_3, ... y todas las superficies forman un recinto, entonces la relación del recinto es

$$F_{11} + F_{12} + F_{13} + \cdots = 1.0 \tag{4.11-38}$$

Si la superficie A_1 no puede observarse a sí misma (la superficie es plana o convexa), $F_{11} = 0$.

EJEMPLO 4.11-2. Factor de observación de un plano hasta un hemisferio

Determine los factores de observación entre un plano A_1 cubierto por un hemisferio A_2, y el hemisferio, como se muestra en la figura 4.11-5.

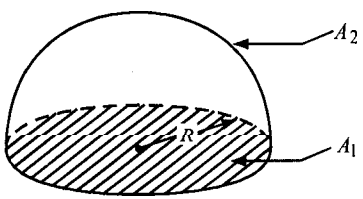


FIGURA *4.1* l-5. *Intercambio radiante entre una superficie plana y un hemisferio para el ejemplo* **4.** *11* **-2.**

Solución: Como la superficie A_1 sólo observa a A_2, el factor de observación $F_{12} = 1.0$. Si usamos la ecuación (4.11-35),

$$A_1F_{12} = A_2F_{21} \tag{4.11-35}$$

El área $A_1 = \pi R^2$, $A_2 = 2\pi R^2$. Al sustituir en la ecuación (4.11-35) y despejar F_{21},

$$F_{21} = \frac{A_1}{A_2} = (1.0)\frac{\pi R^2}{2\pi R^2} = \frac{1}{2}$$

Si se utiliza la ecuación (4.11-38) para la superficie A_1, $F_{11} = 1.0$ $F_{12} = 1.0 - 1.0 = 0$. Además, se puede escribir la misma ecuación para la superficie A_2 a fin de obtener

$$F_{22} + F_{21} = 1.0 \tag{4.11-39}$$

Si se despeja F_{22}, $F_{22} = 1.0 - F_{21} = 1.0 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

EJEMPLO 4.11-3. Radiación entre discos paralelos

Como se ve en la figura 4.11-6, un disco pequeño de área A_1 es paralelo a un disco grande de área A_2 y está centrado directamente debajo de A_2. La distancia entre los centros de los discos R y el radio de A_2 es α. Determine el factor de vista para la transferencia de calor radiante de A_1 a A_2.

Solución: El área diferencial para A_2 se toma como el anillo circular de radio x, de modo que $dA_2 = 2\pi x$ dx. El ángulo $\theta_1 = \theta_2$. Al emplear la ecuación (4.11-36),

$$F_{12} = \frac{1}{A_1}\int_{A_2}\int_{A_1} \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2\, dA_1(2\pi x\, dx)}{\pi r^2}$$

En este caso el área A_1 es muy pequeña comparada con A_2, así que dA_1 puede integrarse hasta A_1 y los otros términos que están dentro de la integral pueden suponerse constantes.

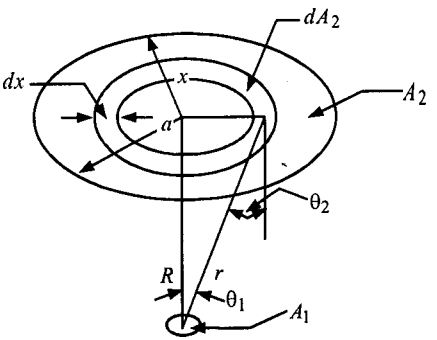


FIGURA 4.11-6. *Factor de observación para la irradiacidn desde un elemento pequeño a un disco paralelo para el ejemplo 4.11-3.*

A partir de la geometría mostrada, $r = (R^2 + x^2)^{1/2}$, $\cos \theta_1 = R/(R^2 + x^2)^{1/2}$. Si se hacen estas sustituciones en la ecuación para F_{12},

$$F_{12} = \int_0^a \frac{2R^2 x\, dx}{\left(R^2 + x^2\right)^2}$$

Después de integrar,

$$F_{12} = \frac{a^2}{R^2 + a^2}$$

Esta integración de la ecuación (4.1 l-36) ha sido llevada a cabo para numerosas configuraciones geométricas y hay tabulaciones de valores de F_{12}. De esta manera,

$$q_{12} = F_{12}A_1\sigma\left(T_1^4 - T_2^4\right) = F_{21}A_1\sigma\left(T_1^4 \quad T_2^4\right) \tag{4.11-34}$$

donde F_{12} es la fracción de radiación emitida por A_1 que es interceptada por A_2, y F_{21} es la fracción que incide sobre A_1 proveniente de A_2. Puesto que el flujo de 1 a 2 debe ser igual al de 2 a 1, la ecuación (4.1 l-34) se convierte en la (4.1 l-35) como se mencionó antes

$$A_1F_{12} = A_2F_{21} \tag{4.1 l-35}$$

Por lo anterior, se selecciona la superficie cuyo factor de observación pueda determinarse con mayor facilidad. Por ejemplo, el factor de vista F_{12} para una superficie pequeña A_1 completamente encerrada por una superficie grande A_2 es 1 .0, pues toda la radiación que sale de A_1 es interceptada por A_2. En la figura 4.1 l-7 se dan los factores de vista F_{12} entre planos paralelos y en la figura 4.1 l-8 se incluyen los factores de vista para rectángulos perpendiculares adyacentes. Los factores de observación para otras geometrías distintas se dan en otras obras. (Hl. K1, P3, Wl.)

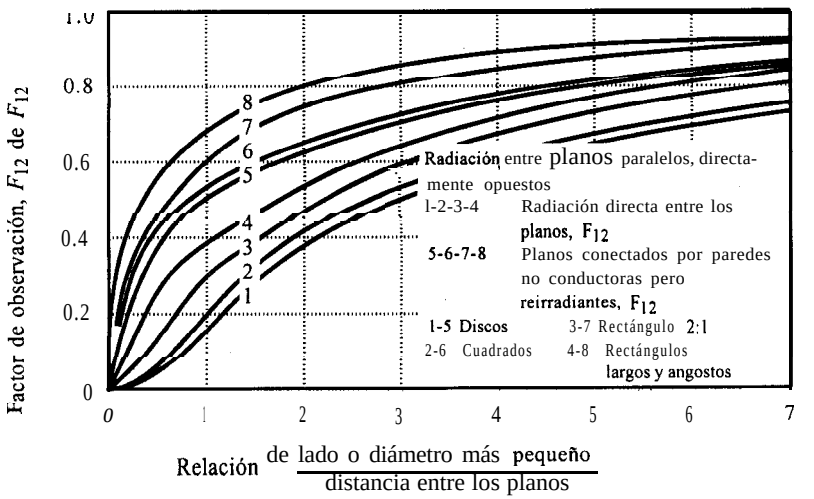


FIGURA 4.1 l-7. *Factor de observación entre planos paralelos directamente opuestos. (Tomado de W. H. McAdams, Heat Transmission, 3a. ed. Nueva York: McGraw- Hill, Inc., 1954. Reproducida con autorización.)*

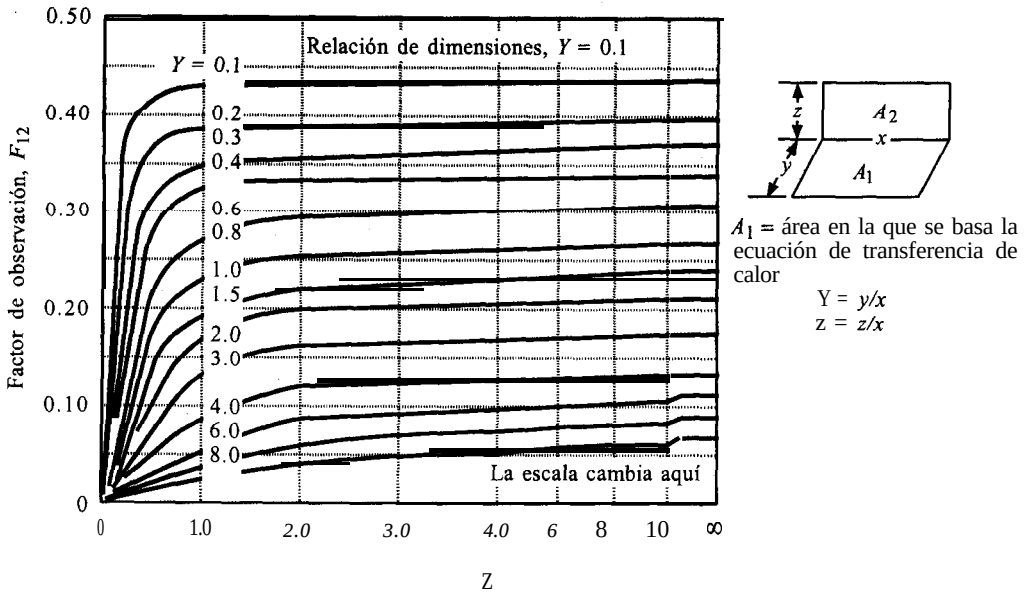


FIGURA 4.11-8. *Factor de observación para rectángulos adyacentes perpendiculares. [Tomado de H. C. Hottel. Mech. Eng., 52. 699 (1930). Reproducido con autorización.]*

4.11C Factores de observación cuando las superficies están conectadas por paredes reirradiantes

Si dos superficies de cuerpos negros A_1 y A_2 están conectadas por paredes no conductoras (refractarias) pero que reflejan la radiación, como en la figura 4.11-2b, la superficie 2 intercepta una fracción mayor de la radiación emitida por la superficie 1. Este factor de observación se llama $\overline{F}_{12}$. Un ejemplo común de esta situación es el caso de dos superficies conectadas por las paredes de un horno. Se ha deducido (M1, C3) la ecuación general de este caso, para una temperatura uniforme del refractario, y dos fuentes radiantes A_1 y A_2 no cóncavas, es decir, que no pueden observarse a sí mismas,

$$\overline{F}_{12} = \frac{A_2 - A_1F_{12}^2}{A_1 + A_2 - 2A_1F_{12}} = \frac{1-(A_1/A_2)F_{12}^2}{A_1/A_2 + 1 - 2(A_1/A_2)F_{12}} \qquad \textbf{(4.11-40)}$$

Además, igual que antes,

$$A_1\overline{F}_{12} = A_2F_{21} \qquad \textbf{(4.11-41)}$$

$$q_{12} = \overline{F}_{12}A_1\sigma\left(T_1^4 - T_2^4\right) \qquad \textbf{(4.11-42)}$$

En la figura 4.11-7 se da el factor $\overline{F}_{12}$ para planos paralelos y la ecuación (4.1 l-36) permite calcular el de otras geometrías. Otras referencias (M1,P1), incluyen los factores de observación F_{12} y $\overline{F}_{12}$ para tubos paralelos adyacentes a una pared en un horno y también para variaciones de la temperatura de las paredes refractarias. Cuando no hay paredes que reflejan la radiación,

$$F_{12} = F_{12} \qquad \textbf{(4.11-43)}$$

4.11D Factores de observación y cuerpos grises

Se considerará ahora un caso más general y más práctico, idéntico a la ecuación (4.1 1-40), pero con las superficies A_1 y A_2 grises y con emisividades ε_1 y ε_2. Como antes, están presentes paredes no conductoras que reflejan la radiación. Puesto que las dos superficies son grises ahora, habrá algo de reflexión de la radiación que disminuirá el intercambio neto de radiación entre las superficies hasta valores inferiores a los de superficies negras. Las ecuaciones finales para este caso son

$$q_{12} = \mathcal{F}_{12} A_1 \sigma \left(T_1^4 - T_2^4\right) \tag{4.11-44}$$

$$\mathcal{F}_{12} = \frac{1}{\frac{1}{\bar{F}_{12}} + \frac{A_1}{A_2}\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right) + \left(\frac{1}{\varepsilon_1} - 1\right)} \tag{4.11-45}$$

donde $\mathcal{F}_{12}$ es el nuevo factor de observación para las dos superficies grises, A_1 y A_2, que no pueden observarse mutuamente y que están conectadas por paredes que reflejan la radiación. Cuando no hay paredes refractarias presentes se usa F_{12} en lugar de $\bar{F}_{12}$ en la ecuación (4.11-41). Nuevamente,

$$A_1 \mathcal{F}_{12} = A_2 \mathcal{F}_{21} \tag{4.11-46}$$

EJEMPLO 4.11-4. Radiación entre planos paralelos grises infinitos
Deduzca la ecuación (4.1 l-22) empezando con la ecuación general de radiación entre dos cuerpos grises A_1 y A_2, que son planos infinitos paralelos con emisividades ε_1 y ε_2, respectivamente.

Solución: Puesto que no hay paredes que reflejan la radiación, F_{12} se transforma en F_{12} por la ecuación (4.1 l-43). Además, ya que toda la radiación de la superficie 1 es interceptada por la superficie 2, $F_{12} = 1$ .O. Sustituyendo en la ecuación (4.1 l-45) y tomando en cuenta que $A_1/A_2 = 1.0$,

$$\mathcal{F}_{12} = \frac{1}{\frac{1}{\bar{F}} + \frac{A_1}{A_2}\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right) + \left(\frac{1}{\varepsilon_1} - 1\right)} = \frac{1}{\frac{1}{1} + 1\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right) + \left(\frac{1}{\varepsilon_1} - 1\right)}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}$$

Entonces, usando la ecuación (4.11-44),

$$q_{12} = \mathcal{F}_{12} A_1 \sigma \left(T_1^4 - T_2^4\right) = A_1 \sigma \left(T_1^4 - T_2^4\right) \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}$$

Esta expresión es idéntica a la (4.1 l-22).

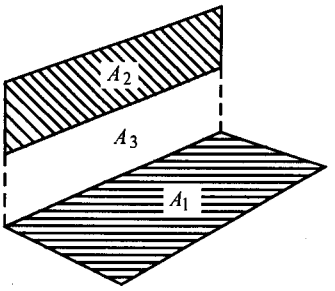


FIGURA *4.1 l-9. Configuración para el ejemplo 4.1 l-5.*

EJEMPLO 4.11-5 Factor de observación complejo para rectángulos perpendiculares
Determine el factor de observación F_{12} para la configuración que se muestra en la figura 4.11-9, con el rectángulo de área A_2 separado del borde común con el rectángulo A_1 y perpendicular al mismo. La temperatura de A_1 es T_1 y la de A_2 y *A3 es* T_2.

Solución: El área *A3* es una zona ficticia entre las keas A_2 y A_1. A la combinación del área A_2 más el área *A3* la llamaremos $A_{(23)}$. El factor de observación $F_{1(23)}$ para las áreas A_1 y $A_{(23)}$ puede obtenerse de la figura 4.11-8 para rectángulos perpendiculares adyacentes. Además, F_{13} puede obtenerse de la figura 4.1 l-8. El intercambio de radiación entre A_1 y $A_{(23)}$ es igual a la radiación interceptada por A_2 y A_3.

$$A_1F_{1(23)}\sigma\left(T_1^4 - T_2^4\right) = A_1F_{12}\sigma\left(T_1^4 - T_2^4\right) + A_1F_{13}\left(T_1^4 - T_2^4\right) \tag{4.11-47}$$

Por lo que

$$A_1F_{1\,(23)} = A_1F_{12} + A_1F_{13} \tag{4.11-48}$$

Al despejar F_{12},

$$F_{12} = F_{1\,(23)} - F_{13} \tag{4.11-49}$$

Para determinar los factores geométricos de forma para la orientación general de dos rectángulos en planos paralelos o perpendiculares se usan métodos similares al de este ejemplo (C3, H1,K1).

EJEMPLO 4.11-6. Radiación hacia un paquete pequeño
Un paquete pequeño y frío, que tiene un área A_1 y una emisividad ε_1, está a la temperatura T_1. Se introduce en una habitación caliente con las paredes a T_2 y emisividad ε_2. Deduzca el factor de observación con la ecuación (4.1 l-45) y la fórmula para transferencia de calor por radiación.

Solución: Para la superficie pequeña A_1 totalmente rodeada por A_2, $\overline{F}_{12} = F_{12}$ de acuerdo con la ecuación (4. ll -43), pues no hay paredes que reflejen la radiación (refractarias). Además $F_{12} = 1.0$, pues toda la radiación proveniente de A_1 es interceptada por A_2, puesto que A_1 no tiene superficies cóncavas y no puede "observarse" a sí misma. Como A_2 *es* muy grande en comparación con *Al*, $A_1/A_2 = 0$. Sustituyendo en la ecuación (4.1 1-45),

$$\mathcal{F}_{12} = \frac{1}{\frac{1}{\overline{F}_{12}} + \frac{A_1}{A_2}\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right) + \left(\frac{1}{\varepsilon_1} - 1\right)} = \frac{1}{\frac{1}{1} + 0\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right) + \frac{1}{\varepsilon_1} - 1} = \varepsilon_1$$

y en la ecuación (4.11-44),

$$q_{12} = \mathcal{F}_{12}A_1\sigma\left(T_1^4 - T_2^4\right) = \varepsilon_1 A_1\sigma\left(T_1^4 - T_2^4\right)$$

Ésta es la misma ecuación que la (4.1 O-6) deducida con anterioridad.

Ya se han desarrollado métodos de matrices para resolver problemas complicados de radiación que incluyen más de cuatro o cinco superficies de transferencia de calor, y se analizan con todo detalle en otros libros (H1, K1).

4.11E Radiación en gases absorbentes

1. Introducción a los gases absorbentes en la radiación. Como se mencionó en esta sección, los sólidos y los líquidos emiten radiación en un espectro continuo, pero la mayoría de los gases monoatómicos o diatómicos, como He, Ar, H_2, O_2 y N_2, son prácticamente transparentes a la radiación térmica, es decir, casi no emiten ni absorben radiación. Los gases con momento dipolar y los gases poliatómicos superiores emiten cantidades significativas de radiación, y también absorben energía radiante dentro de las mismas bandas en las cuales emiten la radiación. Entre estos gases se encuentran CO_2, H_2O, SO;! NH_3 y los vapores orgánicos.

Para un gas dado, el ancho de las bandas de emisión o absorción depende de la presión y de la temperatura. Si se calienta un gas absorbente, éste irradia energía hacia los alrededores más fríos. La velocidad neta de transferencia de calor por radiación entre superficies disminuye en estos casos, porque el gas absorbe un poco de la energía radiante que se transporta entre las superficies.

2. Absorción de la radiación por un gas. La absorción de la radiación en una capa de gas puede describirse analíticamente, ya que la absorción por parte de un gas dado depende del número de moléculas que hay en la trayectoria de la radiación. Al aumentar la presión parcial del gas absorbente o la longitud de la trayectoria, aumenta la absorción. Definimos $I_{\lambda 0}$ como la intensidad de la radiación a una longitud de onda particular antes de que la radiación se introduzca al gas y $I_{\lambda L}$ como la intensidad de la radiación a la misma longitud de onda después de recorrer una distancia L en el gas. Si el haz incide sobre una capa de gas de grosor dL, la disminución en la intensidad, dI_λ es proporcional a I_λ y a dL.

$$dI_\lambda = \alpha_\lambda I_\lambda dL \qquad \textbf{(4.11-50)}$$

donde I_λ se de en W/m^2. Si se integra

$$I_{\lambda L} = I_{\lambda 0}\, e^{-\alpha\lambda L} \qquad \textbf{(4.11-51)}$$

La constante α_λ depende del gas en particular, de su presión parcial y de la longitud de onda de la radiación. Esta ecuación se denomina ley de Beer. Los gases suelen absorber sólo en bandas angostas de longitud de onda.

3. Longitud media del haz característica de un gas absorbente. Los métodos para calcular la radiación de gases son muy complicados. Para fines de ingeniería, Hottel (M1) presentó algunos métodos aproximados a fin de calcular la radiación y la absorción cuando están presentes gases como CO_2 y vapor de agua. Las capas gruesas de un gas absorben más energía que las capas delgadas. Por lo tanto, además de especificar la presión y la temperatura del gas, debemos aclarar cuál es la

longitud característica (longitud media del haz) de una masa de gas para determinar la emisividad y la absortividad del mismo gas. La longitud de haz medio L depende de la geometría específica.

Para un área de superficie negra receptora diferencial dA, localizada en el centro de la base de un hemisferio de radio L que contiene un gas radiante, la longitud del haz medio es L. La longitud del haz medio se ha evaluado para varias geometrías y está dada en la tabla 4.11-1. Para otras formas, L puede aproximarse mediante

$$L = 3.6\,\frac{V}{A} \tag{4.11-52}$$

donde V es el volumen del gas en m^3, A es el área superficial del recinto en m^2 y L está en m.

4. Emisividad, absortividad y radiación de un gas. Ya se han correlacionado las emisividades de los gases y la figura 4.11-10 da la emisividad del CO_2 gaseoso a una presión total del sistema de 1.0 atm absolutas. p_G es la presión parcial del CO_2 en atm y la longitud del haz medio L en m. La emisividad ε_G se define como la relación entre la velocidad de transferencia de energía del cuerpo hemisférico del gas al elemento de superficie en el punto medio, dividida entre la velocidad de transferencia de energía de una superficie negra hemisférica de radio L y temperatura T_G hasta el mismo elemento.

TABLA 4.11-1. *Longitud media del haz para la radiación desde un gas a la superficie del recinto completa (Ml. R2, P3)*

Geometria del recinto	*Longitud de haz medio, L*
Esfera, diámetro D	0.650
Cilindro infinito, diámetro D	0.95
Cilindro, longitud = diámetro D	0.600
Placas paralelas infinitas, distancia de separación D	$1.8D$
Hemisferio, radiación al elemento de la base, radio R	R
Cubo, radiación a cualquier cara, arista D	0.600
Volumen que rodea un manojo de tubos largos con centros en un triángulo equilátero, espacio = diámetro del tubo D	2.80

La tasa de radiación emitida desde el gas es $\sigma\varepsilon_G T_G^4$ en W/m^2 hacia el elemento de superficie que la recibe, donde ε_G se evalúa a T_G. Si el elemento de superficie en el punto medio a T_1 refleja el calor de regreso al gas, la tasa de absorción del gas será $\sigma\alpha_G T_1^4$, donde α_G es la absortividad del gas para la radiación de cuerpo negro de la superficie a T_1. La α_G del CO_2 se determina, a partir de la figura 4.11-10, a T_1, pero en lugar de usar el parámetro $p_G L$, se utiliza $p_G L(T_1/T_G)$. El valor resultante que se ve en la gráfica se multiplica por $(T_G/T_1)^{0.65}$ para dar α_G. La tasa neta de transferencia radiante entre un gas a T_G y una superficie negra de área finita A_1 a T_1 es, por tanto,

$$q = \sigma A\left(\varepsilon_G T_G^4 - \alpha_G T_1^4\right) \tag{4.11-53}$$

Cuando la presión total no es de 1.0 atm, se emplea una gráfica correctiva para corregir la emisividad del CO_2. Además hay gráficas para el vapor de agua (H1, K1, M1, P3). Cuando están

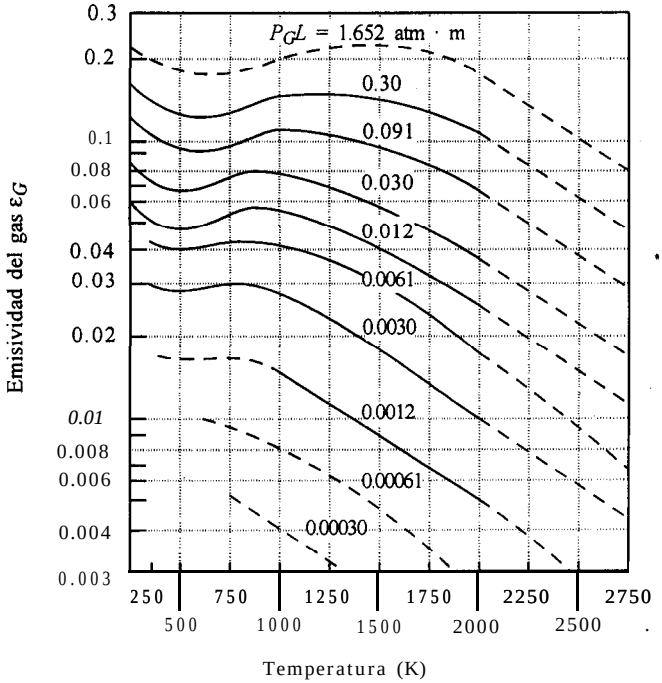


FIGURA 4.11-10. *Emisividad total del dióxido de carbono gaseoso a una presión total de 1.0 atm. (Tomada de W. H. McAdams, Heat Transmission, 3a. ed. Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 19.54. Reproducida con autorización.)*

presentes tanto CO_2 como H_2O, la radiación total se reduce un poco, ya que cada gas es un tanto opaco a la radiación proveniente de otros gases. También hay gráficas disponibles para estas interacciones (H1, K1, M1, P3).

EJEMPLO 4.11-7. Radiación de gases hacia las paredes de un horno

Un horno tiene forma de cubo de 0.3 m de lado, y las paredes interiores pueden considerarse como superficies negras. El gas del interior, a 1 .O atm de presión total y a 1100 K, contiene 10 % molar de CO_2 y el resto es O_2 y N_2. Se despreciará la pequeña cantidad de vapor de agua que hay. Las paredes del horno se mantienen a 600 K mediante enfriamiento externo. Calcule la transferencia de calor total hacia las paredes despreciando cualquier transferencia de calor por convección.

Solución: A partir de la tabla 4.1 1- 1, la longitud media del haz para la radiación hacia una cara de un cubo es $L = 0.60D = 0.60(0.30) = 0.180$ m. La presión parcial del CO_2 es $p_G = 0.10(100) = 0.10$ atm. Entonces $p_GL = 0.10(0.180) = 0.0180$ atm · m. Como se ve en la figura 4.11-10, $\varepsilon_G = 0.064$ a $T_G = 1100$ K.

Para obtener α_G, se evalúa α_G a $T_1 = 600$ K y $p_GL(T_1/T_G) = (0.0180)(600/1100) = 0.00982$ atm . m. Según la figura 4.11-10, el valor no corregido es $\alpha_G = 0.048$. Si se multiplica esto por el factor de corrección $(T_G/T_1)^{0.65}$, el valor final corregido es,

$$\alpha_G = 0.048(1100/600)^{0.65} = 0.0712$$

Si se sustituye en la ecuación (4.1 l-53)

$$\frac{q}{A} = \sigma\left(\varepsilon_G T_G^4 - \alpha_G T_1^4\right)$$
$$= (5.676 \times 10^{-8})[0.064(1\,100)^4 - 0.0712(600)^4]$$
$$= 4.795 \times 10^3 \text{ W/m}^2 = 4.795 \text{ kW/m}^2$$

Para seis lados, $A = 60(0.3 \times 0.3) = 0.540$ m^2. Por tanto,

$$q = 4.7950(0.540) = 2.589 \text{ KW}$$

Cuando las paredes del recinto no son negras, algo de radiación choca contra las paredes y se refleja de regreso hacia las otras paredes y al gas. Como aproximación, cuando la emisividad de las paredes es mayor que 0.7, puede usarse la emisividad efectiva E'.

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon + \text{LO}}{2} \qquad \textbf{(4.11-54)}$$

donde ε es la emisividad real de las paredes del recinto. Entonces la ecuación (4. ll -53) se modifica para dar lo siguiente (M1):

$$q = \sigma A \varepsilon' \left(\varepsilon_G T_G^4 - \alpha_G T_1^4\right) \qquad \textbf{(4.11-55)}$$

Hay otros métodos aproximados para gases que contienen llamas luminosas suspendidas, nubes de partículas que no son negras, paredes refractarias y gases absorbentes presentes, etc. (M1, P3).

4.12 TRANSFERENCIA DE CALOR EN FLUIDOS NO NEWTONIANOS

4.12A Introducción

La mayoría de los estudios de transferencia de calor en fluidos se han llevado a cabo con fluidos newtonianos. Sin embargo, en las industrias química, biológica y de procesamiento de alimentos, se manejan bastantes fluidos no newtonianos. Para diseñar equipos para estos fluidos, es necesario conocer las constantes de las propiedades del flujo (constantes reológicas) o, bien, medirlas experimentalmente. En la sección 3.5 se estudiaron con detalle las constantes reológicas de los fluidos no newtonianos. Puesto que muchos fluidos no newtonianos tienen viscosidad efectiva alta, casi siempre producen flujos laminares. Además, y debido a que la mayor parte de los fluidos no newtonianos son seudoplásticos, pueden representarse mediante la ley exponencial, ecuación (3.5-2), por lo que limitaremos nuestro estudio a estos fluidos. Para otros fluidos se recomienda consultar las referencias de Skelland (S3).

4.12B Transferencia de calor en el interior de tubos

1. Flujo laminar en tubos. Gran parte de las investigaciones experimentales se han concentrado en el estudio de transferencia de calor en fluidos no newtonianos con flujo laminar a través de tubos cilíndricos. Las propiedades físicas que se necesitan para determinar los coeficientes de transferencia

de calor son la densidad, la capacidad calorífica, la conductividad térmica y las constantes reológicas K' y n' o K y n.

La transferencia de calor en un fluido con flujo laminar, sigue principalmente un mecanismo de conducción. No obstante, cuando lavelocidad de flujo y la viscosidad son bajas, pueden existir efectos de convección natural. Puesto que muchos fluidos no newtonianos son bastante "viscosos", los efectos de la convección natural se reducen de manera notable. Para el flujo laminar de fluidos que siguen la ley exponencial en el interior de tubos circulares, puede usarse la ecuación de Metzner y Gluck (M2) cuando se trata de fluidos altamente "viscosos", no newtonianos y una convección natural despreciable, en tubos horizontales o verticales con un número de Graetz $N_{Gz} > 20$ y $n' > 0.10$.

$$(N_{Nu})_a = \frac{h_a D}{k} = 1.75\delta^{1/3}(N_{Gz})^{1/3}\left(\frac{\gamma_b}{\gamma_w}\right)^{0.14} \qquad \textbf{(4.12-1)}$$

donde

$$\delta = \frac{3n' + 1}{4n'} \qquad \textbf{(4.12-2)}$$

$$N_{Gz} = \frac{mc_p}{kL} = \frac{\pi}{4}\frac{Dv\rho}{\mu}\frac{c_p\mu}{k}\frac{D}{L} = \frac{\pi}{4}N_{Re}N_{Pr}\frac{D}{L} \qquad (4.12\text{-}3)$$

Los coeficientes de viscosidad γ_b, a la temperatura T_b y γ_w a la temperatura T_w se definen como

$$\frac{\gamma_b}{\gamma_w} = \frac{K_b' 8^{n'-1}}{K_w' 8^{n'-1}} \frac{K_b'}{K_w'} = \frac{K_b}{K_w} \qquad (4.12\text{-}4)$$

La nomenclatura es: k se de en W/m · K, c_p en J/kg . K, ρ en kg/m^3, el gasto másico m en kg/s, la longitud de la sección calentada del tubo L en m, el diámetro interno D en m, el coeficiente medio h_a en W/m^2 . K, y K y n' son constantes relógicas (véase la sección 3.5). Las propiedades físicas y K_b se evalúan a la temperatura general promedio T_b y K_w a la temperatura promedio de las paredes T_w

Se ha determinado que el valor de la constante reológica n' (o n) no varía de manera apreciable en un amplio intervalo de temperaturas (S3). Sin embargo, la constante reológica K' (o K) sí lo hace. Una gráfica de log K' en función de $1/T_{abs}$ (Cl) o T °C (S3) casi siempre es una línea recta. Puesto que la relación K_b/K_w se eleva a una potencia de 0.14, este factor puede despreciarse algunas veces sin causar errores considerables. Para un valor de la relación 2: 1, el errores sólo 10%. Con frecuencia, una gráfica del logaritmo de la viscosidad en función de $1/T$ para fluidos newtonianos es también una línea recta. El valor de h_a que se obtiene de la ecuación (4.12-1) es el valor medio que debe usarse en la totalidad de la longitud L del tubo con la diferencia aritmética de temperatura AT,:

$$\Delta T_a = \frac{(T_w - T_{bi}) + (T_w - T_{bo})}{2} \qquad (4.12\text{-}5)$$

donde T_w es la temperatura promedio de las paredes de todo el tubo, T_{bi} es la temperatura del volumen de entrada y T_{bo} la temperatura del volumen de salida. El flujo específico de calor q es

$$q = h_a A \text{ AT}, = h_a(\pi DL) \text{ AT}, \qquad (4.12\text{-}6)$$

EJEMPLO 4.12-1. Calentamiento de un fluido no newtoniano con flujo laminar

Un fluido no newtoniano que fluye a una velocidad de 7.56×10^{-2} kg/s por un tubo de 25.4 mm de DI, se calienta por medio de vapor que se condensa en el exterior del tubo. El

fluido entra a la sección de calentamiento del tubo, con longitud de 1 .524 m, y temperatura de 37.8 "C. La temperatura de la pared interna T_w es constante e igual a 93.3 °C. Las propiedades físicas medias del fluido son ρ = 1041 kg/m^3, c_{pm} = 2.093 kJ/kg . K y k = 1.2 12 W/m · K. El fluido sigue la ley exponencial y tiene las siguientes constantes de propiedades de flujo (reológicas): $n = n'$ = 0.40, aproximadamente constante en el intervalo de temperatura considerado y K= 139.9 N · s$^{n'}$ /m^2 a 37.8 °C y 62.5 a 93.3 "C. Al graficar el logaritmo de Ken función de T°C para este fluido se obtiene aproximadamente una línea recta. Calcule la temperatura general de salida del fluido suponiendo flujo laminar.

Solución: El procedimiento es de aproximaciones sucesivas, pues es necesario conocer la temperatura general de salida T_{bo} del fluido para calcular h_a con la ecuación (4.12-2). Suponiendo T_{bo} = 54.4°C para la primera aproximación, la temperatura general media T_b es (54.4 + 37.8)/2, o 46.1°C.

Al graficar los dos valores de Ka 37.8 °C y 93.3 °C en forma de log k en función de T °C y trazando una línea recta a través de estos dos puntos, se obtiene un valor para K_b de 123.5 a T_b = 46.1 "C. Cuando T_w = *93.3 "C, K_w = 62.5.*

Después se calcula el valor de δ con la ecuación (4.12-2):

$$\delta = \frac{3n'+1}{4n'} = \frac{3(0.40)+1}{4(0.40)} = 1.375$$

Si se sustituye en la ecuación (4.12-3)

$$N_{Gz} = \frac{mc_p}{kL} = \frac{(756 \times 10^{-2})(2.093 \times 16)}{1.212(1.524)} = 85.7$$

A partir de la ecuación (4.12-4)

$$\frac{\gamma_b}{\gamma_w} = \frac{K_b}{K_w} = \frac{1235}{625}$$

Entonces sustituyendo en la ecuación (4.12-1)

$$\frac{h_a D}{k} = \frac{h_a(0.0254)}{1.212} = 1.75\delta^{1/3}(N_{Gz})^{1/3}\left(\frac{\gamma_b}{\gamma_w}\right)^{0.14}$$

$$= 1.75(1.375)^{1/3}(85.7)^{1/3}\left(\frac{1235}{625}\right)^{0.14} \qquad (4.12\text{-}1)$$

Al despejar h_a = *448.3* W/m^2 · K

Por medio de un balance de calor, el valor de q en W es el siguiente:

$$q = mc_{pm}(T_{bo} - T_{bi}) \qquad \textbf{(4.12-7)}$$

Esta expresión se iguala con la ecuación (4.12-6) para obtener

$$q = mc_{pm}(T_{bo} - T_{bi}) = h_a(\pi DL)\Delta T_a \qquad (4.12\text{-}8)$$

La media aritmética de la diferencia de temperaturas AT,, calculada con la ecuación (4.12-5), es

$$\Delta T_a = \frac{(T_w - T_{bi}) + (T_w - T_{bo})}{2}$$

$$= \frac{(933 \quad 378) + (933 - T_{bo})}{2} = 74.4 \quad 0.5T_{bo}$$

Al sustituir los valores conocidos de la ecuación (4.12-8) y despejar T_{bo},

$$(7.56 \times 10^{-2})(2.093 \times 10^{3})(T_{bo} - 37.8) = 448.3(x \times 0.025 \times 1.524)(74.4 - 0.5T_{bo})$$

$$T_{bo} = 54.1°C$$

Este valor de 54.1 °C es suficientemente cercano al supuesto de 54.5 °C como para no requerir una segunda aproximación, Sólo se afectaría el valor de K_b. Los valores conocidos pueden sustituirse en la ecuación (3.5-l 1) para el número de Reynolds, para demostrar que es menor que 2100 y que es un flujo laminar.

En fluidos no newtonianos menos "viscosos" que siguen la ley exponencial y con flujo laminar, la convección natural puede afectara la transferencia de calor. Metzner y Gluck (M2) recomiendan el uso de una corrección empírica para la ecuación (4.12-1) en tubos horizontales.

2. Flujo turbulento en tubos. Para flujo turbulento de fluidos que siguen la ley exponencial dentro de tubos, Clapp (C4) propone la siguiente ecuación empírica para la transferencia de calor:

$$N_{NU} = \frac{h_L D}{k} = 0.0041\ (N_{Re,\ gen})^{0.99}\left[\frac{K' c_p}{k}\left(\frac{8V}{D}\right)^{n-1}\right]^{0.4} \qquad \textbf{(4.12-9)}$$

donde $N_{Re,\ gen}$ está definido por la ecuación (3.5-l 1) y h_L es el coeficiente de transferencia de calor basado en la media logarítmica de la fuerza impulsora por temperatura. Las propiedades de flujo se evalúan a la temperatura media del volumen. Metzner y Friend (M3) también proponen ecuaciones para transferencia de calor con flujo turbulento.

4.12C Convección natural

Activos (Al, S3) ofrece ecuaciones para transferencia de calor por convección natural hacia fluidos que siguen la ley exponencial desde diversas geometrías superficiales, tales como esferas, cilindros y placas.

4.13 CASOS ESPECIALES DE COEFICIENTES DE TRANSFERENCIA DE CALOR

4.13A Transferencia de calor en recipientes agitados

1. Introducción. Muchos procesos químicos y biológicos requieren frecuentemente del uso de recipientes agitados. Como se analizó en la sección 3.4, los líquidos suelen agitarse en recipientes cilíndricos con un propulsor montado en un eje e impulsado por un motor eléctrico. En las figuras 3.4-l y 3.4-3 se muestran diversos modelos de agitadores y recipientes. Con mucha frecuencia es necesario enfriar o calentar el contenido del recipiente durante la agitación. Esto suele hacerse con superficies de transferencia de calor, que pueden tener forma de chaquetas de enfriamiento o de calentamiento en las paredes, o serpentines de tubería sumergidos en el líquido.

2. Recipientes con chaqueta de calentamiento. En la figura 4.13- 1 a se muestra un recipiente con chaqueta de calentamiento o enfriamiento. Cuando se trata de un calentamiento, puede emplearse vapor de agua, que se condensa en el interior de la chaqueta y sale por el fondo. El recipiente está equipado con un agitador y, en algunos casos, también con deflectores (que no se muestran).

Las correlaciones para el coeficiente de transferencia de calor entre líquidos newtonianos agitados en el interior de un recipiente y las paredes de la chaqueta tienen la siguiente forma:

$$\frac{hD_t}{k} = a\left(\frac{D_a^2 N\rho}{\mu}\right)^b \left(\frac{c_p\mu}{k}\right)^{1/3} \left(\frac{\mu}{\mu_w}\right)^m \tag{4.13-1}$$

donde h es el coeficiente de transferencia de calor del líquido agitado a la pared interior en $W/m^2 \cdot K$, D_t es el diámetro interior del tanque en m, k es la conductividad térmica en $W/m \cdot K$, D_a es el diámetro del agitador en m, N es la velocidad de rotación en revoluciones por seg, ρ es la densidad del fluido en kg/m^3 y μ es la viscosidad en Pa · s. Todas las propiedades físicas del líquido se evalúan a la temperatura general del mismo, excepto μ_w que corresponde a la temperatura de pared T_w. A continuación se mencionan algunas de las correlaciones existentes y el intervalo del número de Reynolds ($N_{Re} = D_a^2 N\rho/\mu$).

1. Agitador de paletas sin deflectores (C5, Ul),

$$a = 0.36,\ b = \tfrac{2}{3},\ m = 0.21,\quad N'_{Re} = 300 \text{ a } 3 \times 10^5$$

2. Agitador de turbina de paletas planas sin deflectores (B4),

$$a = 0.54,\ b = \tfrac{2}{3},\ m = 0.14,\ N'_{Re} = 30 \text{ a } 3 \times 10^5$$

3. Agitador de turbina con paletas planas y deflectores (B4, B5),

$$a = 0.74,\ b = \tfrac{2}{3},\ m = 0.14,\ N'_{Re} = 500 \text{ a } 3 \times 10^5$$

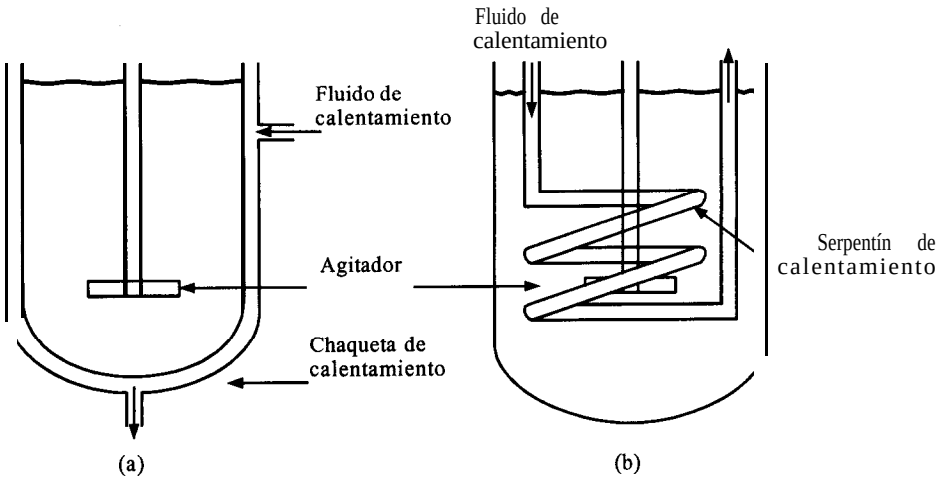


FIGURA *4.13-I. Transferencia de calor en recipientes con agitación: a) recipiente con chaqueta de calentamiento, b) recipiente con serpentines de calentamiento.*

4. Agitador tipo ancla sin deflector (U1)

$$a = 1.0,\ b = \tfrac{1}{2},\ m = 0.18,\ N'_{Re} = 10 \text{ a } 300$$
$$a = 0.36,\ b = \tfrac{2}{3},\ m = 0.18,\ N'_{Re} = 300 \text{ a } 4 \times 10^4$$

5. Agitador de bandas helicoidales sin deflectores (G4),

$$a = 0.633,\ b = \tfrac{1}{2},\ m = 0.18,\ N'_{Re} = 8 \text{ a } 10^5$$

En la tabla 4.13-1 se muestran algunos valores generales típicos de Upara recipientes enchaquetados y diversas aplicaciones de proceso.

EJEMPLO 4.13-1. ***Coeficiente de transferencia de calor en un recipiente agitado y con chaqueta***

Un recipiente enchaquetado de 1.83 m de diámetro con deflectores calienta un líquido que está a 300 K. El agitador tiene 0.6 1 m de diámetro y es una tubería de paletas planas que gira a 100 rpm. La chaqueta contiene agua caliente. La temperatura superficial de las paredes es constante e igual a 355.4 K El líquido tiene las siguientes propiedades físicas generales: $\rho = 961$ kg/m^3, $c_p = 2500$ J/kg . K, $k = 0.173$ W/m . K y $\mu = 1.00$ Pa · s a 300 K y 0.084 Pa · s a 355.4 K. Calcule el coeficiente de transferencia de calor a la pared de la chaqueta.

Solución: Se cuenta con los siguientes datos:

TABLA 4.13-l. *Coeficientes generales de transferencia de calor típicos de recipientes enchaquetados*

Fluido en la chaqueta	*Fluido en el recipiente*	*Material de las paredes*	*Agitación*	*U* h $\frac{btu}{pie^2\ °F}$	*U* $\frac{W}{m^2 \cdot K}$	*Ref.*
Vapor de agua	Agua	Cobre	Niguna	150	852	(P1)
			Agitación simple	250	1420	
Vapor de agua	Pasta	Hierro fundido	Raspadores dobles	125	710	(P1)
Vapor de agua	Agua a ebullición	Cobre	Ninguna	250	1420	(P1)
Vapor de agua	Leche	Hierro fundido	Ninguna	200	1135	(P1)
			simple	300	1700	
Agua caliente	Agua fría	Hierro fundido porcelanizado	Niguna	70	398	(P1)
Vapor de agua	Puré de tomate	Metal	Buena agitación	30	170	(C1)

$D_t = 1.83$ m $\quad D_a = 0.61$m $\quad$ N = 100160 rev/s

$\mu(300\ \text{K}) = 1.00$ $\quad$ Pa · s = 1.00 kg/m · s

$\mu_w(355.4\ \text{K}) = 0.084$ $\quad$ Pa . s = 0.084 kg/m . s

Primero se calcula el número de Reynolds a 300 K,

$$N_{\text{Re}} = \frac{D_a^2 N \rho (100/60)(961)}{\mu} = \frac{}{1.00} = 596$$

El número de Prandtl es

$$N_{\mathrm{Pr}} = \frac{c_p\mu}{k} = \frac{2500(1.00)}{0.173} = 14450$$

Use la ecuación (4.13-1) con $a = 0.74$, $b = 2/3$ *y* $m = 0.14$,

$$\frac{hD_t}{k} = 0.74(N'_{\mathrm{Re}})^{2/3}(N_{\mathrm{Pr}})^{1/3}\left(\frac{\mu}{\mu_w}\right)^{0.14} \qquad \textbf{(4.13-1)}$$

Al sustituir y despejar h,

$$\frac{h(1.83)}{0.173} = 0.74(596)^{2/3}(14450)^{1/3}\left(\frac{1000}{84}\right)^{0.14}$$

$$h \simeq 170.6\ \mathrm{W/m^2 \cdot K}\ (30\ \mathrm{btu/h \cdot pie^2 \cdot\ ^\circ F})$$

Las referencias (C6) contienen también una correlación para predecir el coeficiente de transferencia de calor a un fluido no newtoniano que siga la ley exponencial, contenido en un recipiente enchaquetado al que se adaptó un agitador de turbina.

3. Recipientes con serpentin de calentamiento. En la figura 4.13-1b se muestra un recipiente agitado con serpentín helicoidal de calentamiento o enfriamiento. A continuación se describen las correlaciones para el coeficiente de transferencia de calor a la superficie externa de los serpentines, en recipientes agitados por diversos sistemas.

Para un agitador de paletas sin deflectores (C5),

$$\frac{hD_t}{k} = 0.87\left(\frac{D_a^2N\rho}{\mu}\right)^{0.62}\left(\frac{c_p\mu}{k}\right)^{1/3}\left(\frac{\mu}{\mu_w}\right)^{0.4} \qquad (4.13\text{-}2)$$

Esta expresión es válida para un número de Reynolds de 300 a 4×10^5.

Para una turbina con paletas y deflectores véase (01).

Cuando el serpentín de calentamiento o enfriamiento tiene la forma de deflectores de tubos verticales con turbina de paletas planas, puede usarse la siguiente correlación (Dl)

$$\frac{hD_o}{k} = 0.09\left(\frac{D_a^2N\rho}{\mu}\right)^{0.65}\left(\frac{c_p\mu}{k}\right)^{1/3}\left(\frac{D_a}{D_t}\right)^{1/3}\left(\frac{2}{n_b}\right)^{0.2}\left(\frac{\mu}{\mu_f}\right)^{0.4} \qquad (4.13\text{-}3)$$

donde D_o es el diámetro externo del tubo del serpentin en m, n_b es el número de tubos deflectores verticales y μ_f es la viscosidad a la temperatura media de la película.

Perry y Green (P3) proporcionan valores típicos para coeficientes generales de transferencia de calor U en serpentines sumergidos en diversos líquidos, en recipientes agitados y no agitados.

4.13B Intercambiadores de calor con superfices raspadas

Las suspensiones de sólidos en líquidos, las soluciones acuosas y orgánicas viscosas y numerosos productos alimenticios, tales como margarina y concentrados de jugo de naranja, suelen enfriarse o calentarse en un intercambiador con superficies raspadas. Este equipo consta de en un intercambiador de

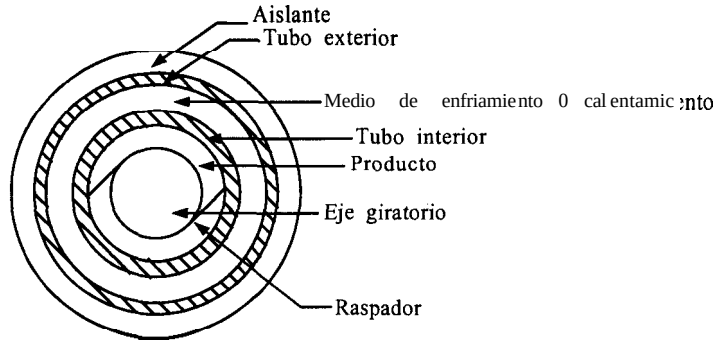


FIGURA 4.13-2. *Intercambiador de calor de superficie raspada*

tubo doble con un cilindro enchaquetado que contiene el vapor de agua o el líquido de enfriamiento y un eje interno al cual se acoplan láminas raspadoras, como se muestra en la figura 4.13-2.

El producto líquido viscoso fluye a velocidad baja por el tubo central entre el eje giratorio y el tubo interno. Los raspadores giratorios desprenden continuamente las acumulaciones superficiales, evitando así sobrecalentamientos localizados y permitiendo una transferencia de calor más rápida y uniforme. A esta unidad se le llama también *intercambiador de calor votator.*

Skelland y colaboradores (S4) propusieron la siguiente ecuación para predecir el coeficiente interno de transferencia de calor para el votator:

$$\frac{hD}{k} = \alpha\left(\frac{c_p\mu}{k}\right)^{\beta}\left(\frac{D - D_S v\rho}{\mu}\right)^{1.0}\left(\frac{DN}{v}\right)^{0.62}\left(\frac{D_S}{D}\right)^{0.55}(n_B)^{0.53} \qquad \textbf{(4.13-4)}$$

$\alpha = 0.014$ $\beta = 0.96$ para líquidos viscosos

$\alpha = 0.039$ $\beta = 0.70$ para líquidos no viscosos

donde D = diámetro del recipiente en m, D_S = diámetro del eje giratorio en m, v = velocidad axial de flujo del líquido en m/s, N = velocidad del agitador en rev/s y n_B = número de raspadores en el agitador. Los datos cubren un intervalo de velocidades de flujo axial de 0.076 a 0.38 m/min y velocidades de rotación entre 100 y 750 rpm.

Los valores típicos de coeficientes generales de transferencia de calor en aplicaciones de proceso alimenticios son $U = 1700$ W/m$^2 \cdot$ K (300 btu/h $\cdot$ pie$^2 \cdot$ °F) para enfriamiento de margarina con NH_3, 2270 (400) para calentamiento de puré de manzana con vapor de agua, 1420 (250) para enfriamiento de manteca con NH3 y 2270 (400) para enfriamiento de crema con agua (B6).

4.13C Iatercambiador de superficie ampliada o con aletas

1. Introducción. El uso de aletas o superficies ampliadas en el exterior de la pared del tubo de un intercambiador de calor para obtener coeficientes de transferencia relativamente altos, es una práctica muy común. El radiador de un automóvil es un ejemplo clásico que consiste en la circulación de agua caliente a través de una batería de tubos, donde se pierde calor y se transfiere al aire. Las superficies ampliadas del exterior de los tubos reciben el calor de las paredes de los tubos y lo trasmiten al aire por convección forzada.

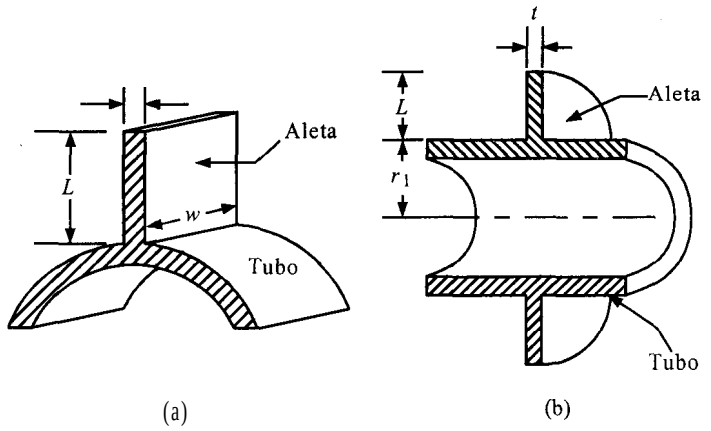


FIGURA 4.13-3. *Dos tipos comunes de aletas en la sección de un tubo circular. a) aleta longitudinal. b) aleta circular o transversal.*

En la figura 4.13-3 se muestran dos tipos comunes de aletas unidas al exterior de las paredes de los tubos. En la figura 4.13-3a hay varias aletas longitudinales espaciadas alrededor de las paredes del tubo y la dirección de flujo de gas es paralela al eje de dicho tubo. En la figura 4.13-3b, el gas fluye perpendicular a tubos que contienen muchas aletas circulares o transversales.

La ecuación (4.13-5) muestra (de manera aproximada) el efecto cualitativo del uso de superficies ampliadas sobre un fluido en el interior de un tubo, que tiene un coeficiente de transferencia de calor h_i y un coeficiente exterior h_o.

$$\frac{1}{U_i A_i} = \sum R \cong \frac{1}{h_i A_i} + R_{\text{metal}} + \frac{1}{h_o A_o} \tag{4.13-5}$$

La resistencia R_{metal}, de la pared casi siempre puede despreciarse. La presencia de aletas en el exterior aumenta A_o y, por tanto, reduce la resistencia $1/h_o A_o$ del fluido en el exterior del tubo. Por ejemplo, si se tiene un valor de h_i para vapor condensado -que es un valor alto- y un valor de h_o para aire en el exterior -que es un valor bajo-, al incrementar A_o, $1/h_o A_o$ se reduce notablemente. A su vez, esto disminuye bastante la resistencia total, lo cual aumenta la velocidad de transferencia de calor. Si se invierten las posiciones de los dos fluidos con el aire en el interior y el vapor de agua en el exterior, el uso de aletas aumentará muy poco la transferencia de calor.

La ecuación (4.13-5) es sólo una aproximación pues en la temperatura en el exterior del tubo desnudo no es igual la del extremo de la aleta, debido a la resistencia al flujo de calor por conducción que se produce entre la base y el extremo de la aleta. Por consiguiente, una unidad de área de superficie de aleta no es tan eficiente como una unidad de área de tubo desnudo en la base de la aleta. Se ha deducido matemáticamente la eficiencia de la aleta n_f para aletas de diversas geometrías.

2. Deducción de la ecuación para eficiencias de las aletas. Considérese una aleta unidimensional expuesta a un fluido que la rodea a una temperatura T_∞, como se muestra en la figura 4.13-4. En la base de la aleta la temperatura es T_0 y en el punto x es T. En estado estacionario, la cantidad de calor conducido hacia el interior, del elemento en x, es $q_{x/x}$ y es igual a la cantidad de calor conducida hacia el exterior, más la cantidad de calor perdida por convección.

$$q_x|_x = q_x|_x + \Delta x + q_c \tag{4.13-6}$$

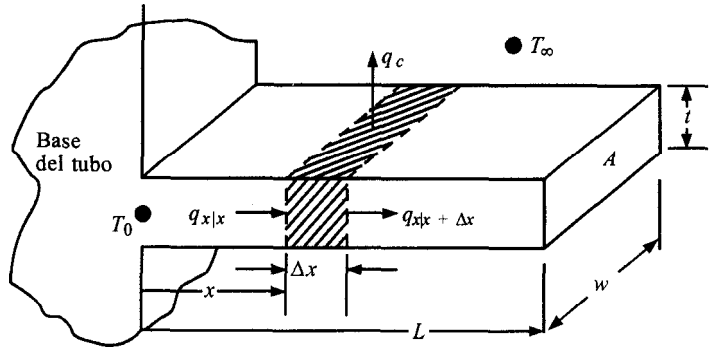


FIGURA 4.13-4. *Balance de calor para conducción y convección unidimensional en una aleta rectangular con área de corte transversal constante.*

Si sustituimos la ecuación de Fourier para la conducción y la ecuación de convección,

$$-kA\frac{dT}{dx}\bigg|_x = -kA\frac{dT}{dx}\bigg|_{x+\Delta x} + h(P\,\Delta x)(T - T_\infty) \tag{4.13-7}$$

donde A es el área de corte transversal de la aleta en m^2, P el perímetro de la aleta en m y $(P\,\Delta x)$ el área para la convección. Al reordenar la ecuación (4.13-7), dividirla entre Δx y hacer que Ax tiende a cero

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{hP}{kA}(T - T_\infty) = 0 \tag{4.13-8}$$

Si $\theta = T - T_\infty$, la ecuación (4.13-8) se convierte en

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} = \frac{hP}{kA}\theta = \theta \tag{4.13-9}$$

La primera condición limitante es $\theta = \theta_0 = T_0 - T_\infty$ en $x = 0$. Para la segunda condición limitante necesaria para integrar la ecuación (4.13-9), pueden considerarse varios casos, dependiendo de las condiciones físicas en $x = L$. En el primer caso, el extremo de la aleta está aislado y $d\theta/dx = 0$ en x = L. En el segundo caso, la aleta pierde calor por convección desde la superficie de la punta, de manera que $-k(dT/dx)_L = h(T_L - T_\infty)$. La solución utilizando el caso 2, es bastante compleja y no se considerará aquí. Utilizando el primer caso, en el que la punta esta aislada, la integración de la ecuación (4.13-g) da

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{\cosh[m(L - x)]}{\cosh mL} \tag{4.13-10}$$

donde m = $(hP/kA)^{1/2}$.

La pérdida de calor en la aleta se expresa como

$$q = -kA\frac{dT}{dx}\bigg|_{x=0} \tag{4.13-11}$$

Si se diferencia la ecuación (4.13-10) con respecto a x y se combina con la ecuación (4.13-1 1),

$$q = (hPkA)^{1/2}(T_0 - T_\infty)\tan mL \tag{4.13-12}$$

En la aleta real la temperatura T disminuye más cerca de la punta. Por consiguiente, la velocidad de transferencia de calor por área untaria disminuye conforme aumenta la distancia a la base del tubo. Para indicar la eficiencia de la aleta para transferir calor, la eficiencia de la aleta η_f se define como la razón del calor real transferido desde la aleta con respecto al calor transferido si toda la aleta estuviera a la temperatura basal T_0.

$$\eta_f = \frac{(hPkA)^{1/2}(T_0 - T_\infty)\tan mL}{h(PL)(T_0 - T_\infty)} = \frac{\tan mL}{mL} \tag{4.13-13}$$

donde PL es el área superficial completa de la aleta.

La expresión para mL es

$$mL = \left(\frac{hP}{kA}\right)^{1/2} L = \left[\frac{h(2w + 2t)}{k(wt)}\right]^{1/2} L \tag{4.13-14}$$

Para aletas delgadas, $2t$ es pequeño comparado con $2w$ y

$$mL = \left(\frac{2h}{kt}\right)^{1/2} L \tag{4.13-15}$$

La ecuación (4.13-l 5) es válida para una aleta con punta aislada. Esta ecuación puede modificarse para que se cumpla también en caso de que la aleta desprenda calor por su punta. Esto puede hacerse extendiendo la longitud de la aleta en $t/2$, y la longitud correcta L_c para usar en las ecuaciones (4.13-13) a (4.13-15) es

$$L_c = L + \frac{t}{2} \tag{4.13-16}$$

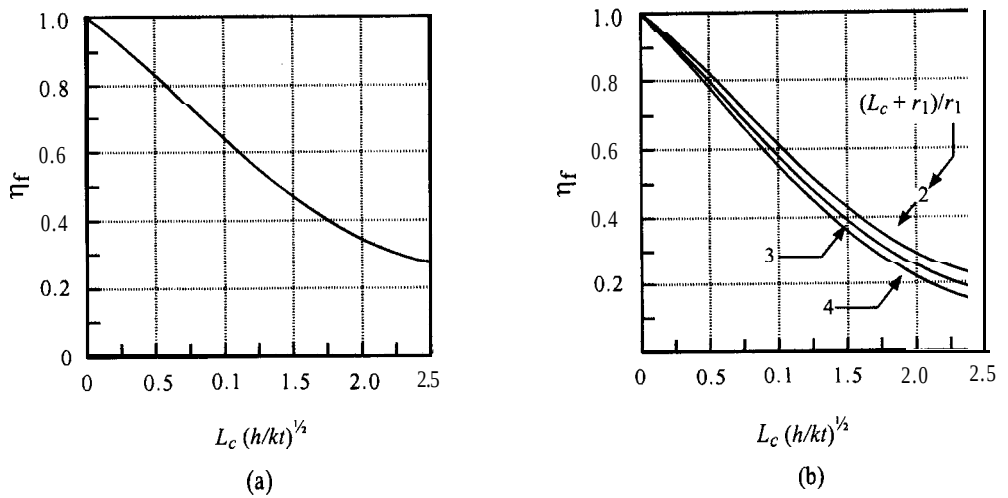


FIGURA *4.13-5. Eficiencia h_f para varias aletas: a) aletas longitudinales o rectas, b) aletas circulares* o *transversales. (Véanse en la figura 4.13-2 las dimensiones de las aletas.)*

La eficiencia de la aleta calculada con la ecuación (4.13-13) para una aleta longitudinal se muestra en la figura 4.13-5a. En la figura 4.13-5b se presenta la eficiencia de la aleta para una aleta circular. Nótese que la abscisa sobre la curva es $L_c(h/kt)^{1/2}$ y no $L_c(2h/kt)^{1/2}$, como en la ecuación (4.13-15).

EJEMPLO 4.13-2. Eficiencia y pérdida de calor en la aleta

Una aleta circular de aluminio, como se muestra en la figura 4.13-3b (k = 22W/m . K) está unida aun tubo de cobre que tiene un radio exterior de 0.04 m. La longitud de la aleta es 0.04 m y el grosor 2 mm. La pared exterior o base del tubo está a 523.2 K y el aire externo de los alrededores, a 343.2 K, tiene un coeficiente de convección de 30 $W/m^2 \cdot K$. Calcule la eficiencia de la aleta y la velocidad de pérdida de calor en la aleta.

Solución: Los datos proporcionados son $T_0 = 523.2$ K, $T_\infty = 343.2$ K, $L = 0.04$ m, $r_1 = 0.04$ m, $t = 0.002$ m, $k = 222$ $W/m \cdot K$, $I = 30 W/m^2 \cdot K$. Por la ecuación 4.13-16, $L_c = L + t/2 = 0.040 + 0.002/2 = 0.041$ m. Entonces,

$$\left(\frac{h}{kt}\right)^{1/2} = (0.041)\left[\frac{30}{222(0.002)}\right]^{1/2} = 0.337$$

Además, $(L_c + r_1)/r_1 = (0.041 + 0.040)/0.040 = 2.025$. Al utilizar la figura 4.13-5b, $\eta_f = 0.89$. La transferencia de calor desde la aleta misma es

$$q_f = \eta_f \, hA_f(T_0 - T_\infty) \tag{4.13-17}$$

donde A_f es el área superficial exterior (anillo) de la aleta y para los dos lados de la aleta es:

$$\begin{aligned} A_f &= 2\pi[(L_c + r_1)^2 \quad (r_1)^2] \qquad \text{(aleta circular)} \\ A_f &= 2\pi (L_c x w) \qquad \text{(aleta longitudinal)} \end{aligned} \tag{4.13-18}$$

En consecuencia,

$$A_f = 2\pi[(0.041 + 0.040)^2 - (0.040)^2] = 3.118 \times 10^{-2} \text{ m}^2$$

Al sustituir en la ecuación (4.13-17),

$$q_f = 0.89(30)(3.118 \times 10^{-2})(523.2 - 343.2) = 149.9 \text{ W}$$

3. Coeficiente de transferencia de calor global para tubos con aletas. Aquí consideramos un caso general similar a la figura 4.3-3b, donde la transferencia de calor ocurre desde un fluido que está en el interior de un cilindro o tubo, a través de la pared metálica del cilindro *A cuyo* grosor es Δx_A, y luego hasta el fluido que se encuentra en el exterior del tubo, el cual tiene aletas en el exterior. El calor total q que sale al exterior del tubo es la suma de la pérdida de calor por convección en la base del tubo desnudo q_t y la pérdida por convección en las aletas, q_f,

$$q = q_t + q_f = h_0 A_t(T_0 - T_\infty) + h_0 A_f \eta_f(T_0 - T_\infty) \tag{4.13-19}$$

Esto puede expresarse como una resistencia, puesto que las trayectorias están en paralelo.

$$q = (h_0 A_t + h_0 A_f \eta_f)(T_1 - T_\infty) = \frac{T_0 - T_\infty}{\dfrac{1}{h_0(A_t + A_f \eta_f)}} = \frac{T_0 - T_\infty}{R} \qquad (4.13\text{-}20)$$

donde A_t es el área de tubo desnudo entre las aletas, A_f el área de las aletas y h_o el coeficiente convectivo del exterior. La resistencia de la ecuación (4.3-20) puede ser remplazada por la resistencia $(1/h_o A_o)$ de la ecuación (4.3-15) para un tubo desnudo a fin de obtener la ecuación global para un intercambiador de tubos con aletas.

$$q = \frac{1}{1/h_i A_i + \Delta x_A / k_A A_{A\,1\,m} + 1/h_o(A_t + A_f \eta_f)} = \frac{T_4 - T_1}{\sum R} \qquad \textbf{(4.13-21)}$$

donde T_4 es la temperatura del fluido en el interior del tubo y T_1 es la temperatura del fluido en el exterior. Si se escribe la ecuación (4.13-21) en forma de un coeficiente de transferencia de calor global U_i basado en el área interior A_i, $q = U_i A_i (T_4 - T_1)$ y

$$\frac{1}{1/h_i + \Delta x_A A_i / k_A A_{A\,1\,m} + A_i / h_o(A_t + A_f \eta_f)} \qquad \textbf{(4.13-22)}$$

La presencia de aletas en el exterior del tubo cambia las características del flujo de fluido junto al tubo (ya sea que fluya de forma paralela a un tubo longitudinal con aletas o de forma transversal a un tubo circular con aletas). Por tanto, las correlaciones para el flujo paralelo o transversal de fluidos en tubos desnudos no puede usarse para predecir el coeficiente convectivo del exterior, h_o. En la bibliografía (K4, M1, P1, P3) se encuentran correlaciones para transferencia de calor a varios tipos de aletas.

4.14 ANÁLISIS DIMENSIONAL EN LA TRANSFERENCIA DE CALOR

4.14A Introducción

Se ha visto que muchas correlaciones para flujos de fluidos y transferencia de calor contienen bastantes parámetros adimensionales como el número de Reynolds y el número de Prandtl. El análisis dimensional se aplica con frecuencia para agrupar las variables de un determinado caso físico, en forma de parámetros o números adimensionales que pueden ser muy útiles en los experimentos y en la correlación de datos.

El análisis dimensional de las ecuaciones diferenciales descritas en la sección 3.11 es un método importante para obtener estos grupos adimensionales. Otro procedimiento se basa en el método de Buckingham, que empieza por preparar una lista de las variables importantes para el problema físico que se está considerando. Después, se determina el número de parámetros adimensionales en los que se pueden combinar las variables.

4.12B Método de Buckingham

1. Transferencia de calor dentro de una tubería. El teorema de Buckingham, explicado en la sección 3.11, dice que la relación funcional entre q cantidades o variables cuyas unidades pueden expresarse

en términos de u unidades o dimensiones fundamentales puede escribirse como $(q - u)$ grupos adimensionales.

Como ejemplo adicional para ilustrar el uso de este método, considérese un fluido circulando con flujo turbulento a una velocidad v en el interior de un tubo de diámetro D, con transferencia de calor a la pared. Se desea predecir los grupos adimensionales que relacionen el coeficiente de transferencia de calor h con las variables D, ρ, μ, c_p, k y v. El número total de variables es $q = 7$.

Las unidades o dimensiones fundamentales son $u = 4$ y son la masa M, la longitud L, el tiempo t y la temperatura T. Las unidades de las variables en términos de estas unidades fundamentales son las siguientes:

$$h = \frac{M}{t^3T} \qquad D = L \qquad \rho = \frac{M}{L^3} \qquad \mu = \frac{M}{Lt} \qquad c_p = \frac{L^2}{t^2T} \qquad k = \frac{ML}{t^3T} \qquad v = \frac{T}{t}$$

Por tanto, el número de grupos adimensionales o π's es igual a $7 - 4 = 3$. Entonces,

$$\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3) \tag{4.14-1}$$

Se seleccionarán las cuatro variables D, k, μ y v por ser comunes a todos los grupos adimensionales. Así, los tres grupos adimensionales son

$$\pi_1 = D^a k^b \mu^c v^d \rho \tag{4.14-2}$$

$$\pi_2 = D^e k^f \mu^g v^h c_p \tag{4.14-3}$$

$$\pi_3 = D^i k^j \mu^k v^l h \tag{4.14-4}$$

Para π_1, sustituyendo los valores de las dimensiones,

$$M^0L^0t^0T^0 = 1 = L^a\left(\frac{M}{t^3T}\right)^b\left(\frac{M}{Lt}\right)^c\left(\frac{L}{T}\right)^d\left(\frac{M}{L^3}\right) \tag{4.14-5}$$

Al sumar los exponentes,

$$\begin{aligned} (L) \quad & 0 = a + b - c + d - 3 \\ (M) \quad & 0 = b + c + l \\ (t) \quad & 0 = -3b - c - d \\ (T) \quad & 0 = -b \end{aligned} \tag{4.14-6}$$

Al resolver estas ecuaciones simultáneas, $a = 1$, $b = 0$, $c = -1$ y $d = 1$.

Sustituyendo estos valores en la ecuación (4.14-2),

$$\pi_1 = \frac{Dv\rho}{\mu} = N_{\mathrm{Re}} \tag{4.14-7}$$

Al repetir para π_2 y π_3 y sustituir las dimensiones reales:

$$\pi_2 = \frac{c_p\mu}{k} = N_{\mathrm{Pr}} \tag{4.14-8}$$

$$\pi_3 = \frac{hD}{k} = N_{\mathrm{Nu}} \tag{4.14-9}$$

Al sustituir π_1, π_2 y π_3 en la ecuación (4.14-1) y reordenar,

$$\frac{hD}{k} = f\left(\frac{Dv\rho}{\mu}, \frac{c_p\mu}{k}\right) \tag{4.14-10}$$

Ésta es la forma común de la ecuación (4.5-8) para transferencia de calor en el interior de tubos.

Este tipo de análisis es muy conveniente en las correlaciones empíricas de datos de transferencia de calor. Sin embargo, la importancia de cada grupo adimensional debe determinarse experimentalmente (B1, M1).

2. Transferencia de calor por convección natural en el exterior de un plano vertical. En el caso de la transferencia de calor por convección natural de una pared plana vertical de longitud L a un fluido adyacente, surgen diversos grupos adimensionales en comparación con la convección forzada dentro de una tubería, puesto que la velocidad no es variable. La fuerza de flotación debida a la diferencia de densidad entre el fluido frío y el calentado es un factor. Como se ve en las ecuaciones (4.7-l) y (4.7-2), la fuerza de flotación depende de las variables β, g, p y AT. Por consiguiente, la lista de variables que deben considerarse y sus unidades fundamentales son las siguientes:

$$L = L \qquad \rho = \frac{M}{L^3} \qquad \mu = \frac{M}{Lt} \qquad c_p = \frac{L^2}{t^2T} \qquad \beta = \frac{1}{T}$$

$$g = \frac{L}{t^2} \qquad \Delta T = T \qquad h = \frac{M}{t^3T} \qquad k = \frac{ML}{t^3T}$$

El número de variables es $q = 9$. Como $u = 4$, el número de grupos adimensionales o x's es 9 – 4, o 5. Entonces, $\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5)$.

Elegiremos las cuatro variables, L, μ, k y g que serán comunes a todos los grupos adimensionales.

$$\pi_1 = L^a\mu^b k^c g^d \rho \qquad \pi_2 = L^e\mu^f k^g g^h c_p \qquad \pi_3 = L^i\mu^j k^k g^l \beta$$
$$\pi_4 = L^m\mu^n k^o g^p \Delta T \qquad \pi_5 = L^q\mu^r k^s g^t h$$

Para π_1, si se sustituyen las dimensiones,

$$1 = L^a\left(\frac{M}{Lt^3}\right)^b\left(\frac{ML}{t^3T}\right)^c\left(\frac{L}{t^2}\right)^d\left(\frac{M}{L^3}\right) \tag{4.14-11}$$

Al despejar los exponentes como antes, $a = \frac{3}{2}$, b = -1, c = 0, $d = \frac{1}{2}$. Entonces π_1 se convierte en

$$\pi_1 = \frac{L^{3/2}\rho g^{1/2}}{\mu} \tag{4.14-12}$$

Si se elevan al cuadrado ambos lados para eliminar los exponentes fraccionarios,

$$\pi_1 = \frac{L^3\rho^2}{\mu^2} \tag{4.14-13}$$

Luego se repite para las otras ecuaciones π, y queda

$$\pi_1 = \frac{L^3\rho^2 g}{\mu^2} \qquad \pi_2 = \frac{c_p\mu}{k} = N_{\mathrm{Pr}} \qquad \pi_3 = \frac{L\mu g\beta}{k}$$

$$\pi_4 = \frac{k\Delta T}{L\mu g} \qquad \pi_5 = \frac{hL}{k} = N_{Nu}$$

Al combinar los grupos adimensionales π_1, π_3 y π_4 como sigue, resulta

$$\pi_1\pi_3\pi_4 = \frac{L^3\rho^2 g}{\mu^2}\,\frac{L\mu g\beta}{k}\,\frac{k\,\Delta T}{L\mu g} = \frac{L^3\rho^2 g\,\beta\,\Delta T}{\mu^2} = N_{\mathrm{Gr}} \tag{4.14-14}$$

La ecuación (4.14-14) es el grupo de Grashof dado en la ecuación (4.7-4). Por consiguiente,

$$N_{\mathrm{Nu}} = f(N_{\mathrm{Gr}}, N_{\mathrm{Pr}}) \tag{4.14-15}$$

4.15 MÉTODOS NUMÉRICOS PARA LA CONDUCCIÓN EN ESTADO ESTACIONARIO EN DOS DIMENSIONES

4.15A Ecuación analítica para la conducción

En la sección 4.4 se analizaron los métodos para resolver problemas de conducción de calor bidimensional usando procedimientos gráficos y factores de forma. En esta sección se consideran los métodos analíticos y numéricos.

La ecuación para la conducción en la dirección x es

$$q_x = -kA\,\frac{\partial T}{dx} \tag{4.15-1}$$

Ahora deduciremos una ecuación para la conducción en estado estacionario en dos direcciones x y y. En la figura 4.15-1 se muestra un bloque retangular de Δx por Δy por L. El calor total que entra en el bloque es igual al que sale.

$$q_{x|x} + q_{y|y} = q_{x|x\,+\,\Delta x} + q_{y|y\,+\,\mathrm{A}y} \tag{4.15-2}$$

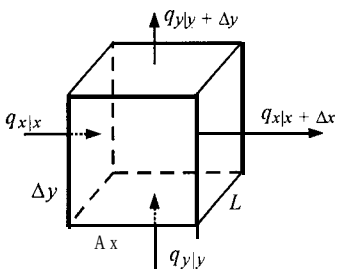


FIGURA 4.1.5-l. *Conducción en estado estacionario en dos direcciones*

Ahora, a partir de la ecuación (4.15-l),

$$q_{x|x} = -k(\Delta y L)\left.\frac{dT}{dx}\right|_x \tag{4.15-3}$$

Si se escriben ecuaciones similares para los otros tres términos y se sustituyen en la ecuación (4.15-2),

$$-k(\Delta y L)\left.\frac{dT}{dx}\right|_x \quad -k(\Delta x L)\left.\frac{dT}{dy}\right|_y \quad -k(\Delta y L)\left.\frac{\partial T}{dx}\right|_{x+\Delta x} \quad -k(\Delta x L)\left.\frac{\partial T}{dy}\right|_{y+\Delta y} \tag{4.15-4}$$

Al dividir todo entre $\Delta x\, \Delta y L\, y$ hacer que Δx y Ay tiendan a cero, se obtiene la ecuación final para conducción en estado estacionario en dos direcciones.

$$\frac{\partial^2 T}{dx^2} + \frac{\partial^2 T}{dy^2} = 0 \tag{4.155}$$

Ésta se llama *ecuación de Laplace y* hay varios métodos analíticos para resolverla. En el método de separación de variables, la solución tina1 se expresa como una serie infinita de Fourier (H 1, G2, K1). consideraremos el de la figura 4.15-2. El sólido se considera semiinfinito porque una de sus dimensiones es ∞. Los dos bordes o fronteras x = 0 y $x = L$ *se* mantienen constantes a T_1 K. El borde y = 0 se mantiene a T_2, y $y = \infty$. $T = T_1$. La solución que relaciona T con las posiciones y y x es

$$\frac{T - T_1}{T_2 - T_1} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{1} e^{-(\pi/L)y} \operatorname{sen} \frac{1\pi x}{L} + \frac{1}{3} e^{-(3\pi/L)y} \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{L} + \cdots\right]_1 \tag{4.15-6}$$

Existen otros métodos analíticos que se analizan en diversos textos (C2, H1 , G2, K1). Muchas de esas soluciones analíticas se han publicado, pero existen numerosos casos prácticos donde la geometría o las condiciones limitantes son demasiado complejas para tener soluciones analíticas, de manera que se usan métodos numéricos por diferencias finitas, los cuales se estudian en la siguiente sección.

4.15B Métodos numéricos por diferencias finitas

1. Deducción del método. Gracias al advenimiento de las rápidas computadoras digitales fue posible obtener fácilmente las soluciones de muchos problemas complejos de conducción de calor en dos

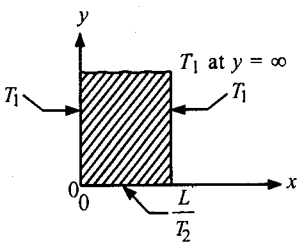


FIGURA 4.15-2. *Conducción de calor en estado estacionario en dos direcciones en una placa semiinfinita.*

dimensiones mediante métodos numéricos. Para deducir estas ecuaciones podemos empezar con la ecuación diferencial parcial (4.15-5). Si se establece la diferencia finita de

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial(\partial T/\partial x)}{\partial x} = \frac{\dfrac{T_{n+1,m} - T_{n,m}}{\Delta x} - \dfrac{T_{n,m} - T_{n-1,m}}{\Delta x}}{\Delta x}$$

$$= \frac{T_{n+1,m} - 2T_{n,m} + T_{n-1,m}}{(\Delta x)} \qquad (4.15\text{-}7)$$

donde el índice m representa un valor dado dey, $m + 1$ representa y + 1 Ay y n es el índice que señala la posición de *Ten* la escala x. Esto se muestra en la figura 4.15-3. El sólido bidimensional se divide en cuadrados. Se considera que el sólido dentro de un cuadrado se concentra en el centro del mismo y la masa concentrada es un "nodo". Podemos imaginar que cada nodo está conectado a los nodos adyacentes mediante pequeñas varillas conductoras, como se muestra.

La diferencia finita $\partial^2 T/\partial y^2$ se escribe de manera similar.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{T_{n,m+1} - 2T_{n,m} - T_{n,m-1}}{(\Delta y)^2} \qquad (4.158)$$

Si se sustituyen las ecuaciones (4.15-7) y (4.15-8) en la ecuación (4.15-5) y se iguala Δx = Ay.

$$T_{n,\ m+1} + T_{n,\ m-1} + T_{n+1,\ m} + T_{n-1,\ m} - 4T_{n,\ m} = 0 \qquad \textbf{(4.15-9)}$$

Esta ecuación establece que el flujo de calor neto que entra en cualquier punto o nodo es cero en estado estacionario. El área sombreada de la figura 4.15-3 representa el área para la cual se hizo el

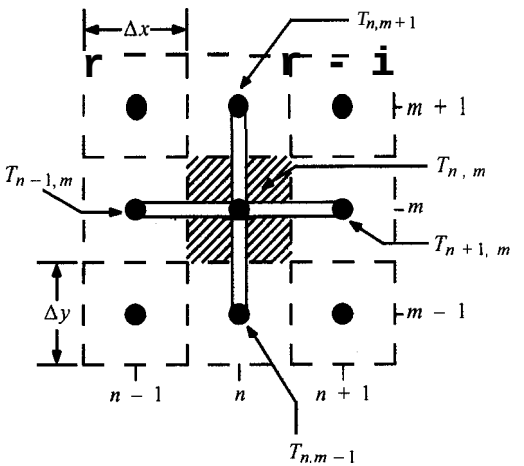


FIGURA 4.15-3. *Temperaturas y disposición de los nodos para la conducción de calor bidimensional en estado estacionario.*

balance de calor. Como alternativa, la ecuación (4.15-g) puede deducirse haciendo un balance de calor sobre esta área sombreada. El calor total que entra por grosor unitario es

$$\frac{k\,\Delta y}{\Delta x}(T_{n\quad 1,\,m} - T_{n,\,m}) + \frac{k\,\Delta y}{\Delta x}(T_{n+1,\,m} - T_{n,\,m}) + \frac{k\,\Delta x}{\Delta y}(T_{n,\,m+1} - T_{n,\,m}) + \frac{k\,\Delta x}{\Delta y}(T_{n,\,m-1} - T_{n,\,m}) = 0 \qquad \textbf{(4.15-10)}$$

Cuando se reordena, esto se convierte en la ecuación (4.15-9). En la figura 4.15-3, las varillas que conectan los nodos actúan como varillas ficticias conductoras de calor

Al aplicar el método numérico, la ecuación (4.15-9) se escribe para cada nodo o punto. Por tanto, para N nodos desconocidos deben escribirse N ecuaciones algebraicas lineales, y debe resolverse el sistema de ecuaciones para las diferentes temperaturas de los nodos. Para efectuar un cálculo manual usando un número modesto de nodos, puede utilizarse el método de iteración para resolver estos sistemas de ecuaciones.

2. Método iterativo de solución. Cuando se usa el método de iteración, el lado derecho de la ecuación (4.15-9) se iguala a un residuo $\bar{q}_{n,m}$.

$$\bar{q}_{n,m} = T_{n\quad 1,\,m} + T_{n+1,\,m} + T_{n,\,m+1} + T_{n,\,m-1} - 4T_{n,\,m} \qquad (4.15\text{-}11)$$

Como $\bar{q}_{n,m} = 0$ en estado estacionario, al despejar $T_{n,\,m}$ de la ecuación (4.15-11) o en la (4.15-9),

$$T_{n,\,m} = \frac{T_{n-1,\,m} + T_{n+1,\,m} + T_{n,\,m+1} + T_{n,\,m-1}}{4} \qquad (4.15\text{-}12)$$

Las ecuaciones (4.15-11) y (4.15-12) son las ecuaciones finales que deben usarse. Su aplicación se ilustra en el siguiente ejemplo.

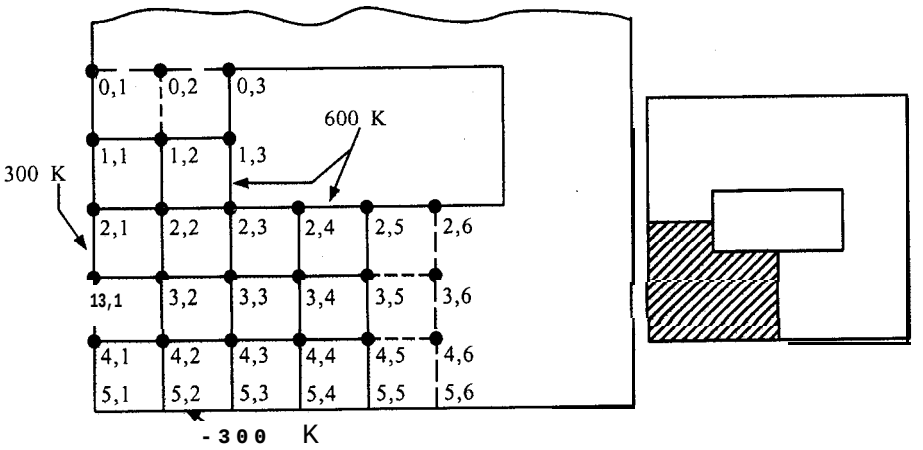


FIGURA 4.15-4. *Patrón de rejillas cuadradas para el ejemplo 4.15-l.*

EJEMPLO 4.15-l. Conducción de calor en estado estable en dos direcciones

La figura 4.15-4 muestra un corte transversal de una cámara rectangular hueca con dimensiones internas de 4 × 2 m y dimensiones externas de 8 × 8 m. La cámara mide 20 m de largo. Las paredes interiores se conservan a 600 K y la exterior a 300 K. k es 1.5 W/m · K. En condiciones de estado estacionario, encuentre la pérdida de calor por unidad de longitud de la cámara. Utilice rejillas de 1 × 1 m.

Solución: Puesto que la cámara es simétrica, se usará la cuarta parte de la cámara (parte sombreada). se harán estimados preliminares para la primera aproximación. Estos son para el nodo $T_{1,2} = 450$ K, $T_{2,2} = 400$, $T_{3,2} = 400$, $T_{3,3} = 400$, $T_{3,4} = 450$, $T_{3,5} = 500$ $T_{4,2} = 325$, $T_{4,3} = 350$, $T_{4,4} = 375$ y $T_{4,5} = 400$. Note que $T_{0,2} = T_{2,2}$, $T_{3,6} = T_{3,4}$ y $T_{4,6} = T_{4,4}$ por simetría.

Para iniciar los cálculos se puede elegir cualquier punto interior, pero suele ser mejor empezar cerca de un límite. Utilizando $T_{1,2}$, se calcula el residuo $\bar{q}_{1,2}$ mediante la ecuación (4.15-11).

$$\bar{q}_{1,2} = T_{1,1} + T_{1,3} + T_{0,2} + T_{2,2} - 4T_{1,2}$$
$$= 300 + 600 + 400 + 400 - (450) = -100$$

Por lo tanto, $T_{1,2}$ no está en estado estacionario. Después se iguala $\bar{q}_{1,2}$ a 0 y se calcula un nuevo valor de $T_{1,2}$ mediante la ecuación (4.15-l 2)

$$T_{1,2} = \frac{T_{1,1} + T_{1,3} + T_{0,2} + T_{2,2}}{4} = \frac{300 + 600 + 400 + 400}{4} = 425$$

Este nuevo valor de $T_{1,2}$ de 425 K reemplazará al antiguo de 450 y se usará para calcular los otros nodos. En seguida,

$$\bar{q}_{2,2} = T_{2,1} + T_{2,3} + T_{1,2} + T_{3,2} - 4T_{2,2}$$
$$= 300 + 600 + 425 + 400 \quad 4(400) = 125$$

Si se iguala $\bar{q}_{2,2}$ a cero y se usa la ecuación (4.15-12),

$$T_{2,2} = \frac{T_{2,1} + T_{2,3} + T_{1,2} + T_{3,2}}{4} = \frac{300 + 600 + 400 + 400}{4} = 431$$

Se continúa así para los demás nodos interiores:

$$\bar{q}_{3,2} = 300 + 400 + 431 + 325 - 4(400) = -144$$

Si se utiliza la ecuación (4.15-12), $T_{3,2} = 364$,

$$\bar{q}_{3,3} = 364 + 450 + 600 + 350 - 4\,(400) = -164$$
$$T_{3,3} = 441$$
$$\bar{q}_{3,4} = 441 + 500 + 600 + 350 - 4\,(450) = 116$$
$$T_{3,4} = 479$$
$$\bar{q}_{3,5} = 479 + 479 + 600 + 400 - 4\,(500) = -42$$
$$T_{3,5} = 489$$

$$\bar{q}_{4,2} = 300 + 350 + 364 + 300 - 4\,(325) = 14$$
$$T_{4,2} = 329$$
$$\bar{q}_{4,3} = 329 + 375 + 441 + 300 - 4\,(350) = 45$$
$$T_{4,3} = 361$$
$$\bar{q}_{4,4} = 361 + 400 + 479 + 300 - 4\,(375) = 40$$
$$T_{4,4} = 385$$
$$\bar{q}_{4,5} = 385 + 385 + 489 + 399 - 4\,(400) = -41$$
$$T_{4,5} = 390$$

Una vez terminado el primer cálculo con el mapa de rejilla, se puede empezar una segunda aproximación usando, desde luego, los nuevos valores calculados. Se puede empezar otra vez con $T_{1,2}$ o elegir el nodo con el residuo más grande. Si se empieza de nuevo con $T_{1,2}$,

$$\bar{q}_{1,2} = 300 + 600 + 431 + 431 - 4\,(425) = 62$$
$$T_{1,2} = 44$$
$$\bar{q}_{2,2} = 300 + 600 + 440 + 364 + -4\,(431) = -20$$
$$T_{2,2} = 426$$

Así se continúa hasta que los residuos sean tan pequeños como se desee. Los valores finales son los siguientes;

$$T_{1,2} = 441, \quad T_{2,2} = 432, \quad T_{3,2} = 384, \quad T_{3,3} = 461, \quad T_{3,4} = 485,$$
$$T_{3,5} = 490, \quad T_{4,2} = 340, \quad T_{4,3} = 372, \quad T_{4,4} = 387, \quad T_{4,5} = 391$$

Para calcular la pérdida de calor total de la cámara por unidad de longitud de la misma, se usa la figura 4.15-5. Para el nodo $T_{2,4}$ a $T_{3,4}$ con Ax = Ay y 1 m de profundidad,

$$q = \frac{k[\Delta x(1)]}{\Delta x}(T_{2,4} - T_{3,4}) = k\,(T_{2,4} - T_{3,4}) \qquad \textbf{(4.15-13)}$$

El flujo específico de calor para el nodo $T_{2,5}$ a $T_{3,5}$ y para $T_{1,3}$ a $T_{1,2}$ debe multiplicarse por $\frac{1}{2}$ debido a la simetría. El calor total conducido es la suma de las cinco trayectorias para $\frac{1}{4}$ del sólido. Para cuatro partes duplicadas,

$$q_l = 4k[\tfrac{1}{2}(T_{1,3} - T_{1,2}) + (T_{2,3} - T_{2,2}) + (T_{2,3} - T_{3,3}) + (T_{2,4} - T_{3,4}) + \tfrac{1}{2}(T_{2,5} - T_{3,5})] \qquad \textbf{(4.15-14)}$$
$$= 4(1.5)[\tfrac{1}{2}(600 - 441) + (600 - 432) + (600 - 461) + (600 - 485) + \tfrac{1}{2}(600 - 490)] = 3340$$

W por 1 .O m de profundidad

Además, el calor total conducido puede calcularse usando los nodos del exterior, como se muestra en la figura 4.15-5. Esto da $q_{\Pi} = 3430$. El valor promedio es

$$q_{\text{prom}} = \frac{3340 + 3430}{2} = 3385 \text{ W por 1.0 m de profundidad}$$

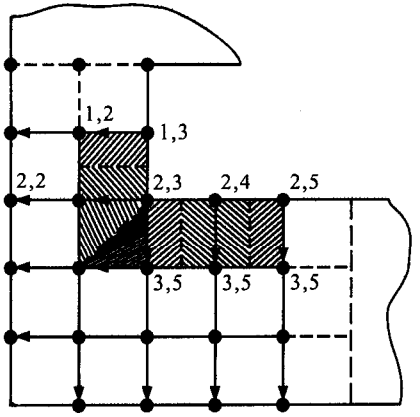


FIGURA 4.15-5. *Dibujo para calcular la conducción de calor total.*

Si se emplea un número mayor de nodos, es decir, un tamaño de rejilla menor, puede obtenerse una solución más exacta. Si se utiliza un tamaño de rejilla de 0.5 m en lugar de 1 .0 m para el ejemplo 4.15 1, se obtiene un valor de q_{prom} de 3250 W. Si se usa una rejilla muy fina se puede conseguir una mayor precisión, pero se necesitaría una computadora digital para la gran cantidad de cálculos. También se dispone de métodos de matrices para resolver un conjunto de ecuaciones simultáneas en una computadora. El método iterativo que se usó aquí, se llama método de Gauss-Seidel. Conte (C7) propone una subrutina real para resolver estos sistemas de ecuaciones. La mayoría de las computadoras tienen subrutinas estándar para resolver estas ecuaciones (G2, K1).

3. Ecuaciones para otras condiciones limitantes. En el ejemplo 4.15-1 las condiciones limitantes eran tales que los puntos nodales eran conocidos y constantes. En caso de que haya convección en

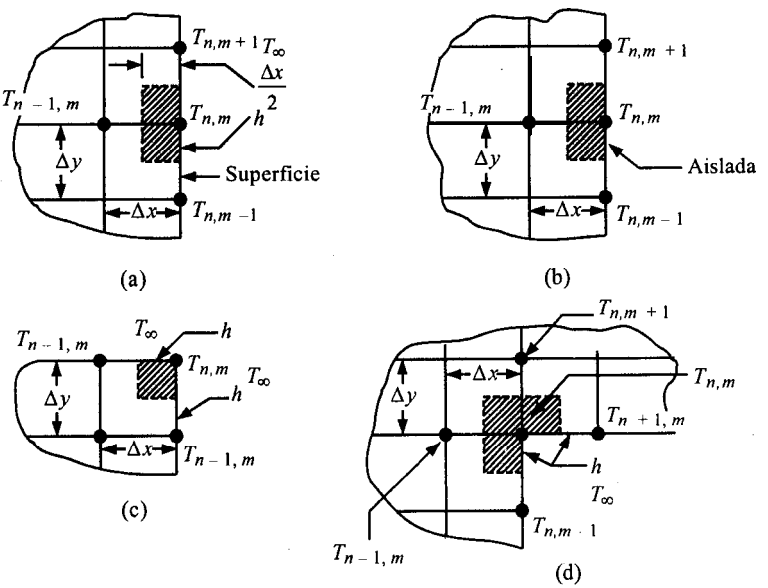


FIGURA 4.15-6. *Otros tipos de condiciones limitantes: a) convección en un limite, b) límite aislado, c) esquina exterior con límite convectivo, d) esquina interior con límite convectivo.*

el límite a una temperatura constante T_∞, un balance de calor en el nodo n, m de la figura 4.15-6a sería como sigue, donde calor que entra = calor que sale (K1):

$$\frac{k\,\Delta y}{\Delta x}(T_{n\quad 1,\ m} - T_{n,\ m}) + \frac{k\,\Delta x}{2\,\Delta y}(T_{n,\ m\ +\ 1} - T_{n,\ m}) + \frac{k\,\Delta x}{2\,\Delta y}(T_{n,\ m\ -\ 1} - T_{n,\ m}) = h\ \mathrm{AY}\ (T_{n,\ m} - T_\infty) \tag{4.X-15}$$

Si se iguala Δx = Ay, se reordena, y la ecuación resultante se iguala a $\bar{q}_{n,m}$ residual, entonces resulta lo siguiente:

a) Si hay convección en un límite,

$$\frac{h\,\Delta x}{k}T_\infty + \tfrac{1}{2}(2T_{n\ -\ 1,\ m\ +} \quad T_{n,\ m\ +\ 1\ +} \quad T_{n,\ m\ -\ 1}) - T_{n,m}\left(\frac{h\,\Delta x}{k} + 2\right) = \bar{q}_{n,\ m} \tag{4.15-16}$$

De igual manera, para los casos de la figura 4.15-6:

b) Para un límite aislado

$$\tfrac{1}{2}(T_{n,\ m\ +\ 1\ +}\ T_{n,\ m\ -\ 1}) + T_{n\ -\ 1,\ m} - 2T_{n,\ m} = \bar{q}_{n,\ m} \tag{4.15-17}$$

c) Para una esquina exterior con convección en el límite,

$$\frac{h\,\Delta x}{k}T_\infty + \tfrac{1}{2}(T_{n\quad 1,\ m} + T_{n,\ m\ -\ 1})\quad \left(\frac{h\,\Delta x}{k} + 1\right) T_{n,\ m} = \bar{q}_{n,\ m} \tag{4.15-18}$$

d) Para una esquina interior con convección en el límite,

$$\frac{h\,\Delta x}{k}\ T_\infty +\ T_{n\quad 1,\ m} +\ T_{n,\ m\ +\ 1} + \tfrac{1}{2}\ (T_{n\ +\ 1,\ m} + T_{n,\ m\ -\ 1}) - \frac{h\,\Delta x}{k}\ T_{n,\ m} =\ \bar{q}_{n,\ m} \tag{4.15-19}$$

Para el caso de límites curvos y de otros tipos, véase (C3, K1). A fin de utilizar las ecuaciones (4.15-16) a (4.15-19), primero se obtiene el residuo $\bar{q}_{n\ m}$ utilizando la ecuación apropiada. Luego $\bar{q}_{n,\ m}$ se iguala a cero y $T_{n,\ m}$ se despeja de la ecuación resultante.

PROBLEMAS

4.1-1. Aislamiento en un cuarto frío. Calcule la pérdida de calor por m^2 de área superficial en la pared aislante temporal de un cuarto de almacenamiento en frío, si la temperatura exterior es de 299.9 K y la interior de 276.5 K. La pared está formada por 25.4 mm de corcho prensado con un valor de k de 0.0433 W/m . K.

Respuesta: 39.9 W/m^2

4.1-2. ***Determinación de la conductividad térmica.*** En la determinación de la conductividad térmica de un material aislante, la temperatura en ambos lados de una placa plana de 25 mm del material es 318.4 y 303.2 K. El flujo específico de calor es 35.1 W/m^2. Calcule la conductividad térmica en btu/h . pie . °F y W/m . K.

4.2-l. ***Conductividad térmica media en un cilindro.*** Demuestre que cuando la conductividad térmica varía linealmente con la temperatura como en la ecuación (4.1-1 1), el valor medio apropiado k_m que se debe emplear en las ecuaciones cilíndricas, se obtiene mediante la ecuación (4.2-3) para placas.

4.2-2. Extracción de calor con un serpentin de enfriamiento. Se usa un serpentín de enfriamiento de acero inoxidable 304 de 1.0 pie de longitud, con diámetro interno de 0.25 pulg y diámetro externo de 0.40 pulg, para extraer calor de un baño. La temperatura en la superficie interior del tubo es de 40 °F y de 80 °F en el exterior. La conductividad térmica del acero inoxidable 304 depende de la temperatura.

$$k = 7.75 + 7.78 \times 10^{-3} T$$

donde k se da en btu/h . pie . °F y T en °F. Calcule la extración de calor en btu/s y watts.

Respuesta: 1.225 btu/s, 1292 W

4.2-3. Extracción de calor de un bario. Repita el problema 4.2-2 con un serpentín de enfriamiento de acero inoxidable 308 que tiene una conductividad térmica promedio de 15.23 W/m . K.

4.2-4. Variación de la conductividad térmica. Un plano de espesor Ax tiene una superficie que se mantiene a T_1 y otra a T_2. Si la conductividad térmica varía con la temperatura de acuerdo con

$$k = A + bT + CT^3$$

donde *a, b* y c son constantes, deduzca la expresión para el flujo específico de calor monodimensional, q/A.

4.2-5. Distribución de temperatura en una esfera hueca. Deduzca la ecuación (4.2-14) para conducción de calor en estado estable en una esfera hueca. También deduzca una ecuación que demuestre que la temperatura varía hiperbólicamente con el radio r.

Respuesta: $\dfrac{T-T_1}{T_2-T_1} = \dfrac{r_2}{r_2-r_1}\left(1-\dfrac{r_1}{r}\right)$

4.3-l. ***Aislamiento necesario para un almacén de alimento refrigerado.*** Se desea construir un almacén refrigerado con una capa interna de 19.1 mm de madera de pino, una capa intermedia de corcho prensado y una capa externa de 50.8 mm de concreto. La temperatura de la pared interior es de -17.8 °C y la de la superficie exterior de 29.4 °C en el concreto. Las conductividades medias son, para el pino, 0.151; para el corcho, 0.0433; y para el concreto 0.762 W/m · K. El área superficial total interna que se debe usar en los cálculos es aproximadamente 39 m^2 (omitiendo los efectos de las esquinas y los extremos). ¿Qué espesor de corcho prensado se necesita para mantener la pérdida de calor en 586 W?

Respuesta: 0.128 m de espesor

4.3-2. Aislamiento de un horno. La pared de un horno de 0.244 m de espesor se construye con un material que tiene una conductividad térmica de 1.30 W/m · K. La pared estará aislada en el exterior con un material que tiene una *k* promedio de 0.346 W/m · K, de tal manera que las pérdidas de calor en el horno sean iguales o inferiores a 1830 W/m^2. La temperatura de la superficie interior es 1588 K y la de la externa es 299 K. Calcule el espesor del aislante necesario.

Respuesta: 0.179 m

4.3-3. Pérdidas de calor en ventanas dobles "termopane". Las ventanas dobles conocidas comercialmente como “thermopane” están constituidas por dos capas de vidrio separadas por una capa de aire seco inmóvil. En una ventana de este tipo, cada una de las placas de vidrio mide 6.35 mm de espesor y están separadas por 6.35 mm de aire. La conductividad térmica del vidrio es 0.869 W/m . K y la del aire 0.026, en el intervalo de temperaturas usado. Para una caída de temperatura en el sistema de 27.8 K calcule la pérdida de calor para una ventana de 0.914 × 1.83 m. *(Nota:* este cálculo desprecia el efecto del coeficiente convectivo en una de las superficies externas de un lado de la ventana, el coeficiente convectivo en la superficie externa del otro lado y la convección en el interior de la ventana.)

4.3-4. Pérdidas de calor en una tuberia de vapor. Una línea de tubo de acero de 2 pulg y cédula 40, contiene vapor saturado a 121.1 °C La tubería tiene 25.4 mm de aislamiento. de asbesto. Suponiendo que la temperatura de la superficie interior del metal es de 121.1 °C y que la superficie exterior del aislamiento está a 26.7 °C, calcule la pérdida de calor para 30.5 m de tubo. Además, calcule los kilogramos de vapor condensados por hora en la tubería a causa de la pérdida de calor. El valor promedio de k para el acero según el apéndice A.3 es 45 W/m · K y con una interpolación lineal para una temperatura promedio de (12 1.1 + 26.7) /2 o 73.9 °C, el valor de k para el asbesto es 0.182.

Respuesta: 5384 W, 8.81 kg vapor /h

4.3-S. Pérdidas de calor con resolución por aproximaciones sucesivas. El tubo de gases de escape de un calentador tiene un diámetro interno de 114.3 mm con paredes de cerámica de 6.4 mm de espesor. El valor promedio de k es 1.52. En el exterior de esta pared se instala un aislante de 102 mm de lana mineral. La conductividad térmica de la lana mineral es $k = 0.046 + 1.56 \times 10^{-4}$ T °C (W/m . K). La temperatura interior de la superficie de cerámica es $T_1 = 588.7$ K y la temperatura de la superficie externa del aislante es $T_3 = 311$ K. Calcule la pérdida de calor para 1.5 m de ducto y la temperatura interfacial T_2 entre la cerámica y el aislante. [Sugerencia: El valor adecuado para k del aislante es el que se obtiene a la temperatura media $(T_2 + T_3)/2$. Por tanto, para la primera aproximación se supone una temperatura media de aproximadamente 448 K. Con esto se calcula la pérdida de calor y T_2. Usando esta otra T_2, se determina una nueva temperatura media y se procede como antes.]

4.3-6. Pérdida de calor por convección y conducción. Una ventana de vidrio con área de 0.557 m^2 se instala en la pared externa de madera de una habitación. Las dimensiones de la pared son 2.44 × 3.05 m. La madera tiene un k de 0.1505 W/m · K y su espesor es de 25.4 mm. El vidrio tiene 3.18 mm de espesor y $k = 0.692$. La temperatura interior de la habitación es 299.9 K (26.7 "C) y la temperatura del aire exterior es 266.5 K. El coeficiente convectivo h_i de la pared del interior del vidrio y de la madera es 8.5 W/m^2 . K y el h_o externo también es 8.5 para ambas superficies. Calcule la pérdida de calor a través de la pared de madera, del vidrio y el total.

Respuesta: 569.21 W (madera) (192 btu/h); 77.6 W (vidrio) (265 btu/h); 646.8 W (total) (2207 btu/h)

4.3-7. Convección, conducción y U total. Un gas a 450 K fluye en el interior de una tubería de acero, cédula 40, de 2 pulg de diámetro. La tubería está aislada con 5 1 mm de un revestimiento que tiene un valor medio de k de 0.0623 W/m . K. El coeficiente convectivo de transferencia de calor del gas en el interior de la tubería es 30.7 W/m^2 · K y el coeficiente convectivo en el exterior del revestimiento es 10.8. La temperatura del aire es 300 K.

a) Calcule la pérdida de calor por unidad de longitud en 1 m de tubería, mediante resistencias.
b) Repita con el valor general de U_o basado en el área exterior A_o.

4.3-8. Transferencia de calor en un calentador de vapor. En el interior de una tubería de acero de 2 pulg, cédula 40, fluye agua a temperatura promedio de 70 °F, mientras en el exterior se condensa vapor de agua a 220 "F. El coeficiente convectivo del agua en el interior de la tubería es $h = 500$ btu/h . pie^2 . °F y el coeficiente del condensado de vapor en el exterior es $h = 1500$.

a) Calcule la pérdida de calor por unidad de longitud en 1 pie de tubería empleando resistencias.
b) Repita con el valor general de U_i basado en el área interior A_i.
c) Repita con U_o.

Respuesta: a) $q = 26710$ btu/h (7.828) kW),
b) $U_i = 329.1$ btu/h . pie^2 . °F (1869 W/m^2 · K),
c) $U_o = 286.4$ btu/h . pie^2 . °F (1626 W/m^2 · K)

4.3-9. Pérdidas de calor en las determinaciones de temperatura. Una tubería de acero que transporta vapor tiene un diámetro exterior de 89 mm. Está revestida con 76 mm de aislante

con k promedio de 0.0043 W/m . K. Dos termopares, uno situado en la interfaz entre la pared del tubo y el aislante y el otro en la superficie exterior del revestimiento, dan lecturas de 115 °C y 32 °C, respectivamente. Calcule la pérdida de calor en W por m tubería.

4.3-10. ***Efecto de los coeficientes convectivos sobre las pérdidas de calor en ventanas dobles.*** Repita el problema 4.3-3 para la pérdida de calor en una ventana doble. Sin embargo, incluya un coeficiente convectivo h de ll.35 $W/m^2 \cdot K$ en una de las superficies exteriores de un lado de la ventana y un h = ll .35 para la otra superficie exterior. Calcule ademas el valor total de U.

Respuesta: q = 106.7 W, U = 2.29 W/m^2 . K

43-11. ***Generación química uniforme de calor.*** Una reacción química genera calor de manera uniforme en un cilindro largo de radio igual a 91.4 mm. La velocidad de generación es constante e igual a 46.6 W/m^3. Las paredes del cilindro se enfrían de tal manera que su temperatura se mantenga a 3 ll .O K. La conductividad térmica es 0.865 W/m . K. Calcule la temperatura de la línea central en estado estable.

Respuesta: T_o = 311.112 K

43-12. ***Calor de respiración de un producto alimenticio.*** Un alimento fresco se mantiene refrigerado a 278.0 K. Está empacado en un recipiente con la forma de plancha plana con todas sus caras aisladas, excepto la superior, que está expuesta al aire a 278.0 K. A manera de estimación, se supondrá que la temperatura superficial es 278 K. La plancha tiene 152.4 mm de espesor y el área de la superficie expuesta es 0.186 m^2. La densidad del producto alimenticio es 641 kg/m^3, el calor de respiración 0.070 kJ/kg · h, y la conductividad térmica de 0.346 W/m . K. Calcule la temperatura máxima en el alimento en estado estacionario, así como el calor desprendido en W. (Nota: En este problema se supone que no hay circulación de aire en el interior del producto alimenticio. Por tanto los resultados serán conservadores, pues la circulación durante la respiración reducirá la temperatura.)

Respuesta: 278.42 K, 0.353 W (1.22 btu/h)

4.3-13. ***Elevación de la temperatura en un alambre de calentamiento.*** Por un alambre de calentamiento de acero inoxidable de 5.08 mm de diámetro pasa una corriente de 250 A. El alambre tiene 2.44 m de longitud y resistencia de 0.0843 Ω. La temperatura de la superficie externa se mantiene constante a 427.6 K. La conductividad térmica es k = 22.5 W/m . K. Calcule la temperatura de la línea central para régimen de estado estable.

4.3-14. ***Radio crítico para el aislamiento.*** Una tubería de vapor metálica con diámetro exterior de 30 mm, temperatura superficial de 400 K, se va recubrir con un aislante de 20 mm de espesor y k de 0.08 W/m · K la tubería está expuesta al aire a 300 K y a un coeficiente de convección de 30 W/m^2 . K.

a) Calcule el radio crítico y la pérdida de calor por m de longitud para la tubería desnuda.
b) Calcule la pérdida de calor para la tubería aislada suponiendo que la temperatura superficial de la tubería permanece constante.

Respuesta: b) q = *54.4* W

4.4-l. ***Método gráfico de cuadrados curvilíneos.*** Repita el ejemplo 4.4-l pero con los cambios siguientes:

a) Elija que el número de subdivisiones de igual temperatura entre los límites isotérmicos sea cinco en vez de cuatro. Dibuje los cuadrados curvilíneos y determine el flujo de calor total. También calcule el factor de forma S. Indique la temperatura real de cada isoterma.
b) Repita el inciso a), pero en este caso la conductividad térmica no es constante, sino $k = 0.85\ (1 + 0.00040T)$, donde T es la temperatura en K. [*Nota*: Para calcular el q global se usa el valor medio de k a la temperatura media. El espaciamiento de las isotermas individuales está en función de cómo el valor de k depende de T (M1). Sin embargo, las temperaturas correspondientes a las isotermas individuales están en función de la dependencia de k respecto a T. Escriba la ecuación para q' para una sección curvilínea dada utilizando el valor medio de k sobre el intervalo de temperatura. Iguale esto al valor global de q dividido entre Mo q/M. Después despeje la temperatura de la isoterma.]

4.4-2. ***Pérdida de calor de un horno.*** Un horno rectangular con dimensiones internas de 1.0 × 1.0 × 2.0 m tiene un grosor de pared de 0.20 m. La k de las paredes es 0.95 W/m . K. El interior de el horno se conserva a 800 K y el exterior a 350 K. Calcule la pérdida de calor total del horno.

Respuesta: q = 25081 W

4.4-3 Pérdida de calor de una tubería enterrada. Una tubería de agua tiene un diámetro de 150 mm y longitud de 10 m y la temperatura de su pared es de 300 K. Está enterrada horizontalmente en la tierra a una profundidad de 0.40 m medida hasta la línea central de la tubería. La temperatura de la superficie de la tierra es 280 K y k = 0.85 W/m · K. Calcule la pérdida de calor de la tubería.

Respuesta: q = *451.2* W

4.5-l. ***Calentamiento de aire por condensación de vapor.*** A través de un tubo con diámetro interno de 38.1 mm, fluyen 6.71 m/s de aire a temperatura promedio de 449.9 K y presión de 138 kpa. La temperatura de la pared interior se mantiene constante a 204.4 °C (477.6 K) por medio de vapor que se condensa en el exterior. Calcule el coeficiente de transferencia de calor para un tubo largo y el flujo específico de transferencia de calor.

Respuesta: h = **39.27** W/m^2 . K (6.91) btu/h · pie^2 . °F

4.5-2. Aproximaciones sucesivas para calentamiento de agua. Una corriente de agua fluye por un tubo horizontal de acero de 11/4 pulg, cédula 40 a 37.8 °C y velocidad de 1.52 m/s. En el exterior se condensa vapor a 108.3 °C y se supone que el coeficiente del vapor es constante e igual a 9100 W/m^2 . K.

a) Calcule el coeficiente convectivo h_i del agua. (Advierta que se trata de una resolución por aproximaciones sucesivas. Es necesario suponer primero una temperatura de la pared interior).

b) Calcule el coeficiente general U_i basado en el área interior y el flujo específico de transferencia de calor q/A_i en W/m^2.

4.5-3. Área de transferencia de calor y uso de la media logarítmica de las diferencias de temperatura. Una mezcla de reacción con c_{pm} = 2.85 kJ/kg · K fluye a velocidad de 7260 kg/h y se debe enfriar de 377.6 K a 344.3 K. Se dispone de agua de enfriamiento a 288.8 K con velocidad de flujo de 4536 kg/h. El valor general de U_o es 653W/m^2 · K.

a) Calcule la temperatura de salida del agua y el área A del intercambiador operando a contracorriente.

b) Repita para flujo en paralelo.

Respuesta: a) T_1 = 325.2 K, A_o = *5.43* m^2, b) A_o = *6.46* m^2

4.5-4. Calentamiento de agua con gases calientes y área de transferencia de calor. Se desea calentar un flujo de agua de 13.85 kg/s de 54.5 a 87.8 °C en un intercambiador de calor, por medio de un flujo a contracorriente de 54430 kg/h de gases calientes que entran a 427 °C (c_{pm} = 1.005 kJ/kg . K). El valor general de U_o es 69.1 W/m^2 . K. Calcule la temperatura de salida de gas y el área de transferencia de calor.

Respuesta: T = 299.5°C

4.5-5. ***Enfriamiento de aceite y Ugeneral.*** Una corriente de aceite que fluye a velocidades de 7258 kg/h con un c_{pm} = 2.01 kJ/kg · K, se enfría desde 394.3 K a 338.9 K en un intercambiador de calor a contracorriente que opera con agua que entra a 294.3 K y sale a 305.4 K. Calcule la velocidad de flujo del agua y el valor general de U_i cuando A_i *es 5.11* m^2.

Respuesta: 17420 kg/h, U_i = *686* W/m^2 · K

4.5-6. Flujo laminar y calentamiento de aceite. Una corriente de aceite de hidrocaruburo con las mismas propiedades del ejemplo 4.5-5 entra a 175 °C al interior de una tubería con diámetro interior de 0.0303 pie y 15 pies de longitud. La temperatura de la superficie interior de la tubería es constante, 325 °F. Se desea calentar el aceite a 250 °F en la tubería. ¿Cuántas lb$_m$/h se pueden calentar? (Sugerencia: La resolución es por aproximaciones sucesivas. Un posible

método consiste en suponer una velocidad de flujo de, por ejemplo, 75 lb masa/h. Con esto se calcula N_{Re} y el valor de h_a. Después, se procede a un balance de calor para determinar q en términos de m. Este valor de q se iguala con el obtenido de la ecuación $q = h_a A \Delta T_a$. Calcule el valor de m. Éste es el nuevo valor de m que se usa en la segunda aproximación.

Respuesta: m = **84.2** lb_m/h (38.2 kg/h)

4.5-7. Calentamiento de aire por condensación de vapor. Una corriente de aire a 101.3 kPa y 288.8 K entra al interior de un tubo con diámetro interno de 12.7 mm y longitud 1.52 m, a velocidad de 24.4 m/s. La condensación de vapor en el exterior del tubo mantiene a 372.1 K la temperatura de la pared interior. Calcule el coeficiente convectivo del aire. (Nota: Esta resolución es por aproximaciones sucesivas. Suponga primero una temperatura de salida del aire.)

4.5-8. Transferencia de calor con un metallíquido. El metal líquido bismuto, con velocidad de flujo de 2.00 kg/s, entra a un tubo con diámetro interior de 35 mm a 425 °C y se calienta a 430 °C en él. La pared del tubo se mantiene 25 °C por encima de la temperatura general del líquido. Calcule la longitud del tubo que se requiere. Las propiedades físicas son las siguientes (H1): k = 15.6 W/m . K, c_p = 149 J/kg . K, $\mu = 1.34 \times 10^{-3}$ Pa . s.

4.6-l. *Transferencia de calor de unaplacaplana.* Sobre una placa delgada, plana y lisa, fluye aire a 101.3 kPa a 288.8 K, con velocidad de 3.05m/s. La longitud de la placa en la dirección del flujo es 0.305 m y está a 333.2 K. Calcule el coeficiente de transferencia de calor suponiendo flujo laminar.

Respuesta: h = 12.35 W/m^2 . K (2.18 btu/h . pie^2 . °F)

4.6-2. Enfriamiento de carne congelada. Sobre la superficie superior plana de una pieza de carne congelada se hace pasar aire frío a -28.9 °C y 1 atm, a 0.61 m/s. Los lados y el fondo de este trozo de carne rectangular están aislados y la superficie expuesta mide 254 por 254 mm. Si la superficie de la carne está a -6.7 °C, prediga el coeficiente promedio de transferencia de calor hacia la superficie. Como aproximación, suponga que puede usarse la ecuación (4.6-2) o (4.6-3), dependiendo del valor de $N_{Re,\,L}$.

Respuesta: h = 6.05 W/m^2 . K

4.6-3. Transferencia de calor a una manzana. Se desea predecir el coeficiente de calor para una corriente de aire sobre una manzana colocada sobre un tamiz con grandes aberturas. La velocidad del aire es 0.61m/s a 101.32 kPa de presión y 316.5 K. La superficie de la manzana está a 277.6 K y su diámetro promedio es 114 mm. Suponga que es una esfera.

4.6-4. Calentador de aire con vapor de agua Se desea calentar un total de 13610 kg/h de aire a 1 atm abs de presión y 15.6 "C, haciéndolo pasar sobre una bateria de tubos en los que condensa vapor de agua a 100 "C. Los tubos tienen un DE de 12.7 mm, 0.61 m de longitud y están en distribución alineada con forma cuadrada y $S_p = S_n$ = 19.05 mm. La bateria de tubos contiene 6 hileras transversales ala dirección de flujo y 19 hileras perpendiculares al flujo. Suponga que la temperatura superficial de los tubos es 93.33 °C y es constante. Calcule la temperatura de salida del aire.

4.7-l. *Convección natural en la pared de un horno.* La pared del horno del ejemplo 4.7-l está aislada de tal manera que su temperatura superficial es 366.5 K en lugar de 505.4 K. Calcule el coeficiente de transferencia de calor por convección natural y la velocidad de transferencia de calor por m de ancho. Use tanto la ecuación (4.7-4) como la ecuación simplificada en unidades SI y del sistema inglés. (*Nota:* En este cálculo se desprecia la radiación.)

4.7-2. Pérdidaspor convección natural en un cilindro. Un cilindro vertical de 76.2 mm de diámetro y 121.9 mm de alto se mantiene a temperatura de 397.1 K en la superficie. Pierde calor por convección natural al transferirlo al aire que está a 294.3 K. Las pérdidas provienen del área lateral del cilindro y del extremo circular plano superior. Calcule la pérdida de calor despreciando las pérdidas por radiación. Use las ecuaciones simplificadas de la tabla 4.7-2 para el intervalo más bajo de $N_{Gr}\,N_{Pr}$. El valor equivalente de L para la superficie plana superior es 0.9 veces el diámetro.

Respuesta: q = 26.0 W

4.7-3. Pérdidas de calor en un tubo horizontal. Un tubo horizontal que transporta agua caliente tiene una temperatura superficial de 355.4 K y un diámetro externo de 25.4 mm. El tubo se expone al aire que está a 294.3 K. ¿Cuál es la pérdida de calor por convección natural en 1 m de tubería?

4.7-4. Enfriamiento de una naranja por convección natural. Una naranja de 102 mm de diámetro, con temperatura superficial de 2 1.1 °C, se coloca en la repisa abierta de un refirgerador que se mantiene a 4.4 °C. Calcule la pérdida de calor por convección natural despreciando la radiación. Puede usarse como aproximación la ecuación simplificada para planos verticales, reemplazando L por el radio de la esfera (M1). Vea en la referencia (S2) una correlación más precisa.

4.7-5. Convección natural en un espacio horizontal cerrado. Repita el ejemplo 4.7-3 para el caso en que las dos placas son horizontales y la placa de abajo está más caliente que la placa superior. Compare los resultados.

Respuesta: $q = 12.54$ W

4.7-6. Pérdida de calor por convección natural en una ventana doble. Una ventana vertical con doble hoja de vidrio tiene un espacio cerrado de aire de 10 mm. La ventana tiene 2.0 m de alto por 1.2 m de ancho. Una superficie de la ventana está a 25 °C y la otra a 10 "C. Calcule la cantidad de transferencia de calor por convección libre a través del claro.

4.7-7. Pérdida de calor por convección natural del agua en placas planas. Dos placas cuadradas metálicas verticales de 0.40 × 0.40 m están separadas por un espacio de 12 mm y este espacio cerrado se llena con agua. La temperatura promedio de la superficie de una placa es 65.6 °C y la otra placa de 37.8 "C. Calcule la velocidad de transferencia de calor a través de esta garganta.

4.7-8. Pérdida de calor por un horno. Dos placas de metal horizontales de 0.8 × 1 .0 m forman la parte superior de un horno y están separadas 15 mm. La placa inferior está a 400 °C, la superior a 100 °C y el espacio encierra aire a 1 atm abs. Calcule la velocidad de transferencia de calor entre las placas.

4.8-1. ***Coeficiente de ebullición en una olla enchaquetada.*** Prediga el coeficiente de transferencia de calor por ebullición de las paredes verticales enchaquetadas de la olla del ejemplo 4.8-l. Después, usando este coeficiente para los costados y el coeficiente del ejemplo 4.8-l para el fondo, pronostique la transferencia total del calor.

Respuesta: T_w =107.65 °C, AT = 7.65 K, y h (vertical) = 3560 W/m^2 . K

4.8-2. Coeficiente de ebullición en un tubo horizontal. Pronostique el coeficiente de transferencia de calor por ebullición de agua a presión, hirviendo a 250 °F en una superficie horizontal de $\frac{1}{16}$ pulg de espesor de acero inoxidable con k de 9.4 btu/h . pie ' "F. El medio de calentamiento del otro lado de esta superficie es un fluido a 290 °F con h de 275 btu/h ' pie^2 . "F. Use ecuaciones simplificadas. Asegúrese de corregir este valor de h con respecto al efecto de la presión.

4.8-3. Condensación en un tubo vertical. Repita el ejemplo 4.8-2 para un tubo vertical de 1.22 m (4.0 pies) de altura en lugar de 0.305 (1.0 pie). Use unidades SI y del sistema inglés.

Respuesta: h = 9438 W/m^2 . K, 1663 btu/h . pie^2 ·°F; N_{Re} = 207.2 (flujo laminar)

4.8-4. Condensación de vapor en tubos verticales. Se condensa vapor a 1 atm abs de presión y 100 °C sobre una bateria de cinco tubos verticales de 0.305 m de altura y con DE de 25.4 mm. La distribución de los tubos es un haz con separaciones suficientes para evitar interferencias mutuas. La temperatura superficial de los tubos es 97.78 "C. Calcule el coeficiente promedio de transferencia de calor y el total en kg condensado por hora.

Respuesta: h = 15240 W/m^2 . k

4.8-5. Condensación en una batería horizontal. Se está condensando vapor a 1 atm abs de presión y 100 "C. En una batería de tubos horizontales con cinco capas de tubos (N = 5) apiladas. Cada capa tiene cuatro tubos (total de tubos = 4 × 5 = 20) y el DE de los tubos es

19.1 mm. Los tubos son de 0.61 m de longitud y sus superficies están a 97.87 “C. Calcule el coeficiente promedio de transferencia de calor y los kilogramos de condensado por segundo para la totalidad del condensador. Dibuje un diagrama de la batería de tubos.

4.9-l. ***Media de la diferencia de temperatura en un intercambiador.*** Un intercambiador 1-2 de paso por la coraza y dos pasos por los tubos va a calentar un fluido de 37.8°C a 121.1 °C mediante un fluido caliente que entra a 315.6 °C y sale a 148.9 “C. Calcule el valor de $\Delta T_{l\,m}$ y la media de la diferencia de temperaturas AT, en K.

Respuesta: $\Delta T_{l\,m}$ = 148.9 K; AT,,, = 131.8 K

4.9-2. Enfriamiento de petróleo con agua en un intercambiador. Se desea enfriar una corriente de 5.04 kg/s de petróleo (c_{pm} = 2.09 kJ/kg . K) en un intercambiador 1-2, de 366.5 K a 344.3 K con 2.02 kg/s de agua que entra a 283.2 K. El coeficiente general de transferencia de calor U_o es 340 W/m^2 . K. Calcule el área necesaria. (Sugerencia: primero debe realizar un balance de calor para determinar la temperatura de salida de agua.)

4.9-3. Intercambio de calor entre aceite y agua. Fluye agua a una velocidad de 1.13 kg/s en un intercambiador de calor l-2 de corazas y tubos y se calienta de 45 °C a 85 °C con aceite que tiene una capacidad calorífica de 1.95 kJ/kg · K. El aceite entra a 120 °C y sale a 85 “C. Calcule el área del entercambiador si el coeficiente de transferencia de calor global es 300 W/m^2 . K

4.9-4. Temperatura de salida y eficiencia de un intercambiador. El aceite caliente, con tasa de flujo de 3.00 kg/s (c_p = 1.92 kJ/kg . K), entra en un intercambiador a contracorriente a 400 K y es enfriado por agua que entra a 325 K (bajo presión) y que fluye a 0.70 kg/s. La U global = 350 W/m^2 · K y A = 12.9 m. Calcule la velocidad de transferencia de calor y la temperatura del aceite que sale.

4.10-l. ***Radiación hacia un tubo desde el recipiente que lo encierra.*** Resuelva el ejemplo 4.10-l aplicando la ecuación (4.10-5) que contiene dos emisividades y resulta un poco más precisa.

Respuesta: q = -2171 W (-7410 btu/h)

4.10-2. Cocción de una hogaza de pan en un horno. Una hogaza de pan con temperatura superficial de 373 K se cuece en un horno cuyas paredes y aire están a 477.4 K. El pan se desplaza de manera contínua por el horno sobre un transportador de banda. Se estima que la emisividad del pan es 0.85 y puede suponerse que la hogaza es rectangular, con 114.3 mm de alto × 114.3 mm de ancho × 330 mm de largo. Calcule la velocidad de transferencia de calor radiante al pan, suponiendo que es pequeño en comparación con el horno y despreciando la transferencia de calor por convección natural.

Respuesta: q = 278.4 W (950 btu/h)

4.10-3. ***Radiación y convección en un tubo con vapor.*** Una tubería horizontal de acero (oxidada) y que transporta vapor de agua, tiene DE de 0.1683 m y temperatura superficial de 374.9 K y se expone al aire a 297.1 K en una habitación grande. Calcule la pérdida de calor por convección natural más radiación para 0.305 m (1.0 pie) de tubería. Use un valor de ε de 0.79 para la tubería de acero.

Respuesta: q = 163.3 W (557 btu/h)

4.104. ***Radiación y convección a una hogaza de pan.*** Calcule la velocidad total de transferencia de calor a la hogaza de pan del problema 4.10-2, incluyendo transferencia de calor por convección natural y por radiación. Para la radiación, calcule primero el valor de h_r. Para la convección natural, aplique las ecuaciones simplificadas para los valores bajos del intervalo de N_{Gr} N_{Pr}. Puede emplear la ecuación de planos verticales para los cuatro lados verticales con L de 114.3 mm. Para la superficie superior, use la ecuación de una placa enfriada en la parte superior y para el fondo, la de una placa enfriada en su parte inferior. El valor característico de L para una placa rectangular horizontal es la media línea1 de las dos dimensiones.

4.10-5. ***Pérdida de calor en una tubería,*** Un tubo de acero inoxidable desnudo, con un diámetro exterior de 76.2 mm y ε de 0.55, se coloca horizontalmente expuesto al aire a una temperatura de 294.2 K. La temperatura de la superficie de la tubería es de 366.4 K. Calcule el valor $de'h, + h_r$ para convección más radiación y la pérdida de calor para 3 m de tubería.

4.11-1. ***Escudo de radiación.*** Dos planos paralelos muy grandes tienen cada uno, una emisividad de 0.7. La superficie 1 está a 866.5 K y la superficie 2 a 588.8 K. Use unidades SI y del sistema inglés.

a) ¿Cuál es la pérdida neta por radiación de la superficie 1?

b) Para reducir esta pérdida neta por radiación se colocan dos escudos de radiación adicionales, que también tienen emisividad de 0.7, entre las superficies originales. ¿Cuál es la nueva pérdida por radiación?

Respuesta: a) 13565 W/m^2, 4300 btu/h . pie^2; b) 4521 W/m^2, 1433 btu/h · pie^2

4.11-2. ***Radiación desde un artefacto en el espacio.*** Un satélite espacial en forma de esfera se desplaza por el espacio sideral, donde su temperatura superficial se mantiene a 283.2 K. La esfera sólo "observa" al espacio, que puede considerarse como un cuerpo negro a temperatura de 0 K, la superficie pulida de la esfera tiene una emisividad de 0.1. Calcule la pérdida de calor por radiación por m^2.

Respuesta: $q_{12}/A_1 = 36.5$ W/m^2

4.11-3. ***Radiación y factor de observación complejo.*** Determine el factor de observación F_{12} que se muestra en la figura P4.11-3. Las áreas A_4 y A_3 no son reales (C3). El área $A_2 + A_4$ *se* llama $A_{(24)}$ y a $A_1 + A_3$ se denomina $A_{(13)}$. Las áreas $A_{(24)}$ y $A_{(13)}$ son perpendiculares entre sí. [*Sugerencia:* aplique los métodos del ejemplo 4.1 l-5. Primero escriba una ecuación similar a la (4.11-48), que relacione el intercambio entre A_3 y $A_{(24)}$. Después relacione el intercambio entre $A_{(13)}$ y $A_{(24)}$. Finalmente, relacione $A_{(13)}$ con $A_{(4)}$.]

Respuesta: $A_1F_{12} = A_{(13)}F_{(13)(24)} + A_3F_{34} - A_3F_{3(24)} - A_{(13)}F_{(13)4}$

4.114. ***Radiación entre superficies paralelas.*** Dos superficies paralelas de 1.83 m × 1.83 m cada una, están separadas 0.91 m. La temperatura superficial de A_1 *es* 811 K y la de A_2 es 533 K. Ambas superficies son negras.

a) Calcule la transferencia de calor radiante entre estas superficies.

b) Repita el inciso a), pero para el caso de que las superficies estén unidas por paredes que reflejan la radiación y no son conductoras.

c) Repita el inciso b) con emisividad de 0.8 para A_1 *y 0.7* para A_2.

4.115. ***Radiación entre placas adyacentes perpendiculares.*** Dos rectángulos adyacentes perpendiculares miden 1.52 m × 2.44 m el primero, y 1.83 m × 2.44 m el segundo, y el lado de 2.44 m es común a ambos. La temperatura de la primera superficie es de 699 K y la de la segunda 478 K. Ambas superficies son negras. Calcule la transferencia de calor radiante entre ambas.

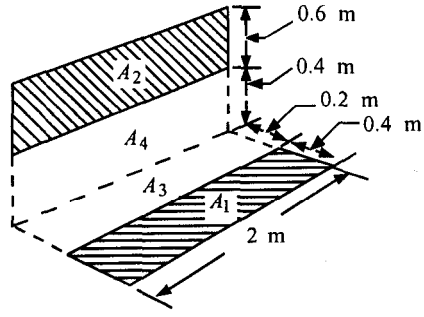


FIGURA P4.11-3. *Configuración geométrica para el problema 4.11-3.*

4.11-6. ***Factor de observación para una geometría compleja.*** Utilizando las dimensiones dadas en la figura P4.11-3, calcule los factores de observación individuales y también F_{12}.

4.11-7. ***Radiación de una superficie al cielo.*** Una superficie plana con una área de 1 .O m^2 esta aislada por el lado inferior y se coloca sobre la tierra, expuesta a la atmósfera, en la noche. La superficie superior está expuesta al aire a 290 K y el coeficiente de transferencia de calor convectivo del aire hacia el plano es 12 W/m^2 . K. El plano refleja irradia hacia el cielo claro. La temperatura de radiación efectiva del cielo puede considerarse de 80 K. Si el plano es un cuerpo negro, calcule la temperatura del plano en el equilibrio.

Respuesta: $T = 266.5$ K = -6.7 °C

4.11-S. Radiación y calentamiento de planos. Dos discos planos, cada uno de 1.25 m de diámetro, están colocados en forma paralela y directamente opuesta, separados 0.5 m. El disco 1 se calienta mediante una resistencia eléctrica a 833.3 K. Ambos discos están aislados por todas las caras, excepto las dos que se oponen entre sí. Suponga que los alrededores no emiten radiación y que los discos están en el espacio. Calcule la temperatura del disco 2 en estado estacionario y también la energía eléctrica que entra al disco 1. *(Sugerencia:* La fracción de calor que desprende por el área número 1 hacia el espacio es $1 - F_{12}$.)

Respuesta: $F_{12} = 0.45$, $T_2 = 682.5$ K

4.11-9. ***Radiación que dos discos emiten uno al otro y hacia los alrededores.*** Dos discos, cada uno de 2.0 m de diámetro, están colocadas en forma paralela y directamente opuestos entre sí, a distancia de 2.0 m. El disco 1 se mantiene a 1000 K mediante calentamiento eléctrico y el disco 2 a 400 K mediante agua de enfriamiento colocada en una chaqueta en la parte posterior del disco. Los discos sólo reflejan irradiación uno al otro y hacia el espacio circundante, que está a 300 K. Calcule la entrada de calor eléctrico y también el calor eliminado por el agua de enfriamiento.

4.11-10. ***Factor de vista por integración.*** Un pequeño disco negro, colocado en forma vertical, tiene un área de 0.002 m^2 e irradia hacia una superficie plana negra vertical de 0.03 m de ancho y 2.0 m de alto opuesta y paralela al disco pequeño. La fuente del disco está 2.0 m más allá del plano vertical y es opuesta a la parte inferior del plano. Determine F_{12} por integración de la ecuación del factor de observación.

Respuesta: $F_{12} = 0.00307$

4.11-11. ***Radiación de gas hacia un recinto gris.*** Repita el ejemplo 4.1 l-7 pero con los siguientes cambios;

a) Las paredes interiores no son superficies negras sino grises, con una emisividad de 0.75.

b) Use las mismas condiciones que en el inciso (a) con paredes grises, pero además considere que se transfiere calor por convección natural a las paredes interiores. Suponga un coeficiente convectivo promedio de 8.0 $W/m^2 \cdot K$.

Respuesta: b) q (convección + radiación) = 4.426 W

4.11-12. ***Radiación y convección de un gas hacia una chimenea.*** Un horno descarga por un tubo gases de combustión calientes que se encuentran a 1000 K y 1 atm de presión absoluta, y que contienen 5% de CO_2, en una chimenea que tiene una diámetro interior de 0.50 m. Las paredes interiores del revestimiento refractario están a 900 k y la emusividad del revestimiento es de 0.75. El coeficiente de transferencia de calor convectivo del gas se estima en 10 W/m^2 . K. Calcule la cantidad de transferencia de calor q/A del gas por radiación mas convección.

4.12-1. ***Transferencia laminar de calor en un fluido que sigue la ley exponencial.*** Un puré de banana, que es un fluido no newtoniano que obedece la ley exponencial, fluye a 300 lb_m/h en el interior de un tubo de 1 .O pulg de DE, y es calentado con un fluido caliente que circula por el exterior del tubo, El puré de banana entra a la sección de calentamiento, de 5 pies de longitud, a 60 "F. La temperatura constante de la pared interior es 180 "F. Las propiedades del fluido, calculadas por Charm (Cl), son: $r = 69.9$ lm/pie^3, $c_p = 0.875$ btu/lb_m °F y k = 0.320 btuk · pie · °F. El fluido tiene las siguientes constantes reológicas: $n = n' = 0.458$ (que puede suponerse constante), y $K = 0.146$ $lb_f \cdot s^n$. pie^{-2} a 70 °F y 0.0417 a 190 °F. Puede suponerse que una gráfica de log K en función de T °F es una línea recta. Calcule la temperatura general de salida del fluido con flujo laminar.

4.12-2. ***Calentamiento de un fluido que sigue la ley exponencial con flujo laminar.*** Un fluido no newtoniano, que sigue la ley exponencial, tiene las mismas propiedades físicas y constantes reológicas del fluido del ejemplo 4.12-1 y fluye con flujo laminar a 6.30×10^{-2} kg/s en el interior de un tubo de 25.4 mm de DI, calentándose por medio de un fluido caliente en el exterior. El fluido entra a la sección de calentamiento del tubo a 26.7 °C y sale de ésta con una temperatura general promedio de 46.1 "C. La temperatura de la pared interior es constante en 82.2 "C. Calcule la longitud necesaria del tubo en m. (Nota: En este caso, la incógnita L, esto es, la longitud de tubo, aparece en la ecuación para h_a y en la ecuación de balance de calor).

Respuesta: L = 1.722 m

4.13-1. ***Transferencia de calor en un recipiente enchaquetado con agitador de paletas. Se*** usa un recipiente con agitador de paletas y sin deflectores para calentar un líquido a 37.8 "C. Una chaqueta con vapor suministra el calor necesario. El diámetro interno del recipiente es 1.22 m y el diámetro del agitador, 0.406 m y gira a 150 rpm. La temperatura de la superficie de la pared es 93.3 "C. Las propiedades físicas del líquido son p = 977 kg/m^3, c_p = 2.72 kJ/kg . K, k = 0.346 W/m . K y μ = 0.100 kg/m . s a 37.8 °C y 7.5×10^{-3} a 93.3 "C. Calcule el coeficiente de transferencia de calor hacia la pared de la chaqueta.

4.13-2. ***Pérdida de calor en aletas circulares.*** Utilice los mismos datos y condiciones del ejemplo 4.13-2 y calcule la eficiencia de la aleta y la cantidad pérdida de calor para las aletas de los siguientes materiales.

a) Acero al carbón (k = 44 W/m · K).
b) Acero inoxidable (k = 17.9 W/m · K).

Respuesta: a) η_f = 0.66, q = ll 1.1 W

4.13-3. ***Pérdida de calor en una aleta longitudinal.*** Una aleta longitudinal de aluminio, como se muestra en la figura 4.13-3a (k = 230 W/m · K), está unida a un tubo de cobre con radio exterior de 0.04 m. La longitud de la aleta es 0.080 m y el grosor 3 mm. La base del tubo se mantiene a 450 K, y el aire exterior de los alrededores, a 300 K, tiene un coeficiente convectivo de 25 W/m^2 · K. Calcule la eficiencia de la aleta y la pérdida de calor en aleta por cada 1.0 m de longitud.

4.13-4. ***Transferencia de calor en un intercambiador de tubo con aleta.*** Cierta cantidad de aire a una temperatura promedio de 50 °C se calienta al fluir por el exterior de un tubo de acero (k = 45.1 W/m . K) con diámetro interior de 35. mm y grosor de pared de 3 mm. El exterior del tubo tiene 16 aletas longitudinalesde acero con longitud de L = 13 mm y grosor de t = 1 .0 mm. El vapor de condensación interno, a 120 °C, tiene un coeficiente de 7000 W/m^2 · K. El coeficiente exterior del aire se calcula como 30 W/m^2 · K. Si se desprecian los factores de suciedad y se usa un tubo de 1.0 m de largo, calcule el coeficiente de transferencia de calor global U_i basado en el área interior A_i.

4.14-1. ***Análisis dimensional para convección natural.*** Repita el análisis dimensional de la sección para transferencia de calor por convección natural hacia una placa vertical como en la sección 4.14, pero ahora haga lo siguiente:

a) Desarrolle todos los pasos en detalle y despeje todos los exponentes de las π.
b) Repita el inciso (a), pero en este caso elija que las cuatro variables L, μ, c_p y g sean comunes a todos los grupos adimensionales.

4.14-2. ***Análisis dimensional para conducción en estado no estacionario.*** En la conducción en estado no estacionario de un sólido participan las siguientes variables; p, c_p, L (dimensión del sólido), t, k y z (ubicación en el sólido). Determine los grupos adimensionales que relacionan dichas variables.

Respuesta: $\pi_1 = \dfrac{kt}{\rho_c p L^2}$ $\pi_2 = \dfrac{z}{L}$

4.15-1. ***Temperatura en una placa semiinfinita.*** Una placa semiinfinita es semejante a la de la figura 4.15-2. En las superficies x = 0 y x = *L,* la temperatura se mantiene constante a 200 K. En la superficie y = 0, la temperatura se mantiene a 400 K. Si L = 1 .O m, calcule la temperatura en el punto y = 0.5 m y x = 0.5 en estado estacionario.

4.15-2. ***Conducción de calor en un sólido bidimensional.*** Para la conducción de calor bidimensional, como en el ejemplo 4.15-1, deduzca la ecuación a fin de calcular la pérdida de calor total de la cámara por longitud unitaria usando los nodos que están en el exterior. Debe haber ocho trayectorias para un cuarto de cámara. Sustituya las temperaturas reales en la ecuación y obtenga la pérdida de calor.

Respuesta: *q = 3426* W

4.15-3. ***Pérdida de calor en estado estacionario de un conducto rectangular.*** Una cámara que tiene forma de un largo conducto rectangular hueco tiene las dimensiones externas de 3 × 4 m e internas de 1 × 2 m. Las paredes miden 1 m de grueso. La temperatura superficial del interior es constante, 800 K y la del exterior es constante, 200 K. k = 1.4 $W/m \cdot K$. Calcule la pérdida de calor en estado estacionario por unidad de longitud del conducto en m. Utilice un tamaño de rejilla de Δx = Ay = 0.5 m. Además, use los nodos exteriores para calcular la conducción de calor total.

Respuesta: *q = 7428* W

4.15-4. ***Conducción de calor bidimensional y diferentes condiciones limitantes.*** Una pieza sólida sumante larga de 1 × 1 m, cuadrada, tiene en la cara superior una temperatura constante de 1000 K y la cara izquierda a 200 K. La cara inferior y la derecha están expuestas a un medio a 200 K y tienen un coeficiente de convección de h = 10 W/m^2 . K. La k = 10 W/m . K. Utilice un tamaño de rejilla de Δx = Ay = $\frac{1}{3}$ m y calcule las temperaturas en estado estable de los diferentes nodos.

4.15-5. ***Punto nodal en una esquina exterior entre superficies aisladas.*** Deduzca la ecuación de diferencias finitas para el caso del punto nodal $T_{n,m}$ en una esquina exterior entre superficies aisladas. El diagrama es semejante al de la figura 4.15-6c, excepto que los dos límites están aislados.

Respuesta: $\bar{q}_{n,m} = \frac{1}{2}(T_{,,-1,m} + T_{n,m-1}) - T_{n,m}$

REFERENCIAS

(A1) ACRIVOS, A. *A.I. CH,E. J, 6, 584* (1960).

(B1) **BIRD, R. B., STEWART, W. E. y LIGHTFOOT, E.** *N. Trasport Phenomena,* Nueva York: John Wiley & Sons, Inc., 1960.

(B2) **BADGER, W. L. y BANCHERO, J. T.** *Introduction to Chemical Engineering,* Nueva York: McGraw-Hill, Book Company, 1955.

(B3) **BROMLEY, L.A.** *Chem. Eng. Progr., 46,* 221 (1950).

(B4) **BOMWN, R. A., MUELLER, A. C. y NAGLE, W. M.** *Trans. A.S.M.E., 62. 283,* (1940).

(B5) **BROOKS,** *G. y Su, G. Chem. Eng. Progr., 55, 54* (1959).

(B6) **BOLANOWSKI, J. P. y LINEBERRY, D. D.** *Ind. Eng. Chem., 44, 657* (1952).

(C1) **CHARM,** *S.* **E.** *The Fundamentals of Food Engineering,* 2a. ed., Westport, Conn.: Avi Publishng Co., Inc., 1971

(C2) **CARSLAW, H. S. y JAEGER, J. E.** *Conduction of Heat in Solids,* 2a. ed., Nueva York: Oxford University Press, Inc., 1959.

(C3) CHAPMAN, A. J. *Heat Transfer.* Nueva York: Macmillan Publishing Co., Inc., 1960.

(C4) **CLAPP, R. M.** *International Developments in Heat Transfer,* Parte III, Nueva York: American Society of Mechanical Engineers, 1961.

(C5) CHILTON, **T. H. DREW, T. B. y JEBENS, R. H.** *Ind. Eng. Chem., 36, 5* 10 (1944).

(C6) CARREAU, P., CHAREST, G. y CORNEILLE, J. L. Can. *J. Chem. Eng., 44, 3 (1966).*
(C7) CLAUSING, A. M. *Int. J. Heat Mass Transfer, 9,* 791 (1966).
(D1) DUNLAP, 1. R. y **RUSHTON, J. H.** *Chem. Eng. Progr. Symp., 49* (5), 137 (1953).
(F1) FUJII, **T. y** IMURA, **H.** *Znt. J. Heat Mass Transfer,* **15, 755 (1972).**
(G1) GRIMISON, E. D. *Trans. A.S.M.E., 59, 583* (1937).
(G2) **GEANKOPLIS,** *C.* **J.** *Mass Transport, Phenomena,* Columbus, Ohio: Ohio State University Bookstores, 1972.
(G3) **GUPTA, A. S.,** CHAUBE, **R. B. y** UPADHYAY, *S. N. Chem. Eng. Sci., 29, 839* (1974).
(G4) GLUZ, M. D. y **PAVLUSHENKO, L.** *S. J. Appl. Chem., U.S.S.R., 39, 2323* **(1966).**
(G5) **GLOBE, S. y** DROPKIN, **D.** *J. Heat Transfer,* **81, 24 (1959).**
(H1) **HOLMAN,** J. P. *Heat Transfer,* 4a. ed., Nueva York: Mc Graw-Hill Book Company, 1976.
(J1) **JACOB, M.** *Heat Transfer,* Vol. 1, Nueva York: John Wiley & Sons, Inc., 1949.
(J2) **JACOB, M. y** HAWKINS, *G. Elements of Heat Transfer,* 3a. ed., Nueva York: John Wiley & Sons, Inc., 1957.
(J3) **JACOB, M.** *Heat Transfer,* Vol. 2, Nueva York: John Wiley & Sons, Inc., 1957.
(K1) **KREITH, F. y BLACK, W. Z.** *Basic Heat Transfer,* Nueva York: Harper & Row, Publishers, 1980.
(K2) **KEYES, F.** *G. Transf. A.S.M.E., 73, 590* (1951); 74, 1303 (1952).
(K3) KNUDSEN, J. G. y **KATZ,** D. L. *Fluid Dynamics and Heat Transfer,* Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1958.
(K4) **KERN, D.** *Q. Process Heat Transfer.* Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1950.
(L1) **LUBARSKI, B. y KAUFMAN,** *S.* J. NACA *Teach. Note No. 3336,* **(1955).**
(M1) MCADAMS, **W. H.** *Heat Transmission,* 3a. ed., Nueva York: McGraw-Hill, Book Company, 1954.
(M2) **METZNER, A. B. y GLUCK D. F.** *Chem. Eng. Sci.,* **12, 185 (1960).**
(M3) **METZNER, A. B. y FRIEND, P.** *S. Znd. Eng. Chem.,* **51, 879 (1959).**
(N1) **NELSON, W. L.** *Petroleum Refinery Engineers,* 4a. ed., Nueva York: McGraw-Hill, Book Company, 1949.
(O1) **OLDSHUE, J. Y. y GRETTON, A. 1.** *Chem. Eng. Progr., 50,* **615 (1954).**
(P1) **PERRY, R. H. y** CHILTON, *C.* **H.** *Chemical Engineers' Handbook,* 5a. ed., Nueva York: McGraw-Hill, Book Company, 1973.
(P2) PERRY, J. H. *Chemical Engineers' Handbok.* 4a. ed., Nueva York: McGraw-Hill, Book Company, 1963.
(P3) PERRY, R. H. y **GREEN, D.** *Perry's Chemical Engineers' Handbook,* 6a. ed., Nueva York McGraw-Hill Book Company, 1984.
(R1) REID, **R. C. PRAUSNITZ y SHERWOOD, T. K.** *The Properties of Gases and Liquids,* 3a. ed., Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1977.
(R2) ROHESENOW, W. M. y HARTNETT J. P. *Eds. Handbook of Heat Transfer,* Nueva York, McGraw-Hill Book Company, 1973.
(S1) **SIEDER, E. N. y TATE,** *G. E. Ind. Eng. Chem., 28,* **1429 (1936).**
(S2) **STEINBERGER, R. L. y TREYBAL, R. E.** *A.Z. Ch.E. J., 6, 227* (1960).
(S3) SKELLAND, A. H. P. *Non- Newtonian Flow and Heat Transfer,* Nueva York: John Wiley & Sons, Inc., 1967.
(S4) SKELLAND, A. H. P., **OLIVER, D. R. y TOOKE,** *S. Brit. Chem. Eng., 7 (5) , 346* (1962).
(U1) UHL, V. W. Chem. Eng. Progr. Symp., 51 (17), 93 (1955).
(W1) **WELTY, J. R. WICKS, C. E. y WILSON, R. E.** *Fundamentals of Momentum, Heat and Mass Transfer.,* 3a. ed., Nueva York:.John Wilev & Sons. Inc.. 1984.

CAPÍTULO 5

Principios de transferencia de calor en estado no estacionario

5.1 DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN BÁSICA

5.1A Introducción

En el capítulo 4 se estudiaron varios sistemas de transferencia de calor en los cuales tanto la temperatura en un determinado punto como el flujo de calor, eran siempre constantes con respecto al tiempo; esto es, se trataba de procesos en estado estacionario. En este capítulo estudiaremos los procesos en los cuales la temperatura de cualquier punto del sistema cambia con el tiempo, es decir, la transferencia de calor en estado no estacionario o transitorio.

Antes de que un proceso llegue a tener condiciones en estado estacionario, debe transcurrir cierto tiempo después de iniciarse la transferencia de calor, para permitir que desaparezcan las condiciones de estado no estacionario. Por ejemplo, en la sección 4.2A se determinó el flujo de calor a través de una pared en estado estacionario. No se consideró el periodo durante el cual se calentaba uno de los lados de la pared mientras las temperaturas iban en aumento.

La transferencia de calor en estado no estacionario es importante debido al gran número de problemas de calentamiento y enfriamiento que existen en la industria. En los procesos metalúrgicos es necesario predecir las velocidades de enfriamiento y calentamiento de metales de diversos tipos de geometrías, con objeto de estimar el tiempo requerido para alcanzar ciertas temperaturas. En el procesamiento de alimentos, como en la industria de las conservas, los alimentos perecederos enlatados se calientan por inmersión en baños de vapor o se enfrían sumergiéndolos en agua fría. En la industria del papel los troncos de madera se sumergen en baños de vapor antes de procesarlos. En la mayoría de estos sistemas, el material se sumerge repentinamente en un fluido que está a una temperatura más alta o más baja.

5.1B Deducción de la ecuación de conducción en estado no estacionario

La figura 5. l-l sirve de punto de partida para deducir la ecuación en condiciones de estado no estacionario en una dirección en un sólido. Supóngase una conducción de calor en la dirección x en el cubo de dimensiones Δx, Ay y Az. La expresión para la conducción en la dirección x es

$$q_x = -kA\frac{\partial T}{\partial x} \qquad \textbf{(5.1-1)}$$

El término $\partial T/\partial x$ representa la derivada parcial de T con respecto a x, con las demás variables y, z, y el tiempo t manteniéndose constantes. Ahora haciendo un balance de calor con respecto al cubo, podemos escribir

velocidad de entrada de calor + velocidad de generación de calor = velocidad de salida de calor + velocidad de acumulación de vapor **(5.1-2)**

La velocidad de entrada de calor al cubo es

$$\text{velocidad de entrada de calor} = q_{x\ x} = -k(\Delta y \Delta z)\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_x \tag{5.1-3}$$

Además,

$$\text{velocidad de salida de calor} = q_{x\ x+\Delta x} = -k(\Delta y \Delta z)\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} \tag{5.1-4}$$

La velocidad de acumulación de calor en el volumen Δx **Ay** Az en el tiempo ∂t es,

$$\text{velocidad de acumulación de calor} = (\Delta x\ \mathbf{Ay}\ \Delta z)\,\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \tag{5.1-5}$$

La velocidad de generación de calor en el volumen Δx **Ay** Δz **es**

$$\text{velocidad de generación de calor} = (\text{Ax}\ \mathbf{Ay}\ \Delta z)\,\dot{q} \tag{5.1-6}$$

Sustituyendo las ecuaciones (5.1-3) a (5.1-6) en la (5.1-2) y dividiendo entre Δx **Ay** Δz,

$$\dot{q} + \frac{-k\left(\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_x - \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}\right)}{\Delta x} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \tag{5.1-7}$$

Cuando Ax tiende a cero, se obtiene la segunda derivada parcial de T con respecto a x. o $\partial^2 T/\partial x^2$, en el lado izquierdo. Entonces, reordenando la expresión,

$$\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{k}{\rho c_p}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot{q}}{\rho c_p} = \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot{q}}{\rho c_p} \tag{5.1-8}$$

donde α es $k/\rho c_p$, esto es, la **difusividad** térmica. (Esta deducción supone que k, ρ y c_p son constantes.) En unidades SI, $\alpha = \text{m}^2/\text{s}$, T = K, t = s, k = W/m . K, $\rho = \text{kg/m}^3$, $\dot{q} = \text{W/m}^3$ y $c_p = \text{J/kg}$. K. En unidades del sistema inglés, $\alpha = \text{pie}^2/\text{h}$, T = °F, t = h, k = btu/h . pie . °F, $\rho = \text{lb}_\text{m}/\text{pie}^3$, $\dot{q} = \text{btu/h . pie}^3$ y $c_p = \text{btu/lb}_\text{m}$. °F.

Para la conducción en las tres dimensiones, una deducción similar produce la siguiente expresión,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + \frac{\dot{q}}{\rho c_p} \tag{5.1-9}$$

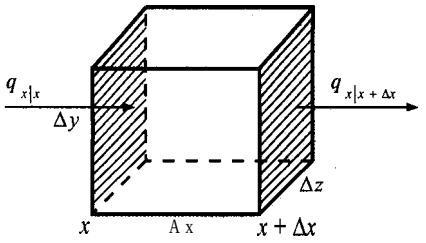


FIGURA 5.1-1. *Conducción en estado no estacionario en una dirección*

En muchos casos ocurre la conducción de calor en estado no estacionario, pero la velocidad de generación de calor es cero. Entonces, las ecuaciones (5.1-8) y (5.1-9) se transforman en

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{5.1-10}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \tag{5.1-11}$$

Las ecuaciones (5.1-10) y (5. l-l 1) relacionan la temperatura T con la posición x, y y z y el tiempo t. En el resto de este capítulo se consideraran las soluciones para las ecuaciones (5.1- 10) y (5.1- ll) para ciertos casos específicos, así como para situaciones más generales.

5.2 CASO SIMPLIFICADO DE SISTEMAS CON RESISTENCIA INTERNA DESPRECIABLE

5.2A Ecuación básica

Analizaremos un caso bastante simple para iniciar el estudio de la conducción transitoria de calor. En esta situación consideraremos un sólido que tiene una conductividad térmica muy alta o una resistencia interna a la conducción muy baja, en comparación con la resistencia de la superficie externa, donde se presenta una transferencia por convección del fluido externo a la superficie del sólido. Puesto que la resistencia interna es muy baja, la temperatura dentro del sólido es esencialmente uniforme en cualquier momento.

Un ejemplo sería un cubo pequeño de acero calentado a temperatura T_0 K en el tiempo $t = 0$, que se sumerge de manera repentina en un gran baño de agua fría que se mantiene a temperatura constante T_∞ con respecto al tiempo. Supóngase que el coeficiente de transferencia de calor h, expresado en W/m^2 . K, no varía con el tiempo. Llevando a cabo un balance de calor con respecto al objeto sólido para un intervalo de tiempo pequeño dt s, la transferencia de calor del baño al objeto debe ser igual a la variación de energía interna del propio objeto,

$$hA\,(T_\infty - T)\,dt = c_p \rho V\,dT \tag{5.2-l}$$

donde A es el área superficial del objeto en m^2, T es la temperatura promedio en el tiempo t en s, p es su densidad en kg/m^3, y V es el volumen en m^3. Reordenando la ecuación e integrando entre los límites de $T = T_0$ cuando $t = 0$ y $T = T$ cuando $t = t$,

$$\int_{T=T_0}^{T=T} \frac{dT}{T_\infty - T} = \frac{hA}{c_p \rho V} \int_{t=0}^{t=t} dt \tag{5.2-2}$$

$$\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = e^{-(hA/c_p\rho V)t} \qquad (5.2\text{-}3)$$

Esta ecuación describe la historia de tiempo-temperatura del objeto sólido. El término $c_p\rho V$ suele llamarse también *capacitancia térmica global* del sistema. Este tipo de análisis recibe el nombre de *método de capacidad global,* o bien, *método de calentamiento o enfriamiento newtoniano.*

5.2B Ecuación para diferentes geometrías

Para aplicar la ecuación (5.2-3) es necesario conocer la relación superficie/volumen del objeto. Al deducir la fórmula, se supuso una resistencia interna despreciable. Esta suposición es bastante precisa cuando

$$N_{Bi} = \frac{hx_1}{k} < 0.1 \qquad (5.2\text{-}4)$$

donde hx_1/k recibe el nombre de número de Biot N_{Bi}, que es adimensional, y x_1 es una dimensión característica del cuerpo, obtenida a partir de $x_1 = V/A$. El número de Biot compara los valores relativos de resistencia interna a la conducción y resistencia convectiva superficial a la transferencia de calor.

Para el caso de una esfera,

$$x_1 = \frac{V}{A} = \frac{4\pi r^3/3}{4\pi r^2} = \frac{r}{3} \qquad (5.2\text{-}5)$$

Para un cilindro largo,

$$x_1 = \frac{V}{A} = \frac{\pi D^2 L/4}{\pi DL} = \frac{D}{4} = \frac{r}{2} \qquad (5.2\text{-}6)$$

Para una varilla cuadrangular larga,

$$x_1 = \frac{V}{A} = \frac{(2x)^2 L}{4(2x)L} = \frac{x}{2} \qquad (\text{x} = \tfrac{1}{2}\ \text{espesor}) \qquad (5.2\text{-}7)$$

EJEMPLO 5.2-l. Enfriamiento de una esfera de acero

Una esfera de acero con radio de 1 .O pulg (2.54 cm) tiene una temperatura uniforme de 800 °F (699.9 K). Esta esfera se sumerge repentinamente en un medio cuya temperatura se mantiene constante a 250 °F (394.3 K). Suponiendo un coeficiente convectivo de $h = 2.0$ btu/h · pie² · °F (ll.36 W/m² · K), calcule la temperatura de la esfera después de 1 h (3600 s), en unidades SI y del sistema inglés. Las propiedades físicas promedio son $k = 25$ btu/h . pie. °F (43.3 W/m . K), $\rho = 490$ lb_m/pie^3 (7849 kg/m³) y $c_p = 0.11$ btu/lb_m . °F (0.4606 kJ/kg K).

Solución: Para el caso de una esfera, de la ecuación (5.2-5),

$$x_1 = \frac{V}{A} = \frac{r}{3} = \frac{\frac{1}{12}}{3} = \frac{1}{36}\ \text{pie}$$

$$= \frac{25.4}{1000 \text{ x } 3} = 8.47 \text{ x } 10^{-3} \text{ m}$$

Con base en la ecuación (5.2-4) para el número de Biot,

$$N_{Bi} = \frac{hx_1}{k} = \frac{2\left(\frac{1}{36}\right)}{25} = 0.00222$$

$$N_{Bi} = \frac{11.36\left(8.74 \times 10^{-3}\right)}{43.3} = 0.00222$$

Este valor es < 0.1; por consiguiente, puede aplicarse en el método de capacidad global. Entonces,

$$\frac{hA}{c_p \rho V} = \frac{2}{0.11(490)\left(\frac{1}{36}\right)} = 1.335 \text{h}^{-1}$$

$$\frac{hA}{c_p \rho V} = \frac{11.36}{(0.4606 \times 1000)(7849)\left(8.47 \times 10^{-3}\right)} = 3.71 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1} (1.335 \text{ h}^{-1})$$

Sustituyendo en la ecuación (5.2-3) cuando t = 1.0 h y despejando T,

$$\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \frac{\text{T-250°F}}{800\text{-}250} = e^{-(hA/c_p \rho V)t} = e^{-(1.335)(1.0)} \qquad \text{T} = 395°\text{F}$$

$$\frac{T - 394.3 \text{ K}}{699.9 - 394.3} = e^{-\left(3.71 \text{ x } 10^{-4}\right)(3600)} \qquad \text{T} = 474.9 \text{ K}$$

5.2C Cantidad total de calor transferido

La temperatura del sólido en cualquier tiempo t puede calcularse a partir de la ecuación (5.2-3). En cualquier tiempo t, la velocidad instantánea de transferencia de calor $q(t)$ en W a partir del sólido de resistencia interna despreciable puede calcularse con

$$q(t) = hA(T - T_\infty) \tag{5.2-8}$$

Si se sustituye la temperatura instantánea T de la ecuación (5.2-3) en la ecuación (5.2-8),

$$q(t) = hA(T_0 - T_\infty) e^{-(hA/c_p \rho V)t} \tag{5.2-9}$$

Para determinar la cantidad total de calor Q en W · s o J transferida por sólido desde el tiempo $t = 0$ hasta $t = t$, podemos integrar la ecuación (5.2-9).

$$Q = \int_{t=0}^{t=t} q(t)dt = \int_{t=0}^{t=t} hA\left(T_0 - T_\infty\right) e^{-\left(hA/c_p \rho V\right)t} \, dt \tag{5.2-10}$$

$$Q = c_p \rho V (T_0 - T_\infty)\left[1 - e^{-(hA/c_p \rho V)t}\right] \tag{5.2-11}$$

EJEMPLO 5.2-2. Cantidad total de calor en el enfriamiento

Para las condiciones del ejemplo 5.2-1, calcule la cantidad total de calor eliminado hasta el tiempo t = 3600 s.

Solución: A partir del ejemplo 5.2-1, $hA/c_p\rho V = 3.71 \times 10^{-4}$ s^{-1}. Además, $V = 4\pi r^3/3 = 4(\pi)(0.0254)^3/3 = 6.864 \times 10^{-5}$ m^3. Si se sustituye en la ecuación (5.2-11),

$$Q = (0.4606 \times 1000)(7849)(6.864 \times 10^{-5})(699.9 - 394.3) \cdot [1 - e^{-(3.71 \times 10-4)(3600)}]$$
$$= 5.589 \times 10^4 \text{ J}$$

5.3 CONDUCCIÓN DEL CALOR EN ESTADO NO ESTACIONARIO EN DIVERSAS GEOMETRÍAS

5.3A Introducción y métodos analíticos

En la sección 5.2 se consideró un caso simplificado donde la resistencia interna era despreciable debido ala alta conductividad térmica del objeto. Ahora se estudiara la situación más general, cuando la resistencia interna no es pequeña, por lo que la temperatura no es constante en el sólido. El primer caso que se considerara es aquel en el que la resistencia convectiva superficial es despreciable en comparación con la resistencia interna. Esto podría deberse ya sea a un coeficiente de transferencia de calor muy alto en la superficie o bien a la existencia de una resistencia conductiva bastante grande en el objeto.

Para ilustrar el método analítico de resolución de este primer caso, se deducirá la ecuación para conducción en estado no estacionario en la dirección x para una placa plana de espesor $2H$, tal como se muestra en la figura 5.3-l. El perfil inicial de temperaturas en la placa cuando $t = 0$ es uniforme y se expresa como $T = T_0$. En el tiempo t = 0, la temperatura ambiente varía repentinamente a T_1 y se mantiene constante a ese valor. Puesto que no hay resistencia convectiva, la temperatura de la superficie también se mantiene invariable en T_1. Como se trata de una conducción en la dirección x, se puede aplicar la ecuación (5. l-l 0).

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{5.1-10}$$

Las condiciones iniciales y límite son:

$$\begin{array}{lll} T = T_0, & t = o, & x = x \\ T = T_1, & t = t, & x = o \\ T = T_1, & t = t, & x = 2H \end{array} \tag{5.3-l}$$

En general, es conveniente definir una temperatura adimensional Y, de tal manera que varíe entre 0 y 1. Por consiguiente,

$$Y = \frac{T_1 - T}{T - T_,} \tag{5.3-2}$$

Sustituyendo la ecuación (5.3-2) en la (5.1-10),

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \tag{5.3-3}$$

Redefiniendo las condiciones límite e iniciales,

$$Y = \frac{T_1 - T_0}{\tilde{\text{i}}\tilde{\text{y}}\text{-T}} = 1, \qquad t = 0, \qquad \text{x} = \text{x}$$

$$Y = \frac{T_1 - T_1}{T_1 - T_0} = 0, \qquad t = t, \qquad x = 0 \tag{5.3-4}$$

$$Y = \frac{T_1 - T_1}{T_1 - T_0} = 0, \qquad t = \text{t}, \qquad \text{x} = 2H$$

Un procedimiento conveniente para resolver la ecuación (5.3-3) consiste en aplicar el método de separación de variables, que conduce a una solución por productos,

$$Y = e^{-a^2 \alpha t}(A \cos ax + B \text{ sen } ax) \tag{5.3-5}$$

donde A y B son constantes y a es un parámetro. Aplicando las condiciones límite e iniciales de la ecuación (5.3-4) para obtener el valor de esas constantes en la ecuación (5.3-5), la solución final es una serie infinita de Fourier (G1):

$$\frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} = \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1}\exp\frac{-1^2\pi^2\alpha t}{4H^2}\text{sen}\,\frac{1\pi x}{2H} + \frac{1}{3}\exp\frac{-3^2\pi^2\alpha t}{4H^2}\text{ sen }\frac{3\pi x}{2H}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{5}\exp\frac{-5^2\pi^2\alpha t}{4H^2}\text{ sen }\frac{5\pi x}{2H} + \cdots\right) \tag{5.3-6}$$

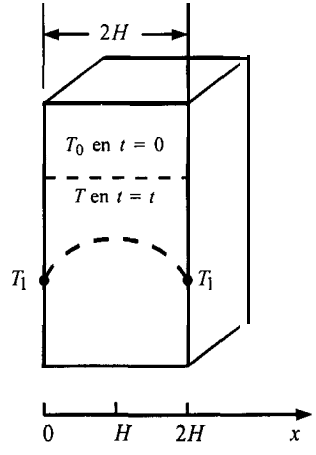


FIGURA 5.3-1. *Conducción en estado no estacionario en una placa plana con resistencia superficial despreciable.*

Por lo anterior, es posible determinar la temperatura Ten cualquier posición x y tiempo t con la ecuación (5.3-6). Sin embargo, la resolución de este tipo de ecuaciones es bastante tediosa, por lo que resulta preferible utilizar las gráficas que se analizan en las secciones 5.3B, 5.3C, 5.3D y 5.3E, para el caso en que exista una resistencia superficial.

5.3B Conducción en estado no estacionario en un sólido semiinfinito

En la figura 5.3-2 se muestra un sólido semiinfinito que se prolonga hasta ∞ en la dirección + x. La conducción de calor sólo se verifica en la dirección x. Al principio, la temperatura del sólido es uniforme y tiene un valor T_0. En el instante t = 0, se expone a, se sumerge repentinamente en, una gran masa de fluido ambiental que está a temperatura T_1, que es constante. El coeficiente convectivo h en W/m² . K o btu/h · pie² · °F también es constante; esto es, existe una resistencia superficial. Por tanto, la temperatura T_S en la superficie no es igual a T_1.

La resolución de la ecuación (5.1-10) para estas condiciones es (SI):

$$\frac{T - T_0}{T_1 - T_0} = 1 - Y = \operatorname{erfc}\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} - \exp\left[\frac{h\sqrt{\alpha t}}{k}\left(\frac{x}{\sqrt{\alpha t}} + \frac{h\sqrt{\alpha t}}{k}\right)\right]\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} + \frac{h}{k}\sqrt{\alpha t}\right) \qquad (5.3\text{-}7)$$

donde x es la distancia al interior del sólido desde la superficie en unidades SI expresadas en m, t = tiempo en s, cx = $k/\rho c_p$ en m²/s. En unidades del sistema inglés, x = pie, t = h y α = pie²/h. La función erfc es (1 − erf), donde erf es la función de error, para la que existen tablas de valores numéricos en los textos (G1, Tl, Sl), Y es la fracción incompleta del cambio $(T_1 - T)/(T_1 - T_0)$ *y* 1 − Y es la fracción de cambio.

La figura 5.3-3 basada, en la ecuación (5.3-7), es una gráfica muy conveniente para la conducción de calor en estado no estacionario en un sólido semiinfinito con convección superficial. Si la conducción hacia el sólido es bastante baja o *h* es muy alta, se usa la línea superior con $h\sqrt{\alpha t/k} = \infty$.

EJEMPLO X3-1. Temperatura de congelación del suelo

La profundidad de penetración de las temperaturas de congelación en el suelo reviste mucha importancia en la agricultura y en la construcción. Durante cierto día de otoño, la temperatura del suelo tiene un valor constante de 15.6 °C (6.0 "F) hasta una profundidad de varios metros. Una onda fría reduce repentinamente la temperatura del aire de 15.6 hasta unos -17.8 °C (0 "F). El coeficiente convectivo por encima del suelo es ll .36 W/m² . K (2 btuk . pie² · "F). Las propiedades del suelo son: α = 4.65 × 10⁻⁷ m²/s (0.018 pie²/h) y *k*= 0.865 W/m . K (0.5 btu/h · pie · "F). Desprecie los efectos del calor latente. Use unidades SI y del sistema inglés.

a) ¿Cuál será la temperatura de la superficie después de 5 h?
b) ¿ Hasta qué profundidad del suelo penetrara la temperatura de congelación de 0 °C *(32* "F) en 5 h?

Solución: Éste es un caso de conducción de estado no estacionario en un sólido semiinfinito. Para el inciso a), llamaremosxaladistanciadesde la superficie para la cual x = Om. Entonces, el valor de $x/2\sqrt{\alpha t}$ se calcula como sigue para t = 5 h, α = 4.65 × 10⁻⁷ m²/s, k = *0.865* W/m · °C y h = 11.36 W/m² · "C. En unidades SI y del sistema inglés,

$$\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} = \frac{0}{2\sqrt{(4.65 \times 10^{-7})(5 \times 3600)}} \qquad \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} = \frac{0}{2\sqrt{0.018(5)}}$$

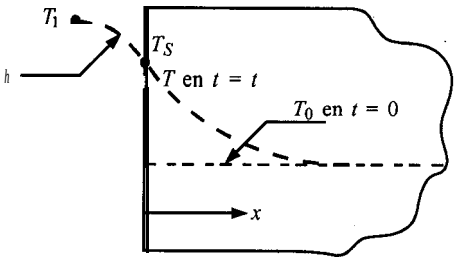


FIGURA 5.3-2. *Conducción de estado no estacionario en un sólido semiinfinito.*

Además,

$$\frac{h\sqrt{\alpha t}}{k} = \frac{11.36\sqrt{(4.65\text{x } 10^{-7})(5 \text{ x } 3600)}}{0.865} \qquad \frac{h\sqrt{\alpha t}}{k} = \frac{2\sqrt{0.018(5)}}{0.5}$$

$$= 1.2 \qquad = 1.2$$

En la figura 5.3-3 para $x/2\sqrt{\alpha t} = 0$ y $h\sqrt{\alpha t}/k = 1.2$, en la curva se lee el valor de 1 Y= 0.63. Transformando temperaturas a K, T_0 = 15.6 °C + 273.2 = 288.8 = K (60 "F) y T_1 = -17.8 °C + 273.2 = 255.4 K (0 "F). Entonces,

$$1 - Y = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0} = 0.63 = \frac{T - 288.8}{255.4 - 288.8}$$

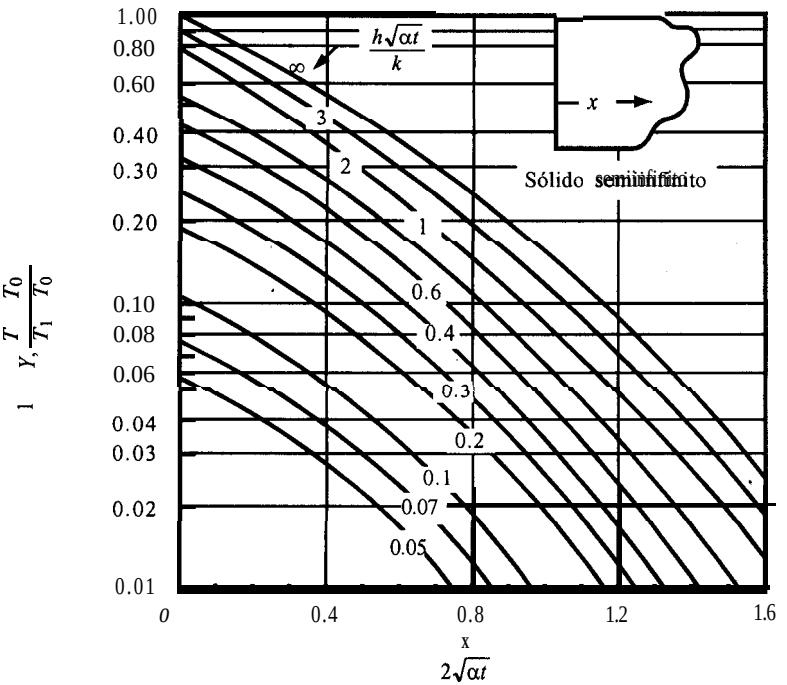


FIGURA 5.3-3. *Conducción de calor en estado no estacionario en un sólido semiinfinito con convección superficial, calculada con la ecuación (5.3-7) (SI).*

Despejando el valor de *Ten* la superficie después de 5 h,

$$T = 267.76\ K\ o\ -5.44\ °C\ (22.2\ °F)$$

Para el inciso b), T= 273.2 K o 0 °C, y se desconoce la distancia x. Sustituyendo los valores conocidos,

$$\frac{T - T_1}{T_1 - T_0} = \frac{273.2 - 288.8}{255.4 - 288.8} = 0.467$$

Para $(T - T_0)/(T_1 - T_0) = 0.467$ y $h\sqrt{\alpha t}/k = 1.2$, se lee en la figura 5.3-3 un valor de 0.16 para $x/2\sqrt{\alpha t}$. Por consiguiente,

$$\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} = \frac{x}{2\sqrt{(4.65 \times 10^{-7})(5 \times 3600)}} = 0.16 \quad \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} = \frac{x}{2\sqrt{0.018(5)}} = 0.16$$

Despejando x, esto es, la distancia de penetración de la temperatura de congelación en 5 h,

$$x = 0.0293\ \text{m}\ (0.096\ \text{pie})$$

5.3C Conducción en estado no estacionario en una placa grande

Una geometría muy común en los problemas de conducción de calor es una placa de espesor $2x_1$ en la dirección x, que tiene dimensiones muy grandes o infinitas en las direcciones y y z, tal como lo muestra la figura 5.3-4. El calor sólo es conducido desde las dos superficies planas paralelas en la dirección x. La temperatura original uniforme de la placa es T_0, y al tiempo t = 0, el sólido se expone a una temperatura ambiental T_1 y se verifica una conducción de estado no estacionario. Este sistema tiene resistencia superficial.

En las figuras 5.3-5 y 5.3-6 se presentan gráficamente los resultados numéricos de este caso. La figura 5.3-5, construida por Gurney y Lurie (G2), es una gráfica muy conveniente para determinar temperaturas en cualquier posición de la placa y en cualquier tiempo t. En la tabla 5.3-1 se incluyen los parámetros adimensionales que se usarán en éstas y otras gráficas de estado no estacionario en esta sección (x es la distancia desde el centro de la placa plana, cilindro o esfera; x_1 es la mitad del espesor de la placa plana, radio del cilindro o radio de la esfera; x es la distancia desde la superficie para un sólido semiinfinito).

Cuando n = 0, la posición corresponde al centro de la placa en la figura 5.3-5. La historia de la temperatura en el centro de la placa suele tener gran importancia. En la figura 5.3-6 se incluye una gráfica más precisa, llamada gráfica de Heisler (H1), que sirve para determinar solamente la temperatura del centro. Heisler (H1) también ha elaborado muchas gráficas para estimar las temperaturas en otras posiciones.

EJEMPLO 5.3-2. Conducción de calor en una barra de mantequilla

Una barra rectangular de mantequilla con 46.2 mm de espesor y temperatura de 277.6 K (4.4 °C) se extrae de la nevera y se coloca en un medio ambiente a 297.1 K (23.9 °C). (Puede considerarse que los lados y el fondo de la mantequilla están aislados por las paredes del recipiente. Por tanto, el área expuesta al medio ambiente es la superficie plana superior de

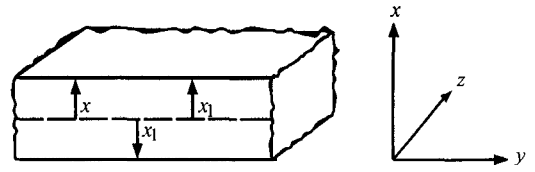


FIGURA 5.3-4. *Conducción de estado no estacionario en una placa plana grande.*

la mantequilla.) El coeficiente convectivo es constante y tiene un valor de 8.52 W/m^2 . K. Calcule la temperatura de la mantequilla en la superficie a 25.4 mm por debajo de la superficie y a 46.2 mm por debajo de la superficie en el fondo aislado, después de una exposición de 5 h.

Solución: Puede considerarse que la mantequilla es una placa plana grande con conducción vertical en la dirección x. Puesto que el calor sólo penetra por la parte superior y lasuperficie inferiorestáaislada, los 46.2 mm demantequillaequivalen alamitadde laplaca de un espesor x_1 = 46.2 mm. En una placa plana con dos superficies expuestas, como en la figura 5.3-4, el centro en x = 0 actúa como superficie de aislamiento y ambas mitades resultan imágenes reflejadas, una de la otra.
Con base en el apéndice A.4, las propiedades físicas de la mantequilla son $k = 0.197$ W/m . K, c_p = 2.30 kJ/kg . K = 2300 J/kg . K y ρ = 998 kg/m^3. La difusividad térmica es

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p} = \frac{0.197}{998(2300)} = 8.58 \times 10^{-8}\ m^2/s$$

Además, x_1 = 46.2/1000 = 0.0462 m.
Los parámetros necesarios para la figura 5.3-5 son

$$m = \frac{k}{hx_1} = \frac{0.197}{8.52(0.0462)} = 0.50$$

$$X = \frac{\alpha t}{x_1^2} = \frac{(8.58 \times 10^{-8})(5 \times 3600)}{(0.0462)^2} = 0.72$$

Para la superficie superior, donde $x = x_1$ = 0.0462 m,

$$n = \frac{x}{x_1} = \frac{0.0462}{0.0462} = 1.0$$

Entonces, con la figura 5.3-5,

$$Y = 0.25 = \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} = \frac{297.1 - T}{297.1 - 277.6}$$

Resolviendo, T = 292.2 K (19.0 “C).

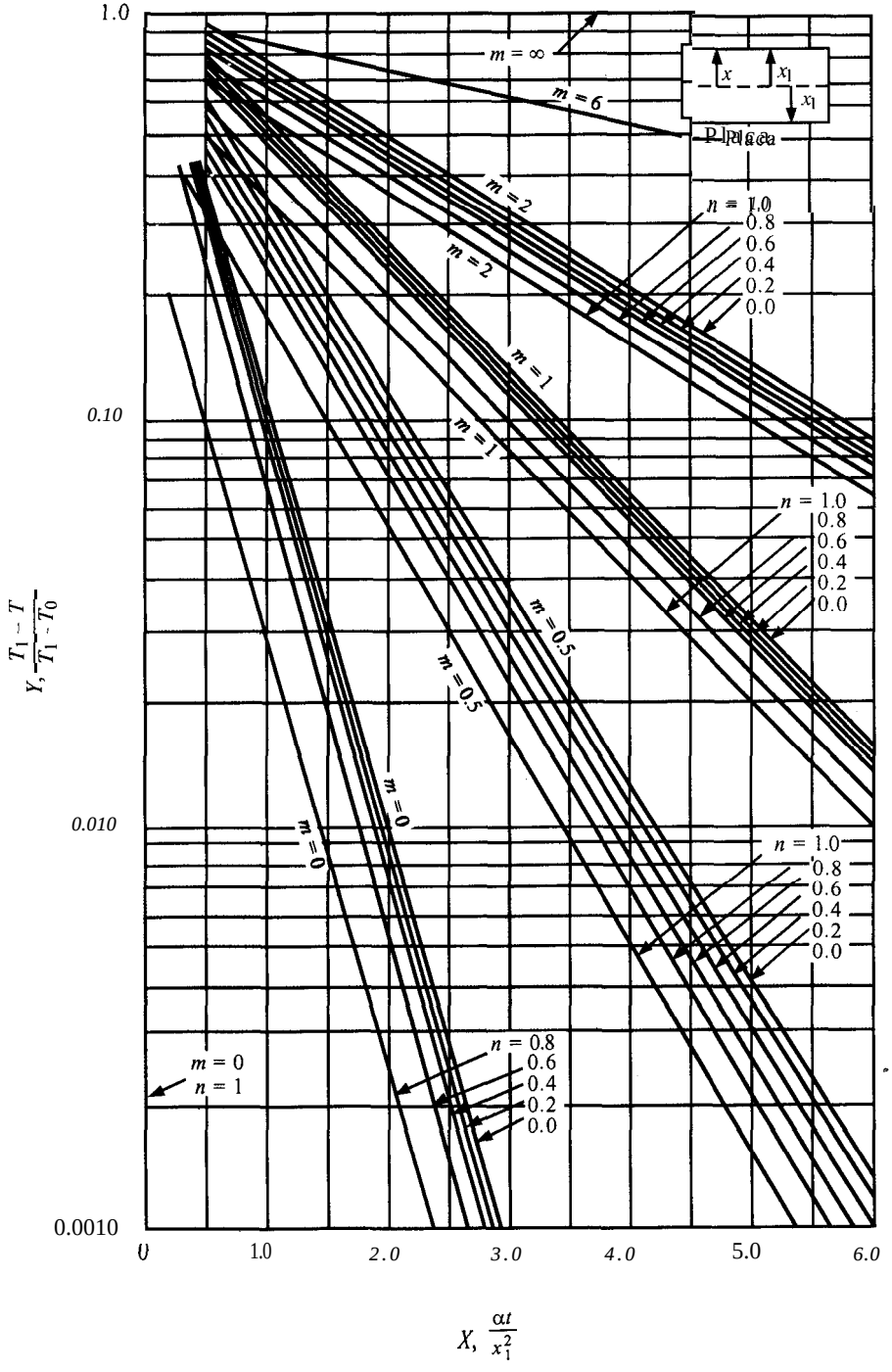


FIGURA 5.3-5. *Conducción de calor en estado no estacionario en una placa plana grande. [Tomado de H. P. Gurney y J. Lurie. Ind. Eng. Chem., 15, II 70 (1923).]*

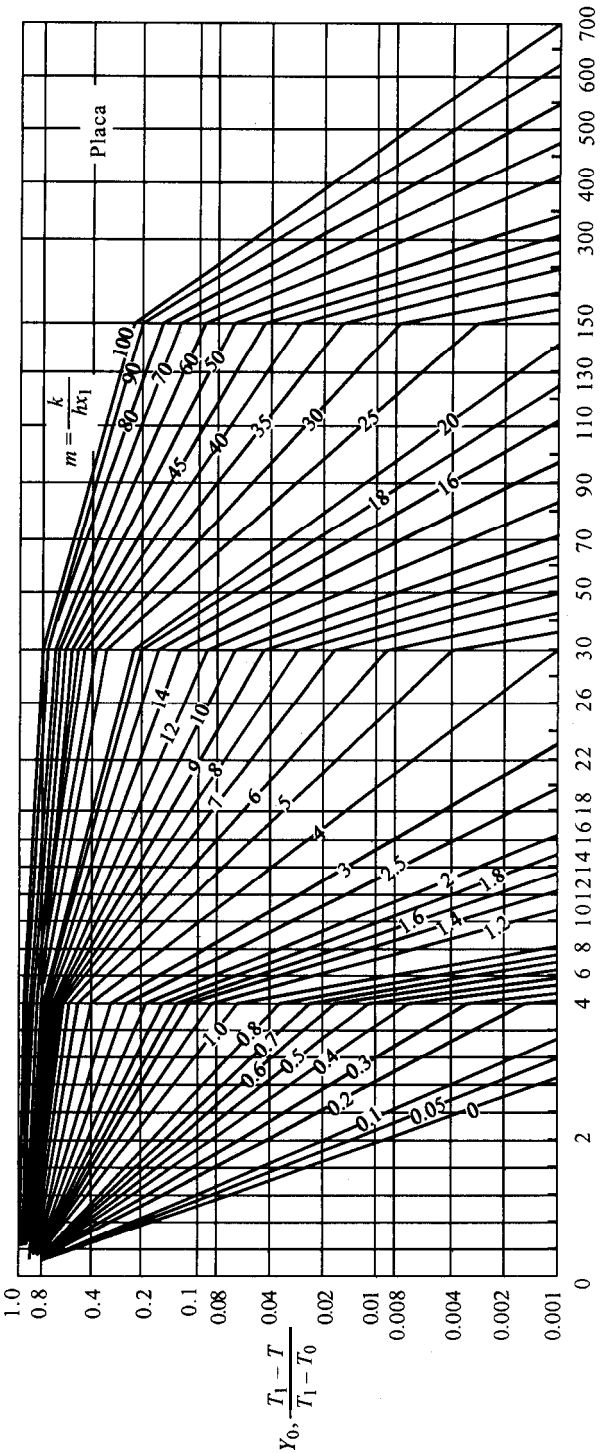


FIGURA 5.3-6. *Gráfica para determinar la temperatura del centro de una placa plana grande para conducción de calor en estado no estacionario. (Tomado de H. P. Heisler, Trans. A.S.M.E., 69, 227 (1947). Reproducido con autorización.]*

TABLA 5.3-1. *Parámetros adimensionales para gráficas de conducción en estado no estacionario.*

$$Y = \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} \qquad m = \frac{k}{hx_1}$$

$$1 - Y = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0} \qquad n = \frac{x}{x_1}$$

$$X = \frac{\alpha t}{x_1^2}$$

Unidades SI: $\alpha = m^2/s$, T = K, t = s, x = m, x_1 = m, k = W/m . K, h = W/m² K
Unidades del sistema inglés: a = pie²/h, T = °F, t = h, x = pie, x_1 = pie, k = btu/h . pie °F, h = btu/h pie² °F
Unidades cgs: a = cm²/s, T = °C, t = s, x = cm, x_1 = cm, k = cal/s cm °C, h = cal/s . cm² °C

En el punto a 25.4 mm de la superficie o 20.8 mm del centro, x = 0.0208 m, y

$$n = \frac{x}{x_1} = \frac{0.0208}{0.0462} = 0.45$$

Con base en la figura 5.3-5,

$$Y = 0.45 = \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} = \frac{297.1 - T}{297.1 - 277.6}$$

Resolviendo, T= 288.3 K (151.1 °C).
Para el punto inferior a 0.0462 mm desde la superficie expuesta, x = 0 y

$$n = \frac{x}{x_1} = \frac{0}{x_1} = 0$$

Con base en la figura 5.3-5,

$$Y = 0.50 = \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} = \frac{297.1 - T}{297.1 - 277.6}$$

Resolviendo, T= *287.4* K (14.2 “C). En otro procedimiento basado en la figura 5.3-6, que es sólo para el punto central, Y = 0.53 y T = *286.8* K (13.6 “C).

5.3D Conducción en estado no estacionario en un cilindro largo

Se considerará en ahora la conducción en estado no estacionario en un cilindro extenso, donde el proceso se verifica únicamente en dirección radial. El cilindro es bastante largo, por lo que la conducción en los extremos es despreciable o bien se puede considerar que dichos extremos están aislados. Las gráficas para este caso se presentan en la figura 5.3-7 para la determinación de las temperaturas en cualquier posición y en la figura 5.3-8, que sólo sirve para la temperatura del centro.

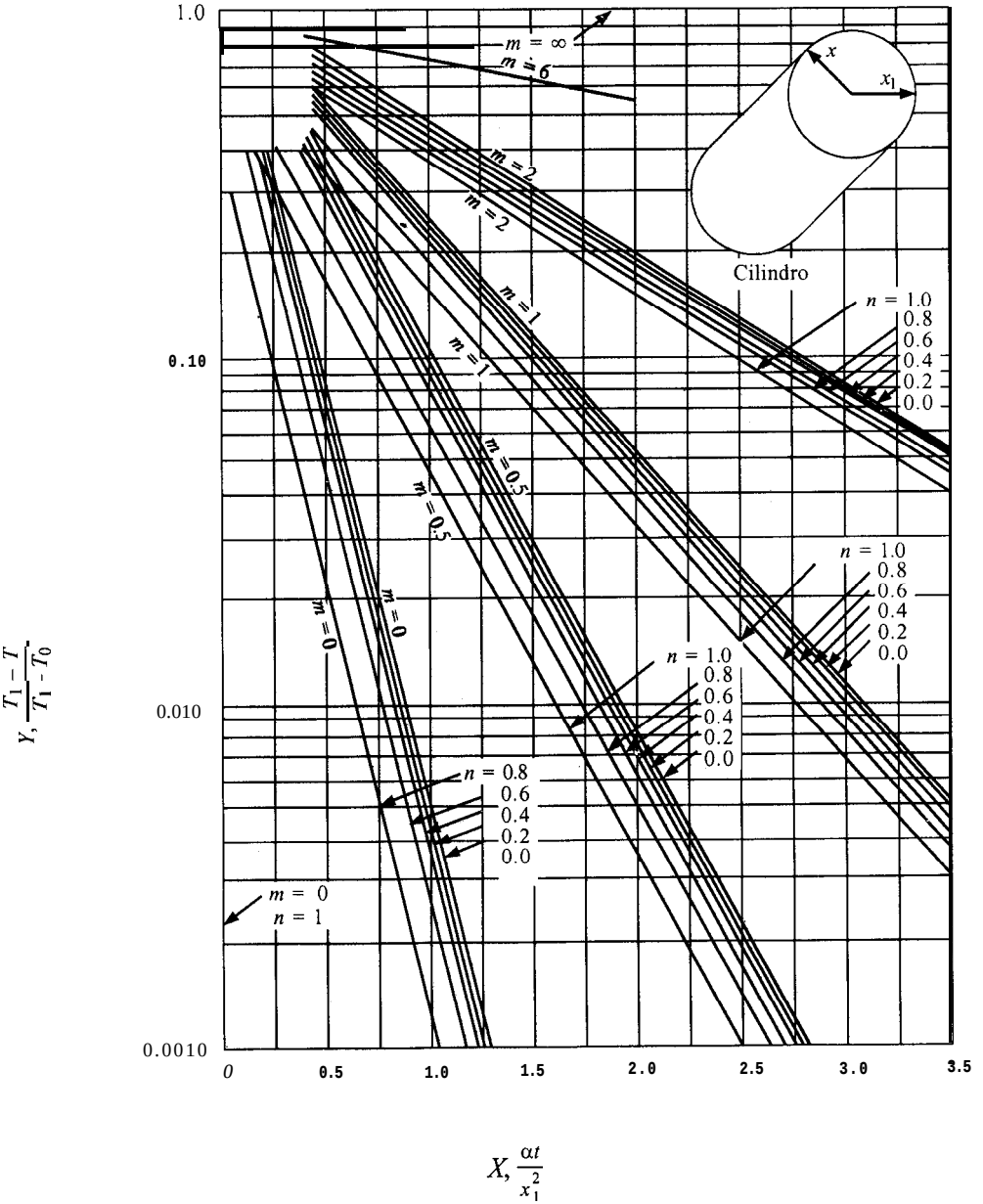


FIGURA 5.3-l. *Conducción de calor en estado no estacionario en un cilindro largo. [Tomado de H. P. Gurney y J. Lurie, Ind. Eng. Chem.. 15, II 70 (1923).]*

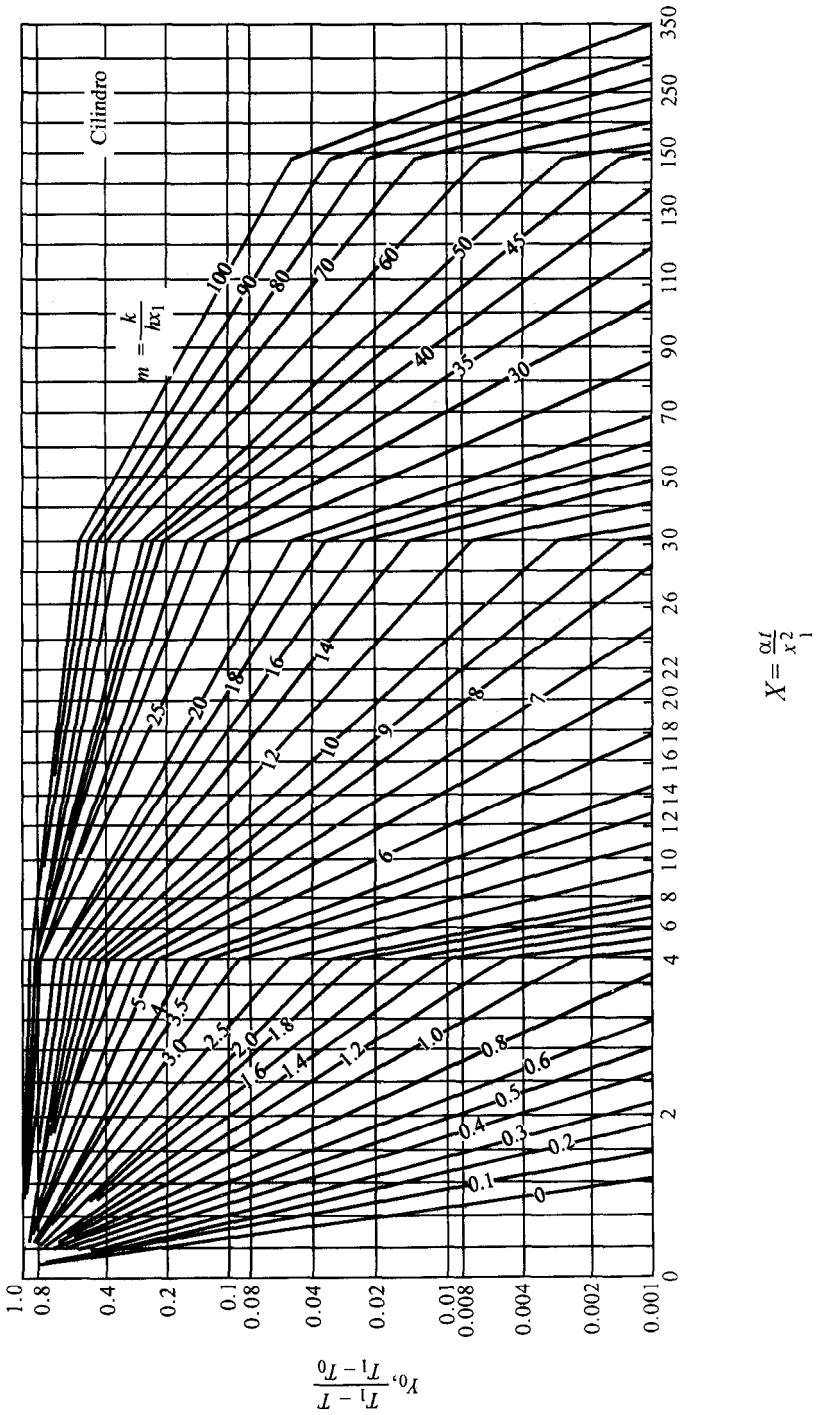


FIGURA 5.3-8. *Gráfica para determinar la temperatura en el centro de un cilindro largo con conducción de calor en estado no estacionario. [Tomado de H. P. Heisler, Trans A.S.M.E., 69, 227 (1947). Reproducido con autorización.]*

EJEMPLO 5.3-3. Conducción térmica transitoria en una lata depuré de chícharos

Una lata cilíndrica de puré de chícharos (C2) tiene un diámetro de 68.1 mm y altura de 10 1.6 mm, y está inicialmente a una temperatura uniforme de 29.4 "C. Las latas se apilan en sentido vertical dentro de una retorta a la cual se introduce vapor a 115.6 "C. Calcule la temperatura en el centro de la lata después de un tiempo de calentamiento de 0.75 h a 115.6 "C. Ahora suponga que la lata está en el centro de una pila vertical, aislada en sus dos extremos por la presencia de las latas restantes. (La capacidad calorífica de la pared metálica de la lata puede despreciarse.) Se estima que el coeficiente de transmisión de calor del vaporvale 4540 W/m^2 . K. Las propiedades físicas del puré son $k = 0.830$ W/m · K y $\alpha = 2.007 \times 10^{-7}$ m^2/s.

Solución: Puesto que los dos extremos de la lata están aislados, podemos considerarla como un cilindro largo. El radio es $x_1 = 0.0681/2 = 0.03405$ m. Para el centro, donde x = 0,

$$n = \frac{x}{x_1} = \frac{0}{x_1} = 0$$

Además,

$$m = \frac{k}{hx_1} = \frac{0.830}{4540(0.03405)} = 0.00537$$

$$X = \frac{\alpha t}{x_1^2} = \frac{(2.007 \text{ x } 10^{-7})(0.75 \text{ x } 3600)}{(0.03405)^2} = 0.468$$

Mediante la figura 5.3-8 de Heisler para la temperatura del centro,

$$Y = 0.13 = \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} = \frac{115.6 - T}{115.6 - 29.4}$$

Resolviendo, T = 104.4 "C.

5.3E Conducción en estado no estacionario en una esfera

En la figura 5.3-9 se ilustra la gráfica de Gurney y Lurie para la determinación de temperaturas en cualquier posición de una esfera. En la figura 5.3-10 se muestra la gráfica de Heisler para determinar únicamente la temperatura del centro de la esfera.

5.3F Conducción en estado no estacionario en sistemas bidimensionales y tridimensionales

Los problemas de conducción de calor considerados hasta ahora han estado limitados a una sola dimensión. Sin embargo en muchos problemas prácticos se produce conducción simultánea de' estado no estacionario en dos y tres direcciones. Se ilustrará como combinar soluciones unidimensionales para obtener resultados en sistemas multidimensionales.

Newman (N1) utilizó el principio de superposición y demostró matemáticamente cómo combinar las soluciones para la conducción térmica en una dimensión en la dirección x, y y z en forma de una

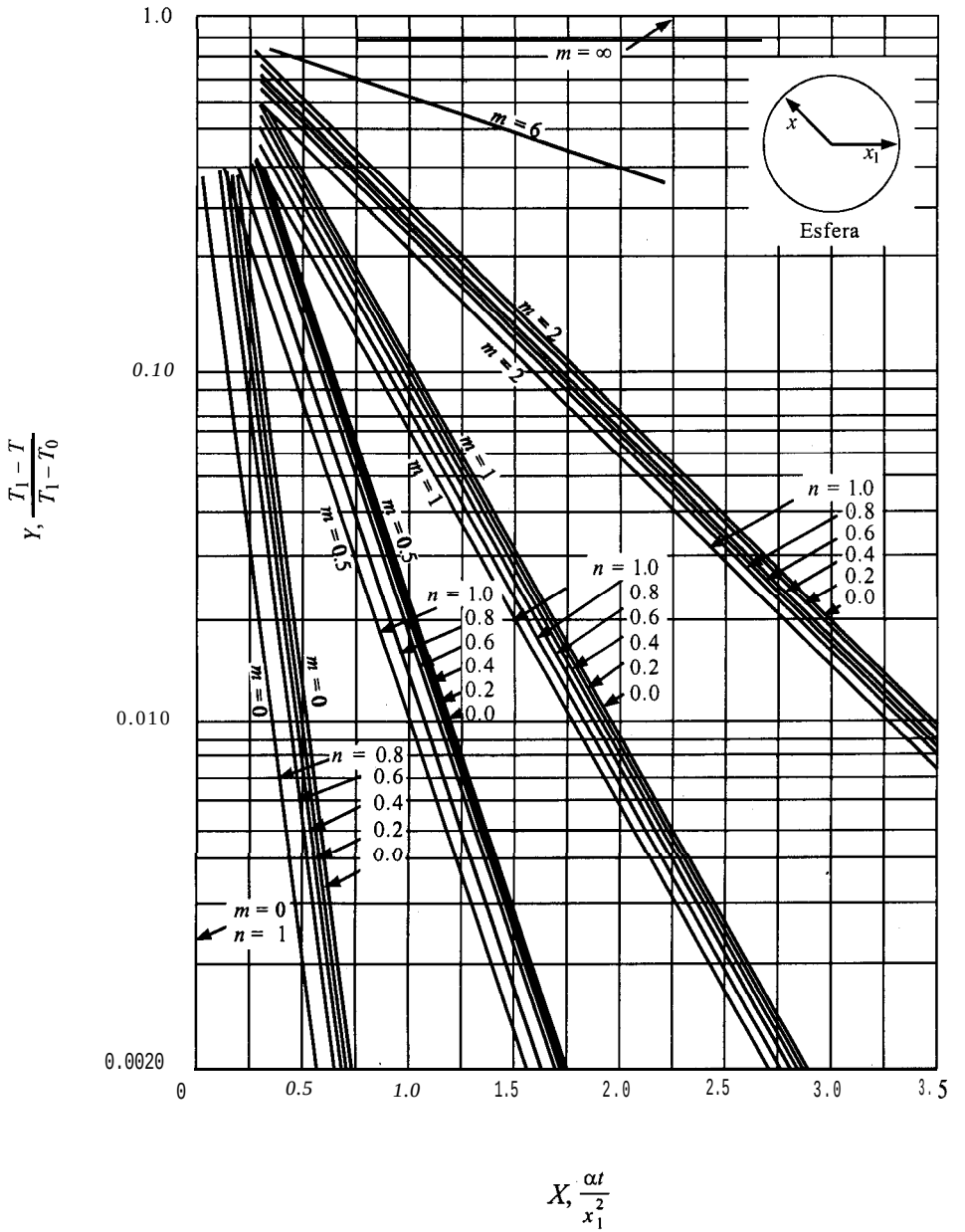


FIGURA 5.3-9 *Conducción de calor en estado no estacionario en una esfera. [Tomado de H. P Gurney y J. Lurie, Ind. Eng. Chem.,* 15, *11* 70 *(1923).*]

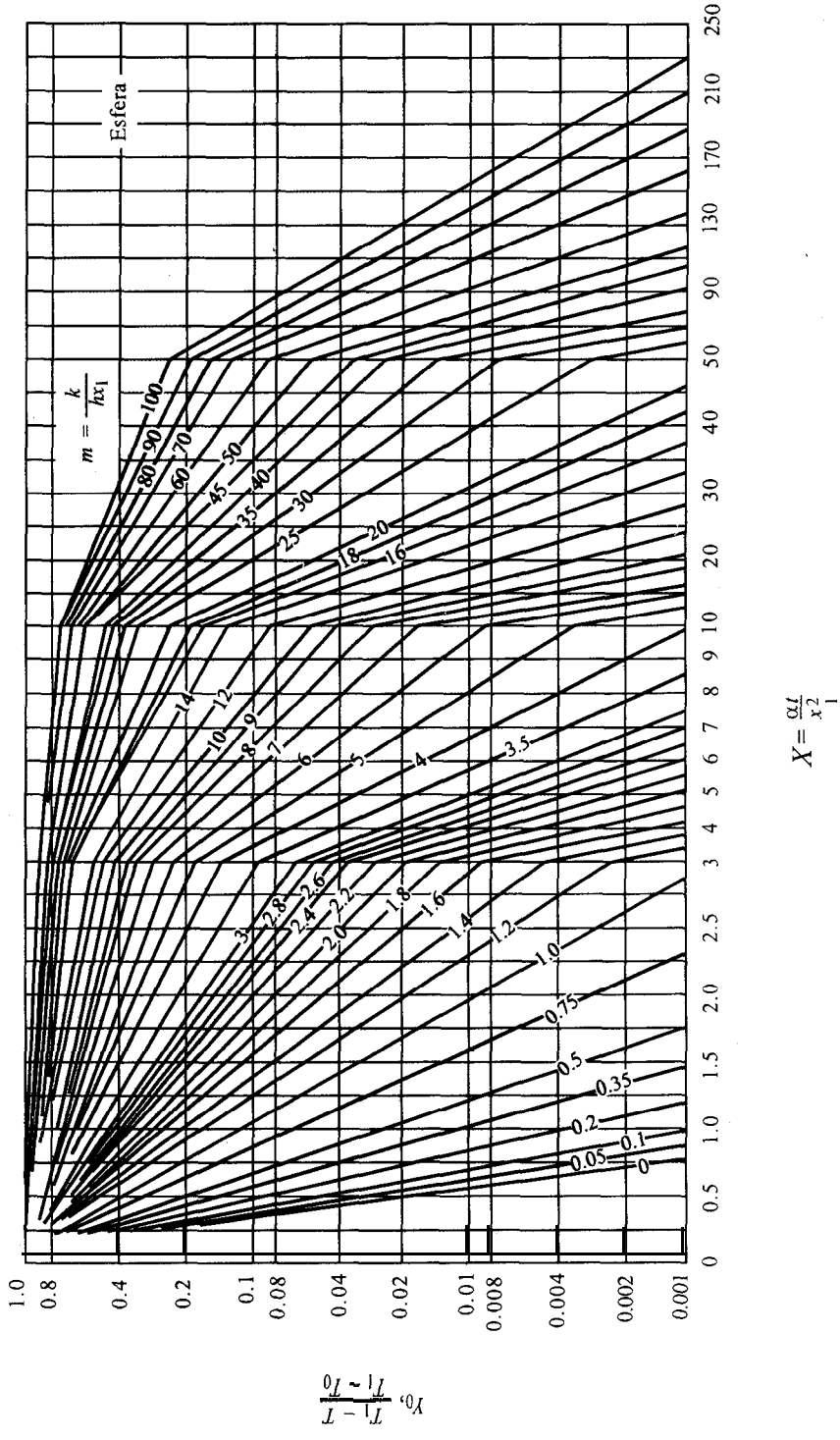


FIGURA 5.3-10. *Gráfica para determinar la temperntura en el centro de una esfera para conducción de calor en estado no estacionario. [Tomado de H. P. Heisler, Trans. A.S.M.E., 69, 227 (1947). Reproducido con autorización.]*

solución general para conducción simultánea en las tres direcciones. Por ejemplo, en la figura 5.3-l 1 se muestra un bloque rectangular con las dimensiones $2x_1$, $2y_1$ y $2z_1$. Para el valor Yen la dirección x, se procede como antes,

$$Y_x = \frac{T_1 - T_x}{T_1 - T_0} \tag{5.3-S}$$

donde T_x es la temperatura en el tiempo t y en una posición a una distancia x desde la línea del centro, tal como se procedió antes. Además, $n = x/x_1$, $m = k/hx_1$, y $X_x = \alpha t/x_1^2$, también como antes. Entonces, para la dirección y,

$$Y_y = \frac{T_1 - T_y}{T_1 - T_0} \tag{5.3-9}$$

donde $n = y/y_1$, $m = k/hy_1 y$ $X_y = \alpha t/y_1^2$. De manera análoga, para la dirección z,

$$Y_z = \frac{T_1 - T_z}{T_1 - T_0} \tag{5.3-10}$$

Entonces, para la transferencia simultánea en las tres dimensiones,

$$Y_{x,\,y,z} = (Y_x)(Y_y)(Y_z) = \frac{T_1 - T_{x,\,y,\,z}}{T_1 - T_0} \tag{5.3-l 1}$$

donde $T_{x,\,y,\,z}$ es la temperatura en el punto x, y, z desde el centro del bloque rectangular. El valor de Y_x para las dos caras paralelas se obtiene de las figuras 5.3-5 y 5.3-6 para conducción en una placa plana. Los valores de Y_y y Y_z se obtienen de las mismas gráficas con procesos similares.

Para un cilindro corto con radio x_1 y longitud $2y_1$, se aplica el siguiente procedimiento. Primero, se obtiene Y_x para la conducción radial, con base en las cifras para un cilindro largo. Después, con base en la figura 5.3-5 o 5.3-6, correspondiente a la conducción en una placa, se determina Y_y para la conducción entre dos planos paralelos

$$Y_{x,\,y} = (Y_x)(Y_y) = \frac{T_1 - T_{x,\,y}}{T_1 - T_0} \tag{5.3-12}$$

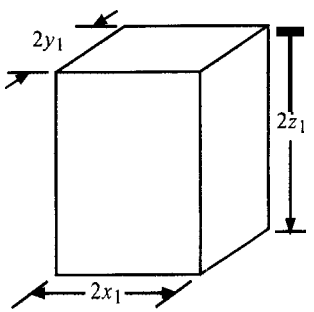


FIGURA 5.3-I 1. *Conducción en estado no estacionario en tres direcciones en un bloque rectangular.*

EJEMPLO 5.3-4. Conducción bidimensional en un cilindro corto

Repita el ejemplo 5.3-3 para la conducción transitoria en una lata de puré de chícharos, pero suponiendo que la conducción también se verifica en los dos extremos planos.

Solución: En la figura 5.3-12 se muestra la lata, que tiene un diámetro de 68.1 mm y altura de 101.6 mm. Los valores incluidos en el ejemplo 5.3-3 son $x_1 = 0.03405$ m, $y_1 = 0.1016/2 = 0.0508$ m, $k = 0.830$ W/m . K, $\alpha = 2.007 \times 10^{-7}$ m^2/s, $h = 4540$ W/m^2 . K y $t = 0.75(3600) = 2700$ s.

Para la conducción en la dirección x (radial), tal como se calculó con anterioridad,

$$n = \frac{x}{x_1} = \frac{0}{x_1} = 0, \qquad m = \frac{k}{hx_1} = \frac{0.830}{4540(0.03405)} = 0.00537$$

$$X = \frac{\alpha t}{x_1^2} = \frac{(2.007 \times 10^{-7})2700}{(0.03405)^2} 0.468$$

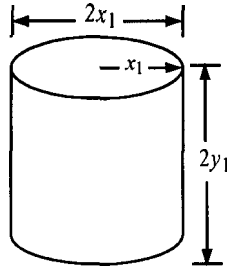


FIGURA 5.3-12. *Conducción bidimensional en un cilindro corto para el ejemplo 5.3-4.*

Con base en la figura 5.3-8 para la temperatura del centro,

$$Y_x = 0.13$$

Para la conducción en la dirección y (axial) y la temperatura del centro

$$n = \frac{Y}{y_1} = \frac{0}{0.0508} = 0$$

$$m = \frac{k}{hy_1} = \frac{0.830}{4540(0.0508)} = 0.00360$$

$$X = \frac{\alpha t}{y_1^2} = \frac{(2.007 \times 10^{-7})2700}{(0.0508)^2} = 0.210$$

La figura 5.3-6 para el centro de una placa larga (dos planos paralelos opuestos), da el siguiente resultado:

$$Y_y = 0.80$$

Sustituyendo en la ecuación (5.3-12).

$$Y_{x,y} = (Y_x)(Y_y) = 0.13(0.80) = 0.104$$

Entonces,

$$\frac{T_1 - T_{x,y}}{T_1 - T_0} = \frac{115.6 - T_{x,y}}{115.6 - 29.4} = 0.104$$

$$T_{x,y} = 106.6\ ^\circ\text{C}$$

Este valor es bastante cercano al de 104.4 °C que se obtuvo en el ejemplo 5.3-3, donde sólo había conducción radial.

5.3G Gráficas para la temperatura promedio en una placa, un cilindro y una esfera con resistencias superficiales despreciables

Cuando la resistencia superficial es despreciable, la curva de la figura 5.3-13 da la fracción total de cambio incompleto, *E*, para planchas, cilindros o esferas con conducción en estado no estacionario. El valor de *E es*

$$E = \frac{T_1 - T_{\text{prom}}}{T_1 - T_0} \tag{5.3-13}$$

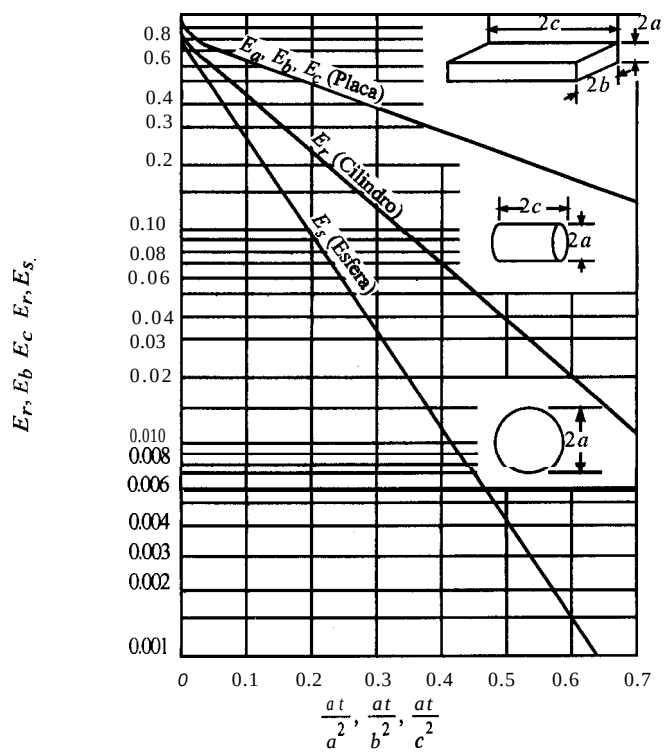


FIGURA 5.3-13. *Conducción en estado no estacionario y temperaturas promedio para resistencias superficiales despreciables. (Tomado de R. E. Treybal,* Mass *Transfer Operations. 2a. ed.. Nueva York:* McGraw-Hill, *Book Company 1968. Reproducido con autorización.)*

donde T_0 es la temperatura uniforme original, T_1 es la temperatura ambiental a la cual se somete repentinamente el sólido, y T_{prom} es la temperatura promedio del sólido después de t horas.

Los valores de E_a, E_b y E_c se usan todos ellos para la conducción entre un par de superficies paralelas, como en una placa. Por ejemplo, para la conducción en las direcciones a y b en una barra rectangular,

$$E = E_a E_b \tag{5.3-14}$$

Para la conducción desde los tres conjuntos de caras,

$$E = E_a E_b E_c \tag{5.3-15}$$

Para la conducción en un cilindro corto de $2c$ de longitud y radio a,

$$E = E_c E_r \tag{5.3-16}$$

5.4 MÉTODOS NUMÉRICOS DE DIFERENCIA FINITA PARA CONDUCCIÓN EN ESTADO NO ESTACIONARIO

5.4A Conducción en estado no estacionario en una placa

1. Introducción. Tal como se analizó en secciones anteriores de este capítulo, las ecuaciones diferenciales parciales para la conducción en estado no estacionario en varias geometrías simples, pueden resolverse por medios analíticos cuando las condiciones límite son constantes con respecto al tiempo, y equivalentes a $T = T_1$. Además, en las soluciones estudiadas, el perfil inicial de temperaturas a $t = 0$ es uniforme y corresponde a $T = T_0$. Las gráficas de estado estacionario que se usaron también tienen estas mismas condiciones límite e iniciales. Sin embargo, cuando las condiciones límite no son constantes con respecto al tiempo o las condiciones iniciales no son constantes con respecto a ía posición, es necesario aplicar métodos numéricos.

Los métodos de cálculo numérico para la conducción de calor en estado no estacionario son semejantes a los métodos numéricos para el estado estacionario que se analizaron en la sección 4.15. El sólido se subdivide en secciones o planchas de igual longitud y en el centro de cada sección se coloca un nodo ficticio. Después se hace un balance de calor para cada nodo. Este método difiere del método en estado estacionario ya que en la conducción en estado no estacionario se tiene una acumulación de calor en un nodo.

2. Ecuaciones para una placa. La ecuación de estado no estacionario para la conducción en la dirección x en una placa es

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{5.1-10}$$

Esto puede ordenarse para una resolución numérica si se expresa cada derivada parcial en forma de una diferencia real finita, en términos de AT, At y Δx. No obstante, introduciremos un método alterno para deducir el resultado final, con base en un balance de calor. La figura 5.4-1 muestra una placa

centrada en la posición n, representada por el área sombreada. .La placa tiene un espesor de Δx m y un área de corte transversal de A m^2. El nodo que está en la posición n, a una temperatura T_n, *se* coloca en el centro de la sección sombreada y este nodo representa la masa total y la capacidad calorífica total de la sección o plancha. Se puede imaginar que cada nodo está conectado al nodo adyacente mediante una pequeña varilla conductora ficticia. (Véase un ejemplo en la figura 4.15-3 .)

La figura muestra el perfil de temperaturas en cierto instante de tiempo t s. Haciendo un balance de calor en este nodo, tenemos: velocidad de entrada de calor - velocidad de salida de calor = velocidad de acumulación de calor en At s,

$$\frac{kA}{\Delta x}\left({}_t T_{n-1} - {}_t T_n\right) - \frac{kA}{\Delta x}\left({}_t T_n - {}_t T_{n+1}\right) = \frac{(A\,\Delta x)\rho c_p}{\Delta t}\left({}_{t+\Delta t} T_n - {}_t T_n\right) \qquad \textbf{(5.4-1)}$$

donde ${}_tT_n$ es la temperatura en el punto n al tiempo t, y ${}_{t+\Delta t}T_n$ es la temperatura en el punto n en el tiempo t, después de haber transcurrido el tiempo t + 1 At. Reordenando y despejando ${}_{t+\Delta t}T_n$,

$${}_{t+\Delta t} T_n = \frac{1}{M}\left[{}_t T_{n+1} + (M-2)_t T_n + {}_t T_{n-1}\right] \qquad (5.4\text{-}2)$$

donde

$$M = \frac{(\Delta x)^2}{\alpha\,\Delta t} \qquad (5.4\text{-}3)$$

Obsérvese que en la ecuación (5.4-2) la temperatura ${}_{t+\Delta t}T_n$ en la posición n y con el nuevo tiempo t + 1 At, se calcula a partir de los tres puntos conocidos en el tiempo t, esto es, el tiempo inicial. A esto se le llama *método explícito,* pues la temperatura después de cada tiempo puede calcularse explícitamente con base en las temperaturas del tiempo anterior. En este método el cálculo se lleva a cabo de manera directa de un incremento de tiempo al siguiente, hasta calcular la distribución final de temperaturas en el tiempo final deseado. Claro está que es necesario conocer la distribución de temperaturas en el tiempo inicial, así como las condiciones límite.

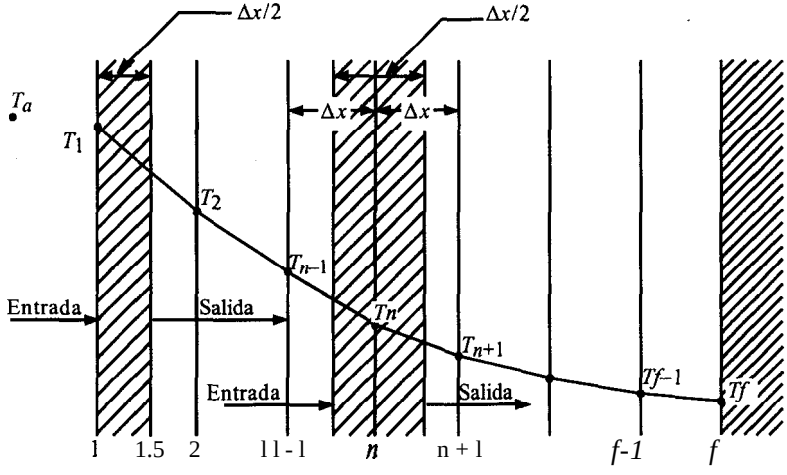


FIGURA 5.4-l. *Conducción en estado no estacionario en una placa.*

Una vez que se ha seleccionado el valor de Δx, entonces de la ecuación (5.4-3) puede elegirse un valor para Mo el incremento de tiempo, At. Para cierto valor de M, valores más pequeños de Δx implican valores más pequeños de At. El valor de M debe ser como sigue:

$$M \geq 2 \tag{5.4-4}$$

Si Mes menor de 2, se viola la segunda ley de la termodinámica. También puede demostrarse que para que exista estabilidad y convergencia de la solución de diferencia finita, M debe ser ≥ 2.

La estabilidad significa que los errores en la solución no aumentan exponencialmente durante el proceso, sino que se amortiguan. La convergencia significa que la resolución de la ecuación de diferencia tiende a la solución exacta de la ecuación diferencial parcial a medida que *At y Ax se* aproximan a cero si M mantiene un valor fijo. A través de incrementos de At y Δx más pequeños, la exactitud general aumenta pero también se incrementa el número de cálculos. Por consiguiente, con frecuencia se usa una computadora digital para este tipo de cálculos.

3. Método de Schmidt simplificado para una placa. Cuando el valor de M = 2, se produce una simplificación notable de la ecuación (5.4-2), lo que constituye el método de Schmidt,

$$_{t+\Delta t}T_n = \frac{_tT_{n-1} + _tT_{n+1}}{2} \tag{5.4-5}$$

Esto significa que cuando el tiempo 1 At ha transcurrido, la nueva temperatura en un punto dado n, y en el tiempo t + At es el promedio aritmético de las temperaturas en los dos nodos adyacentes, $n + 1$ y $n - 1$ en el tiempo original t.

5.4B Condiciones límite para el método numérico en una placa

1. Convección en el límite. Para el caso en el que hay una resistencia convectiva finita en el límite y si la temperatura del medio ambiente o del fluido circundante varía repentinamente a T_a, es posible deducir una expresión para la placa. Haciendo referencia a la figura 5.4-1, se efectúa un balance de calor en el 1/2 elemento externo. La velocidad de entrada de calor por convección la velocidad de salida de calor por conducción = a la velocidad de acumulación de calor en At s.

$$hA\left(_tT_a - _tT_1\right) - \frac{kA}{\Delta x}\left(_tT_1 - _tT_2\right) = \frac{(A\Delta x/2)\rho c_p}{\Delta t}\left(_{t+\Delta t}T_{1.25} - _tT_{1.25}\right) \tag{5.4-6}$$

donde $_tT_{1.25}$ es la temperatura en el punto medio de la placa externa, 0.5 Δx. Como una aproximación, puede emplearse la temperatura T_1 en la superficie para remplazar a $T_{1.25}$. Reordenando,

$$_{t+\Delta t}T_1 = \frac{1}{M}\left[2N_tT_a + \left[M - (2N+2)\right]_tT_1 + 2_tT_2\right] \tag{5.4-7}$$

donde

$$N = \frac{h\,\Delta x}{k} \tag{5.4-8}$$

Nótese que el valor de M debe ser tal que

$$M \geq 2N + 2 \tag{5.4-9}$$

2. *Condición de límite aislado.* En el caso de la condición límite con la cara posterior aislada, se realiza un balance de calor en la placa posterior 1/2 Δx, al igual que en la anterior 1/2 Δx, tal y como

se muestra en la figura 5.4-l. La ecuación resultante es la misma que las ecuaciones (5.4-6) y (5.4-7) aunque $h = 0$ o N = 0 y ${}_tT_f - 1 = {}_tT_f + 1$ debido a su simetría

$$t + \Delta t\, T_f = \frac{1}{M}\left[(M-2)_t T_f + 2_t T_{f-1}\right] \qquad \textbf{(5.4-10)}$$

3. Condición convectiva alterna. Para aplicar las ecuaciones señaladas anteriormente en un problema dado, deben usarse los mismos valores de M, Ax y At . Si N aumenta demasiado, de modo que el valor M resulte inconvenientemente grande, puede deducirse otra forma de la ecuación (5.4-7). Al despreciar la acumulación de calor en la media placa frontal en la ecuación (5.4-6)

$$t + \Delta t T_1 = \frac{N}{N+1}\, t + \Delta t T_a + \frac{1}{N+1}\, t + \Delta t T_2 \qquad \textbf{(5.4-11)}$$

Aquí el valor de M no se restringe por el valor de N. Esta aproximación funciona bien cuando se emplea un gran número de incrementos en Δx, de modo que la cantidad de calor despreciado es pequeña en comparación con el total.

4. Procedimientos para el uso de la temperatura limite inicial. Cuando la temperatura del medio exterior cambia súbitamente a T_a, pueden usarse los siguientes procedimientos.

1. Cuando $M = 2$ y se utiliza un cálculo manual de un número limitado de incrementos, puede usarse un procedimiento especial en las ecuaciones (5.4-5) y (5.4-7) o (5.4- ll). Para el primer incremento de tiempo debe usarse un valor promedio de ${}_1T_a$ igual a $(T_a + {}_0T_1)/2$, donde ${}_0T_1$ es la temperatura inicial en el punto 1. Para los valores sucesivos de At, se usa el valor de T_a (D1, K1). Este procedimiento especial para determinar el valor de T_a para el primer incremento de tiempo mejora la precisión del método numérico, en especial después de algunos intervalos de tiempo. Si T_a varía con el tiempo t, habrá que emplear un nuevo valor para cada intervalo de At.
2. Cuando $M = 2$ y se usan muchos incrementos de tiempo con una computadora digital, este procedimiento especial no es necesario y se emplea el valor único de T_a para todos los incrementos de tiempo.
3. Cuando $M = 3$ o más y se efectúa un cálculo manual de un número limitado de incrementos o bien un cálculo en computadora digital de muchos incrementos, sólo se utiliza el valor único de T_a para todos los incrementos de tiempo. Nótese que cuando $M = 3$ o más, se necesitan más cálculos que cuando $M = 2$. Los resultados más precisos se obtienen cuando $M = 4$, que es el método preferible; los resultados son menos exactos para $M = 3$ (D1, K1, K2).

EJEMPLO 5.4-l. Conducción en estado no estacionario y inétodo numérico de Schmidt
Una placa de material de 1 .OO m de espesor está a una temperatura uniforme de 100 "C. La superficie frontal se expone súbitamente a una temperatura ambiental constante de 0 "C. La resistencia convectiva es cero ($h = \infty$). La superficie posterior de la placa está aislada. La difusidad térmica $\alpha = 2.00 \times 10^{-5}$ m²/s. Con cinco cortes de 0.20 m de espesor cada uno y el método numérico de Schmidt con $M = 2.0$, calcule el perfil de temperaturas a $t = 6000$ s. Utilice el procedimiento especial para el primer incremento de tiempo.

Solución: La figura 5.4-2 muestra el perfil de temperaturas a $t = 0$ y la temperatura ambiental de $T_a = 0$ °C usando cinco cortes. Para el método de Schmidt, $M = 2$. Sustituyendo en la ecuación (5.4-3) con $\alpha = 2.00 \times 10^{-5}$ y $\Delta x = 0.20$, y despejando *At*,

$$M = 2 = \frac{(\Delta x)^2}{\alpha \Delta t} = \frac{(0.20)^2}{(2.00 \times 10^{-5})\Delta t} \qquad \text{At} = 1000 \text{ s} \qquad (5.4\text{-}3)$$

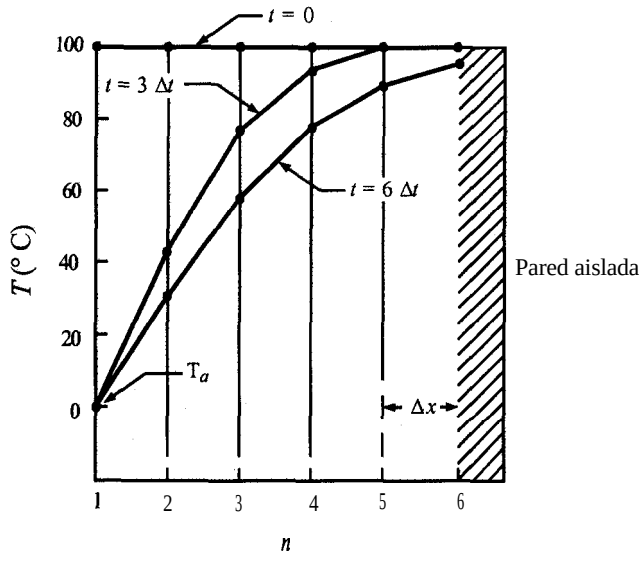


FIGURA 5.4-2. *Temperatura para el método numérico, ejemplo* 5.4-l.

Esto significa que deben usarse (6000 s)/(1000 s)/incremento, o seis incrementos de tiempo para llegar a 6000 s.

Para la superficie frontal donde $n = 1$, la temperatura ${}_1T_a$ que debe emplearse para el primer incremento de tiempo At, es, como ya se mencionó,

$${}_1T_a = \frac{T_a + {}_0T_1}{2} \qquad n = 1 \tag{5.4-l 2}$$

donde ${}_0T_1$ es la temperatura inicial en el punto 1. Para los incrementos de tiempo restantes,

$$T_1 = T_a \qquad n = 1 \tag{5.4-13}$$

Para calcular las temperaturas para todos los incrementos de tiempo de las placas de $n = 2$ a 5, con la ecuación (5.4-5),

$${}_{t+\Delta t}T_n = \frac{{}_tT_{n-1} + {}_tT_{n+1}}{2} \qquad n = 2, 3, 4, 5 \tag{5.4-14}$$

En el extremo aislado y todos los incrementos de tiempo para $n = 6$, sustitúyase $M = 2$ y $f = 6$ en la ecuación (5.5-12),

$${}_{t+\Delta t}T_6 = \frac{(2-2){}_tT_6 + 2{}_tT_5}{2} = {}_tT_5 \tag{5.4.15}$$

Para el primer incremento de tiempo de t + At y calculando la temperatura cuando $n = 1$ en la ecuación (5.4-12),

$${}_{t+\Delta t}T_1 = \frac{T_a + {}_0T_1}{2} = \frac{0+100}{2} = 50\ ^\circ\text{C} = {}_1T_a$$

Si $n = 2$, y la ecuación (5.4-14),

$$_{t+\Delta t}T_2 = \frac{_tT_1 + _tT_3}{2} = \frac{50+100}{2} = 75$$

Continuando para $n = 3, 4, 5$, se tiene

$$_{t+\Delta t}T_3 = \frac{_tT_2 + _tT_4}{2} = \frac{100+100}{2} = 100$$

$$_{t+\Delta t}T_4 = \frac{_tT_3 + _tT_5}{2} = \frac{100+100}{2} = 100$$

$$_{t+\Delta t}T_5 = \frac{_tT_4 + _tT_6}{2} = \frac{100+100}{2} = 100$$

Si $n = 6$, úsese la ecuación (5.4-15),

$$_{t+\Delta t}T_6 = {}_tT_5 = 100$$

En $2\Delta t$ con la ecuación (5.4-l 3), cuando $n = 1$ y continuando para $n = 2$ hasta 6, y aplicando las ecuaciones (5.4-14) y (5.5-15),

$$_{t+2\Delta t}T_1 = T_a = 0$$

$$_{t+2\Delta t}T_2 = \frac{_{t+\Delta t}T_1 + _{t+\Delta t}T_3}{2} = \frac{0+100}{2} = 50$$

$$_{t+2\Delta t}T_3 = \frac{_{t+\Delta t}T_2 + _{t+\Delta t}T_4}{2} = \frac{75\text{-k }100}{2} = 87.5$$

$$_{t+2\Delta t}T_4 = \frac{_{t+\Delta t}T_3 + _{t+\Delta t}T_5}{2} = \frac{100+100}{2} = 100$$

$$_{t+2\Delta t}T_5 = \frac{_{t+\Delta t}T_4 + _{t+\Delta t}T_6}{2} = \frac{100+100}{2} = 100$$

$$_{t+2\Delta t}T_6 = {}_{t+\Delta t}T_5 = 100$$

En $3\Delta t$,

$$_{t+3\Delta t}T_1 = 0$$

$$_{t+3\Delta t}T_2 = \frac{0+87.5}{2} = 43.75$$

$$_{t+3\Delta t}T_3 = \frac{50+100}{2} = 75$$

$$_{t+3\Delta t}T_4 = \frac{87.5+100}{2} = 93.75$$

$$_{t+3\Delta t}T_5 = \frac{100+100}{2} = 100$$

$$_{t+3\Delta t}T_6 = 100$$

Si $4\Delta t$,

$$t+4\Delta t\ T_1 = 0$$

$$t+4\Delta t\ T_2 = \frac{0+75}{2} = 37.5$$

$$t+4\Delta t\ T_3 = \frac{37.5 + 93.75}{2} = 68.75$$

$$t+4\Delta t\ T_4 = \frac{75+100}{2} = 87.5$$

$$t+4\Delta t\ T_5 = \frac{93.75 + 100}{2} = 96.88$$

$$t+4\Delta t\ T_6 = 100$$

En $5\Delta t$,

$$t+5\Delta t\ T_1 = 0$$

$$t+5\Delta t\ T_2 = \frac{0+68.75}{2} = 34.38$$

$$t+5\Delta t\ T_3 = \frac{37.5+87.5}{2} = 62.50$$

$$t+5\Delta t\ T_4 = \frac{68.75 + 96.88}{2} = 82.8$$

$$t+5\Delta t\ T_5 = \frac{87.5+100}{2} = 93.75$$

$$t+5\Delta t\ T_6 = 96.88$$

Si $6\Delta t$ (tiempo final),

$$t+6\Delta t\ T_1 = 0$$

$$t+6\Delta t\ T_2 = \frac{0+62.5}{2} = 31.25$$

$$t+6\Delta t\ T_3 = \frac{34.38 + 82.81}{2} = 58.59$$

$$t+6\Delta t\ T_4 = \frac{62.50 + 93.75}{2} = 78.13$$

$$t+6\Delta t\ T_5 = \frac{82.81 + 96.88}{2} = 89.84$$

$$t+6\Delta t\ T_6 = 93.75$$

En la figura 5.4-2 se grafican los perfiles de temperatura para 3 incrementos At y el tiempo final de 6 incrementos At. Este ejemplo muestra cómo puede hacerse un cálculo manual. Si se desea aumentar la exactitud, se requieren más incrementos de placas y de tiempo. Ésta es la razón por la que es ideal efectuar este cálculo con una computadora digital.

EJEMPLO 5.4-2. Conducción en estado no estacionario usando una computadora digital

Repita el ejemplo 5.4-1 empleando una computadora digital. Use un valor de $\Delta x = 0.05$ m. Escriba el programa de computadora y compare las temperaturas finales con las del ejemplo 5.4-1, mediante el método explícito de Schmidt para M = 2. Aunque no es necesario para muchos incrementos de tiempo si se utiliza la computadora digital, use el procedimiento especial para determinar el valor de $_1T_a$ para el primer incremento de tiempo. Así, con el ejemplo 5.4-l puede hacerse una comparación directa del efecto del número de incrementos sobre los resultados.

Solución: El número de placas es 1.00 m/(0.05 m/placa), o sea, 20 placas. Sustituyendo en la ecuación (5.4-3) con $\alpha = 2.00 \times 10^{-5}$ m^2/s, Δx = 0.05 m y M = 2, por lo que, despejando At,

$$M = 2 = \frac{(\Delta x)^2}{\alpha \Delta t} = \frac{(0.05)^2}{(2.00 \times 10^{-5})(\Delta t)}$$

$$\text{At} = 62.5 \text{ s}$$

Por consiguiente, deben considerarse (6000/62.5) = 96 incrementos de tiempo. El valor de n va desde n = 1 a 21.

Las igualdades que se emplean para calcular las temperaturas son las ecuaciones (5.4-12) a la (5.4-15). Sin embargo, las únicas diferencias son que en la ecuación (5.4- 14) n va de 2 a 20 y en la ecuación (5.4-15) n = 21, por lo que $_t + _{\Delta t}T_{21} = _tT_{20}$.

El programa de computadora para estas ecuaciones es fácil de escribir y se deja en manos del lector. Los resultados se incluyen en la tabla (5.4-l) para compararlos con el ejemplo 5.4-1, en el que sólo se usaron 5 cortes. La tabla muestra que los resultados para 5 cortes son razonablemente cercanos a los de 20 cortes, y los valores en ambos casos se desvían un 2% o menos.

TABLA 5.4-l. *Comparación de resultados de los ejemplos 5.4-l y 5.4-2*

	Resultados usando Δx = 0.20 m		*Resultados usando* Δx = 0.05 m	
Distancia a la cara frontal		*Temperatura*		*Temperatura*
m	n	°C	n	°C
0	1	0.0	1	0.0
0.20	2	31.25	5	31.65
0.40	3	58.59	9	58.47
0.60	4	78.13	13	77.55
0.80	5	89.84	17	88.41
1.00	6	93.75	21	91.87

Como regla general para los cálculos manuales el uso de un mínimo de cinco cortes y cuando menos de 8 a 10 incrementos de tiempo, proporciona suficiente exactitud para la mayoría de los propósitos prácticos. El uso de la computadora digital sólo resulta conveniente cuando se exige una gran precisión o bien se desea resolver varios casos. En muchas ocasiones no se conocen las propiedades físicas con suficiente precisión como para justificar una resolución por computadora.

EJEMPLO 5.4-3. Conducción en estado no estacionario con una condición de límite convectiva

Utilice las mismas condiciones que en el ejemplo 5.4-1, pero ahora con un coeficiente convectivo de $h = 25.0$ W/m^2 . K en la superficie. La conductividad térmica es $k = 10.0$ W/m . K.

Solución: Las ecuaciones (5.4-7) y (5.4-8) pueden usarse para la convección en la superficie. A partir de la ecuación (5.4-8), N= $h\Delta x/k = 25.0(0.20)/10.0 = 0.50$. Entonces $2N + 2 = 2(0.50) + 2 = 3$ .0. Sin embargo, por la ecuación (5.4-9) el valor de Mdebe ser igual o mayor que 2N + 2. Esto significa que no puede usarse el valor el $M = 2$. Elegiremos el método preferencial cuando $M = 4.0$. [Otra alternativa menos exacta es usar la ecuación (5.4- ll) para la convección y entonces el valor de M no estará restringido por el valor N.] Al sustituir en la ecuación (5.4-3) y al despejar At,

$$M = 4 = \frac{(\Delta x)^2}{\alpha \Delta t} = \frac{(0.20)^2}{(2.00 \times 10^{-5})(\text{At})} \qquad \Delta t = 500 \text{ s}$$

Por consiguiente, 6000/500 = 12 es el número de incrementos de tiempo que debe usarse. Para el primer incremento de tiempo At y para todos los incrementos de tiempo, el valor de la temperatura del ambiente T_a que debe usarse es $T_a = 0$ °C ya que $M > 3$. Para la convección en el nodo o punto $n = 1$ se usa la ecuación (5.4-7), donde $M = 4$ y N = 0.50.

$$_{t + \Delta t}T_1 = \frac{1}{4}[2(0.5)T_a + [4 \quad (2 \times 0.5 + 2)_t T_1 + 2_t T_2]$$
$$= 0.25\ T_a + 0.25_t T_1 + 0.50_t T_2 \qquad n = 1 \qquad (5.4\text{-}16)$$

Si $n = 2, 3, 4, 5$, se utiliza la ecuación (5.4-2),

$$_{t + \Delta t}T_n = \frac{1}{4}[_t T_{n+1} + (4 - 2)_n T_t + {}_t T_{n-1}]$$
$$= 0.25_t T_n + , + 0.50_t T_n + 0.25\ {}_t T_{n-1} \qquad n = 2, 3, 4, 5 \qquad (5.4\text{-}1\ 7)$$

En $n = 6$ (frontera aislada), se emplea la ecuación (5.4-10) y $f = 6$.

$$_{t + \Delta t}T_6 = \frac{1}{4}[(4 - 2)_t T_6 + 2_t T_5]$$
$$= 0.50_t T_6 + 0.50_t T_5 \qquad n = 6 \qquad (5.4\text{-}18)$$

En el caso de 1 At, para el primer incremento de tiempo de $t + \Delta t$, $T_a = 0$. Si se utiliza la ecuación (5.4-16) para calcular la temperatura en el nodo 1,

$$_{t + \Delta t}T_1 = 0.25(0) + 0.25(100) + 0.50(100) = 75.0$$

Para $n = 2, 3, 4, 5$ se utiliza la ecuación (5.4-17) y se tiene

$$_{t + \Delta t}T_1 = 0.25_t T_3 + 0.50_t T_2 + 0.25_t T_1$$
$$= 0.25(100) + 0.50(100) + 0.25(100) = 100.0$$

Además, haciendo cálculos semejantes, T_3, T_4 y T_5 = 100.0. Paran = 6, utilizando laecuación (5.4-18), T_6 = 100.0.

En $2\Delta t$, $T_a = 0$. Si se utiliza la ecuación (5.4-16),

$$_{t+2\Delta t}T_1 = 0.25(0) + 0.25(75.0) + 0.50(100) = 68.75$$

Utilizando la ecuación (5.4-17) si $n = 2, 3, 4, 5$

$$_{t+2\Delta t}T_2 = 0.25(100) + 0.50(100) + 0.25(75.00) = 93.75$$
$$_{t+2\Delta t}T_3 = 0.25(100) + 0.50(100) + 0.25(100) = 100.0$$

También, T_4 y $T_5 = 100.0$
Si $n = 6$, utilizando la ecuación (5.4-l 8), $T_6 = 100.0$.
En 3 *AT*, $T_a = 0$. Utilizando la ecuación (5.4-16).

$$_{t+3\Delta t}T_1 = 0.25(0) + 0.25(68.75) + 0.50(93.75) = 64.07$$

Al emplear la ecuación (5.4-17) en $n = 2, 3, 4, 5$,

$$_{t+3\Delta t}T_2 = 0.25(100) + 0.50(93.75) + 0.25(68.75) = 89.07$$
$$_{t+3\Delta t}T_3 = 0.25(100) + 0.50(100) + 0.25(93.75) = 98.44$$
$$_{t+3\Delta t}T_4 = 0.25(100) + 0.50(100) + 0.25(100) = 100.0$$

También, $T_5 = 100.0$ y $T_6 = 100.0$.
Los cálculos pueden continuarse de la misma manera para el tiempo restante hasta emplear un total de 12 incrementos At.

5.4C Otros métodos numéricos para conducción en estado no estacionario

1. Conducción en estado no estacionario en un cilindro. Al deducir las ecuaciones numéricas para la conducción en estado estacionario en una placa plana, el área de corte transversal era constante en todo lugar, pero en un cilindro esta área cambia radialmente. A fin de deducir la ecuación para un cilindro se usa la figura 5.4-3, en la cual el cilindro está dividido en cilindros huecos concéntricos cuyas paredes tienen un grosor de Δx m. Si se supone un cilindro de 1 m de largo y se hace un balance de calor sobre la placa en el punto n, la velocidad de entrada de calor − la velocidad de salida de calor = la velocidad de acumulación de calor.

$$\frac{k\left[2\pi(n+1/2)\Delta x\right]}{\Delta x}\left({}_tT_{n+1} - {}_tT_n\right) - k\frac{\left[2\pi(n-1/2)\Delta x\right]}{\Delta x}\left({}_tT - {}_tT_{n-1}\right) = \frac{2\pi n(\Delta x)^2\rho c_p}{\mathrm{At}}\left({}_{t+\Delta t}T_n - {}_tT_n\right) \qquad \textbf{(5.4-19)}$$

Si se reordena, la ecuación final es

$$_{t+\Delta t}T_n = \frac{1}{M}\left[\frac{2n+1}{2n}\,{}_tT_{n+1} + (\mathrm{M}-2)\;{}_tT_n + \frac{2n-1}{2n}\,{}_tT_{n-1}\right] \qquad (5.4\text{-}20)$$

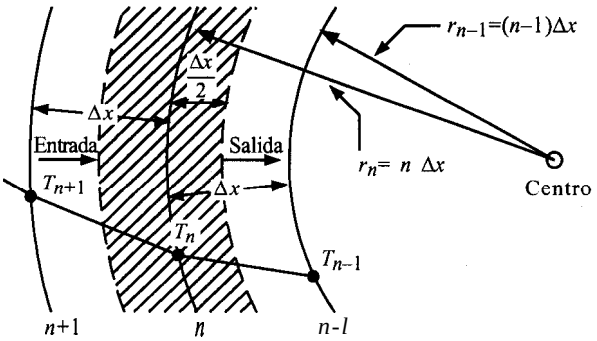


FIGURA 5.4-3. *Conducción en estado no estacionario en un cilindro.*

donde $M = (\Delta x)^2/(\alpha\ \mathrm{At})$ como antes. Además, en el centro, donde $n = 0$,

$$_{t+\Delta t}T_0 = \frac{4}{M}\ {}_tT_1 + \frac{M-4}{M}\ {}_tT_0 \tag{5.4-21}$$

Para utilizar las ecuaciones (5.4-20) y (5.4-21),

$$M \geq 4 \tag{5.4-22}$$

Ya se han deducido las ecuaciones para la convección en la superficie exterior del cilindro (D1). Si se desprecia la capacidad calorífica de la $\frac{1}{2}$ externa de la placa,

$$_{t+\Delta t}T_n = \frac{nN}{\frac{2n-1}{2}+nN}\ {}_{t+\Delta t}T_a + \frac{(2n-1)/2}{\frac{2n-1}{2}+nN}\ {}_{t+\Delta t}T_{n-1} \tag{5.4-23}$$

donde T_n es la temperatura de la superficie y T_{n-}, en la posición en el sólido 1 Δx abajo de la superficie.

Las ecuaciones para los métodos numéricos para la conducción en estado no estacionario bidimensional ya se han deducido y están disponibles en varias referencias (D 1, K2)

2. Conducción en estado no estacionario y método numérico implícito. En algunos problemas prácticos, la restricción impuesta sobre el valor $M \geq 2$ por requisitos de estabilidad puede resultar inconveniente. Además, para minimizar los problemas de estabilidad se han desarrollado métodos implícitos que utilizan diferentes fórmulas de diferencia finita. Entre ellas, una importante es el método de Crank-Nicolson, que se considerará aquí.

Al deducir las ecuaciones (5.4-l) y (5.4-2), la velocidad con la cual entraba el calor en la placa en la figura 5.4-l se tomó como la velocidad en el tiempo *t*.

$$\text{velocidad de entrada de calor } t = \frac{kA}{\Delta x}({}_tT_{n-},\ -\ {}_tT_n) \tag{5.4-24}$$

Entonces se supuso que esta velocidad podría usarse durante el intervalo completo de t a $t + \Delta t$. Sin embargo, ésta es una aproximación, puesto que la cantidad cambia durante este intervalo Δt. Un mejor valor sería el valor promedio de la tasa en t y en $t + \Delta t$, o

$$\text{velocidad promedio de entrada de calor} = \frac{kA}{\Delta x}\left[\frac{\left({}_{t}T_{n-1} - {}_{t}T_{n}\right) + \left({}_{t+\Delta t}T_{n-1} - {}_{t+\Delta t}T_{n}\right)}{2}\right] \qquad \textbf{(5.4-25)}$$

Además, para el calor que sale se utiliza un tipo de promedio semejante. La ecuación final es

$${}_{t+\Delta t}T_{n+1} - (2M + 2)\,{}_{t+\Delta t}T_{n} + {}_{t+\Delta t}T_{n-1} = -{}_{t}T_{n+1} + (2 - 2M)\,{}_{t}T_{n} - {}_{t}T_{n-1} \qquad (5.4\text{-}26)$$

Esto significa que ahora no se puede calcular un nuevo valor de ${}_{t+\Delta t}T_{n}$ sólo a partir de valores de tiempo t, como en la ecuación (5.4-2), sino que todos los nuevos valores de T en $t + \Delta t$ en todos los puntos deben calcularse simultáneamente. Para hacer esto se escribe una ecuación similar a la (5.4-26) para cada uno de los puntos internos. Todas estas ecuaciones y las de frontera son algebraicas lineales, y pueden resolverse simultáneamente mediante métodos estándar, como la técnica de iteración de Gauss-Seidel, la técnica de inversión de matrices, etcétera (G1, K1).

Una ventaja importante de la ecuación (5.4-26) es que los criterios de estabilidad y convergencia se satisfacen para todos los valores positivos de M, lo cual significa que Mpuede tener valores menores que 2.0. Una desventaja del método implícito es el gran número de cálculos que se necesitan para cada etapa de tiempo. Los métodos explícitos son más fáciles de usar, pero debido a consideraciones de estabilidad, especialmente en situaciones complejas, a menudo se aplican los métodos implícitos.

5.5 ENFRIAMIENTO Y CONGELACIÓN DE ALIMENTOS Y MATERIALES BIOLÓGICOS

5.5A Introducción

A diferencia de muchos materiales inorgánicos y orgánicos que son relativamente estables, los alimentos y otros materiales biológicos se descomponen y se deterioran con bastante rapidez a temperatura ambiente. Este deterioro obedece a varios factores. Los tejidos de los alimentos, tales como frutas y vegetales, después de la cosecha continúan teniendo respiración metabólica y maduran, llegando a pudrirse. Las enzimas de los tejidos muertos de las carnes y de los pescados, permanecen activas e inducen una oxidación y otros efectos deteriorantes. Los microorganismos atacan todo tipo de alimentos, descomponiéndolos y haciéndolos inadecuados para su consumo; además, se verifican reacciones químicas como la oxidación de las grasas.

A temperaturas bajas, la velocidad de crecimiento de los microorganismos se reduce si la temperatura es inferior a la óptima para su desarrollo. Además, la actividad enzimática y las velocidades de las reacciones químicas también disminuyen a temperaturas mínimas. Las velocidades de la mayoría de las reacciones químicas y biológicas en los alimentos almacenados, fríos o congelados, se reducen por factores de $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{3}$ por cada 10 K (10 “C) de reducción de la temperatura.

El agua desempeña un papel muy importante en esta velocidad de deterioro, y la mayoría de los materiales biológicos contienen una cantidad sustancial de la misma. Para alcanzar una temperatura suficientemente baja con objeto de que la mayoría de estas velocidades casi cesen, es necesario que se congele casi toda el agua. Los materiales como los alimentos no se congelan a 0 °C (32 “F) como

hace el agua pura, sino a un intervalo de temperaturas por abajo de 0 "C. Sin embargo, debido a algunos de los efectos físicos de los cristales de hielo y a otras consecuencias, como la concentración de las soluciones, para preservar los materiales biológicos a veces se usa un simple enfriamiento en lugar de congelación.

El enfriamiento de materiales se basa en la eliminación del calor sensible y calor metabólico, es decir, la temperatura suele reducirse más o menos a un intervalo de 4.4 °C (40 "F); esto es, un poco por encima de la congelación. De hecho, entonces no hay calor latente de congelación. Los materiales pueden almacenarse más o menos entre una semana hasta varios meses, dependiendo del producto y de la atmósfera prevaleciente. Cada material tiene una temperatura óptima de almacenamiento en frío.

En la congelación de alimentos y materiales biológicos, la temperatura se reduce de tal manera que casi toda el agua se transforma en hielo. Dependiendo de las temperaturas fínales de almacenaje, que pueden llegar hasta -30 °C, los materiales pueden preservarse hasta por un año, más o menos. Con frecuencia, muchos alimentos congelados se tratan primero con un proceso de blanqueo o de escaldado para destruir las enzimas.

5.5B Enfriamiento de alimentos y de materiales biológicos

El enfriamiento de alimentos y materiales biológicos reduce la temperatura de los productos hasta el valor ideal para el almacenamiento en frío, que puede ser desde −1.1°C (30 °F) hasta 4.4 °C (40 °F). Por ejemplo, las reses sacrificadas tienen una temperatura de 37.8 °C (100 "F) a 40 °C (104 °F) y por lo general, se enfrían hasta 4.4 °C (40 °F). La leche recién ordeñada debe enfriarse con rapidez a temperaturas cercanas a las de congelación. Algunos filetes de pescado se mantienen en la empacadora de 7.2 °C (45 °F) hasta 10 °C (50 °F) y se enfrían a temperaturas cercanas a 0 °C.

Estas velocidades de enfriamiento siguen las leyes de la conducción de calor de estado no estacionario que se analizaron en las secciones 5.1 a 5.4. El calor se elimina por convección en la superficie del material y por conducción de estado no estacionario, en el propio material. Para eliminar este calor se utiliza el fluido que rodea al alimento o material biológico, que en muchos casos es aire enfriado previamente por refrigeración de −1.1°C hasta +4.4°C, dependiendo del material y de otras condiciones. Los coeficientes convectivos de transferencia de calor que, por lo general, incluyen los efectos de radiación, pueden predecirse por los métodos estudiados en el capítulo 4, y para el aire, el coeficiente varía desde aproximadamente 8.5 hasta 40 $W/m^2 \cdot K$ (1.5 a 7 $btu/h \cdot pie^2 \cdot °F$) lo que depende en su mayor parte de la velocidad del aire.

En algunos casos, el fluido que se usa para enfriamiento es un líquido que fluye sobre la superficie y los valores de h varian desde más o menos 280 hasta 1700 $W/m^2 \cdot K$ (50 300 $btu/h \cdot pie^2 \cdot °F$). Además, en otros casos se usa un enfriador de contacto o de placa cuando el material está en contacto con placas frías. Entonces se supone por lo general que la temperatura de la superficie del material es igual o muy parecida a la de las placas de contacto. Los congeladores de contacto suelen emplearse para congelar materiales biológicos.

Cuando el alimento se empaca en cajas o cuando el material está recubierto con una película de plástico, es necesario considerar esta resistencia adicional. Uno de los métodos para esto consiste en sumar la resistencia del empaque que lo cubre a la de la película convectiva:

$$R_T = R_P + R_C \tag{5.5-1}$$

donde R_P es la resistencia del empaque, R_C es la resistencia de la película convectiva exterior, y R_T es la resistencia total. Entonces, para cada resistencia,

$$R_c = \frac{1}{h_c A} \tag{5.5-2}$$

$$R_P = \frac{\Delta x}{kA} \tag{5.5-3}$$

$$R_T = \frac{1}{hA} \tag{5.5-4}$$

donde h_c es el coeficiente convectivo del gas o del líquido, A es el área, Δx es el espesor del empaque, k es la conductividad térmica del empaque, y h es el coeficiente general. El coeficiente general h corresponde al que se usa en las gráficas de estado no estacionario. Este valor supone una capacidad calorífica despreciable del empaque, como suele ser el caso. Además, también supone que el empaque está muy ajustado y en contacto con el material alimenticio, de tal manera que no haya resistencia adicional entre el empaque y el alimento.

Las principales fuentes de error en el uso de las gráficas de estado no estacionario son los datos inadecuados de densidad, capacidad calorífica y conductividad térmica de los alimentos, más la predicción del coeficiente convectivo. Los materiales alimenticios son sustancias anisotrópicas irregulares y suele ser difícil evaluar sus propiedades físicas. Además, si se evapora agua durante el enfriamiento, las pérdidas de calor latente pueden afectar la exactitud de los resultados.

EJEMPLO 5.5-l. Enfriamiento de cortes de carne de res

Hodgson (H2), proporciona las siguientes propiedades físicas para el enfriamiento de reses en canal: $\rho = 1073\ \text{kg/m}^3$, $c_p = 3.48\ \text{kJ/kg} \cdot \text{K}$ y $k = 0.498\ \text{W/m} \cdot \text{K}$. Se desea enfriar un corte grande de 0.203 m de espesor, que esta inicialmente a temperatura uniforme de 37.8 °C, de tal manera que la temperatura del centro sea 10 °C. Se usa aire de enfriamiento a 1.7 °C (temperatura que se supone constante) y cuyo valor de $h = 39.7\ \text{W/m}^2 \cdot \text{K}$. Calcule el tiempo necesario.

Solución: La difusividad térmica α es

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p} = \frac{0.498}{(1073)(3.48 \times 1000)} = 1.334 \times 10^{-7}\ \text{m}^2/\text{s}$$

Entonces, para la mitad del espesor de la pieza, x_1

$$x_1 = \frac{0.203}{2} = 0.1015\ \text{m}$$

Para el centro de la pieza,

$$n = \frac{x}{x_1} = \frac{0}{x_1} = 0$$

Además,

$$m = \frac{k}{hx_1} = \frac{0.498}{(39.7)(0.1015)} = 0.123$$

$$T_1 = 1.7\ ^\circ\text{C} + 273.2 = 274.9\ \text{K} \qquad T_0 = 37.8 + 273.2 = 311.0\ \text{K}$$

$$T = 10 + 273.2 = 283.2\ \text{K}$$

$$Y = \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} = \frac{274.9 - 283.2}{274.9 - 311.0} = 0230$$

Si se utiliza la figura 5.3-6 para el centro de una pieza plana grande,

$$X = 0.90 = \frac{\alpha t}{x_1^2} = \frac{(1.334 \times 10^{-7})(t)}{(0.1015)^2}$$

Al despejar, $t = 6.95 \times 10^4$ s (19.3 h).

5.5C Congelación de alimentos y de materiales biológicos

1. Introducción. En la congelación de alimentos y otros materiales biológicos, primero se verifica la eliminación del calor sensible por enfriamiento, para después eliminar el calor latente de congelación. El calor latente de congelación del agua, que es de 335 kJ/kg (144 btu/lb_m), es una porción considerable del total del calor que se elimina durante la congelación. Pueden haber otros efectos ligeros, como los calores de disolución de las sales, etc., pero casi siempre son pequeños. En realidad, cuando se congelan materiales como las carnes a -29 °C, únicamente se transforma en hielo más o menos el 90% del agua, y el resto queda como agua combinada (B1).

Riedel (R1) ha construido gráficas de entalpía-temperatura-composición para la congelación de muchos alimentos. Estas curvas muestran que la congelación no se verifica a una temperatura precisa, sino que ocurre en un intervalo de varios grados. Como consecuencia, no hay un punto de congelación definido con un solo calor latente de congelación.

Puesto que en el proceso de congelación estado no estacionario hay un calor latente de congelación, las ecuaciones normales de conducción para estado no estacionario, así como las gráficas que se incluyen en este capítulo, no pueden usarse para predecir el tiempo de congelación. La resolución analítica completa de la velocidad de congelación de alimentos y de materiales biológicos resulta muy díficil debido a la variación de las propiedades físicas con la temperatura, la variación del grado de congelación con respecto a la temperatura y otros factores. Por lo general, se aplica la solución aproximada de Plank.

2. Solución aproximada de Plankpara la congelación. Plank (P2) dedujo una solución aproximada para el tiempo de congelación, que suele ser suficiente para los propósitos de ingeniería. Las suposiciones implicadas en la deducción son las siguientes. Al principio, todo el material está a la temperatura de congelación, pero sin congelarse. La conductividad térmica de la pieza congelada es constante. Todo el material se congela al punto de congelación, con un calor latente constante. La transferencia de ‘calor por conducción en la capa congelada se verifica con lentitud, de tal manera que procede en condiciones de estado seudoestacionario.

En la figura 5.5-l se muestra el enfriamiento por convección de una pieza de espesor *a* m. En un instante dado *t* s, se ha formado un espesor de x m de capa congelada en ambos lados. La temperatura del medio ambiente es constante y equivale a T_1 K y la temperatura de congelación, T_f, también es constante. Existe en el centro una capa sin congelar a T_f.

El calor que sale en el tiempo *t* es *q* W. Puesto que se trata de un estado seudoestacionario, el calor que sale por convección hacia el exterior en el tiempo *t* es

$$q = hA(T_S - T_1) \qquad (5.5\text{-}5)$$

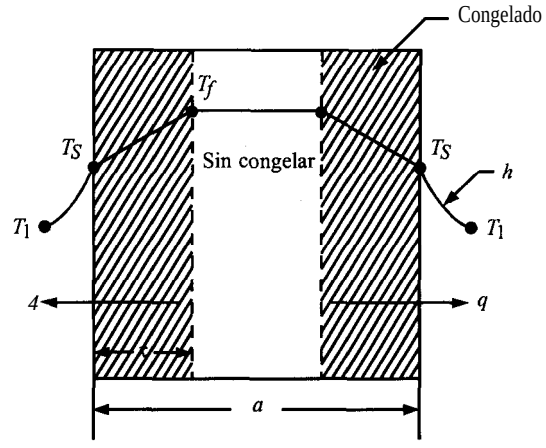


FIGURA 5.5-1. *Per-l de temperaturas durante la congelación.*

donde A es el área superficial. Además, el calor que está siendo conducido a través de la capa congelada de espesor x, en un proceso en estado estacionario, es

$$q = \frac{kA}{x}(T_f - T_S) \tag{5.5-6}$$

donde k es la conductividad térmica del material congelado. En un tiempo dado dt s, se congelará una capa de espesor dx. Entonces, multiplicando A por dx y por ρ, se obtienen los kilogramos masa congelados. Multiplicando esto por el calor latente λ en J/kg y dividiendo entre dt,

$$q = \frac{A\,dx\,\rho\lambda}{dt} = A\rho\lambda\frac{dx}{dt} \tag{5.5-7}$$

donde ρ es la densidad del material sin congelar.

A continuación, para eliminar T_S de las ecuaciones (5.5-5) y (5.5-6), se resuelve la ecuación (5.5-5) en términos de T_S y se sustituye en la ecuación (5.5-6), obteniéndose,

$$q = \frac{(T_f - T_1)A}{x/k + 1/h} \tag{5.5-8}$$

Al igualar las ecuaciones (5.5-8) y (5.5-7),

$$\frac{(T_f - T_1)A}{x/k + 1/h} = A\rho\lambda\frac{dx}{dt} \tag{5.5-9}$$

Al reordenar e integrar desde $t = 0$ y x = 0, hasta $t = t$ y x = $a/2$,

$$(T_f - T_1)\int_0^t dt = \lambda\rho\int_0^{a/2}\left(\frac{x}{k} + \frac{1}{h}\right)dx \tag{5.5-10}$$

Integrando y despejando t,

$$t = \frac{\lambda\rho}{T_f - T_1}\left(\frac{a}{2h} + \frac{a^2}{8k}\right) \tag{5.5-11}$$

Generalizando la ecuación para otras formas geométricas,

$$t = \frac{\lambda\rho}{T_f - T_1}\left(\frac{Pa}{h} + \frac{Ra^2}{k}\right) \tag{5.5-12}$$

donde a es el espesor de una placa infinita (como en la Fig. 5.5-1), el diámetro de una esfera, el diámetro de un cilindro largo o la dimensión más pequeña de un bloque o ladrillo rectangular. Además,

$P = \frac{1}{2}$ para una placa infinita, $\frac{1}{6}$ para una esfera, $\frac{1}{4}$ para un cilindro infinito

$R = \frac{1}{8}$ para una placa infinita, $\frac{1}{24}$ para una esfera, $\frac{1}{16}$ para un cilindro infinito

Para un ladrillo rectangular con dimensiones a por $\beta_1 a$ por $\beta_2 a$, donde a es el lado más corto, Ede (B 1) preparó una gráfica para determinar los valores de P y R que deben intervenir en el cálculo de t en la ecuación (5.5-12). La ecuación (5.5-11) también puede usarse para determinar tiempos de descongelación, reemplazando el valor k del material congelado por el valor k del material descongelado.

EJEMPLO 5.5-2. Congelación de carne

Se desea congelar cortes de carne de 0.0635 m de espesor en un congelador que opera con una corriente de aire a 244.3 K (-28.9 "C). La carne está inicialmente a la temperatura de congelación de 270.4 K (-2.8 "C). La carne contiene 75% de humedad. El coeficiente de transferencia de calor es h = 17.0 W/m^2 . K. Las propiedades físicas son p = 1057 kg/m^3 para la carne sin congelar, y k= 1.038 W/m . K (0.60 btu/h . pie . "F) para el producto congelado. Calcule el tiempo de congelación.

Solución: Puesto que el calor latente de fusión del agua a punto de congelación es 335 kJ/kg (144 btu/lb$_m$), para una carne con 75% de agua,

$$\lambda = 0.75(335) = 251.2 \text{ kJ/kg}$$

Las otras variables son a = 0.0635 m, T_f = 270.4 K, T_1 = 244.3 K, ρ = 1057 kg/m^3, h = 17.0 W/m^2 . K, k = 1.038 W/m . K. Sustituyendo en la ecuación (5.5-11),

$$t = \frac{\lambda\rho}{T_f - T_1}\left(\frac{a}{2h} + \frac{a^2}{8k}\right) = \frac{(2.512 \times 10^5)1057}{270.4 - 244.3}\left[\frac{0.0635}{2(17.0)} + \frac{(0.0635)^2}{8(1.038)}\right]$$

$$= 2.395 \times 10^4 \text{ s (6.65 h)}$$

3. Otros métodos para calcular tiempos de congelación. Neumann (Cl, C2) dedujo una ecuación bastante complicada para la congelación de cortes planos, la cual se basa en las siguientes suposiciones: la temperatura superficial es igual a la ambiente, esto es, no hay resistencia en la superficie, y la temperatura de congelación es constante. Este método tiene el inconveniente de que no es posible usar un coeficiente de convección en la superficie, pues supone que no hay resistencia superficial. No obstante, el procedimiento sí incluye el efecto del enfriamiento desde la temperatura original, que puede ser superior a la de congelación.

La ecuación de Plank no toma en cuenta la temperatura original, que puede estar por encima del punto de congelación. El método aproximado para calcular el tiempo adicional necesario para enfriar desde la temperatura T_0 hasta el punto de congelación T_f es éste: por medio de las gráficas de estado no estacionario se calcula el tiempo para que la temperatura promedio del material llegue hasta T_f, suponiendo que no se presenta congelación, y usando las propiedades físicas del material sin congelar. Si no hay resistencia superficial, puede aplicarse directamente la figura 5.3- 13 para esta determinación. Cuando hay una resistencia presente, será necesario obtener la temperatura en diferentes puntos del material, con base en las gráficas de estado estacionario y a la temperatura promedio calculada a partir de estas temperaturas puntuales. Este proceso puede ser un método parcial de aproximaciones sucesivas puesto que se desconoce el tiempo, cuya suposición es necesaria. Si la temperatura promedio que se calcula no corresponde al punto de congelación, se supone otro tiempo para reiniciar el cálculo. Este procedimiento es aproximado, puesto que en la realidad parte del material se congela.

5.6 ECUACIÓN DIFERENCIAL DE CAMBIO DE ENERGÍA

5.6A Introducción

En las secciones 3.6 y 3.7 se dedujo una ecuación diferencial de continuidad y otra diferencial de transferencia de momento lineal para un fluido puro. La necesidad de obtener estas ecuaciones se originó en el hecho de que los balances totales de masa, energía y momento lineal con respecto a un volumen finito, que se desarrollaron en la primera parte del capítulo 2, no indicaban lo que sucedía en el interior del volumen de control. Cuando se efectuaron los balances totales, se hizo otro más para cada nuevo sistema estudiado. Sin embargo, casi siempre es más fácil empezar con las ecuaciones diferenciales de continuidad y de transferencia de momento lineal en su forma general, para después simplificarlas y descartar los términos innecesarios para cada problema específico.

En el capítulo 4, de transferencia del calor en estado estacionario, yen el capítulo 5, de transferencia de calor en estado estacionario, se llevaron a cabo distintos balances totales de energía con respecto a un volumen de control finito en cada nueva situación. Para continuar el estudio de la transferencia de calor o de energía en sistemas con flujo o sin flujo, debemos usar un volumen diferencial para investigar con mayor detalle lo que sucede dentro de dicho volumen. El balance se llevará a cabo con respecto a una sola fase y se usará para la integración las condiciones límite en los linderos de la fase.

En esta sección deduciremos una ecuación diferencial general para el cambio de energía: la ecuación de conservación de la energía. Después, esta ecuación se modificará para algunos casos especiales bastante frecuentes. Finalmente, se estudiarán las aplicaciones y los usos de esta ecuación. Se analizaran también varios casos de transferencia de energía tanto en estado estacionario como con estado no estacionario usando la ecuación de conservación de la energía, que es una fórmula general válida para condiciones de estado estacionario y no estacionario.

5.6B Deducción de la ecuación diferencial de cambio de energía

Como en el caso de la deducción de la ecuación diferencial para la transferencia de momento lineal, se hace un balance con respecto a un elemento de volumen de dimensiones Δx, Ay y Az, que es

estacionario. Entonces se aplica la ley de conservación de la energía (que es en realidad, la primera ley de la termodinámica) para el fluido en este elemento de volumen en cualquier tiempo. La siguiente igualdad es semejante a la ecuación (2.7-7) para un volumen de control que se estudió en la sección 2.7.

$$\begin{pmatrix}\text{velocidad de entrada}\\ \text{de energía}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{velocidad de salida}\\ \text{de energía}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{tasa de trabajo externo}\\ \text{efectuado por el sistema sobre}\\ \text{los alrededores}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{velocidad de acumulación}\\ \text{de energía}\end{pmatrix} \quad (5.6\text{-}1)$$

Como en el caso de la transferencia de momento lineal, la transferencia de energía dentro y fuera del elemento de volumen se efectúa por convección y por transporte molecular o conducción. Hay dos clases de energía que se transfieren. La primera es la energía interna U en J/kg (btu/lb$_m$) o cualquier otro conjunto de unidades. Esta es la energía asociada con los movimientos desordenados de traslación e internos de las moléculas, más las interacciones moleculares. La segunda es la energía cinética $\rho v^2/2$, que es la energía asociada con el movimiento general del fluido, donde ves la velocidad local del fluido, m/s(pie/s). Por consiguiente, la energía total por unidad de volumen es $(\rho U + \rho v^2/2)$. La velocidad de acumulación de energía en el elemento de volumen en m^3 (pie^3) es entonces,

$$\Delta x\, \Delta y\, \Delta z \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho U + \frac{\rho v^2}{2}\right) \quad (5.6\text{-}2)$$

La energía total que entra por convección en la dirección x en x menos la que sale en $x + \Delta x$ es

$$A\ Y\ \Delta z\left[v_x\left(\rho U + \frac{\rho v^2}{2}\right)\right]_x - \Delta y\, \Delta z\left[v_x\left(\rho U + \frac{\rho v^2}{2}\right)\right]_{x+\Delta x} \quad (5.6\text{-}3)$$

Pueden escribirse ecuaciones similares para las direcciones y y z usando las velocidades v_y y v_z, respectivamente.

La velocidad neta de entrada de energía al elemento por conducción en la dirección x es

$$A_Y\, AZ\, [(q_x)_x - (q_x)_{x+\Delta x}] \quad (5.6\text{-}4)$$

Las ecuaciones para las direcciones y y z son similares a ésta, y q_x, q_y y q_z son los componentes del vector de flujo específico de calor q, expresado en W/m^2 (btu/s . pie^2) o cualquier otro sistema de unidades conveniente.

El trabajo neto efectuado por el sistema sobre sus alrededores es la suma de las tres siguientes partes de la dirección x. Para el trabajo neto sobre la fuerza gravitatoria,

$$-\rho\, \Delta x\, A\, Y\ \Delta z(v_x\, g_x) \quad (5.6\text{-}5)$$

donde g_x es la fuerza gravitatoria. El trabajo neto efectuado sobre la presión estática p es

$$A_Y\, \Delta z[(pv_x)_{x+\Delta x} - (pv_x)_x] \quad (5.6\text{-}6)$$

donde p se da en N/m^2 (lb_f/pie^2) o cualquier otro sistema conveniente de unidades. Para el trabajo neto con respecto a las fuerzas viscosas,

$$(\Delta y\ \Delta z)\ [(\tau_{xx} v_x + \tau_{xy} v_y + \tau_{xz} v_z)_x + \Delta x - (\tau_{xx} v_x + \tau_{xy} v_y + \tau_{xz} v_z)_x] \tag{5.6-7}$$

Estas fuerzas viscosas se analizan con más detalle en la sección (3.7).

Escribiendo ecuaciones similares a las de la (5.6-3) hasta la (5.6-7) en las tres direcciones; sustituyendo éstas y la ecuación (5.6-2) en la (5.6-l); dividiendo entre Ax, Δy y Az; y haciendo que Δx, Ay y Δz tiendan a cero, se obtiene,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho U + \frac{\rho v^2}{2}\right) = -\left[\frac{\partial}{\partial x} v_x\ \rho\left(U + \frac{\rho v^2}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial y} \rho\left(U + \frac{\rho v^2}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial z} v_z\ \rho\left(U + \frac{\rho v^2}{2}\right)\right]$$

$$-\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) + \rho\left(v_x g_x + v_y g_y + v_z g_z\right)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z)\right]$$

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\tau_{xx} v_x + \tau_{xy} v_y + \tau_{xz} v_z\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\tau_{yx} v_x + \tau_{yy} v_y + \tau_{yz} v_z\right)\right]$$

$$+\left[+\frac{\partial}{\partial z}\left(\tau_{zx} v_x + \tau_{zy} v_y + \tau_{zz} v_z\right)\right] \tag{5.6-8}$$

Para mayores detalles de esta deducción, véase la referencia (B2).

La ecuación (5.6-S) es la expresión final para el cambio de energía con respecto a un punto estacionario. Sin embargo, no es la versión más conveniente. Primero, se combina la ecuación (5.6-8) con la expresión de continuidad, ecuación (3.6-23), con la expresión de movimiento, ecuación (3.6-13), y la energía interna se expresa en términos de la temperatura Tdel fluido y de la capacidad calorífica. Entonces, escribiendo la ecuación resultante para un fluido newtoniano con una conductividad térmica k, se obtiene

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = k\nabla^2 T - T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mu\phi \tag{5.6-9}$$

Esta ecuación utiliza la segunda ley de Fourier en tres direcciones, donde

$$k\nabla^2 T = k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) \tag{5.6-l 0}$$

El término de disipación viscosa $\mu\phi$ suele ser despreciable excepto cuando existen gradientes de velocidad muy grandes. En las discusiones que se estudian a continuación se omitirá dicho término. La ecuación (5.6-9) es válida para el cambio de energía de un fluido newtoniano con k constante, en términos de la temperatura T_c del fluido.

5.6C Casos especiales de la ecuación de cambio de energía

Las siguientes formas especiales de la ecuación (5.6-9) para un fluido newtoniano con conductividad térmica constante son bastante comunes. Primero, la ecuación (5.6-9) puede escribirse con coordenadas rectangulares sin el término $\mu\phi$,

$$\rho c_v\left(\frac{\partial T}{\partial t}+v_x\frac{\partial T}{\partial x}+v_y\frac{\partial T}{\partial y}+v_z\frac{\partial T}{\partial z}\right) = k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)-T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) \qquad (5.6\text{-}11)$$

1. Fluido a presión constante. Las siguientes ecuaciones son aplicables a fluidos de densidad constante, así como para presión constante:

$$\rho c_p\frac{DT}{Dt}=k\nabla^2 t \qquad (5.6\text{-}12)$$

En coordenadas rectangulares,

$$\rho c_p\left(\frac{\partial T}{\partial t}+v_x\frac{\partial T}{\partial x}+v_y\frac{\partial T}{\partial y}+v_z\frac{\partial T}{\partial z}\right)=k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) \qquad (5.6\text{-}13)$$

En coordenadas cilíndricas,

$$\rho c_p\left(\frac{\partial T}{\partial t}+v_r\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta}+v_z\frac{\partial T}{\partial z}\right)=k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) \qquad (5.6\text{-}14)$$

En coordenadas esféricas,

$$\rho c_p\left(\frac{\partial T}{\partial t}+v_r\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta}+\frac{v_\phi}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial T}{\partial \phi}\right) = k\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial T}{\partial \theta}\right)+\frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2}\right] \qquad \textbf{(5.6-15)}$$

Véase en la sección 3.6 la definicion de coordenadas cilíndricas y esféricas. Si la velocidad v es cero, *DT/Dt se* convierte en *∂T/∂t.*

2. Fluido de densidad constante

$$\rho c_p\frac{DT}{Dt}=k\nabla^2 T \qquad (5.6\text{-}16)$$

Nótese que esta expresión es idéntica a la ecuación (5.6-12) para presión constante.

3. *Sólido.* En este caso se considera ρ como constante, y v = 0:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k\nabla^2 T \tag{5.6-17}$$

Esta expresión suele llamar se segunda ley *de Fourier* para conducción de calor. También es válida para un fluido con velocidad cero a presión constante.

4. *Generación de calor.* Cuando hay generación de calor en el fluido por medios eléctricos o químicos, al lado derecho de la ecuación (5.6-K') se suma el término $\dot{q}$

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k\nabla^2 T + \dot{q} \tag{5.6-18}$$

donde $\dot{q}$ es la cantidad de generación de calor en W/m^3 (btu/h . pie^3) u otras unidades adecuadas. La disipación viscosa también es una fuente de calor, pero su inclusión complica demasiado la resolución del problema, pues se hace necesario acoplar las ecuaciones de energía y movimiento.

5. Otros sistemas de coordenadas. La segunda ley de Fourier para conducción de calor en estado no estacionario puede escribirse como sigue. Para coordenadas rectangulares,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c_p}\nabla^2 T = \alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) \tag{5.6-19}$$

donde a es $k/\rho c_p$ y es la difusividad térmica en m^2/s (pie^2/h).
En coordenadas cilindricas,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) \tag{5.6-20}$$

En coordenadas esféricas,

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \alpha\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\,\text{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\text{sen}\,\theta\frac{\partial T}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\,\text{sen}^2\,\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2}\right] \tag{5.6-21}$$

5.6D Usos de la ecuación de cambios de energía

En la sección 3.8 se aplicaron las ecuaciones diferenciales de continuidad y movimiento para resolver problemas de flujo de fluidos. Esto se hizo descartando los términos iguales a cero o cercanos a dicho valor, y usando las ecuaciones remanentes para determinar las distribuciones de velocidad y presión. Este procedimiento sustituyó al de escribir nuevos balances de momento lineal y de masa para cada nueva situación. De manera similar, para resolver problemas de transferencia de calor se aplicarán las ecuaciones diferenciales de continuidad, movimiento y energía, descartando los términos innecesarios. Varios ejemplos servirán para ilustrar los métodos generales empleados.

EJEMPLO 5.6-I. Perfil de temperaturas con generación de calor

Un cilindro sólido en el cual hay una generación de calor uniforme de $\dot{q}$ W/m^3 está aislado en sus extremos. La temperatura de la superficie del cilindro se mantiene constante, a T_w

K. El radio del cilindro mide $r = R$ m. El calor sólo fluye en sentido radial. Deduzca la ecuación para el perfil de temperaturas de estado estacionario cuando el sólido tiene una conductividad térmica constante.

Solución: Se usará la ecuación (5.6-20) en coordenadas cilíndricas. Además, al lado derecho de la ecuación se añadirá el término $q/\rho c_p$ de generación, con lo cual se obtiene,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c_p}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + \frac{\dot{q}}{\rho c_p} \qquad \textbf{(5.6-22)}$$

Para estado estacionario, $\partial T/\partial t = 0$. Además, cuando sólo hay conducción en sentido radial, $\partial^2 T/\partial z^2 = 0$ y $\partial^2 T/\partial \theta^2 = 0$. Esto produce la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{q}}{k} \qquad \textbf{(5.6-23)}$$

Esta expresión puede reescribirse como

$$r\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{q}r}{k} \qquad \textbf{(5.6-24)}$$

Nótese que la ecuación (5.6-24) puede reescribirse como sigue:

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = -\frac{\dot{q}r}{k} \qquad \textbf{(5.6-25)}$$

Integrando una vez la ecuación (5.6-25)

$$r\frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{q}r^2}{2k} + K_1 \qquad \textbf{(5.6-26)}$$

donde K_1 es una constante. Al integrar otra vez,

$$T = -\frac{\dot{q}r^2}{4k} + K_1 \ln r + K_2 \qquad \textbf{(5.6-27)}$$

donde K_2 es una constante. Las condiciones límite prevalecen cuando $r = 0$, $dT/dr = 0$ (por simetría); y cuando $r = R$, $T = T_w$. La ecuación final es

$$T = \frac{\dot{q}\left(R^2 - r^2\right)}{4k} + T_w \qquad \textbf{(5.6-28)}$$

Esta fórmula es igual a la ecuación (4.3-29), que se obtuvo antes por medio de otro método.

EJEMPLO 5.6-2. Flujo laminar y transferencia de calor usando la ecuación de cambio de energía

Mediante la ecuación diferencial de cambio de energía, deduzca la ecuación diferencial parcial y las condiciones límite necesarias para el caso del flujo laminar en un fluido de

densidad constante en un tubo horizontal calentado. El fluido tiene velocidad constante v_z. En la pared de la tubería, donde el radio es $r = r_0$, el flujo específico de calor es constante y corresponde a q_0. El proceso es estado estacionario y se supone que en z = 0, la entrada, se establece el perfil de velocidades. Se supondrán también propiedades físicas constantes.

Solución: Con base en el ejemplo 3.8-3, la ecuación de continuidad da $\partial v_z/\partial_z = 0$. La resolución de la ecuación de movimiento en estado estacionario coordenadas cilíndricas proporciona el perfil parabólico de velocidades:

$$v_z = v_{z\,\text{máx}}\left[1-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right] \tag{5.6-29}$$

Puesto que el fluido tiene densidad constante, se usa la ecuación (5.6-14) con coordenadas cilíndricas como ecuación de cambio de energía. Para este caso, $v_r = 0$ y $v_\theta = 0$. Como hay simetría, $\partial T/\partial\theta$ y $\partial^2 T/\partial\theta^2$ valdrán cero. En estado estacionario, $\partial T/\partial t = 0$. Por lo anterior, la ecuación (5.6-14) se simplifica a

$$v_z\,\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{k}{\rho c_p}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) \tag{5.6-30}$$

Por lo general, la conducción en dirección z (el término $\partial^2 T/\partial z^2$) es pequeña en comparación con el término convectivo $v_z\partial T/\partial z$ y puede omitirse. Finalmente, sustituyendo la ecuación (5.6-29) en la (5.6-30) se obtiene

$$v_{z\,\text{máx}}\left[1-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right]\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{k}{\rho c_p}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right) \tag{5.6-31}$$

Las condiciones límite son

Cuando z = 0,	$T = T_0$	(todas las r)
Cuando r = 0,	T = finito	
Cuando $r = r_0$,	$q_0 = -k\dfrac{\partial T}{\partial r}$	(constante)

Los detalles de la solución real de esta ecuación pueden verse en las referencias de Siegel y colaboradores (S2).

5.7 FLUJO DE CAPA LÍMITE Y TURBULENCIA EN LA TRANSFERENCIA DE CALOR

5.7A Flujo laminar y teoría de la capa límite en la transferencia de calor

En la sección 3.10C se obtuvo una solución exacta para el perfil de velocidades de un flujo laminar isotérmico que pasaba por una placa plana. La solución de Blasius puede ampliarse para incluir

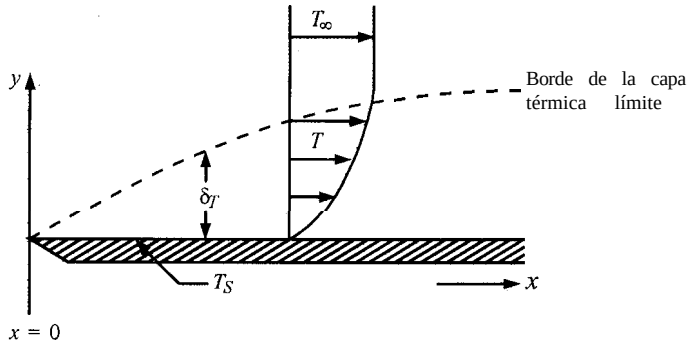


FIGURA 5.7-I *Flujo laminar de un fluido sobre una placa plana y capo térmica límite*

problemas de transferencia convectiva de calor para la misma geometría con flujo laminar. En la figura 5.7-l se muestra la capa térmica límite. La temperatura del fluido que se aproxima a la placa es T_∞ y la de la placa es T_S en la superficie.

Empezaremos escribiendo el balance diferencial de energía, ecuación (5.6-13)

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{k}{\rho c_p}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) \tag{5.7-l}$$

Si el flujo procede en las direcciones x y y, $v_z = 0$. En estado estacionario, $\partial T/\partial t = 0$. La conducción en las direcciones x yz se desprecia, por lo que $\partial^2 T/\partial x^2 = \partial^2 T/\partial z^2 = 0$, de donde la conducción se verifica en la dirección y. El resultado es

$$v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{k}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{5.7-2}$$

La ecuación simplificada de balance de momento lineal que se usó para deducir la velocidad en la capa límite es muy similar, y corresponde a

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \tag{3.10-S}$$

La ecuación de continuidad que se usó con anterioridad es

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \tag{3.10-3}$$

Blasius empleó las ecuaciones (3.10-5) y (3.10-3) para resolver el caso del flujo laminar de capa límite. Las condiciones límite fueron

$$\begin{aligned} &\frac{v_x}{v_\infty} = \frac{v_y}{v_\infty} = 0 && \text{cuando y = 0} \\ &\frac{v_x}{v_\infty} = 1 && \text{cuando y = } \infty \end{aligned} \tag{5.7-3}$$

$$\frac{v_x}{v_\infty} = 1 \qquad \text{cuando } x = 0$$

La semejanza entre las ecuaciones (3.10-5) y (5.7-2) resulta notoria. Por consiguiente, la solución de Blasius puede aplicarse cuando $k/\rho c_p = \mu/\rho$. Esto significa que el número de Prandtl $c_p\mu/k = 1$. Además, las condiciones límite deben ser las mismas. Esto se logra al remplazar la temperatura Tde la ecuación (5.7-2) por la variable adimensional (T- T_S)/($T_\infty - T_S$). Las condiciones límite son ahora

$$\frac{v_x}{v_\infty} = \frac{v_y}{v_\infty} = \frac{T - T_S}{T_\infty - T_S} = 0 \qquad \text{cuando } y = 0$$

$$\frac{v_x}{v_\infty} = \frac{T - T_S}{T_\infty - T_S} = 1 \qquad \text{cuando y} = \infty \qquad \textbf{(5.7-4)}$$

$$\frac{v_x}{v_\infty} = \frac{T - T_S}{T_\infty - T_S} = 1 \qquad \text{cuando x} = 0$$

Obsérvese que las ecuaciones y las condiciones límite son idénticas para los perfiles de temperatura y para el de velocidades. Por consiguiente, para cualquier punto x, y en el sistema de flujo, las variables adimensionales de la velocidad v_x/v_∞ y $(T - T_S)/(T_{\infty\infty} - T_S)$ son iguales. La solución del perfil de velocidades es la misma que para el perfil de temperaturas.

Esto significa que las transferencias de momento lineal y de calor son análogas y que el espesor δ de la capa límite para el perfil de velocidades (capa límite hidrodinámica) y el espesor δ_T para la capa térmica límite, son iguales, Esto es un hecho muy importante para los gases, en los cuales el número de Prandtl se acerca a 1.

Combinando las ecuaciones (3.10-7) y (3.10-8), el gradiente de velocidad en la superficie es

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0} = 0.332 \frac{v_\infty}{x} N_{\text{Re},x}^{1/2} \qquad \textbf{(5.7-5)}$$

donde $N_{\text{Re},x} = xv_\infty\rho/\mu$. Además,

$$\frac{v_x}{v_\infty} = \frac{T - T_S}{T_\infty - T_S} \qquad \textbf{(5.7-6)}$$

Combinando las ecuaciones (5.7-5) y (5.7-6)

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = (T_\infty - T_S)\left(\frac{0332}{x} - N_{\text{Re},x}^{1/2}\right) \qquad \textbf{(5.7-7)}$$

Esta ecuación convectiva puede relacionarse con la ecuación de Fourier como sigue, donde q_y está en J/s o W (btu/h).

$$\frac{q_y}{A}v = h_x(T_\infty - T_S) = -k\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} \qquad \textbf{(5.7-8)}$$

Combinando las ecuaciones (5.7-7) y (5.7-8),

$$\frac{h_x x}{k} = N_{\text{Nu},x} = 0.332 N_{\text{Re},x}^{1/2} \qquad \textbf{(5.7-9)}$$

donde $N_{\text{Nu},x}$ es el número adimensional de Nusselt y h_x es el coeficiente local de transferencia de calor en el punto x de la placa.

Pohlhausen (K1) ha demostrado que la relación entre las capas límite hidrodinámica y térmica para fluidos con un número de Prandtl > 0.6 es, aproximadamente,

$$\frac{\delta}{\delta_T} = N_{\mathrm{Pr}}^{1/3} \tag{5.7-10}$$

Como resultado, la ecuación para el coeficiente local de transferencia de calor es

$$h_x = 0.332\ \frac{k}{x}\ N_{\mathrm{Re},x}^{1/2}\ N_{\mathrm{Pr}}^{1/} \tag{5.7-11}$$

Además,

$$\frac{h_x x}{k} = N_{\mathrm{Nu},x} = 0.332\ N_{\mathrm{Re},x}^{1/2}\ N_{\mathrm{Pr}}^{1/} \tag{5.7-12}$$

La ecuación para el coeficiente medio de transferencia de calor h de $x = 0$ hastax $= L$ para una placa de anchura b y área bL, es

$$h = \frac{b}{A}\int_0^L h_x\, dx$$

$$= \frac{1}{L} 0.332k \left(\frac{\rho v_\infty}{\mu}\right)^{1/2} N_{\mathrm{Pr}}^{1/3} \int_0^L \frac{dx}{\mathrm{x}^{1/2}} \tag{5.7-13}$$

Al integrar,

$$h = 0.644\ \frac{k}{L}\ N_{\mathrm{Re},L}^{1/2}\ N_{\mathrm{Pr}}^{1/} \tag{5.7-14}$$

$$\frac{hL}{k} = N_{\mathrm{Nu}} = 0.644\ N_{\mathrm{Re},L}^{1/2} N_{\mathrm{Pr}}^{1/3} \tag{5.7-15}$$

Como se mencionó antes, esta capa laminar límite sobre placas lisas es válida para números de Reynolds hasta aproximadamente 5×10^5. Por lo general, cuando se emplean los resultados que acabamos de obtener, las propiedades del fluido se evalúan a la temperatura de la película, $T_f = (T_S + T_\infty)/2$.

5.7B Análisis integral aproximado de la capa térmica límite

Como se estudió en el análisis de la capa hidrodinámica límite , la solución de Blasius, aunque precisa, tiene limitaciones. Este método no puede aplicarse para otros sistemas más complejos. En la sección 3.10 se estudió el análisis integral aproximado usado por Von Kármán para calcular la capa hidrodinámica límite. Este enfoque también puede emplearse para analizar la capa térmica límite.

La descripción general del método es la siguiente. Primero, se utiliza un volumen de control, como se señaló en la figura 3.10-5, para deducir la expresión integral final de la energía

$$\frac{k}{\rho c_p}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{d}{dx}\int_0^{\delta_T} v_x\left(T_\infty - T\right)dy \tag{5.7-16}$$

Esta ecuación es análoga a la ecuación (3.10-48) combinada con la ecuación (3.1 O-5 1) para el análisis de momento lineal,

$$\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y\,=\,0} = \frac{d}{dx}\int_0^{\delta} v_x\left(v_\infty - v_x\right)dy \tag{5.7-17}$$

La ecuación (5.7-16) puede resolverse cuando se conocen tanto el perfil de velocidad como el de temperatura. El perfil de velocidad supuesto aquí es el de la ecuación (3.10-50):

$$\frac{v_x}{v_\infty} = \frac{3}{2}\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 \qquad \textbf{(3.10-50)}$$

Para el perfil de temperatura se supone el mismo tipo de expresión:

$$\frac{T - T_S}{T_\infty - T_S} = \frac{3}{2}\frac{y}{\delta_T} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta_T}\right)^3 \qquad \textbf{(5.7-18)}$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.10-50) y (5.7-18) en la expresión integral y resolviendo,

$$N_{Nu,\,x} = \mathbf{0.36}\ N_{Re,x}^{1/2}\ N_{Pr}^{1/} \qquad \textbf{(5.7-19)}$$

Este resultado es sólo 8% mayor que el dato preciso de la ecuación (5.7-l 1), lo cual indica que este método integral aproximado puede usarse con confianza en los casos para los que no se pueda obtener una solución exacta.

De manera similar, el método de análisis integral de momento lineal que se usó para la capa hidrodinámica límite turbulenta en la sección 3.10, puede aplicarse a la capa térmica límite con flujo turbulento. Nuevamente, se usa la ley exponencial $\frac{1}{7}$ de Blasius para la distribución de temperaturas. Esta fórmula produce resultados bastante semejantes alas ecuaciones experimentales de la sección 4.6.

5.7C Longitud de mezcla de Prandtl y difusividad térmica de la turbulencia

1. Difusividad del momento lineal de la turbulencia en flujo turbulento. En la sección 3.10F, el esfuerzo de corte total $\tau_{yx}^{-\tau}$ para el flujo turbulento se escribió como sigue cuando se sumaron las contribuciones molecular y turbulenta:

$$\tau_{yx}^{-\tau} = -\rho\left(\frac{\mu}{\rho} + \varepsilon_1\right)\frac{d\bar{v}_x}{dy} \qquad \textbf{(5.7-20)}$$

La difusividad de momento lineal molecular μ/ρ en m^2/s únicamente está en función de las propiedades moleculares del fluido; sin embargo, la difusividad de momento lineal de la turbulencia ε_t depende del movimiento del fluido. En la ecuación (3.10-29) relacionamos ε_t con la longitud de mezcla de Prandtl L como se indica:

$$\varepsilon_t = L^2\left|\frac{d\bar{v}_x}{dy}\right| \qquad \textbf{(3.10-29)}$$

2. Longitud de mezcla de Prandtl y difusividad térmica de la turbulencia. Podemos deducir de la misma manera la difusividad térmica de la turbulencia α_t para la transferencia de calor turbulenta como sigue. Las turbulencias o remolinos de fluido son transportados una distancia L en la dirección y. En este punto L, la velocidad media del remolino de fluido difiere de la del fluido adyacente por la velocidad v_x', que es la componente fluctuante de la velocidad que se analizó en la sección 3.10F. La energía también es transportada una distancia L con una velocidad v_y' en la dirección y junto con la masa que se transporta. La temperatura instantánea del fluido es $T = T' + \bar{T}$, donde $\bar{T}$ es el valor medio y T' es la desviación del valor medio. Esta T' fluctuante es semejante a la velocidad v_x' fluctuante. La longitud de mezcla es bastante pequeña como para que la diferencia de temperatura pueda escribirse como

$$T' = L\frac{d\bar{T}}{dy} \qquad \textbf{(5.7-21)}$$

La proporción de energía transportada por área unitaria es q_y/A y es igual al flujo específico de masa en la dirección y multiplicada por la capacidad calorífica y por la diferencia de temperatura.

$$\frac{q_y}{A} = \frac{-v'_y \rho c_p L \, d\bar{T}}{dy} \tag{5.7-22}$$

En la sección 3.10F se supuso que $v'_x \cong v'_y$ y que

$$v'_x = v'_y = L\left|\frac{d\bar{v}_x}{dy}\right| \tag{5.7-23}$$

Al sustituir la ecuación (5.7-23) en la (5.7-22),

$$\frac{q_y}{A} = -\rho c_p L^2 \left|\frac{d\bar{v}_x}{d_y}\right| \frac{d\bar{T}}{dy} \tag{5.7-24}$$

El término $L^2|d\bar{v}_x/dy|$ de la ecuación (3.10-29) es la difusividad de momento lineal del remolino ε_t. Cuando este término se encuentra en la ecuación de transferencia de calor turbulenta (5.7-24), se denomina α_t, la difusividad térmica de la turbulencia. Entonces la ecuación (5.7-24) se transforma en

$$\frac{q_y}{A} = -\rho c_p \alpha_t \left|\frac{d\bar{T}}{d_y}\right| \tag{5.7-25}$$

Al combinarla con la ecuación de Fourier escrita en términos de la difusividad térmica molecular α,

$$\frac{q_y}{A} = -\rho c_p (\alpha + a_t) \frac{d\bar{T}}{dy} \tag{5.7-26}$$

3. Semejanzas entre el transporte de momento lineal, de calor y de masa. La ecuación (5.7-26) se parece a la ecuación (5.7-20) para el transporte de momento lineal total. En las deducciones se supuso que la difusividad térmica de la turbulencia α_t y la difusividad de momento lineal de la turbulencia ε_t eran iguales, pero los datos experimentales muestran que esta igualdad es sólo aproximada. Mediante el uso de la teoría de la longitud de mezcla de Prandtl, se ha definido de la misma manera la difusividad de masa de la turbulencia para la transferencia de masa, y se supone que es igual a α_t y ε_t.

PROBLEMAS

5.2-l. ***Respuesta a la temperatura en el enfriamiento de un alambre.*** Un alambre pequeño de cobre con diámetro de 0.792 mm que está inicialmente a 366.5 K, se sumerge repentinamente en un líquido a temperatura constante de 311 K. El coeficiente convectivo h = 85.2 W/m^2 . K. Puede suponerse que las propiedades físicas son constantes y son a $k = 374$ W/m . K, c_p = 0.389 kJ/kg · K, y ρ = 8890 kg/m^3.

a) Determine el tiempo en minutos para que la temperatura promedio del alambre se reduzca a 388.8 K (la mitad de la diferencia inicial de temperaturas).

b) Haga lo mismo para h = ll .36 W/m^2 . K.

c) Para el inciso b) calcule la cantidad total de calor extraído de un alambre de 1 .O m de largo.

Respuesta: a) t = 5.66 s

5.2-2. Enfriamiento rápido de perlas de plomo en un baño. Un lote de perlas de plomo con diámetro promedio de 5.1 mm está a una temperatura inicial de 204.4 "C. Para enfriar las perlas se introducen a un baño de aceite a 32.2 °C y las perlas caen al fondo del recipiente. El tiempo de caída dura 15 s. Suponiendo un coeficiente convectivo promedio de h = 199 W/ m^2 · K, ¿cuál será la temperatura de las perlas al llegar al fondo? Los datos para el plomo son p = 11370 kg/m^3 y c_p = 0.138 kJ/kg . K.

5.2-3. ***Calentamiento en estado no estacionario de un tanque en agitación.*** Un recipiente se llena con 0.0283 m^3 de agua que está inicialmente a 288.8 K. El recipiente, que tiene buena agitación, se introduce de manera repentina en un baño de vapor a 377.6 K. El coeficiente total de transferencia de calor U entre el vapor y el agua es 1136 W/m^2 . K y el área es 0.372 m^2. Despreciando la capacidad calorífica de las paredes y del agitador, calcule el tiempo (en horas) necesario para calentar el agua a 338.7 K. [Sugerencia: Puesto que el agua está bien agitada, su temperatura es uniforme. Demuestre la validez de la ecuación (5.2-3) empezando con la ecuación (5.2-l).]

5.3-l. ***Temperatura en un recubrimiento refractario.*** Una cámara de combustión tiene un recubrimiento refractario de 2 pulg de espesor para proteger la coraza exterior. Para predecir los esfuerzos térmicos en el encendido se necesita conocer la temperatura a 0.2 pulg por debajo de la superficie después de 1 min. Se dispone de los siguientes datos. Temperatura inicial T_0 =100 F, temperatura del gas caliente T_1 = 3000 °F, h = 40 btu/h · pie^2 · °F, k = *0.6* btu/ h . pie . °F y α = 0.020 pie^2/h. Calcule las temperaturas a profundidades de 0.2 pulg y 0.6 pulg. Use la figura 5.3-3 y justifique su uso comprobando que el recubrimiento actúa como un sólido semiinfinito durante este periodo de 1 min.

Respuesta: Para x = 0.2 pulg, $(T - T_0)/(T_1 - T_0)$ = 0.28 y T = 912 °F (489 "C).
Para x = 0.6 pulg, $(T - T_0)/(T_1 - T_0)$ = *0.02 y* T = 158 °F (70 "C)

5.3-2. Temperatura de congelación en el suelo. Durante un día de invierno, la temperatura promedio del suelo es de 277.6 K (40 "F) hasta una profundidad considerable. Si la temperatura del aire disminuye repentinamente a 255.4 K (0 "F) y se mantiene a ese nivel, ¿cuánto tiempo transcurrirá para que una tubería a 3.05 m (10 pies) por debajo de la superficie adquiera una temperatura de 273.2 K (32 "F)? El coeficiente convectivo es h = *8.52* W/m^2 . K (1.5 btu/h · pie^2 . "F). Las propiedades físicas del suelo son 5.16 × 10^{-7} m^2/s (0.02 pie^2/*h*) para la difusividad térmica y 1.384 W/m . K (0.8 btu/h pie . "F) para la conductividad térmica. (Nota: la solución debe obtenerse por aproximaciones sucesivas, puesto que el tiempo desconocido aparece dos veces en la gráfica de un sólido semiinfinito.)

5.3-3. Enfriamiento de una placa de aluminio. Una pieza grande de aluminio (que puede considerarse como un sólido semiinfínito) está inicialmente a una temperatura uniforme de 505.4 K. La superficie del metal se expone repentinamente a un ambiente a 338.8 K con coeficiente convectivo de superficie de 455 W/m^2 . K. Calcule el tiempo (en horas) necesario para que la temperatura alcance 388.8 K a profundidad de 25.4 mm. Las propiedades físicas promedio son α = 0.340 m^2/h y k = *208* W/m . K.

5.34. Calentamiento transitorio de una pared de concreto. Una pared de concreto de 0.305 m de espesor tiene su superficie posterior aislada. La pared que está a temperatura uniforme de 10 °C (283.2 K) se expone en su cara frontal a un gas a 843 °C (1116.2 K). El coeficiente convectivo es 28.4 W/m^2 . K, la difusividad térmica, 1.74 × 10^{-3} m^2/h y la conductividad térmica, 0.935 W/m . K.

a) Calcule el tiempo necesario para que la temperatura de la cara aislada llegue a 232 °C *(505.2* K).

b) Calcule la temperatura en un punto que está a 0.152 m por debajo de la superficie al mismo tiempo.

Respuesta: a) $\alpha t/x_1^2 = 0.25$, t = 13.4 h

5.3-5. Cocimiento de un corte de carne. Un corte plano de carne de 25.4 mm de espesor, originalmente a 10 °C, se va a cocinar por ambos lados hasta que el centro alcance una temperatura de 121 °C en un horno que está a 177 "C. Puede suponerse que el coeficiente convectivo es constante, 25.6 W/m² · K. Desprecie los cambios de calor latente y calcule el tiempo requerido. La conductividad térmica es 0.69 W/m² . K y la difusividad térmica, 5.85 × 10^{-4} m²/h. Use la gráfica de Heisler.

Respuesta: 0.80 h (2880 s)

5.3-6. Conducción en estado no estacionario en una pared de ladrillo. Una pared plana de ladrillo de 1.0 pie de espesor constituye el recubrimiento de uno de los lados de un horno. Si la pared está a temperatura uniforme de 100 °F y se expone repentinamente a un gas que está a 1100 °F, calcule el tiempo para que la pared del horno llegue a 500 °F en un punto situado a 0.5 pie de la superficie. La cara posterior de la pared está aislada. El coeficiente convectivo es **2.6** btu/h · pie² · °F y las propiedades físicas del ladrillo son k = 0.65 btu/h . pie . °F, y a = 0.02 pie² /h.

5.3-7. Enfriamiento de una varilla de acero. Una varilla de acero de 0.305 m de diámetro que está inicialmente a una temperatura de 588 K, se sumerge en un baño de aceite que se mantiene a 3 11 K. El coeficiente convectivo superficial es 125 W/m² · K. Calcule la temperatura en el centro de la varilla después de 1 h. Las propiedades físicas promedio del acero son k = *38* W/m · K y a = 0.0381 m²/h.

Respuesta: T = **391** K

5.3-8. Efecto de las dimensiones en elprocesamiento térmico de carnes. Se usa un autoclave que se mantiene a 121.1°C para procesar carne de salchichas de 101.6 mm de diámetro y 6.1 m de longitud, que están originalmente a 21.1 "C. Después de 2 h, la temperatura del centro es 98.9 "C. Si el diámetro se aumenta a 139.7 mm, ¿cuánto tiempo transcurrirá para que el centro alcance a una temperatura de 98.9 "C? El coeficiente de transferencia de calor a la superficie es h = ll OO W/m² · K, un valor muy elevado, por lo que se puede considerar que la resistencia superficial es despreciable. (Demuestre esto.) Desprecie la transferencia de calor en los dos extremos del cilindro. La conductividad térmica es k = *0.485* W/m . K.

Respuesta: 3.78 h

5.3-9. Temperatura de las naranjas en los árboles durante el invierno. En las zonas de cultivo de naranjas, el congelamiento de la fruta en los árboles durante las noches frías tiene gran importancia económica. Si las naranjas están inicialmente a temperatura de 2 1.1 °C (70 "F), calcule la temperatura del centro de la naranja cuando se expone al aire que está -3.9 °C (25 "F) durante 6 h. Las naranjas tienen 102 mm de diámetro y se estima que su coeficiente convectivo es 11.4 W/m² · K. La conductividad térmica es k = *0.431* W/m . K, y *a es* 4.65 × 10^{-4} m²/h. Desprecie los efectos del calor latente.

Respuesta: $(T_1 - T)/(T_1 - T_0)$ = **0.05,** T= *-2.65* °C

5.3-10. ***Endurecimiento de una esfera de acero.*** Para endurecer una esfera de acero que tiene un diámetro de 50.8 mm, se calienta a 1033 K y después se introduce en un baño de agua a 300 K. Determine el tiempo necesario para que el centro de la esfera llegue a 366.5 K. Puede suponerse que el coeficiente superficial es 710 W/m² · K, k = *45* W/m · K y a = *0.0325* m²/h.

53-11. ***Conducción en estado no estacionario en un cilindro corto.*** Un cilindro de aluminio se calienta al principio de manera que alcance a temperatura uniforme de 204.4 "C. Después se sumerge en un baño grande que se mantiene a 93.3 °C, donde h = 568 W/m² . K. El cilindro tiene diámetro de 50.8 mm y longitud de 101.6 mm. Calcule la temperatura del centro después de 60 s. Las propiedades físicas son **a = 9.44** × 10^{-5} m² /s y k = *207.7* W/m . K.

5.3-12. ***Conducción de tres dimensiones en un bloque rectangular.*** Un bloque rectangular de acero de 0.305 m y 0.457 m por 0.61 m inicialmente a 315.6 °C, se sumerge de repente en un ambiente a 93.3 "C. Determine la temperatura en el centro del bloque después de 1 h. El coeficiente convectivo superficial es 34 W/m^2 · K. Las propiedades físicas son k = 38 W/m . K y α = 0.0379 m^2/h.

5.4-l. ***Método numérico de Schmidtpara conducción de estado no estacionario.*** Un material que tiene la forma de una placa infinita de 0.762 m de espesor está a una temperatura inicial uniforme de 366.53 K. La cara posterior de la placa está aislada. La cara frontal se expone repentinamente a una temperatura de 533.2 K, suponiéndose que la resistencia convectiva en esta cara es cero. Calcule el perfil de temperaturas después de 0.875 h, usando el método numérico de Schmidt con M = 2 y placas de 0.1524 m de espesor. La difusividad térmica es 0.0929 m^2/h.

Respuesta: Δt = 0.125 h, se requieren siete incrementos de tiempo

5.4-2. Conducción en estado no estacionario con un perfil inicial de temperaturas no uniforme. Use las mismas condiciones del problema 5.4-1, pero con el siguiente cambio. El perfil inicial de temperaturas no es uniforme, sino que la cara frontal está a 366.53 K y la cara posterior a 422.1 K, con una variación lineal entre las dos caras.

5.4-3. Conducción en estado no estacionario usando una computadora digital. Repita el problema 5.4-2, pero use una computadora digital y escriba el programa Fortran. Use placas de 0.03048 m de espesor con M = 2.0. Calcule el perfil de temperaturas después de 0.875 h.

5.4-4. Enfriamiento de carne con métodos numéricos. Un corte de carne de res de 45.7 mm de espesor y que está en principio a temperatura de 283 K, se enfría por medio de un enfriador de contacto superficial a 274.7 K en su superficie frontal. La superficie posterior de la carne está aislada. Suponga que la resistencia convectiva en la cara frontal es cero. Use cinco cortes y M = 2, y calcule el perfil de temperaturas después de 0.54 h. La difusividad térmica es 4.64 × 10^{-4} m^2/h.

Respuesta: Δt = 0.090 h, seis incrementos de tiempo

5.4-5. Enfriamiento de carne con resistencia convectiva. Un gran corte de carne de res tiene 45.7 mm de espesor y tiene inicialmente una temperatura uniforme de 37.78 "C. Se enfría en su cara frontal con una corriente de aire a −1.11°C con un coeficiente convectivo de transferencia de calor h = 38.0 W/m^2 . K. La cara posterior de la carne está aislada. La conductividad térmica de la carne es k = 0.498 Wlm · K y α = 4.64 × 10^{-4} m^2/h. Mediante un método numérico de cinco cortes y M = 4.0, calcule el perfil de temperaturas después de 0.27 h. [Sugerencia: puesto que hay una resistencia convectiva, es necesario calcular el valor de N. Además, debe emplearse la ecuación (5.4-7) para determinar la temperatura superficial $_t + _{\Delta t}T_1$.]

5.4-6. Enfriamiento de carne y uso de computadora digital. Repita el problema 5.4-5 en la computadora digital. Use 20 cortes y M = 4.0. Escriba el programa Fortran.

5.4-7. Convección y conducción en estado no estacionario. Con las condiciones del ejemplo 5.4-3, continúe los cálculos para un total de 12 incrementos de tiempo. Grafique el perfil de temperatura.

5.4-8. Condición de límite convectivo alternativopara el método numérico. Repita el ejemplo 5.4-3 pero ahora utilice la condición de límite alterno, ecuación (5.4-l 1). Además, use M = 4. Calcule el perfil para los 12 incrementos de tiempo.

5.4-9. Método numérico para un sólido semiinjinito y convección. Un sólido semiinfinito que inicialmente está a una temperatura uniforme de 200 °C se enfría en su superficie por convección. El fluido refrigerante, auna temperatura constante de 100 °C, tiene un coeficiente convectivo de h = 250 W/m^2 · K. Las propiedades físicas de los sólidos son k = 20 W/m · K y α = 4 × 10^{-5} m^2/s. Utilice el método numérico con Ax = 0.040 m y M = 4.0 para calcular el perfil de temperaturas después de un tiempo total de 50 s.

Respuesta: T_1 = 157.72, T_2 = 181.84, T_3 = 194.44, T_4 = 198.93, T_5 = 199.90 °C

5.5-l. ***Enfriamiento*** de un corte de carne. Repita el ejemplo 5.5-1, en donde se señala que el corte de carne se enfría a 10 °C (50 "F) en el centro a través de aire a 0 °C (32 °F) con un valor más bajo de *h,* igual a 22.7 $W/m^2 \cdot K$ (4 $btu/h \cdot pie^2$. "F).

5.5-2. ***Enfriamiento de filetes de pescado.*** Un lote de filetes de bacalao originalmente a 10 °C se empaca con un espesor de 102 mm. El hielo se añade por ambos lados de los filetes para preservarlos, y se cubre con un papel resistente a la humedad para separar el hielo y los filetes. Se puede suponer que la temperatura superficial del pescado es 0 "C. Calcule el tiempo necesario para que el centro de los filetes esté a 2.22 °C, y la temperatura en ese momento a una distancia de 25.4 mm de la superficie. Además, grafique la temperatura en función de la posición para el empaque rectangular. Las propiedades físicas son (B1) $k = 0.571$ W/m . K, $\rho = 1052$ kg/m^3 y $c_p = 4.02$ kJ/kg · K.

5.5-3. Temperatura promedio en el enfriamiento de pescado. Un lote de filetes de pescado que tiene las mismas propiedades físicas del problema 5.5-2, está al principio a una temperatura de 10 °C y se empaca con un espesor de 102 mm de hielo en cada lado. Suponiendo que la temperatura superficial de los filetes sea 0 °C, calcule el tiempo necesario para que la temperatura promedio llegue a 1.39 "C. (*Nota:* en este caso en que la resistencia superficial es cero. ¿Puede ser útil la figura 5.3-13 para este problema?)

5.5-4. ***Tiempo para congelar un corte de carne.*** Repita el ejemplo 5.5-2 con las mismas condiciones, excepto que se usa una placa o congelador de contacto en el que puede suponerse un coeficiente superficial de $h = 142$ $W/m^2 \cdot K$.

Respuesta: $t = 2.00$ h

5.5-5. Congelación de un cilindro de carne. Un trozo de carne que contiene 75% de humedad en forma de un cilindro largo de 5 pulg de diámetro, será congelado en un congelador de corriente de aire a -25 "F. La carne está inicialmente a la temperatura de congelación a 27 °F y el coeficiente de transferencia de calor es $h = 3.5$ $btu/h \cdot pie^2$. "F. Las propiedades físicas son $\rho = 64$ lb_m/pie^3 para la carne sin congelar y $k = 0.60$ btu/h . pie . °F para la carne congelada. Calcule el tiempo de congelación.

5.6-l. ***Generación de calor mediante la ecuación de cambio de energía.*** Una pared plana con espesor de $2L$ m y generación interna de calor uniforme $\dot{q}$ W/m^2 está aislada en cuatro superficies y la conducción de calor sólo se verifica en la dirección x. La temperatura en una de las paredes en $x = +L$ y en otra de las paredes, en $x = -L$ se mantiene constante y es T_w K. Usando la expresión diferencial de cambio de energía, ecuación (5.6-18), deduzca la ecuación para el perfil final de temperaturas.

Respuesta: $T = \dfrac{\dot{q}\left(L^2 - x^2\right)}{2k} + T_w$

5.6-2. Transferencia de calor en un sólido usando la ecuación de cambio de energía. Un sólido de espesor L está a temperatura uniforme T_0 K. En forma repentina; la superficie frontal del sólido a $z = 0$ m se eleva a T_1 a $t = 0$ y manteniéndose a ese valor, y a z = L en la parte posterior, se eleva a T_2 y se mantiene constante. La transferencia de calor sólo se verifica en la dirección z. Para propiedades físicas constantes y aplicando la ecuación diferencial de cambio de energía, proceda a lo siguiente:

a) Deduzca la ecuación diferencial parcial y las condiciones límite para la transferencia de energía en estado no estacionario.

b) Haga lo mismo para estado estacionario e integre la ecuación final.

Respuesta: a) $\partial T/\partial t = \partial^2 T/\partial z^2$; B.C.(1): $t = 0$, $z = z$, $T = T_0$; B.C.(2): $t = t$, $z = 0$, $T = T$,; B.C.(3): $t = t$, z = L, $T = T_2$; b) $T = (T_2 - T_1)\, z/L + T_1$

5.6-3. Perfil radial de temperatura usando la ecuación de cambio de energía. A través de un cilindro largo y hueco de longitud L, con sus extremos aislados, se está verificando una transferencia radial de calor por conducción.

a) ¿Cuál es la ecuación diferencial final para la conducción en estado estacionario? Empiece por la segunda ley de Fourier en coordenadas cilíndricas, ecuación (5.6-20).
b) Resuelva la ecuación para el perfil de temperatura del inciso (a) con las siguientes condiciones límite: $T = T_i$ para $r = r_i$, $T = T_0$ para $r = r_0$.
c) Usando el inciso (b), deduzca una expresión para el flujo de calor q en W.

Respuesta: b) $T = T_i - \dfrac{T_i - T_0}{\ln(r_0/r_i)} \ln \dfrac{r}{r_i}$

5.6-4. Conducción de calor en una esfera. En una esfera hueca con radio interior r_i y radio exterior r_0, se verifica un flujo radial de energía. En estado estacionario, la temperatura de la superficie interna es constante e igual a T_i y la temperatura de la superficie exterior también es constante e igual a T_0.
a) Resuelva la ecuación para el perfil de temperaturas usando la ecuación diferencial de cambio de energía.
b) Básandose en el inciso (a), deduzca una expresión para el flujo del calor de W.

5.6-S. Generación variable de calor y ecuación de cambio de energía. Una pared plana está aislada de tal manera que únicamente hay conducción en dirección x. Las condiciones límite se aplican en estado estacionario y son $T = T_0$ cuando x = 0 y $T = T_L$ cuando $x = L$. Hay una generación interna de calor por unidad de volumen que varía de acuerdo con la expresión $\dot{q} = \dot{q}_0 e^{-\beta x/L}$, donde $\dot{q}_0$ y β son constantes. Resuelva la ecuación diferencial general de cambio de energía para el perfil de temperaturas.

5.7-l. ***Espesores de las capas límite, térmica e hidrodinámica.*** Una corriente de aire a 294.3 K y 101.3 kPa con velocidad de corriente libre de 12.2 m/s, fluye en paralelo por una placa plana tersa que se mantiene a temperatura superficial de 383 K. Proceda a lo siguiente:
a) Considerando el valor crítico $N_{\mathrm{Re},\,L} = 5 \times 10^5$, calcule la longitud crítica x = L de la placa, el espesor δ de la capa hidrodinámica límite y el espesor δ_T de la capa térmica límite. Note que el número de Prandtl no es igual a 1.0.
b) Calcule el coeficiente promedio de transferencia de calor en la placa cubierta por la capa laminar límite.

5.7-2. Espesor de la capa límite y transferencia de calor. Una corriente de aire a 37.8 °C y 1 atm abs fluye a velocidad de 3.05 m/s paralelamente a una placa plana que se mantiene a 93.3 “C. La placa tiene un 1 m de ancho. Calcule lo siguiente en una posición a 0.61 m del borde de entrada:
a) El espesor de la capa térmica límite δ_T y el espesor de la capa hidrodinámica límite 6.
b) Transferencia total de calor desde la placa.

REFERENCIAS

(B1) **Blakebrough,** *N. Biochemical and Biological Engineering Science,* vol. 2, Nueva York: Academic Press, Inc., 1968.

(B2) **Bird,** R. B. **Stewart,** W. E. y **Lightfoot, E.** *N. Transport Phenomena,* Nueva York: John Wiley & Sons, Inc., 1960.

(Cl) **Carslaw,** H. S. y **Jaeger,** J. *C. Conduction of Heat in Solids,* Oxford: Clarenden Press, 1959.

(C2) Charm, *S.* E. *The Fundamentals of Food Engineering,* 2a. ed., Westport, Conn.: Avi Publishing Co., Inc. 1971.

(D1) **Dusinberre,** *G.* M. *Heat Transfer Calculations by Finite Differences,* Scranton, Pa: International Text Book Co., Inc., 1961.

(G1) **Geankoplis,** *C.* J. *Mass Transport Phenomena,* Columbus, Ohio: Ohio State University Bookstores, 1972.

(G2) GURNEY, H. P. y LURIE, J. *Ind. Eng. Chem.*, 15, 1170 (1923).
(H1) HEISLER, H. P. *Trans. A.S.M.E.*, *69, 227* (1947).
(H2) HODGSON, T. *Fd. Inds. S. Afr.*, 16, 41 (1964); *Int. Refrig. Annexe,* 1966, 633 (1966).
(K1) KREITH, F. y BLACK, W. Z. *Principles of Heat Transfer,* 2a. ed., Scranton, Pa: Intemational Textbook Company, 1965.
(K2) KREITH, F. y BLACK, W. *Z. Basic Heat Transfer,* Nueva York: Harper Rowi Publishers, 1980.
(N1) NEWMAN, A. H. *Znd. Eng. Chem., 28, 545* (1936).
(P1) PERRY, R. H. y CHILTON, *C.* H. *Chemical Engineers' Hundbook,* 5a. ed., Nueva York: McGraw-Hill, Inc., 1973.
(P2) PLANK, R. *Z. Ges Kalteind, 20,* 109 (1913); Z. *Ges Kulteind. Bieh. Reih,* 10 (3), 1 (1941).
(R1) RIEDEL, L. Kaltetchnik, 8, 374 (1956); 9, 38 (1957), ll, 41 (1959); 12, 4 (1960).
(S1) SCHNEIDER, P. J. *Conduction Heat Transfer.,* Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1955.
(S2) SIEGEL, R., SPARROW, E. M. y HALLMAN, T. M. *Appl. Sci. Res.,* A7, 386 (1958).

CAPÍTULO 6

Principios de transferencia de masa

6.1 INTRODUCCIÓN A LA TRANSFERENCIA DE MASA Y DIFUSIÓN

6.1A. Semejanzas entre los procesos de transferencia de masa, calor y momento lineal

1. Introducción. En el capítulo 1 se mencionó que las diversas operaciones unitarias podían clasificarse en tres procesos fundamentales de transferencia (o "transporte"): transferencia de calor, de momento lineal y de masa. El proceso fundamental de *transferencia de momento lineal se* da en las operaciones unitarias de flujo de fluidos, mezclado, sedimentación y filtración. La *transferencia de calor* se presenta en la transferencia conductiva y convectiva de calor, en la evaporación, la destilación y el secado.

El tercer proceso fundamental de transferencia, esto *es,* la *transferencia de masa,* interviene en la destilación, absorción, secado, extracción líquido-líquido adsorción y procesos de membrana. Cuando se transfiere masa de una fase a otra o a través de una sola fase el mecanismo básico es el mismo, ya sea que se trate de gases, líquidos o sólidos. Esto también se demostró para la transferencia de calor, en la cual el transporte de calor por conducción obedece la ley de Fourier en gases, líquidos y sólidos.

2. Ecuación general de transporte molecular. Estos tres procesos de transferencia se caracterizan por el mismo tipo general de ecuación estudiada en la sección 2.3A.

$$\text{velocidad de un proceso de transferencia} = \frac{\text{fuerza impulsora}}{\text{resistencia}} \qquad \textbf{(2.3.1)}$$

Esto puede escribirse como sigue para la difusión molecular de las propiedades de momento lineal, de calor y de masa:

$$\psi_z = -\delta \frac{d\Gamma}{dz} \qquad \textit{(2.3-2)}$$

3. *Ecuaciones de difusión molecular para la transferencia de momento lineal, de calor y de masa.* La ecuación de Newton para la transferencia de momento lineal a densidad constante puede escribirse como sigue, de una manera semejante a la ecuación (2.3-2):

$$\tau_{zx} = -\frac{\mu}{\rho}\frac{d(v_x\rho)}{dz} \tag{6.1-1}$$

donde τ_{zx} es el momentum transferidoh · m^2, μ/ρ es la viscosidad cinemática en m^2/s, z ès la distancia en m y $v_x\rho$ es el momentum/m^3, con las unidades de momentum kg · m/s.

La ley de Fourier para conducción de calor puede escribirse como sigue para p y c_p constantes:

$$\frac{q_z}{A} = -\alpha\frac{d(\rho c_p T)}{dz} \tag{6.1-2}$$

donde q_z/A es el flujo específico de calor en W/m^2, α es la difusividad térmica en m^2/s, y $\rho c_p T$ *es* J/m^3. En unidades cgs, q_z/A se da en cal/s cm^2, α en cm^2/s y $\rho c_p T$ en cal/cm^3.

La ecuación para la difusión molecular de masa es la ley de Fick, similar a la ecuación (2.3-2). Se escribe como sigue para una concentración total constante en un fluido:

$$J_{Az}^{*} = -D_{AB}\frac{dc_A}{dz} \tag{6.1-3}$$

donde J_{Az}^{*} es el flujo molar del componente A en la dirección z causado por la difusión molecular, expresado en kg mol de A/s . m^2, D_{AB} es la difusividad molecular de la molécula A en B en m^2/s, c_A es la concentración de A en kg mol/m^3, y z es la distancia de difusión en m. En unidades cgs J_{Az}^{*} se da en g mol $A/s \cdot cm^2$, D_{AB} en cm^2/s y c_A en g mol A/cm^3. En unidades inglesas, J_{Az}^{*} *se* da en Ib molk . pie ^{2}, D_{AB} en $pies^2/h$ y c_A en lb mol/pie^3.

La semejanza de las ecuaciones (6.1-1), (6.1-2) y (6.1-3) para transferencia de momento lineal, de calor y de masa resulta obvia. Todos los flujos específicos del lado izquierdo de las tres ecuaciones tienen unidades de transferencia de cantidad de momento lineal, de calor, o de masa por unidad de tiempo y por unidad de área. Las propiedades de transporte μ/ρ, α y D_{AB} se dan todas ellas en m^2/s y las concentraciones se representan como momento lineal/m^2, J/m^3 o kg mol /m^3.

4. Ecuaciones de difusión turbulenta para la transferencia de momento lineal, de calor y de masa. En la sección 5.7C se vieron algunas ecuaciones que analizan las semejanzas entre la transferencia de momento lineal, de calor y de masa en la transferencia turbulenta. Para la transferencia turbulenta de momento lineal a densidad constante,

$$\tau_{zx} = -\left(\frac{\mu}{\rho} + \varepsilon_t\right)\frac{d(v_x\rho)}{dz} \tag{6.1-4}$$

Para la transferencia turbulenta de calor con p y c_p constantes,

$$\frac{q_z}{A} = -(\alpha + \alpha_t)\frac{d(\rho c_p T)}{dz} \tag{6.1-5}$$

Para la transferencia turbulenta de masa con c constante,

$$J_{Az}^{*} = -(D_{AB} + \varepsilon_M)\frac{dc_A}{dz} \tag{6.1-6}$$

En estas ecuaciones ε_t es la difusividad de momento lineal turbulenta o de remolino en m^2/s, α_t la difusividad térmica turbulenta o de remolino en m^2/s y ε_M la difusividad de masa turbulenta o de remolino en m^2/s. Nuevamente, estas ecuaciones son bastante semejantes entre sí. Muchas de las ecuaciones teóricas y correlaciones empíricas para el transporte turbulento en diversas geometrías son también muy parecidas.

6.1B Ejemplos de procesos de transferencia de masa

La transferencia de masa es decisiva en muchas áreas de la ciencia y la ingeniería. La transferencia de masa se verifica cuando el componente de una mezcla emigra en una misma fase o de una fase a otra, a causa de la diferencia de concentración entre dos puntos. Muchos fenómenos comunes implican una transferencia de masa. El líquido de un recipiente abierto lleno de agua se evapora en el aire estacionario debido a la diferencia de concentración del vapor de agua entre la superficie del líquido y el aire que lo rodea. Existe una "fuerza impulsora" de la superficie al aire. Un trozo de azúcar sumergido en una taza de café se disuelve y se difunde, sin agitación, en la solución que lo rodea. Cuando la madera verde recién cortada se expone a la acción atmosférica, se seca parcialmente a medida que el agua de la madera se difunde hasta la superficie cortada y después, a la atmósfera circundante. En un proceso de fermentación, los nutrimentos y el oxígeno disueltos en la solución se difunden hacia los microorganismos. En una reacción catalítica, los reactivos se difunden del medio circundante a la superficie catalítica donde se verifica la reacción.

Muchos procesos de purificación se basan en una transferencia de masa. En el procesamiento de uranio, un disolvente orgánico extrae una sal de uranio en solución. La destilación para separar alcohol de agua implica una transferencia de masa. La extracción del SO_2 de los gases producidos en la combustión se lleva a cabo por absorción en una solución líquida básica.

La transferencia de masa puede considerarse de forma similar a la aplicación de la ley de conducción de Fourier a la transferencia de calor. Sin embargo, una de las diferencias importantes es que en la transferencia molecular de masa, uno o más de los componentes del medio se desplaza. En la transferencia de calor por conducción, el medio suele ser estacionario y sólo transporta energía en forma de calor. Esto introduce algunas diferencias entre la transferencia de calor y la transferencia de masa, que se estudian en este capítulo.

6.1C Ley de Fick para la difusión molecular

La difusión molecular (o transporte molecular) puede definirse como la transferencia (o desplazamiento) de moléculas individuales a través de un fluido por medio de los desplazamientos individuales y desordenados de las moléculas. Podemos imaginar a las moléculas desplazándose en línea recta y cambiando su dirección al rebotar otras moléculas cuando chocan. Puesto que las moléculas se desplazan en trayectorias al azar, la difusión molecular a veces se llama también *proceso con trayectoria aleatoria.*

En la figura 6.1-l se muestra esquemáticamente el *proceso de difusión molecular.* Se ilustra la trayectoria desordenada que la molécula *A* puede seguir al difundirse del punto (1) al (2) a través de las moléculas de *B.* Si hay un número mayor de moléculas de *A* cerca del punto (1) con respecto al punto (2), entonces, y puesto que las moléculas se difunden de manera desordenada en ambas direcciones, habrá más moléculas de *A* difundiéndose de (1) a (2) que de (2) a (1). La difusión neta de *A* va de una región de alta concentración a otra de baja concentración.

Considérese otro ejemplo, en el que se añade una gota de tinta azul auna taza de agua. Las moléculas de la tinta se difundirán con lentitud en todas las partes del agua por difusión molecular. Para incrementar esta velocidad de mezclado de la tinta, se puede agitar el líquido por medios mecánicos, como una cuchara, con lo cual se verifica una *transferencia convectiva de masa.* Los dos mecanismos de transferencia de calor, esto es, la conducción y la convección, son análogos a la difusión molecular y a la transferencia convectiva de masa.

Tómese primero en cuenta la difusión de moléculas cuando la totalidad del fluido está inmóvil, es decir, estacionario. La difusión de las moléculas se debe a un gradiente de concentración.

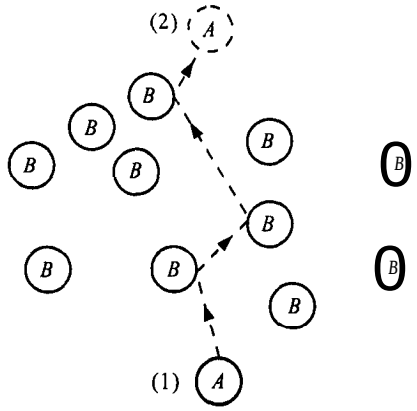


FIGURA 6.1-l. *Diagrama esquemático del proceso de difusión molecular.*

La ecuación general de la ley de Fick puede escribirse como sigue para una mezcla binaria de *A y B:*

$$J_{Az}^{*} = - cD_{AB} \frac{dx_A}{dz} \tag{6.1-7}$$

donde c es la concentración total de *A* y *B* en kg mol $A + B/m^3$ y x_A es la fracción mol de *A* en la mezcla de *A y B.* Si c es constante, entonces, puesto que $c_A = cx_A$,

$$c\ dx_A = d(cx_A) = dc_A \tag{6.1-8}$$

Sustituyendo en la ecuación (6.1-7) se obtiene la ecuación (6.1-3) para una concentración total constante.

$$J_{Az}^{*} = -D_{AB} \frac{dc_A}{dz} \tag{6.1-3}$$

Esta ecuación es la de uso más común en muchos procesos de difusión molecular. Cuando c varía un poco, se aplica un valor promedio en la ecuación (6.1-3).

EJEMPLO 6.1-l. Difusión molecular de helio en nitrógeno

Una tubería contiene una mezcla de He y N_2 gaseosa a 298 K y 1 atm de presión total, constante en toda la extensión del tubo. En uno de los extremos de éste punto 1, la presión parcial p_{A1} del He es 0.60 atm y en el otro extremo, a 20 cm (0.2m), p_{A2} = 0.20 atm. Calcule en unidades SI y cgs el flujo específico de He en estado estacionario cuando el valor de D_{AB} de la mezcla $He–N_2$ es 0.687 cm^2/s. Use unidades SI y cgs.

Solución: Puesto que la presión total P es constante, entonces c también lo es, y es como sigue para un gas que cumpla la ley de los gases ideales:

$$PV = nRT \tag{6.1-9}$$

$$\frac{n}{V} = \frac{P}{RT} = c \tag{6.1-10}$$

n es kg mol de A más B, Ves el volumen en m^3, T es la temperatura en K, R es 83 14.3 m^3 . Pa/kg mol . K, o bien, R es 82.057 $\times 10^{-3}$ $m^3 \cdot$ atm/kg mol ' K y c es mol kg A más B/m^3. En unidades cgs, R es 82.057 cm^3 . atm/kg ' mol.

En estado estacionario, el flujo J^*_{Az} de la ecuacion. (6.1-3) es constante. Además, el valor de D_{AB} de un gas también es constante. Reordenando la ecuación (6.1-3) e integrando,

$$J^*_{Az} \int_{z_1}^{z_2} dz = -D_{AB} \int_{c_{A1}}^{c_{A2}} dc_A$$

$$J^*_{Az} = \frac{D_{AB}(c_{A1} - c_{A2})}{z_2 - z_1} \tag{6.1-11}$$

Con base en la ley de los gases ideales, $p_A V = n_A RT$, y

$$c_{A1} = \frac{p_{A1}}{RT} = \frac{n_A}{V} \tag{6.1-12}$$

Sustituyendo la ecuación (6.1-12) en la (6.1-11)

$$J^*_{Az} = \frac{D_{AB}(p_{A1} - p_{A2})}{RT(z_2 - z_1)} \tag{6.1-13}$$

Ésta es la ecuación final que debe aplicarse y es una fórmula muy propia para gases. Las presiones parciales son p_{A1} = 0.6 atm = 0.6 $\times$ 1.01325 $\times 10^5$ = 6.08 $\times 10^4$ Pa y p_{A2} = 0.2 atm = 0.2 $\times$ 1.01325 $\times 10^5$ = 2.027 $\times 10^4$ Pa. Entonces, si usamos unidades SI,

$$J^*_{AZ} = \frac{(0.687 \times 10^{-4})(6.08 \times 10^4 - 2.027 \times 10^4)}{8314(298)(0.20 - 0)}$$

$$= 5.63 \times 10^{-6} \text{ kg mol } A/\text{s} \cdot \text{m}^2$$

Si se usan presiones en atmósferas, con unidades SI,

$$J^*_{Az} = \frac{(0.687 \times 10^{-4})(0.60 - 0.20)}{(82.06 \times 10^{-3})(298)(0.20 - 0)} = 5.63 \times 10^{-6} \text{ kg mol } A/\text{s} \cdot \text{m}^2$$

Para unidades cgs, sustituyendo en la ecuación (6.1-13),

$$J^*_{Az} = \frac{0.687(0.60 - 0.20)}{82.06(298)(20 - 0)} = 5.63 \times 10^{-7} \text{ g mol } A/\text{s} \cdot \text{cm}^2$$

Hay otras fuerzas impulsoras (además de las diferencias de concentración) de la difusión, tales como temperatura, presión, potencial eléctrico y otros gradientes. Los detalles pueden estudiarse en las referencias (B3).

6.1D Coeficiente de transferencia de masa por convección

Cuando un fluido fluye por el exterior de una superficie sólida en movimiento de convección forzada, podemos expresar la tasa de transferencia de masa convectiva desde la superficie hasta el fluido, o viceversa, mediante la siguiente ecuación:

$$N_A = k_c(c_{L1} - c_{Li}) \qquad (6.1\text{-}14)$$

donde k_c es un coeficiente de transferencia de masa en m/s, c_{L1} la concentración de fluido general en kg mol A/m^3 y c_{L1} la concentración en el fluido cerca de la superficie del sólido. Este coeficiente de transferencia de masa es muy parecido al coeficiente de transferencia de calor h y es función de la geometia del sistema, de las propiedades del fluido y de su velocidad. En el capítulo 7 se considera la transferencia de masa convectiva en detalle.

6.2 DIFUSIÓN MOLECULAR EN GASES

6.2A Contradifusión equimolar en gases

En la figura 6.2-l se muestra un diagrama para dos gases, A y B, a presión total constante P, en dos cámaras grandes, conectadas por un tubo que sirve para que se verifique la difusión molecular en estado estacionario. Una agitación en ambas cámaras mantiene uniformes sus concentraciones. La presión parcial $p_{A1} > p_{A2}$ y $p_{B2} > p_{B1}$. Las moléculas de A se difunden hacia la derecha y las de B hacia la izquierda. Puesto que la presión total P es constante en todo el sistema, los moles netos de A que se difunden hacia la derecha deben ser iguales a los moles netos de B, que lo hacen hacia la izquierda. Si no fuera así, la presión total no se mantendría constante. Esto significa que,

$$J_{Az}^* = -J_{Bz}^* \qquad (6.2\text{-}l)$$

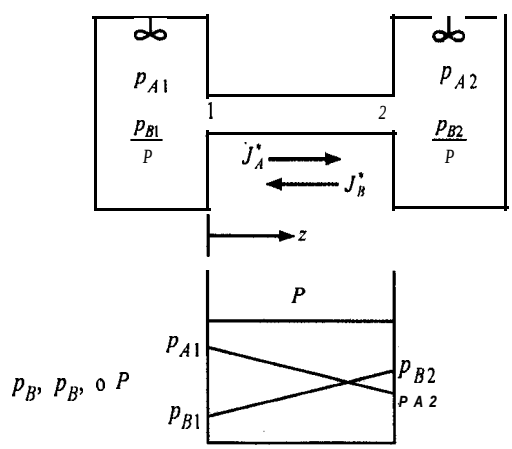


FIGURA 6.2-l. *Contradifusión equimolar de gases A y B.*

El subíndice z se suele omitir cuando la dirección es obvia. Escribiendo la ley de Fick para B cuando c es constante,

$$J_B^* = -D_{BA}\frac{dc_B}{dz} \tag{6.2-2}$$

Ahora bien, puesto que $P = p_A + p_B =$ constante, *se tiene,*

$$c = c_A + c_B \tag{6.2-3}$$

Diferenciando ambos lados,

$$dc_A = -dc_B \tag{6.2-4}$$

Igualando la ecuación (6.1-3) con la (6.2-2),

$$J_A^* = -D_{AB}\frac{dc_A}{dz} = -J_B^* = -(-)D_{BA}\frac{dc_B}{dz} \tag{6.2-5}$$

Sustituyendo la ecuación (6.2-4) en la (6.2-5) y cancelando los términos iguales,

$$D_{AB} = D_{BA} \tag{6.2-6}$$

Esto demuestra que para una mezcla gaseosa binaria de A y B, el coeficiente de difusividad D_{AB} para la difusión de A en B es igual a D_{BA} para la difusión de B en A.

EJEMPLO 4.2-l. Contradifusión equimolar

En un tubo uniforme de 0.10 m de largo se difunde amoniaco gaseoso *(A)* en N_2 gaseoso (B) a 1.0132×10^5 Pa de presión y 298 K. (El diagrama es similar al de la Fig. 6.2-l .) En el punto 1, $p_{A1} = 1.013 \times 10^4$ Payen el punto 2, $p_{A2} = 0.507 \times 10^4$ Pa. La difusividad D_{AB} *es* $\mathbf{0.230} \times 10^{-4}$ m²/s.

a) Calcule el flujo específico J_A^* en estado estacionario.
b) Repita para J_B^*.

Solución: Puede usarse la ecuación (6.1-13), donde $P = 1.0132 \times 10^5$ Pa, $z_2 \quad z_1 =$ 0.10 m y $T = 298$ K. Sustituyendo en la ecuación (6.1-13) para el inciso a),

$$J_A^* = \frac{D_{AB}(p_{A1} - p_{A2})}{RT(z_2 - z_1)} = \frac{(0.23 \times 10^{-4})(1.013 \times 10^4 - \mathbf{0.507} \times 10^4)}{8314(298)(0.10\text{-O})}$$

$$= \mathbf{4.70} \times 10^{-7} \text{ kg mol } A/\text{s} \cdot \text{m}^2$$

En la otra versión de la ecuación (6.1- 13) para el componente B en el inciso b) y observando *que* $p_{B1} = P - p_{A1} = 1.0132 \times 10^5 - 1.013 \times 10^4 = 9.119 \times 10^4$ Pa y $p_{B2} = P - p_{A2} =$ $1.0132 \times 10^5 - 0.507 \times 10^4 = 9.625 \times 10^4$ Pa,

$$J_B^* = \frac{D_{AB}(p_{B1} - p_{B2})}{RT(z_2 - z_1)} = \frac{(0.23 \times 10^{-4})(9.119 \times 10^4 - \mathbf{9.625} \times 10^4)}{8314(298)(0.10\text{-O})}$$

$$= \mathbf{-4.70} \times 10^{-7} \text{ kg mol } B/\text{s} \cdot \text{m}^2$$

El valor negativo de J_B^* significa que el flujo va del punto 2 al 1.

6.2B Caso general para la difusión de los gases A y B más convección

Hasta ahora se ha considerado la ley de Fick para la difusión en un fluido estacionario; es decir, sin movimiento neto (o flujo convectivo) de la totalidad de la fase de la mezcla binaria de *A* y *B*. El flujo específico de difusión J_A^* se debe en este caso al gradiente de concentraciones. La velocidad a la cual los moles de *A* pasan por un punto fijo hacia la derecha, lo cual se tomará como flujo positivo, es J_A^* kg mol *A*/s . m^2. Este flujo puede transformarse en una velocidad de difusión de *A* hacia la derecha por medio de la expresión

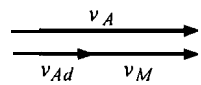
$$J_A^* \text{ (kg mol } A/\text{s} \cdot \text{m}^2) = v_{Ad}\, c_A \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \frac{\text{kg mol } A}{\text{m}^3}\right) \tag{6.2-7}$$

donde v_{Ad} es la velocidad de difusión de *A* en m/s.

Considérese ahora lo que sucede cuando la totalidad del fluido se mueve con un flujo general o convectivo hacia la derecha. La velocidad molar promedio de la totalidad del fluido con respecto a un punto estacionario es v_M m/s. El componente *A* sigue difundiéndose hacia la derecha, pero ahora, su velocidad de difusión v_{Ad} se mide con respecto al fluido en movimiento. Para un observador estacionario, *A* se desplaza con mayor rapidez que la fase total, pues su velocidad de difusión v_{Ad} se añade a la de la fase total v_M. Expresada matemáticamente, la velocidad de *A* con respecto al punto estacionario es la suma de la velocidad de difusión y de la velocidad convectiva o promedio.

$$v_A = v_{Ad} + v_M \tag{6.2-8}$$

donde v_A es la velocidad de *A* con respecto al punto estacionario. Expresándolo esquemáticamente,



Multiplicando la ecuación (6.2-8) por c_A.

$$c_A v_A = c_A v_{Ad} + c_A v_M \tag{6.2-9}$$

Cada uno de estos tres componentes es un flujo específico. El primer término, $c_A\, v_A$ puede *representarse* por el flujo específico N_A kg mol *A*/s . m^2. Este es el flujo específico total de *A* con respecto al punto estacionario. El segundo término es J_A^*, esto es, el flujo específico de difusión con respecto al fluido en movimiento. El tercer término es el flujo convectivo específico de *A* con respecto al punto estacionario. Por consiguiente, la ecuación (6.2-9) se transforma en

$$N_A = J_A^* + c_A v_M \tag{6.2-10}$$

Sea Ne1 flujo convectivo total de la corriente general con respecto al punto estacionario. Entonces,

$$N = cv_M = N_A + N_B \tag{6.2-11}$$

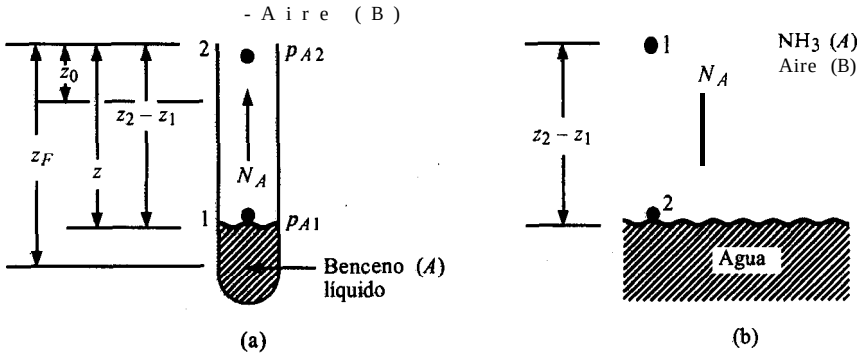


FIGURA 6.2-2. ***Difusión de A a través de B no difusivo y en reposo: a) benceno que se evapora al aire, b) amoniaco atmosférico que se absorbe en agua.***

Si se mantiene constante la presión total P, se sustituye $c = P/RT$, $p_A = x_A P$ y $c_A/c = p_A/P$ en la ecuación (6.2-16),

$$N_A = -\frac{D_{AB}}{RT}\frac{dp_A}{dz} + \frac{p_A}{P}N_A \qquad (6.2\text{-}17)$$

Reordenando e integrando,

$$N_A\left(1 - \frac{p_A}{P}\right) = -\frac{D_{AB}}{RT}\frac{dp_A}{dz} + \frac{c_A}{c} \qquad \textbf{(6.2-18)}$$

$$N_A\int_{z_1}^{z_2} dz = -\frac{D_{AB}}{RT}\int_{p_{A1}}^{p_{A2}} \frac{dp_A}{1 - p_A/P} \qquad (6.2\text{-}19)$$

$$N_A = \frac{D_{AB}P}{RT(z_2 - z_1)}\ln\frac{P - p_{A2}}{P - p_{A1}} \qquad (6.2\text{-}20)$$

La ecuación (6.2-20) es la expresión final adecuada para calcular el flujo de A. Sin embargo, con frecuencia se escribe también de otra forma. Primero se define la media logarítmica de B inerte. Puesto que $P = p_{A1} + p_{B1} = p_{A2} + p_{B2}$, $p_{B1} = P - p_{A1}$ y $p_{B2} = P - p_{A2}$,

$$p_{BM} = \frac{p_{B2} - p_{B1}}{\ln(p_{B2}/p_{B1})} = \frac{p_{A1} - p_{A2}}{\ln[(P - p_{A2})/(P - p_{A1})]} \qquad (6.2\text{-}21)$$

Sustituyendo la ecuación (6.2.21) en la (6.2-20),

$$N_A = \frac{D_{AB}P}{RT(z_2 - z_1)p_{BM}}(p_{A1} - p_{A2}) \qquad (6.2\text{-}22)$$

EJEMPLO 6.2-2. Difusión de agua a través de aire en reposo que no se difunde

El agua en el fondo de un tubo metálico estrecho se mantiene a temperatura constante de 293 K. La presión total del aire (que se supone seco) es 1.01325×10^5 Pa (1 .O atm) y la

0, despejando v_M,

$$v_M = \frac{N_A + N_B}{c} \tag{6.2-12}$$

Sustituyendo la ecuación (6.2-12) en la (6.2-10),

$$N_A = J_A^* + \frac{c_A}{c}(N_A + N_B) \tag{6.2-13}$$

Puesto que J_A^* es la ley de Fick, ecuación (6.1-7),

$$N_A = -cD_{AB}\frac{dx_A}{dz} + \frac{c_A}{c}(N_A + N_B) \tag{6.2-14}$$

La ecuación (6.2-14) es la expresión general final para difusión más convección, que debe usarse cuando se emplea N_A y se refiere a un punto estacionario. Puede escribirse una ecuación similar para N_B.

$$N_B = -cD_{BA}\frac{dx_B}{dz} + \frac{c_B}{c}(N_A + N_B) \tag{6.2-15}$$

Para resolver la ecuación (6.2-14) o la (6.2-15) debe conocerse la relación entre el flujo específico N_A y N_B. Las ecuaciones (6.2-14) y (6.2-15) son válidas para la difusión en gases, líquidos y sólidos.

Para contradifusión equimolar, $N_A = -N_B$ y el término convectivo en la ecuación (6.2-14) se vuelve cero. Entonces, $N_A = J_A^* = -N_B = J_B^*$

6.2C Caso especial de *A* que se difunde a través de *B* no difusivo y en reposo

El caso de la difusión de *A* a través de *B*, que está estacionario y no se difunde, es una situación de estado estacionario bastante frecuente. En este caso, algún límite al final de la trayectoria de difusión es impermeable al componente *B*, por lo que éste no puede atravesarlo. Un ejemplo es el que se muestra en la figura 6.2-2a para la evaporación de un líquido puro como el benceno *(A)* en el fondo de un tubo estrecho, por cuyo extremo superior se hace pasar una gran cantidad de aire *(B)* inerte o que no se difunde. El vapor de benceno *(A)* se difunde a través del aire *(B)* en el tubo. El límite en la superficie líquida en el punto 1 es impermeable al aire, pues éste es insoluble en el benceno líquido. Por consiguiente, el aire *(B)* no puede difundirse en la superficie o por debajo de ella. En el punto 2, la presión parcial $p_{A2} = 0$, pues pasa un gran volumen de aire.

Otro ejemplo es la absorción de vapor de NH_3 *(A)* del aire *(B)* en agua, tal como se muestra en la figura 6.2-2b. La superficie del agua es impermeable al aire pues éste es muy poco soluble en agua. De esta forma, y puesto que *B* no puede difundirse, $N_B = 0$.

Para deducir el caso de *A* que se difunde en *B* estacionario, en la ecuación general (6.2-14) se sustituye $N_B = 0$,

$$N_A = -cD_{AB}\frac{dx_A}{dz} + \frac{c_A}{c}(N_A + 0) \tag{6.2-16}$$

temperatura es 293 K (20 °C). El agua se evapora y se difunde a través del aire en el tubo y latrayectoriade difusión $z_2 - z_1$ tiene 0.1542 m (0.5 pie) de longitud. (El diagramaes siinilar al de la Fig. 6.2-2a.) Calcule la velocidad de evaporación en estado estacionario en lb mol/h . pie^2 y en kg mol/s · m^2. La difusividad del vapor de agua a 293 K y 1 atm de presión es 0.250 × 10^{-4} m^2/s. Suponga que el sistemaes isotérmico. Utilice unidades SI y del sistema inglés.

Solución: La difusividad se convierte a pie^2/h usando el factor de conversión del Apéndice A. 1

$$D_{AB} = 0.250 \times 10^{-4} (3.875 \times 10^{-4}) = 0.969 \text{ pie}^2/\text{h}$$

Con base en el Apéndice A.2, la presión de vapor del agua a 20 °C es 17.54 mm o p_{A1} = 17.54/760 = 0.0231 atm = 0.0231(1.01325 × 10^5) = 2.341 × 10^3 Pa, $p_{A2} = 0$ (aire puro). Puesto que la temperatura es 20 °C (68 °F), T = 460 + 68 = 528 °R = 293 K. Del Apéndice A. 1, R = 0.730 pie^3 · atm/lb mol . °R. Para calcular el valor de p_{BM} a partir de la ecuación (6.2-21),

$$p_{B1} = P - p_{A1} = 1.00 \quad 0.0231 = 0.9769 \text{ atm}$$

$$p_{B2} = P - p_{A2} = 1.00 - 0 = 1.00 \text{ atm}$$

$$p_{BM} = \frac{p_{B2} - p_{B1}}{\ln(p_{B2}/p_{B1})} = \frac{1.00 - 0.9769}{\ln(1.00/0.9769)} = 0.988 \text{ atm} = 1.001 \text{ 'x } 10^5 \text{ Pa}$$

Puesto que p_{B1} es cercano a p_{B2} puede emplearse la media lineal $(p_{B1} + p_{B2})/2$ para un valor muy similar a p_{BM}.
Sustituyendo en la ecuación (6.2-22) con $z_2 - z_1$ = 0.5 pie (0.1524 m),

$$N_A = \frac{D_{AB}P}{RT(z_2 - z_1)p_{BM}}(p_{A1} - p_{A2}) = \frac{0.969(1.0)(0.0231 - 0)}{0.730(528)(0.5)(0.988)}$$

$$N_A = 1.175 \times 10^{-4} \text{ lb mol /h} \cdot \text{pie}^2$$

$$N_A = \frac{(0.250 \text{ x } 10^{-4})(1.01325 \text{ x } 10^5)(2.341 \text{ x } 10^3 - 0)}{8314(293)(0.1524)(1.001 \text{ x } 10^5)}$$

$$= 1.595 \times 10^{-7} \text{ kg mol/s . m}^2$$

EJEMPLO 6.2-3. Difusión en un tubo con cambio en la longitud de la trayectoria
La difusión de vapor de agua en un tubo estrecho ocurre como en el ejemplo 6.2-2 en las mismas condiciones. Sin embargo, como se muestra en la figura 6.2-2a, en un tiempo dado t, el nivel es z m desde la parte superior. Conforme avanza la difusión, el nivel va disminuyendo lentamente. Deduzca la ecuación para el tiempo t_F que tarda el nivel en bajar desde un punto de partida z_0 m en $t = 0$ a z_F en $t = t_F$ s, como se muestra.

Solución: Como el nivel disminuye muy lentamente, se supone una condición de estado seudoestacionario. Conforme pasa el tiempo, la longitud de la trayectoria z aumenta. En cualquier tiempo t se cumple la ecuación (6.2-22), pero la longitud de la trayectoria es z y la ecuación (6.2-22) se transforma como se indica, donde N_A y z ahora son variables.

$$N_A = \frac{D_{AB}P}{RTzp_{BM}}(p_{A1} - p_{A2}) \qquad (6.2\text{-}23)$$

Si se supone un área de corte transversal de 1 m^2, el nivel desciende dz m en dt s y ρ $(dz \cdot 1)/M_A$ son los kg mol de A que quedan y se difunden. Entonces,

$$N_A \cdot 1 = \frac{\rho_A(dz \cdot 1)}{M_A\, dt} \qquad (6.2\text{-}24)$$

Si se iguala la ecuación (6.2-24) a la (6.2-23), se reordena y se integra entre los límites de $z = z_0$ cuando $t = 0$ y $z = z_F$ cuando $t = t_F$,

$$\frac{\rho_A}{M_A}\int_{z_0}^{z_F} z\, dz = \frac{D_{AB}P(p_{A1} - p_{A2})}{RTp_{BM}}\int_0^{t_F} dt \qquad (6.2\text{-}25)$$

Al despejar t_F,

$$t_F = \frac{\rho_A\left(z_F^2 - z_0^2\right)RTp_{BM}}{2M_A D_{AB}P\left(p_{A1} - p_{A2}\right)} \qquad (6.2\text{-}26)$$

El método que se muestra en el ejemplo 6.2-3 se ha usado pará determinar experimentalmente la difusividad D_{AB}. En este experimento, la longitud de trayectoria inicial z_0 se mide en $t = 0$ y también la final z_F en t_F. Así, la ecuación (6.2-26) se usa para calcular D_{AB}.

6.2D Difusión a través de un área de corte transversal variable

En los casos de estado estacionario analizados hasta ahora se han considerado a N_A y J_A^* como constantes en las integraciones. En dichos ejemplos, el área de corte transversal A m^2 a través del cual se verifica la difusión, es invariable y la distancia z cambia. En algunas situaciones, el área A puede cambiar. Entonces, resulta conveniente definir N_A como

$$N_A = \frac{\overline{N}_A}{A} \qquad (6.2\text{-}27)$$

donde $\overline{N}_A$ es kg mol de A que se difunde por segundo o kg mol/s. En estado estacionario, $\overline{N}_A$ será constante pero A no para un área variable.

1. Difusión desde una esfera. Para ilustrar la aplicación de la ecuación (6.2-27), se considerará el caso importante de la difusión en un gas hacia o desde una esfera. Esta situación es frecuente en casos de evaporación de una gota de líquido, la evaporación de una bola de naftaleno y en la difusión de nutrimentos a un microorganismo de forma esférica en un líquido. En la figura 6.2-3a se muestra una esfera de radio fijo r_1 m en un medio gaseoso infinito. El componente *(A)* a presión parcial p_{A1} en la superficie, se difunde en el medio estacionario circundante (B), donde el valor de p_{A2} a una distancia grande es igual a cero. Se supondrá una difusión en estado estacionario.

El flujo específico N_A puede representarse mediante la ecuación (6.2-27), donde *A es* el área de corte transversal $4\pi r^2$ en el punto a una distancia r desde el centro de la esfera. Además, $\overline{N}_A$ es constante en estado estacionario.

$$N_A = \frac{\overline{N}_A}{4\pi r^2} \qquad (6.2\text{-}28)$$

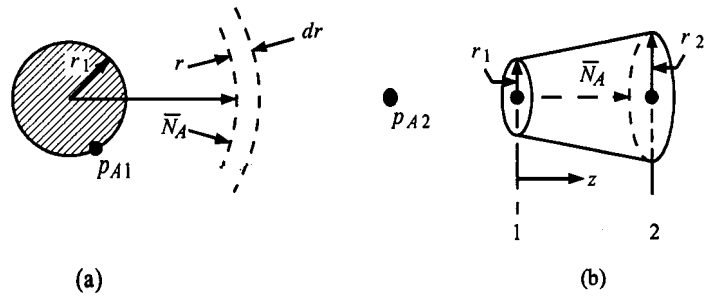


FIGURA 6.2-3. *Difusión a través de un área de corte transversal variable: a) Desde una esfera al medio circundante, b) a través de un conducto circular con ahusamiento uniforme.*

Puesto que en este caso A se difunde a través de B que no se difunde y está en reposo, se usa la ecuación (6.2-18) en su forma diferencial, igualando N_A con la ecuación (6.2-28) para obtener

$$N_A = \frac{\bar{N}_A}{4\pi r^2} = -\frac{D_{AB}}{RT}\frac{dp_A}{(1 - p_A/P)\,dr} \tag{6.2-29}$$

Nótese que dr ha reemplazado a dz. Reordenando e integrando entre r_1 y un punto r_2 a gran distancia,

$$\frac{\bar{N}_A}{4\pi}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = -\frac{D_{AB}}{RT}\int_{p_{A1}}^{p_{A2}}\frac{dp_A}{(1 - p_A/P)} \tag{6.2-30}$$

$$\frac{\bar{N}_A}{4\pi}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{D_{AB}P}{RT}\ln\frac{P - p_{A2}}{P - p_{A1}} \tag{6.2-31}$$

Puesto que $r_2 \gg r_1$, $1/r_2 \cong 0$. Sustituyendo el valor de p_{BM} de la ecuación (6.2-21) en la ecuación (6.2-31),

$$\frac{\bar{N}_A}{4\pi r_1^2} = N_{A1} = \frac{D_{AB}P}{RTr_1}\frac{p_{A1} - p_{A2}}{p_{BM}} \tag{6.2-32}$$

Esta expresión se puede simplificar aun más. Si p_{A1} es pequeña en comparación con P (una fase de gas diluido), $p_{BM} \cong P$. Además, estableciendo que $2r_1 = D_1$, esto es, el diámetro, y $c_{A1} = p_{A1}/RT$, se obtiene

$$N_{A1} = \frac{2D_{AB}}{D_1}(c_{A1} - c_{A2}) \tag{6.2-33}$$

Esta ecuación también se puede usar para líquidos, donde D_{AB} es la difusividad de A en el líquido.

EJEMPLO 6.2-4. Evaporación de una esfera de naftaleno

Una esfera de naftaleno con radio de 2.0 mm está suspendida en un gran volumen de aire estacionario a 3 18 K y 1 .O 1325 × 1 0^5 Pa (1 atm). Se puede suponer que la temperatura superficial del naftaleno es 3 18 K y su presión de vapor a esta temperatura es 0.555 mm de Hg. El valor de D_{AB} del naftaleno en aire a 3 18 K es 6.92 × 1 0^{-6} m^2/s. Calcule la rapidez de evaporación del naftaleno en la superficie.

Solución: El diagrama de flujo es similar al de la figura 6.2-3a. $D_{AB} = 6.92 \times 10^{-6}$ m^2/s $p_{A1} = (0.555/760)\,(1.01325 \times 10^5) = 74.0$ Pa, $p_{A2} = 0$, $r_1 = 2/1000$ m, $R = 8314$ m^3. Pa/ kg mol · K, $p_{B1} = P - p_{A1} = 1.01325 \times 10^5 - 74.0 = 1.01251 \times 10^5$ Pa, $p_{B2} = P - p_{A2} = 1.01325$ × 1 0^5 − 0. Puesto que los valores de p_{B1} y p_{B2} son muy similares,

$$p_{BM} = \frac{p_{B1} - p_{B2}}{2} = \frac{(1.0125 + 1.01325) \times 10^5}{2} = 10129 \times 10^5 \text{ Pa}$$

Sustituyendo en la ecuación (6.2-32),

$$N_{A1} = \frac{D_{AB} P (p_{A1} - p_{A2})}{RT r_1 p_{BM}} = \frac{(6.92 \times 10^{-6})(1.01325 \times 10^5)(74.0 - 0)}{8314(318)(2/1000)(1.0129 \times 10^5)}$$

$$= 9.68 \times 10^{-8} \text{ kg mol } A/\text{s} \cdot m^2$$

Si la esfera de la figura 6.2-3a se evapora, el radio r de la esfera decrece lentamente con el tiempo. La ecuación para el tiempo para que la esfera se evapore completamente puede deducirse suponiendo un estado seudoestacionario e igualando la ecuación del flujo específico de difusión (6.2-32), donde ahora r es una variable, con los moles del sólido A evaporados por tiempo dt y por área unitaria, como se calculó a partir del balance de la materia. (Para este caso véase el Problema 6.2-9). El método de balance de la materia es semejante al ejemplo 6.2-3. La ecuación final es

$$t_F = \frac{\rho_A r_1^2 RT p_{BM}}{2 M_A D_{AB} P (p_{A1} - p_{A2})} \tag{6.2-34}$$

donde r_1 es el radio de la esfera original, ρ_A la densidad de la esfera y M_A el peso molecular.

2. Difusión por un conducto de área de corte transversal no uniforme. En la figura 6.2-3b, la componente A es la difusión en estado estacionario a través de un conducto circular ahusado uniformemente, como se observa. En el punto 1 el radio es r_1 y en el punto 2 es r_2. En la posición z en el conducto, cuando A se difunde a través de B estancado, que no se difunde,

$$N_A = -\frac{\bar{N}_A}{\pi r^2} = -\frac{D_{AB}}{RT}\frac{dp_A}{(1 - p_A/P)dz} \tag{6.2-35}$$

En esta geometría, el radio variable r se puede relacionar con la posición z de la trayectoria como sigue:

$$r = \left(\frac{r_2 - r_1}{z_2 - z_1}\right) z + r_1 \tag{6.2-36}$$

Este valor de r se sustituye después en la ecuación (6.2-35) para eliminar r y se integra la ecuación.

$$\frac{\overline{N}_A}{\pi}\int_{z_1}^{z_2}\frac{dz}{\left[\left(\frac{r_2-r_1}{z_2-z_1}\right)z+r_1\right]^2}=-\frac{D_{AB}}{RT}\int_{pA1}^{pA2}\frac{dp_A}{(1-p_A/P)} \qquad \textbf{(6.2-37)}$$

Un caso semejante a éste se presenta en el problema 6.2-10.

6.2E Coeficientes de difusión de los gases

1. Determinación experimental de coeficientes de difusión. Se han empleado numerosos métodos experimentales para determinar la difusividad molecular de mezclas gaseosas binarias. Algunos de los más importantes son como sigue. Uno de ellos consiste en evaporar un líquido puro en un tubo estrecho haciendo pasar un gas sobre el extremo superior, tal como se mostró en la figura 6.2-2a. Se mide la disminución del nivel del líquido con respecto al tiempo, y la difusividad se calcula con la ecuación (6.2-26)

En otro procedimiento, dos gases puros a presiones iguales se encierran en secciones independientes de un tubo largo, separados por una división que se retira con lentitud para iniciar la difusión. Transcurrido cierto tiempo se vuelve a introducir la división y se analiza el gas de cada sección. Las diíüsividades de los vapores de sólidos como naftaleno, yodo y ácido benzoico en un gas se han obtenido midiendo la velocidad de evaporación de una esfera. Se usa entonces la ecuación (6.2-32). El problema 6.2-9 es un ejemplo de esto.

Uno de los métodos más útiles y comunes es el procedimiento de dos bulbos (N1). El aparato consiste en dos bulbos de vidrio cuyos volúmenes V_1 y V_2 m^3 están conectados por un capilar de área de sección transversal A m^2 y longitud L, de volumen muy pequeño en comparación con V_1 y V_2, tal como lo muestra la figura 6.2-4. En V_1 se introduce A puro y en V_2, Bpuro, ambos a lamismapresión. Se abre la válvula, se deja que la difusión se verifique por cierto tiempo, se cierra otra vez. Se analizan por separado las mezclas de cada cámara.

Las ecuaciones pueden deducirse si se desprecia el volumen capilar y se supone que ambos bulbos tienen siempre concentraciones uniformes. Suponiendo difusión en estado casi estacionario en el capilar,

$$J_A^* = -D_{AB}\frac{dc}{dz} = -\frac{D_{AB}(c_2-c_1)}{L} \qquad \textbf{(6.2-38)}$$

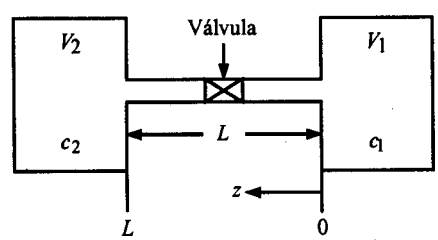


FIGURA 6.2-4. *Medición de la difusividad de gases por el mktodo de dos bulbos.*

donde c_2 es la concentración de A en V_2 al tiempo t, y c_1 en V_1. La rapidez de difusión de A que pasa hacia V_2 es igual a la rapidez de acumulación en este volumen,

$$AJ_A^* = -\frac{D_{AB}(c_2 - c_1)A}{L} = V_2 \frac{dc_2}{dt} \tag{6.2-39}$$

El valor promedio c_{prom} en equilibrio se calcula con un balance de material con base en las composiciones iniciales c_1^0 y c_2^0 cuando $t = 0$.

$$(V_1 + V_2)c_{prom} = V_1 c_1^0 + V_2 c_2^0 \tag{6.2-40}$$

Un balance similar después del tiempo t da

$$(V_1 + V_2)c_{prom} = V_1 c_1 + V_2 c_2 \tag{6.2-41}$$

Sustituyendo c_1 de la ecuación (6.2-41) en la (6.2-39), reordenando e integrando entre $t = 0$ y $t = t$, se obtiene la ecuación final:

$$\frac{c_{prom} - c_2}{c_{prom} - c_2^0} = \exp\left[-\frac{D_{AB}(V_1 + V_2)}{(L/A)(V_2 V_1)}t\right] \tag{6.2-42}$$

D_{AB} se puede calcular obteniendo c_2 con un muestreo en el tiempo t,

2. Datos experimentales de difusividad. En la tabla 6.2-l se muestran algunos valores típicos. Perry y Creen (P1) y Reid y colaboradores (R1) incluyen otras tablas. Los valores van desde 0.05×10^{-4} m^2/s), cuando está presente una molécula grande, hasta alrededor de 1.0×10^{-4} m^2/s en el caso en que está presente H_2 a temperatura ambiente. La relación entre la diíüsividad en m^2/s y pie^2/h es 1 $m^2/s = 3.875 \times 10^4$ pie^2/h.

3. Predicción de la dzjiisividad de gases. La difusividad de una mezcla binaria de gases en la región de gases diluidos, esto es, a presiones bajas cercanas a la atmosférica, se puede predecir mediante la teoría cinética de los gases. Se supone que el gas consta de partículas esféricas rígidas completamente elásticas en sus colisiones con otras moléculas, lo que implica conservación del momento lineal. En un tratamiento simplificado, se supone que no hay fuerzas de atracción o de repulsión entre las moléculas. La deducción utiliza la trayectoria libre media λ, que es la distancia promedio que una molécula recorre entre dos colisiones. La ecuación final es

$$D_{AB} = \frac{1}{3}\bar{u}\lambda \tag{6.2-43}$$

donde ü es la velocidad promedio de las moléculas. La ecuación final que se obtiene después de sustituir las expresiones de $\bar{u}$ y λ en (6.2-43) es aproximadamente correcta, pues predice en forma acertada que D_{AB} es proporcional a 1/presión, e incluye de manera aproximada, la predicción del efecto de la temperatura.

Un tratamiento mas correcto y riguroso considera las fuerzas intermoleculares de atracción y repulsión entre las moléculas, así como los diferentes tamaños de las molécula A y B. Chapman y Enskog (H3) han resuelto la ecuación de Boltzmann, que no se basa en la trayectoria libre media λ, sino que usa una función de distribución. Para resolver la fórmula se emplea una relación entre las fuerzas de atracción y repulsión para cierto par de moléculas. En el caso de un par de moléculas no polares, la función de Lennard-Jones es una aproximación bastante razonable.

TABLA *6.2-I. Coeficientes de difusión de gases a 101.32 kPa*

Sistema	*Temperatura* °C	*Temperatura* K	*Dijiisividad* [(m²/s) 10⁴ 0 cm²/s]	*Ref.*
Aire-NH,	*0*	273	0.198	(W1)
Aire-H_2O	*0*	273	0.220	(N2)
	25	298	0.260	(L1)
	42	315	0.288	(M1)
Aire-CO,	3	276	0.142	(H1)
	44	317	0.177	
Aire-H,	0	273	0.61 1	(N2)
Aire–C_2H_5OH	25	298	0.135	(M1)
	42	315	0.145	
Aire–CH_3COOH	0	273	0.106	(N2)
Aire-n-hexano	21	294	0.080	(C1)
Aire-benceno	25	298	0.0962	(L1)
Aire-tolueno	25.9	298.9	0.086	(G1)
Aire-n-butano]	0	273	0.0703	(N2)
	25.9	298.9	0.087	
H_2–CH_4	25	298	0.726	(C2)
H_2–N_2	25	298	0.784	(B1)
	85	358	1.052	
H_2–benceno	38.1	311.1	0.404	(H2)
H_2–Ar	22.4	295.4	0.83	(W2)
H_2–NH_3	25	298	0.783	(B1)
H_2–SO_2	50	323	0.61	(S1)
H_2–C_2H_5OH	67	340	0.586	(T1)
He-Ar	25	298	0.729	(S2)
He–*n*-butanol	150	423	0.587	(S2)
He-aire	44	317	0.765	(H1)
He-CH,	25	298	0.675	(C2)
He–N_2	25	298	0.687	(S2)
He-O,	25	298	0.729	(S2)
Ar-CH,	25	298	0.202	(C2)
CO_2–N_2	25	298	0.167	(W3)
CO_2–O_2	20	293	0.153	(W4)
N_2–*n*-butano	25	298	0.0960	(B2)
H_2O–CO_2	34.3	307.3	0.202	(S3)
CO-N,	100	373	0.318	(A1)
CH_3Cl–SO_2	30	303	0.0693	(C3)
$(C_2H_5)_2O$–NH_3	26.5	299.5	0.1078	(S4)

La relación final para predecir la difusividad de un par de gases con moléculas de *A y B es*

$$D_{AB} = \frac{1.8583 \times 10^{-7}\, T^{3/2}}{P\sigma_{AB}^2 \Omega_{D,AB}} \left(\frac{1}{M_A} + \frac{1}{M_B} \right)^{1/2} \qquad (6.2\text{-}44)$$

donde D_{AB} es la ditüsividad en m^2/s, T es la temperatura en K, M_A es el-peso molecular de A en kg masa/kg mol, M_B es el peso molecular de B y P es la presión absoluta en atm. El término σ_{AB} es un "diámetro promedio de colisión" y $\Omega_{D,AB}$ es una integral de colisión basada en el potencial de Lennard-Jones. Diversas referencias (B3, G2, H3, P1, R1) proporcionan los valores de σ_A, σ_B y $\Omega_{D,AB}$.

La integral de colisión $\Omega_{D,AB}$ es una relación que proporciona la desviación de un gas con interacción al compararlo con un gas de esferas rígidas de comportamiento elástico. Este valor seria 1 .O para un gas sin interacciones. La ecuación (6.2-44) predice difusividades con desviación promedio de aproximadamente 8% hasta niveles de 1000 K (R1). Para una mezcla gaseosa polar-no polar, puede aplicarse la ecuación (6.2-44) si se usa la constante de fuerza correcta para el gas polar (M1 , M2). Para pares de gases polar-polar, la función de energía potencial de *uso* común *es elpotencial de Stockmayer* (M2).

No se incluye el efecto de la concentración de A en B en la ecuación (6.2-44). Sin embargo, en gases reales con interacciones, el efecto máximo de la concentración sobre la difusividad es de más o menos 4% (G2). En muchos casos, este efecto es mucho menor, por lo que casi siempre se desprecia.

La ecuación (6.2-44) es bastante complicada y con mucha frecuencia no se dispone de algunas de las constantes como σ_{AB}, y-tampoco es fácil estimarlas. Debido a esto, se usa con más frecuencia el método semiempírico de Fuller y colaboradores (F1), que es más conveniente. Esta ecuación se obtuvo correlacionando muchos datos de reciente obtención y usa los volúmenes atómicos de la tabla 6.2-2, que se suman para cada molécula de gas. Esta ecuación es

$$D_{AB} = \frac{1.00 \times 10^{-7} T^{1.75} \left(1/M_A + 1/M_B\right)^{1/2}}{P\left[\left(\Sigma v_A\right)^{1/3} + \left(\Sigma v_B\right)^{1/3}\right]^2} \qquad (6.2\text{-}45)$$

TABLA 6.2-2. *Volúmenes atómicos de difusión para el método de Fuller, Schettler y Giddings**

Incrementos del volumen de difusión atómico y estructural, v			
C	16.5	(Cl)	19.5
H	1.98	(S)	17.0
O	5.48	Anillo aromático	-20.2
(N)	5.69	Anillo heterocíclico	-20.2
Volúmenes de difusión para moléculas simples, Σv			
H_2	7.07	CO	18.9
D_2	6.70	CO_2	26.9
He	2.88	N_2O	35.9
N_2	17.9	NH_3	14.9
O_2	16.6	H_2O	12.7
Aire	20.1	(CCl_2F_2)	114.8
Ar	16.1	(SF_6)	69.7
Kr	22.8	(Cl_2)	37.7
(Xe)	37.9	(Br_2)	67.2
Ne	5.59	(SO_2)	41.1

* Los paréntesis indican que el valor sólo se basa en unos cuantos datos.

Fuente: Reproducidocon autorizaciónde E. N. Fuller, P. D. Schettler y J. C. Giddings, *Ind. Eng. Chem.*, 58, 19(1966). Copyright de la American Chemical Society.

donde $\sum v_A$ = suma de incrementos de volúmenes estructurales (Tabla 6.2-2) y D_{AB} = m^2/s. Este método se puede aplicar a mezclas de gases no polares o una combinación polar-no polar. Su precisión no es tan buena como la de la ecuación (6.2-44).

La ecuación muestra que D_{AB} es proporcional a $1/P$ y a $T^{1.75}$. Cuando se dispone de un valor experimental de D_{AB} con ciertos valores T y P y se desea obtener el valor de D_{AB} a otros niveles de T y P, es necesario corregir el valor experimental y ajustarlo a los nuevos niveles de T y P, por medio de la relación $D_{AB} \propto T^{1.75}/P$.

4. Número de Schmidt de los gases. El *número de Schmidt* de una mezcla gaseosa diluida de *A* en *B* es adimensional y se define como

$$N_{Sc} = \frac{\mu}{\rho D_{AB}} \qquad \textbf{(6.2-46)}$$

donde μ es la viscosidad de la mezcla gaseosa, que corresponde a la viscosidad de *B* para una mezcla diluida, en Pa · s o kg/m . s; D_{AB} es la difusividad en m^2/s y p es la densidad de la mezcla en kg/m^3. Se puede suponer que el número de Schmidt es independiente de la temperatura en intervalos moderados, e independiente de la presión hasta unas 10 atm o 10 $\times 10^5$ Pa.

El número de Schmidt es la razón adimensional entre la difusividad de momento lineal molecular μ/ρ y la difusividad de masa molecular D_{AB}. Los valores del número de Schmidt para gases fluctúan entre 0.5 y 2. Para líquidos, los números de Schmidt están en el intervalo de alrededor de 100 hasta más de 10 000 para líquidos viscosos.

EJEMPLO 6.2-J. Estimación de la difusividad de una mezcla gaseosa

A través de aire *(B)* a 1 atm abs, se difunde butano1 normal *(A)*. Usando el método de Fuller y colaboradores, estime las difusividades D_{AB} a las siguientes temperaturas y compárelas con los datos experimentales:

a) A 0 °C.
b) A 25.9 °C.
c) A 0 °C y 2.0 atm abs.

Solución: Para el inciso a), P = 1.00 atm, T = 273 + 0 = 273 K, M_A (butanol) = 74.1, M_B (aire) = 29. De la tabla 6.2-2,

$$\sum v_A = 4(16.5) + 10(1.98) + 1(5.48) = 91.28 \text{ (butanol)}$$
$$\sum v_B = 20.1 \text{ (aire)}$$

Sustituyendo en la ecuación (6.2-45),

$$D_{AB} = \frac{1.0 \times 10^{-7} (273)^{1.75} (1/74.1 + 1/29)^{1/2}}{1.0\left[(91.28)^{1/3} + (20.1)^{1/3}\right]^2}$$
$$= 7.73 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

Este valor se desvía un 10% del dato experimental de 7.03 $\times 10^{-6}$ m^2/s de la tabla 6.2-l. Para el inciso b), T= 273 + 25.9 = 298.9, y al sustituir en la ecuación (6.2-45), D_{AB} = 9.05 $\times 10^{-6}$ m^2/s. La desviación de este valor con respecto al experimental de 8.70 $\times 10^{-6}$ m^2/s es de sólo 4%.

Para el inciso c), la presión total P= 2.0 atm. Con el valor calculado en a) y corrigiendo por la presión,

$$D_{AB} = 7.73 \times 10^{-6}(1.0/2.0) = 3.865 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

6.3 DIFUSIÓN MOLECULAR EN LÍQUIDOS

6.3A Introducción

La difusión de solutos en líquidos es muy importante en muchos procesos industriales, en especial en las operaciones de separación, como extracción líquido-líquido o extracción con disolventes, en la absorción de gases y en la destilación. La difusión en líquidos también es frecuente en la naturaleza, como en los casos de oxigenación de ríos y lagos y la difusión de sales en la sangre.

Resulta evidente que la velocidad de difusión molecular en los líquidos es mucho menor que en los gases. Las moléculas de un líquido están muy cercanas entre sí en comparación con las de un gas, por tanto, las moléculas del soluto A que se difunde chocarán contra las moléculas del líquido B con más frecuencia y se difundirán con mayor lentitud que en los gases. En general, el coeficiente de difusión es de un orden de magnitud 10^5 veces mayor que en un líquido. No obstante, el flujo específico en un gas no obedece la misma regla, pues es sólo unas 100 veces más rápido, ya que las concentraciones en los líquidos suelen ser considerablemente más elevadas que en los gases.

6.3B Ecuaciones para la difusión en líquidos

Puesto que las moléculas de un líquido están más próximas unas de otras que en los gases, la densidad y la resistencia a la difusión en aquél son mucho mayores. Además, y debido a esta proximidad de las moléculas, las fuerzas de atracción entre ellas tienen un efecto importante sobre la difusión. Puesto que la teoría cinética de los líquidos no está desarrollada totalmente, escribiremos las ecuaciones para la difusión en líquidos con expresiones similares a las de los gases.

En la difusión en líquidos, una de las diferencias más notorias con la difusión en gases es que las difusividades suelen ser bastante dependientes de la concentración de los componentes que se difunden.

1. Contradifusión equimolar. A partir de la expresión general de la ecuación (6.2-14) puede obtenerse una ecuación similar a la ecuación (6. l-l 1) para contradifusión equimolar, para gases en estado estacionario donde $N_A = -N_B$.

$$N_A = \frac{D_{AB}\left(c_{A1} - c_{A2}\right)}{z_2 - z_1} = \frac{D_{AB} c_{\text{prom}}\left(x_{A1} - x_{A2}\right)}{z_2 - z_1} \qquad \textbf{(6.3-1)}$$

donde N_A es el flujo específico de A en kg mol A/s . m^2, D_{AB} la difusividad de A en B en m^2/s, c_{A1} la concentración de A en kg mol A/m^3 en el punto 1, x_{A1} la fracción mol de A en el punto 1 y c_{prom} se define como

$$c_{\text{prom}} \left(\frac{\rho}{M}\right)_{\text{prom}} = \left(\frac{\rho_1}{M_1} + \frac{\rho_2}{M_2}\right) \Big/ 2 \qquad \textit{(6.3-2)}$$

donde c_{prom} es la concentración total promedio de $A + B$ en kg mol/m^3, M_1 es el peso molecular promedio de la solución en el punto 1 en kg masa/kg mol y ρ_1 es la densidad promedio de la solución en el punto 1 en kg/m^3.

La ecuación (6.3-1) usa el valor promedio de D_{AB}, que puede variar con la concentración, y el valor promedio de c, que también puede variar con la concentración. Por regla general, en la ecuación (6.3-2) se usa un promedio lineal de c. El caso de contradifusión equimolar en la ecuación (6.3-1) es muy poco frecuente.

2. *Difusión de A a través de B que no se difunde.* El aspecto más importante de difusión en líquidos corresponde al soluto *A* que se difunde en el disolvente *B*, estacionario que no se difunde. Un ejemplo es una solución diluida de ácido propiónico *(A)* en agua *(B)* en contacto con tolueno. El ácido propiónico *(A) es* el único que se difunde a través de la fase acuosa hacia la superficie límite y después en la fase del tolueno. La interfaz tolueno-agua es una barrera para la difusión de B y $N_B = 0$. Estos casos son frecuentes en la industria (T2). Si se escribe la ecuación (6.2-22) en términos de concentraciones sustituyendo $c_{prom} = P/RT$, $c_{A1} = p_{A1}/RT$ y $x_{BM} = p_{BM}/P$, se obtiene la ecuación para líquidos.

$$N_A = \frac{D_{AB} c_{prom}}{(z_2 - z_1) x_{BM}} (x_{A1} - x_{A2}) \qquad \textbf{(6.3-3)}$$

donde

$$x_{BM} = \frac{x_{B2} - x_{B1}}{\ln(x_{B2}/x_{B1})} \qquad \textbf{(6.3-4)}$$

Nótese que $x_{A1} + x_{B1} = x_{A2} + x_{B2} = 1.0$. En soluciones diluidas, x_{BM} es cercano a 1.0 y c es esencialmente constante. Entonces, la ecuación (6.3-3) se simplifica a

$$N_A = \frac{D_{AB}(c_{A1} - c_{A2})}{z_2 - z_1} \qquad \textbf{(6.3-5)}$$

EJEMPLO 6.3-l. Difusión de etanol (A) a través de agua (B)

Una solución de etanol *(A)* en agua *(B)* en forma de película estacionaria de 2.0 mm de espesor a 293 K, está en contacto con la superficie de un disolvente orgánico en el cual el etanol es soluble, pero el agua no. Por tanto, $N_B = 0$. En el punto 1, la concentración del etanol es 16.8% en peso y la solución tiene una densidad $\rho_1 = 972.8$ kg/m^3. En el punto 2, la concentración del etanol es 6.8% en peso y $\rho_2 = 988.1$ kg/m^3 (P1). La difusividad del etanol es 0.740×10^{-9} m^2/s (T2). Calcule el flujo de estado estacionario N_A.

Solución: La difusividad es $D_{AB} = 0.740 \times 10^{-9}$ m^2/s. Los pesos moleculares de *A* y *B* son $M_A = 46.05$ y $M_B = 18.02$. Para un porcentaje en peso de 6.8, la fracción mol de etanol *(A)* es la siguiente para 100 kg de solución:

$$x_{A2} = \frac{6.8/46.05}{6.8/46.05 + 93.2/18.02} = \frac{0.1477}{0.1477 + 5.17} = 0.0277$$

Entonces, $x_{B2} = 1 - 0.0277 = 0.9723$. Calculando x_{A1} de manera similar, $x_{A1} = 0.0732$ y $x_{B1} = 1 - 0.0732 = 0.9268$. Para estimar el peso molecular M_2 en el punto 2,

$$M_2 = \frac{100 \text{ kg}}{(0.1477 + 5.17)\text{kg mol}} = 18.75 \text{ kg / kg mol}$$

De manera similar, $M_1 = 20.07$. Con la ecuación (6.3-2),

$$c_{prom} = \frac{\rho_1/M_1 + \rho_2/M_2}{2} = \frac{972.8/20.07 + 988.1/18.75}{2} = 50.6 \text{ kg mol/m}^3$$

Para calcular x_{BM} con la ecuación (6.3-4) se puede emplear la media lineal, pues x_{B1} y x_{B2} son valores bastante cercanos entre sí,

$$x_{BM} = \frac{x_{B1} + x_{B2}}{2} = \frac{0.9268 + 09723}{2} = 0.949$$

Sustituyendo en la ecuación (6.3-3) y resolviendo,

$$N_A = \frac{D_{AB}\, c_{\text{prom}}}{(z_2 - z_1)x_{BM}}(x_{A1} - x_{A2}) = \frac{(0.740 \times 10^{-9})(50.6)(0.0732 - 0.0277)}{(2/1000)0.949}$$

$$= 8.99 \times 10^{-7} \text{ kg mol/s . m}^2$$

6.3C Coeficientes de difusión para líquidos

1. Determinación experimental de difusividades. Existen diversos métodos para determinar experimentalmente coeficientes de difusión en líquidos. En uno de ellos se produce una difusión en estado no estacionario en un tubo capilar y se determina la difusividad con base en el perfil de concentraciones. Si el soluto *A* se difunde en *B*, el coeficiente de difusión que se determina es D_{AB}. Además, el valor de la difusividad suele depender en gran parte de la concentración del soluto *A* que se difunde. A diferencia de los gases, la difusividad D_{AB} no es igual que D_{BA} para líquidos.

Otro método bastante común se usa una solución relativamente diluida y otra más concentrada que se introducen en cámaras ubicadas en lados opuestos de una membrana porosa de vidrio sinterizado, tal como se muestra en la figura 6.3-l. La difusión molecular se verifica a través de los pequeños poros del vidrio sinterizado, mientras se agitan ambos compartimientos. La longitud de difusión efectiva es $K_1\delta$, donde $K_1 > 1$ es una. constante que corrige por el hecho de que la trayectoria de difusión es mayor que δ cm en la realidad. En este método, estudiado por Bidstrup y Geankoplis (B4), la longitud efectiva de difusión se obtiene por calibración con un soluto de difusividad conocida como KC 1.

Para deducir la ecuación se supone una difusión de estado cuasi-estacionario en la membrana,

$$N_A = \varepsilon D_{AB} \frac{c - c'}{K_1 \delta} \qquad (6.3\text{-}6)$$

donde c es la concentración en la cámara baja en el tiempo *t*, c' es la concentración en la cámara alta y ε es la fracción de área de vidrio abierta a la difusión. Efectuando un balance de soluto *A* en la cámara alta, donde velocidad de entrada = velocidad de salida + velocidad de acumulación, y efectuando otro balance similar en la cámara baja, con el volumen $V = V'$ y combinando e integrando, la ecuación final es

$$\ln \frac{c_0 - c_0'}{c - c'} = \frac{2\varepsilon A}{K_1 \delta V} D_{AB} t \qquad (6.3\text{-}7)$$

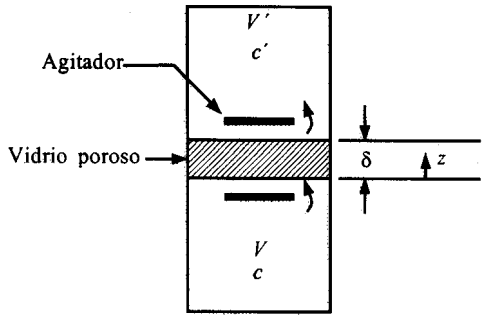


FIGURA 6.3-l. *Celda de difusión para determinar de la difusividad en un liquida*

TABLA 6.3-1. *Coeficientes de difusión para soluciones líquidas diluidas*

Soluto	Disolvente	Temperatura °C	Temperatura K	Difusividad [$(m^2\ s/10^9$ o $(cm^2/s)10^5$]	Ref.
NH_3	Agua	12	285	1.64	(N2)
	Agua	15	288	1.77	
O_2	Agua	18	291	1.98	(N2)
		25	298	2.41	(V1)
CO_2	Agua	25	298	2.00	(V1)
H_2	Agua	25	298	4.8	(V1)
Alcohol metílico	Agua	15	288	1.26	(J1)
Alcohol etílico	Agua	10	283	0.84	(Jl)
		25	298	1.24	(J1)
Alcohol *n*-Propílico	Agua	15	288	0.87	(J1)
Ácido fórmico	Agua	25	298	1.52	(B4)
Ácido acético	Agua	9.7	282.7	0.769	(B4)
		25	298	1.26	(B4)
Ácido propiónico	Agua	25	298	1.01	(B4)
HCl (9 g mol/litro)	Agua	10	283	3.3	(N2)
(2.5 g mol/litro)		10	283	2.5	(N2)
Ácido benzoico	Agua	25	298	1.21	(C4)
Acetona	Agua	25	298	1.28	(A2)
Ácido acético	Benceno	25	298	2.09	(C5)
Urea	Etanol	12	285	0.54	(N2)
Agua	Etanol	25	298	1.13	(H4)
KCl	Agua	25	298	1.870	(P2)
KCI	Etilén glicol	25	298	0.119	(P2)

donde $2\varepsilon A/K_1\delta V$ es una constante de la celda que puede determinarse con un soluto de difusividad conocida, como KC1. Los valores de c_0 y c_0' son concentraciones iniciales y los de c y c' son concentraciones fínales.

2. Datos experimentales de difusividades en líquidos. En la tabla 6.3-l se incluyen difusividades experimentales para mezclas binarias en fase líquida. Todos los valores son aplicables a soluciones diluidas del soluto que se difunde en el disolvente. Las difusividades de los líquidos suelen variar en alto grado con la concentración. Por consiguiente, los valores de la tabla 6.3-l deben usarse con precaución fuera del intervalo de soluciones diluidas. En la siguiente sección se incluyen valores para solutos biológicos. Como se observa en la tabla, los valores de difusividad son bastante pequeños y fluctúan entre 0.5×10^{-9} y 5×10^{-9} m^2/s para líquidos relativamente no viscosos. Las difusividades de los gases son mayores por un factor de 10^4 a 10^5.

6.3D Predicción de difusividades en líquidos

Las ecuaciones para predecir difusividades de solutos diluidos en líquidos son semiempíricas por necesidad, pues la teoría de la difusión en líquidos todavía no está completamente explicada. Una de las primeras teorías, la ecuación de Stokes-Einstein, se, obtuvo para una molécula esférica muy grande (A) que se difunde en un disolvente líquido (B) de moléculas pequeñas. Se usó la ley de Stokes para describir el retardo en la molécula móvil del soluto. Después se modificó al suponer que todas las moléculas son iguales, distribuidas en un retículo cúbico y cuyo radio molecular se expresa términos del volumen molar (W5),

$$D_{AB} = \frac{9.96 \times 10^{-16} T}{\mu V_A^{1/3}} \qquad (6.3\text{-}8)$$

donde D_{AB} *es* la difusividad en m^2/s, T es la temperatura en K, μ es la viscosidad de la solución en Pa . s o kg/mol · s y V_A *es* el volumen molar del soluto a su punto de ebullición normal en m^3/kg mol. Esta ecuacion es bastante exacta para moléculas muy grandes de solutos esferoidales y sin hidratación, de peso molecular 1000 o más (R1), o para casos en que V_A es superior a 0.500 $cm^3/$ kg mol (W5) en solución acuosa.

La ecuación (6.3-8) no es válida para solutos de volumen molar pequeño. Se ha intentado obtener otras deducciones teóricas, pero las fórmulas obtenidas no predicen difusividades con precisión razonable. Debido a esto, se han desarrollado diversas expresiones semiteóricas (RI). La correlación de Wilke-Chang (T3, W5) puede usarse para la mayoría de los propósitos generales cuando el soluto (A) está diluido con respecto al disolvente (B).

$$D_{AB} = 1.173 \times 10^{-16} (\varphi M_B)^{1/2} \frac{T}{\mu_B V_A^{0.6}} \qquad (6.3\text{-}9)$$

donde M_B es el peso molecular del disolvente B, μ_B es la viscosidad de B en Pa · s o kg/m · s, V_A es el volumen molar del soluto en el punto de ebullición (L2), que se puede obtener de la tabla 6.3-2 y φ es un "parámetro de asociación" del disolvente: 2.6 para el agua, 1.9 para el metanol, 1.5 para el etanol, 1 .O para el benceno, 1 .O para el éter, 1 .O para el heptano y 1 .O para los disolventes sin asociación. Cuando los valores de V_A son superiores a 500 cm^3/g mol se debe aplicar la ecuación (6.3-Q

Cuando el soluto es agua, los valores obtenidos con la ecuación (6.3-9) deben multiplicarse por el factor de 1/2.3 (R1). La ecuación (6.3-9) predice difusividades con desviación media de 10 a 15% para soluciones acuosas y aproximadamente del 25% para las no acuosas. Fuera del intervalo de 278 a 3 13 K, esta ecuación se debe manejar con precaución. Si el agua es el soluto que se difunde, se prefiere la ecuación de Reddy y Doraiswamy (R2). Skellard (S5) resume las correlaciones existentes para sistemas binarios. Geankoplis (G2) analiza y proporciona la ecuación para predecir la difusión en sistemas ternarios, en los que un soluto diluido A se difunde en una mezcla de disolventes, B *y* C. A menudo este caso se presenta de manera aproximada en los procesos industriales.

EJEMPLO 6.3-2. ***Predicción de difusividad de un liquido***
Pronostique el coeficiente de difusión de acetona (CH_3COCH_3) en agua a 25 °C y 50 °C usando la ecuación de Wilke-Chang. El valor experimental es 1.28 $\times 10^{-9}$ m^2/s a 25 °C (298 K).

Solución: Del Apéndice A.2 la viscosidad del agua a 25 °C es μ_B = 0.8937 $\times 10^{-3}$ Pa · s y a 50 °C es 0.5494 $\times 10^{-3}$. Con base en la tabla 5.3-2, para CH_3COCH_3 con 3 carbonos + 6 hidrógenos + 1 oxígeno,

$$V_A = 3(0.0148) + 6(0.0037) + 1(0.0074) = 0.0740 \text{ m}^3/\text{ kg mol}$$

TABLA *6.3-2. Volúmenes atómicos y molares en el punto de ebullición normal*

Material	*Volumen atómico* $(m^3/kg\ mol)10^3$	*Material*	*Volumen atómico* $(m^3/kg\ mol)10^3$
C	14.8	Anillo de 3 miembros como en el oxido de etileno	-6
H	3.7		
0 (excepto en los siguientes casos)	7.4		
Con enlace doble como en los carbonilos	7.4	4 miembros	-8.5
		5 miembros	-11.5
		6 miembros	-15
Enlazado a otros dos elementos		Anillo naftalénico	-30
En aldehídos, cetonas	7.4	Anilloantractnico	-47.5
En ésteres metílicos	9.1		
En éteres metílicos	9.9		
En éteres etílicos	9.9		*Volumen molecular* $(m^3/kg\ mol)10^3$
En esteres etílicos	9.9		
En ésteres superiores	Il.0		
En éteres superiores	11.0	Aire	29.9
En ácidos (-OH)	12.0	O_2	25.6
Enlazado a S, P, N	8.3	N_2	31.2
N		Br_2	53.2
Con enlace doble	15.6	Cl_2	48.4
En aminas primarias	10.5	c o	30.7
En aminas secundarias	12.0	CO_2	34.0
Br	27.0	H_2	14.3
Cl en RCHCIR	24.6	H_2O	18.8
Cl en RCl(termina1)	21.6	H_2S	32.9
F	8.7	NH_3	25.8
I	37.0	N O	23.6
S	25.6	N_2O	36.4
P	27.0	SO_2	44.8

Fuente: G. Le Bas, *The Molecular Volumes of Liquid Chemical Compunds.* Nueva York: David McKay Co., Inc.. 19 15.

Para el parámetro de asociación del agua, $\varphi = 2.6$ y $M_B = 18.02$ kg masa/kg mol. A 25 °C, $T = 298$ K. Sustituyendo en la ecuación (6.3-9),

$$D_{AB} = (1.173 \times 10^{-6})(\varphi M_B)^{1/2} \frac{T}{\mu_B V_A^{0.6}}$$

$$= \frac{(1.173 \times 10^{-6})(2.6 \times 18.02)^{1/2}(298)}{(0.8937 \times 10^{-3})(0.0740)^{0.6}}$$

$$= 1.277 \times 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$$

A 50 °C o $T = 323$ K,

$$D_{AB} = \frac{(1.173 \times 10^{-6})(2.6 \times 18.02)^{1/2}(323)}{(0.5494 \times 10^{-3})(0.0740)^{0.6}}$$

$$= 2.251 \times 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$$

Debido a su menor tamaño, los electrólitos en solución (como KCl) se disocian en cationes y aniones y se difunden con más rapidez que la molécula sin disociar. Pueden estimarse coeficientes de difusión mediante conductancias iónicas a dilución infinita en agua. Las referencias contienen datos y ecuaciones (P1, S5, T2). Los iones de carga positiva y negativa se difunden a la misma velocidad, por lo cual se mantiene la neutralidad eléctrica.

6.4 DIFUSIÓN MOLECULAR EN SOLUCIONES Y GELES BIOLÓGICOS

6.4.A Difusión de solutos biológicos en líquidos

1. Introducción. La difusión de moléculas de solutos, especialmente las macromoléculas (por ejemplo, las proteínas) en solución acuosa, es un mecanismo de gran importancia en el procesamiento y almacenamiento de sistemas biológicos y en los procesos vitales de microorganismos, animales y plantas. El procesamiento de alimentos es un campo de trascendental importancia en el que la difusión juega un papel muy relevante. El proceso de secado de soluciones líquidas de jugos de fruta, café y té, extrae el agua (y algunas veces) los constituyentes volátiles del sabor o del aroma. Estos constituyentes se difunden a través del líquido durante la evaporación.

En los procesos de fermentación, los nutrimentos, azúcares, oxígeno, etc., se difunden en los microorganismos y éstos expulsan los productos de desperdicio y hasta algunas enzimas. En el aparato conocido como "riñón artificial" los productos de desperdicio del cuerpo humano se difunden a través de la solución de sangre hacia una membrana y después, a través de la misma, a una solución acuosa.

Las macromoléculas en solución con pesos moleculares de decenas de miles o más se solían describir como *coloides,* pero en la actualidad se sabe que casi siempre producen soluciones verdaderas. El comportamiento de difusión de las macromoléculas en solución depende de su gran tamaño y sus formas, que pueden ser serpenteantes, cilíndricas o globulares (esferas o elipsoides). Además, las interacciones de las moléculas grandes con las pequeñas moléculas del disolvente o de otros solutos, afectan tanto su difusión como la de las moléculas de soluto pequeñas.

Además de la difusión de Fick que se va a estudiar, en los sistemas biológicos suele haber un transporte mediado cuando se verifican reacciones químicas. Este tipo de transporte no se analizara aquí.

2. Interacción y "enlace" en la difusión. Las macromoléculas de las proteínas son muy grandes en comparación con los solutos del tipo de la urea, el KCl y el caprilato de sodio, y suelen tener cierto número de centros de interacción o de "enlace" del soluto o de moléculas de ligandos. Un ejemplo es el sistema de enlace del oxígeno con la hemoglobina de la sangre. La albúmina del suero humano enlaza la -mayoría de los ácidos grasos libres de la sangre y aumenta su solubilidad aparente. La albúmina del suero vacuno que está presente en la leche, enlaza 23 mol de caprilato de sodio/mol de albúmina, cuando la concentración de ésta es 30 kg/m^3 de solución y la de caprilato de sodio es aproximadamente 0.05 molar (G6). Por tanto, la difusión tipo Fick de macromoléculas y moléculas de soluto pequeñas puede afectarse en alto grado por la presencia simultanea de ambos tipos de moléculas, incluso cuando están muy diluidas.

3. Métodos experimentales para determinar difusividades. Los métodos para determinar la difusividad de solutos biológicos son muy similares a los estudiados en la sección 6.3, con algunas modificaciones. En la celda de difusión de diafragma de la figura 6.3-1, la cámara se construye con lucite o teflón en lugar de vidrio, pues las moléculas de proteínas se enlazan con el vidrio. Además, la membrana porosa a través de la cual se verifica la difusión molecular es de acetato de celulosa u otros polímeros (G5, G6, K1).

4. Datos experimentales para solutos biológicos. La mayoría de los datos experimentales en textos especializados para difusividades de proteínas han sido extrapolados a una concentración cero, pues la difusividad suele estar en función de la concentración. En la tabla 6.4-l se muestran las difusividades de unas cuantas proteínas, así como de solutos pequeños, frecuentes en los sistemas biológicos.

Los coeficientes de difusión para moléculas protéicas grandes son del orden de 5×10^{-11} m^2/s en comparación con los valores de 1×10^{-9} m^2/s para solutos pequeños que se indican en la tabla 6.4-l. Esto significa que las macromoléculas se difunden a velocidades unas veinte veces menores que las moléculas de solutos pequeños con la misma diferencia de concentración.

TABLA 6.4-1. *Coeficientes de difusión de solutos biológicos en solución acuosa diluida*

Soluto	*Temperatura* °C	*Temperatura* K	*Difusividad* (m^2/s)	*Peso molecular*	*Ref.*
Urea	20	293	1.20×10^{-9}	60.1	(N2)
	25	298	1.378×10^{-9}		(G5)
Glicerol	20	293	0.825×10^{-9}	92.1	(G3)
Glicina	25	298	1.055×10^{-9}	75.1	(L3)
Caprilato de sodio	25	298	8.78×10^{-10}	166.2	(G6)
Albúmina de suero de bovino	25	298	6.81×10^{-11}	67 500	(C6)
Ureasa	25	298	4.01×10^{-11}	482 700	(C7)
	20	293	3.46×10^{-11}		(S6)
Proteína de soya	20	293	2.91×10^{-11}	361 800	(S6)
Lipoxidasa	20	293	5.59×10^{-11}	97 440	(S6)
Fibrinógeno humano	20	293	1.98×10^{-11}	339 700	(S6)
Albúmina de suero humano	20	293	5.93×10^{-11}	72 300	(S6)
y-Globulina humana	20	293	4.00×10^{-11}	153 100	(S6)
Creatinina	37	310	1.08×10^{-9}	113.1	(C8)
Sacarosa	37	310	0.697×10^{-9}	342.3	(C8)
	20	293	0.460×10^{-9}		(P3)

Cuando se incrementa la concentración de macromoléculas, como las proteínas, sería de esperarse que el coeficiente de difusión disminuyera, pues la difusividad de las moléculas de los solutos pequeños disminuye al aumentar la concentración. Sin embargo, los valores experimentales (G4, C7) muestran que la ditüsividad de las macromoléculas como las proteínas, en algunos casos disminuyen y en otros aumenta al elevarse la concentración. Las cargas en la superficie de las moléculas parecen desempeñar un papel importante en estos fenómenos.

Cuando los solutos pequeños, como urea, KCl y caprilato de sodio, que suelen estar presentes en las soluciones de macromoléculas proteicas, se difunden a través de dichas soluciones, la difusividad disminuye al aumentar la concentración del polímero (C7, G5, G6, N3). Se incluyen datos experimentales para la ditüsividad de soluto caprilato de sodio (A) a través de una solución de albúmina de suero de bovino (P), solución que muestra que la difusividad D_{AP} de A a través de P se reduce considerablemente a medida que la concentración de proteína P aumenta (G5, G6). Gran parte de esta reducción se debe al enlazamiento de A y P, debido a lo cual hay menos A libre para difundirse. El resto se debe al bloqueo de las moléculas grandes.

5. Predicción de difusividades de solutos biológicos. Para predecir la difusividad de un soluto pequeño puro en solución acuosa, se utiliza la ecuación (6.3-9) para pesos moleculares menores de 1000 o volúmenes molares del soluto que no sean mayores de 0.500 m^3/kg mol. Para solutos mayores, las ecuaciones que se conocen no son tan precisas. La expresión de Stokes-Einstein, (6.3-8) puede usarse como aproximación:

$$D_{AB} = \frac{9.96 \times 10^{-16} T}{\mu V_A^{1/3}} \qquad \textbf{(6.3-8)}$$

Es probable que la ecuación semiempírica de Polson **(P3),** que se recomienda para pesos moleculares superiores a 1000, sea más aproximada. La siguiente modificación de esta igualdad toma en consideración las diferencias de temperatura en soluciones acuosas diluidas:

$$D_{AB} = \frac{9.40 \times 10^{-15} T}{\mu (M_A)^{1/3}} \qquad \textbf{(6.4-l)}$$

donde M_A es el peso molecular de una molécula grande A. Cuando la forma de la molécula es muy diferente a la de una esfera, la ecuación debe usarse con precaución.

EJEMPLO 6.4-l. Predicción de la difusividad de la albúmina

Pronóstique la difusividad de la albúmina de suero de bovino a 298 K en solución acuosa diluida usando la expresión de Polson modificada, ecuación (6.4- 1) y compárela con el valor experimental de la tabla 6.4- 1.

Solución: El peso molecular de la albúmina de suero de bovino (A) de la tabla 6.4-l es de M_A = 67 500 kg/kg mol. La viscosidad del agua a 25 °C es 0.8937×10^{-3} Pa · s y $T = 298$ K. Sustituyendo en la ecuación (6.4-l),.

$$D_{AB} = \frac{9.40 \times 10^{-15} T}{\mu (M_A)^{1/3}} = \frac{(9.40 \times 10^{-15})298}{(0.8937 \times 10^{-3})(67500)^{1/3}}$$

$$= 7.70 \times 10^{-11} m^2/s$$

Este valor es 11% mayor que el experimental, 6.81×10^{-11} m²/s

6. Predicción de la difusividad de solutos pequeños en una solución proteica. Cuando un soluto pequeño (*A*) se difunde a través de una solución que contiene macromoléculas proteicas *(P),* no es posible usar la ecuación (6.3-9) para predecir la difusividad del soluto pequeño debido al bloqueo a la difusión que producen las moléculas grandes. Los datos necesarios para pronosticar estos efectos son la difusividad D_{AB}, del soluto *A* en el agua sola, el agua de hidratación de la proteína y el factor de obstrucción. Una ecuación semiteórica que puede utilizarse para obtener un valor aproximado de la difusividad D_{AP} de *A* en soluciones proteicas *P* de tipo globular es la siguiente, donde sólo se consideran los efectos del bloqueo (C8, G5, G6) y no hay enlace:

$$D_{AP} = D_{AB}(1 - 1.81 \times 10^{-3} c_p) \qquad (6.4\text{-}2)$$

donde c_p = kg P/m³. Entonces, la ecuación de difusión es

$$N_A = \frac{D_{AP}(c_{A1} - c_{A2})}{z_2 - z_1} \qquad (6.4\text{-}3)$$

donde c_{A1} es la concentración de *A* en kg mol *A*/m³.

7. Predicción de la difusividad con enlace. Cuando *A* está en una solución proteíca *P* y se enlaza a *P,* el flujo de difusión de *A* es igual al flujo del soluto *A* no ligado en la solución más el flujo del complejo de proteína y soluto. Hay métodos para predecir este flujo (G5, G6) cuando los datos de enlace se han obtenido experimentalmente. La ecuación que se utiliza es

$$D_{AP} = \left[D_{AB}\left(1 - 1.81 \times 10^{-3} c_p\right)\left(\frac{\%\ \text{de } A \text{ libre}}{100}\right) + D_P\left(\frac{\%\ \text{de } A \text{ enlazado}}{100}\right)\right] \qquad \textbf{(6.4-4)}$$

donde D_p es la difusividad de la proteína sola en la solución, m²/s, y el *A* libre es aquel *A* que no se enlazó a la proteína y se determina a partir del coeficiente de enlace experimental. Así, la ecuación (6.4-3) se emplea para calcular el flujo específico, donde c_A es la concentración total de *A* en la solución.

6.4B Difusión en geles biológicos

Los geles pueden considerarse como materiales semisólidos "porosos". Están constituidos por macromoléculas en solución acuosa diluida y el gel sólo constituye un porcentaje en peso muy bajo de la solución. Los "poros" o espacios abiertos de la estructura del gel están llenos de agua. Las velocidades de difusión de solutos pequeños en geles son algo inferiores a las de soluciones acuosas. El efecto principal de la estructura del gel consiste en aumentar la longitud de la trayectoria de difusión, suponiendo que no haya efectos de tipo eléctrico (S7).

Estudios recientes con microscopio electrónico (L4) han demostrado que las macromoléculas del gel de agarosa(uno de los principales constituyentes del agar) tienen forma de hilos largos relativamente rectos. Esto sugiere una estructura de macromoléculas de polisacárido en forma de red muy abierta y con un alto grado de formación de puentes de hidrógeno.

Algunos geles típicos son la agarosa, el agar y la gelatina. Diversos polímeros orgánicos existen en forma de gel en diferentes tipos de soluciones. Para medir la difusividad de solutos en geles, se usan métodos de estado no estacionario. En uno de ellos, el gel se funde y se vierte en un tubo estrecho abierto en un extremo. Después de la solidificación, el tubo se sumerge en un baño agitado que contiene el soluto

para la difusión. El soluto sale de la solución en el límite del gel y se difunde a través de éste. Después cierto tiempo, se determina la cantidad difundida para obtener el coeficiente de difusión del soluto en el gel.

En la tabla 6.4-2 se muestran algunos valores típicos de diversos solutos en varios geles. En algunos casos, se incluye la difusividad del soluto en agua pura para apreciar la disminución de la difusividad debida al gel. Por ejemplo, en la misma tabla, la difusividad de la urea en agua a 278 K es 0.880 $\times 1\ 0^{-9}$ m^2/s y con 2.9% de gelatina en peso, disminuye a 0.640 $\times 10^{-9}$ m^2/s, esto es, una diferencia del 27%.

Tanto en agar como en gelatina, la difusividad de un soluto disminuye aproximadamente de forma lineal al aumentar el porcentaje en peso del gel. No obstante, la extrapolación al 0% proporciona un valor inferior al del agua pura. Cabe hacer notar que en diferentes preparaciones o lotes de un mismo tipo de gel, las difusividades pueden variar de 10 a 20%.

EJEMPLO 6.4-2. Difusividad de urea en agar

Un tubo o puente de solución de gel con 1.05% de agar en peso a 278 K tiene 0.04 m de longitud y conecta dos soluciones acuosas de urea agitadas. La concentración de urea en la primera solución es 0.2 g mol urea por litro de solución y 0 en la otra. Calcule el flujo de urea en kg $mol/s \cdot m^2$ con estado estacionario.

TABLA *6.4-2. Difusividades típicas de solutos en soluciones acuosas de geles biológicos diluidos*

Soluto	*Gel*	*% en peso del gel en solución*	*Temperatura*		*Difusividad* (m^2/s)	*Ref.*
			K	*°C*		
Sacarosa	Gelatina	0	278	5	0.285×10^{-9}	(F2)
		3.8	278	5	0.209×10^{-9}	(F2)
		10.35	278	5	0.107×10^{-9}	(F2)
		5.1	293	20	0.252×10^{-9}	(F3)
Urea	Gelatina	0	278	5	0.880×10^{-9}	(F2)
		2.9	278	5	0.644×10^{-9}	(F2)
		5.1	278	5	0.609×10^{-9}	(F3)
		10.0	278	5	0.542×10^{-9}	(F2)
		5.1	293	20	0.859×10^{-9}	(F3)
Metanol	Gelatina	3.8	278	5	0.626×10^{-9}	(F3)
Urea	Agar	1.05	278	5	0.727×10^{-9}	(F3)
		3.16	278	5	0.591×10^{-9}	(F3)
		5.15	278	5	0.472×10^{-9}	(F3)
Glicerina	Agar	2.06	278	5	0.297×10^{-9}	(F3)
		6.02	278	5	0.199×10^{-9}	(F3)
Dextrosa	Agar	0.79	278	5	0.327×10^{-9}	(F3)
Sacarosa	Agar	0.79	278	5	0.247×10^{-9}	(F3)
Etanol	Agar	5.15	278	5	0.393×10^{-9}	(F3)
NaCl (0.05 M)	Agarosa	0	298	25	1.511×10^{-9}	(S7)
		2	298	25	1.398×10^{-9}	(S7)

Solución: Con los datos de la tabla 6.4-2 para el soluto urea a 278 K, $D_{AB} = 0.727 \times 10^{-9}$ m^2/s. Para la difusión de urea a través del agua estacionaria del gel, se puede aplicar la ecuación (6.3-3). No obstante, puesto que el valor de x_{A1} es inferior a 0.01, la solución es bastante diluida y $x_{BM} \cong 1.00$. Por tanto, es posible aplicar la ecuación (6.3-5). Las concentraciones son $c_{A1} = 0.20/1000 = 0.0002$ g mol/cm^3 = 0.20 kg mol /m^3 y $c_{A2} = 0$. Sustituyendo en la ecuación (6.3-5).

$$N_A = \frac{D_{AB}(c_{A1} - c_{A2})}{z_2 - z_1} = \frac{0.727 \times 10^{-9}(0.20 - 0)}{0.04 - 0}$$
$$= 3.63 \times 10^{-9} \text{ kg mol /s} \cdot m^2$$

6.5 DIFUSIÓN MOLECULAR EN SÓLIDOS

6.5A Introducción y tipos de difusión en sólidos

Aun cuando la rapidez de difusión de gases, líquidos y sólidos en estos últimos suelen ser menores que en los primeros y en los gases, la transferencia de masa en los sólidos es muy importante en los procesos químicos y biológicos. Algunos ejemplos son la lixiviación de sólidos como la soya y algunos minerales metálicos; el secado de madera, sales y alimentos; la difusión y reacción catalítica en catalizadores sólidos; la separación de fluidos mediante membranas; la difusión de gases a través de las películas de polímeros usadas en los empaques; y el tratamiento gaseoso de metales a temperaturas elevadas.

El transporte en sólidos se puede clasificar en dos tipos de difusión: la difusión que sigue la ley de Fick y que no depende primordialmente de la estructura del sólido; y la difusión en sólidos porosos, en la que la estructura real y los canales vacíos revisten gran importancia. Se estudiarán estos dos grandes tipos de difusión.

6.5B. Difusión en sólidos que siguen la ley de Fick

1. Deducción de las ecuaciones. Este tipo de difusión en sólidos no depende de la estructura real del sólido. La difusión se verifica cuando el fluido o soluto que se difunde, se disuelve en el sólido para formar una solución más o menos homogénea -por ejemplo, en la lixiviación, donde el sólido contiene gran cantidad de agua y el soluto se difunde a través de esta solución-, o en la difusión de zinc a través de cobre, donde se forman soluciones sólidas. También se clasifican en este grupo la difusión de nitrógeno o hidrogeno a través de caucho y en algunos casos, la difusión de agua en los alimentos, pues se pueden usar ecuaciones similares.

En general, se emplean ecuaciones simplificadas. Con la expresión general de la ecuación (6.2- 14) para difusión binaria,

$$N_A = -cD_{AB}\frac{dx_A}{dz} + \frac{c_A}{c}(N_A + N_B) \qquad \textbf{(6.2-14)}$$

el término de flujo total, $(c_A/c)(N_A + N_B)$, suele ser pequeño cuando está presente, pues c_A/c o x_A es un valor muy bajo. Por consiguiente, siempre se desprecia. Ademas, se supone que c es constante para la difusión en sólidos, con lo que se obtiene:

$$N_A = \frac{D_{AB}\, dc_A}{dz} \qquad \textbf{(6.5-1)}$$

donde D_{AB} es la difusividad en m^2/s de A a través de B y casi siempre se supone constante e independiente de la presión para los sólidos. Nótese que $D_{AB} \neq D_{BA}$ para sólidos.

La integración de la ecuación (6.5-l) para una placa sólida en estado estacionario produce la expresión.

$$N_A = \frac{D_{AB}(c_{A1} - c_{A2})}{z_2 - z_1} \tag{6.5-2}$$

En el caso de una difusión radial a través de la pared de un cilindro de radio interno r_1 y radio externo r_2 con longitud L,

$$\frac{\bar{N}_A}{2\pi r L} = -D_{AB}\frac{dc_A}{dr} \tag{6.5-3}$$

$$\bar{N}_A = D_{AB}(c_{A1} - c_{A2})\frac{2\pi L}{\ln(r_2/r_1)} \tag{6.5-4}$$

Este caso es similar a la transferencia de calor por conducción radial a través de un cilindro hueco, que se ilustra en la figura 4.3-2.

El coeficiente de difusión D_{AB} en el sólido no depende de la presión del gas o del líquido en la superficie del sólido. Por ejemplo, si en el exterior de una placa de caucho hay CO_2 gaseoso que se difunde a través del sólido, D_{AB} es independiente de p_A, esto es, la presión parcial del CO_2 en la superficie. Sin embargo, la solubilidad del CO_2 en el sólido es directamente proporcional a p_A. Esto es similar al caso de la solubilidad del O_2 en el agua, que también es directamente proporcional a la presión parcial del O_2 en el aire, de acuerdo con la ley de Henry.

La solubilidad de un gas soluto *(A)* en un sólido, por lo general se expresa como Sen m^3 de soluto (a TPE de 0 °C y 1 atm) por m^3 de sólido por atm de presión parcial de *(A)*. Además, S = cm^3 (TPE)/ atm · cm^3 de sólido en el sistema cgs. Para convertir esto a concentración c_A en el sólido en kg mol A/m^3 de sólido en unidades SI.

$$c_A = \frac{S\ m^3\ (\text{PTE})\ /m^3\ \text{sólido}\ .\ \text{atm}}{22.414\ m^3\ (\text{PTE})/\text{kg mol}\ A} p_A\ \text{atm} = \frac{Sp_A\ \text{kg mol}\ A}{22.414\ m^3\ \text{sólido}} \tag{6.5-5}$$

En unidades cgs,

$$c_A = \frac{Sp_A\ \text{g mol}\ A}{22414\ m^3\ \text{sólido}} \tag{6.5-6}$$

EJEMPLO 6.5-l. Difusión de H_2 a través de una membrana de neopreno

A través de una membrana de neopreno vulcanizado de 0.5 mm de espesor, se difunde hidrógeno gaseoso a 17 °C y 0.010 atm de presión parcial. La presión del H_2 al otro lado de la membrana es cero. Calcúlese el flujo específico de estado estacionario, suponiendo que la única resistencia a la difusión es la membrana. La solubilidad Sdel H_2 gaseoso en el neopreno a 17 °C es 0.05 1 m^3 (a PTE de 0 °C y 1 atm)/m^3 sólido · atm y la difusividad D_{AB} *es* $\mathbf{1.03 \times 10^{-10}}$ m^2/s, a 17 "C.

Solución: En la figura 5.5-l se muestra un diagrama simple de las concentraciones. La concentración de equilibrio $c_{A\,1}$ en la superficie interior calculada con la ecuación (6.5-5) es,

$$c_{A1} = \frac{Sp_A}{22.414} p_{A1} = \frac{0.051(0.010)}{22.414} = 2.28 \times 10^{-5}\ \text{kg mol}\ H_2/m^3\ \text{sólido}$$

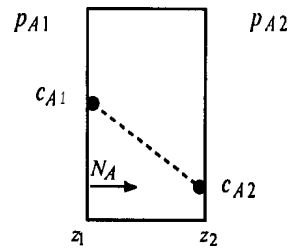


FIGURA 6.5-l. *Concentraciones para el Ej.* ***6.5-l.***

Puesto que el valor de p_{A2} del otro lado es 0, $c_{A2} = 0$. Sustituyendo en la ecuación (6.5-2) y resolviendo,

$$N_A = \frac{D_{AB}(c_{A1} - c_{A2})}{z_2 - z_1} = \frac{(1.03 \times 10^{-10})(2.28 \times 10^{-5} - 0)}{(0.5 - 0)/1000}$$
$$= 4.69 \times 10^{-12} \text{ kg mol } H_2/\text{s} \cdot \text{m}^2$$

2. Ecuaciones de permeabilidad para la difusión en sólidos. En muchos casos, los datos experimentales de difusión de gases en sólidos no se dan como difusividades y solubilidades, sino como permeabilidades, P_M, en m^3 de gas soluto A a TPE (0 °C y 1 atm presión) que se difunden por segundo por m^2 de área de corte transversal, a través de un sólido de 1 m de espesor con una diferencia de presión de 1 atm. Esto puede relacionarse con la ecuación (6.5-2) de Fick como sigue:

$$N_A = \frac{D_{AB}(c_{A1} - c_{A2})}{z_2 - z_1} \tag{6.5-2}$$

Con la ecuación (6.5-5),

$$c_{A1} = \frac{Sp_{A1}}{22.414} \qquad c_{A2} = \frac{Sp_{A2}}{22.414} \tag{6.5-7}$$

Sustituyendo la ecuación (6.5-7) en la (6.5-2),

$$N_A = \frac{D_{AB}\,S(p_{A1} - p_{A2})}{22.414(z_2 - z_1)} = \frac{P_M(p_{A1} - p_{A2})}{22.414(z_2 - z_1)} \text{ kg mol/s} \cdot \text{m}^2 \tag{6.5-8}$$

donde la permeabilidad P_M es

$$P_M = D_{AB}S\,\frac{\text{m}^3(\text{TPE})}{\text{s} \cdot \text{m}^2\text{C.S.} \cdot \text{atm/m}} \tag{6.5-9}$$

En algunas referencias de la bibliografía, la permeabilidad se da de varias maneras más. Para el sistema cgs, la permeabilidad se da como P'_M, $\text{cc(TPE)}/(\text{s} \cdot \text{cm}^2\ \text{C.S.} \cdot \text{atm/cm})$. Esto se relaciona con P_M por medio de

$$P_M = 10^{-4}\,P'_M \tag{6.5-10}$$

En algunos casos, en la bibliografía la permeabilidad se da como P''_M, *cc*(TPE)/s · cm^2C.S. . cm Hg/mm grosor). Esto se relaciona con P_M mediante

$$P_M = 7.60 \times 10^{-4} P''_M \qquad (6.5\text{-}11)$$

Cuando se trata de varios sólidos 1, 2, 3, . . ., en serie, y L_1, L_2, ... representan los espesores de cada uno y la ecuación (6.5-8) se transforma en

$$N_A = \frac{p_{A1} - p_{A2}}{22.414 \left[L_1/P_{M1} + L_2/P_{M2} + \cdots \right]} \qquad (6.5\text{-}12)$$

donde $p_{A1} - p_{A2}$ es la diferencia total de presiones parciales.

3. Difusividades, solubilidades y permeabilidades experimentales. La predicción exacta de la difusividades en sólidos es prácticamente imposible debido a un conocimiento incompleto de la teoría del estado sólido. Por consiguiente, los valores experimentales son indispensables. En la tabla 6.5-l se muestran algunos datos experimentales de difusividades, solubilidades y permeabilidades para la difusión de gases en sólidos y sólidos en sólidos.

Los gases simples como He, H_2, O_2, N_2 y CO_2, con presiones hasta de 1 o 2 atm, tienen solubilidad en sólidos como los polímeros y los vidrios, que sigue la ley de Henry y la ecuación (6.5-5) resulta válida. además, la difusividad y permeabilidad de estos gases son independientes de la concentración y, por tanto, de la presión. En cuanto al efecto de la temperatura T en K, el valor de $\ln P_M$ es

TABLA 6.5-l. *Difusividades y permeabilidades en sólidos*

Soluto (A)	*Sólido (B)*	*T(K)*	D_{AB}, *coeficiente de difusión* $[m^2/s]$	*Solubilidad, S* $\left[\frac{m^3 \text{ soluto(PTE)}}{m^3 \text{ sólido} \cdot atm}\right]$	*Permeabilidad,* P_M $\left[\frac{m^3 \text{ soluto(TPE)}}{s \cdot m^2 \cdot atm/m}\right]$	*Ref.*
H_2	Caucho vulcanizado	298	$0.85(10^{-9})$	0.040	$0.342(10^{-10})$	(B5)
O_2		298	$0.21(10^{-9})$	0.070	$0.152(10^{-10})$	(B5)
N_2		298	$0.15(10^{-9})$	0.035	$0.054(10^{-10})$	(B5)
CO_2		298	$0.11(10^{-9})$	0.90	$1.01(10^{-10})$	(B5)
H_2	Neopreno vulcanizado	290	$0.103(10^{-9})$	0.05 1		(B5)
		300	$0.180(10^{-9})$	0.053		(B5)
H_2	Polietileno	298			$6.53(10^{-12})$	(R3)
O_2		303			$4.17(10^{-12})$	(R3)
N_2		303			$1.52(10^{-12})$	(R3)
O_2	Nylon	303			$0.029(10^{-12})$	(R3)
N_2		303			$0.0152(10^{-12})$	(R3)
Aire	Cuero ingles	298			$0.15(0.68 \times 10^{-4}$	(B5)
H_2O	Cera	306			$0.16(10^{-10})$	(B5)
H_2O	Celofán	311			$0.91 - 1.82(10^{-10})$	(B5)
He	Vidrio Pyrex	293			$4.86(10^{-15})$	(B5)
		373			$20.1(10^{-15})$	(B5)
He	SiO_2	293	$2.4 - 5.5(10^{-14})$	0.01		(B5)
H_2	Fe	293	$2.59(10^{-13})$			(B5)
Al	Cu	293	$1.3(10^{-34})$			(B5)

aproximadamente una función lineal de $1/T$. Además, la difusión de un gas, por ejemplo, H_2, es independiente de los otros gases presentes tales como O_2 o N_2.

Para metales como Ni, Cd y Pt con difusión de gases como el H_2 y el O_2, se ha determinado por medios experimentales que el flujo es, en forma aproximada, proporcional a $(\sqrt{p_{A1}} - \sqrt{p_{A2}})$, por lo que la ecuación (6.5-S) no es válida (B5). Cuando se difunde agua a través de polímeros, y a diferencia de los gases simples, P_M depende en cierto grado de la diferencia relativa de presiones (C9, B5). Las monografías de Crank y Park (C9) y las de Barrer (B5) proporcionan información más detallada.

***EJEMPLO 6.5-2. Difusión** a través de una película de empaque*

Se tiene a prueba una película de polietileno de 0.00015 m (0.15 mm) de espesor para empacar un producto farmacéutico a 30 "C. Si la presión parcial del O_2 en el exterior es 0.2 1 atm y en el interiores 0.01 atm, calcule el flujo de difusión del O_2 en estado estable. Use datos de permeabilidad de la tabla 6.5-l. Suponga que las resistencias a la difusión en el exterior y en el interior de la película son despreciables en comparación con la resistencia de la propia película.

Solución: Con base en la tabla 6.5-1, $P_M = 4.17(10^{-12})$ m^3 soluto (TPE) (s . m^2 · atm/cm). Sustituyendo en la ecuación (6.5-8),

$$N_A = \frac{P_M(p_{A1} - p_{A2})}{22.414(z_2 - z_1)} = \frac{4.17(10^{-12})(0.21 - 0.01)}{22.414(0.00015 - 0)}$$
$$= 2.480 \times 10^{-10} \text{ kg mol/s . m}^2$$

Note que la película de una poliamida (nylon) tiene un valor mucho menor a la permeabilidad P_M de O_2, por lo que sería un empaque más adecuado.

4. Procesos de separación por membrana. En el capítulo 13 se describe un estudio detallado de los diversos procesos de separación por membrana, como son la separación de gases mediante membranas, la diálisis, la ósmosis inversa y la ultrafiltración.

6.5C. Difusión en sólidos porosos en los que afecta la estructura

*1. **Difusión** de líquidos en sólidos porosos.* En la sección 6.5B se aplicó la ley de Fick considerando al sólido como un material de tipo homogéneo y usando una difusividad experimental D_{AB}. En esta sección interesan los sólidos porosos que tienen canales o espacios vacíos interconectados que afectan a la difusión. En la figura 6.5-2 se muestra el corte transversal de un sólido poroso típico.

En caso de que los espacios vacíos estén totalmente llenos de agua líquida, la concentración de sal en agua en el punto 1 es c_{A1} y en el punto 2 es c_{A2}. Al difundirse en el agua por los conductos vacíos, la sal sigue una trayectoria sinuosa desconocida que es mayor que $(z_2 - z_1)$ por un factor τ, llamado *sinuosidad.* (En el sólido inerte no hay difusión.) Aplique la ecuación (6.3-5) para la difusión en estado estacionario de la sal de una solución diluida,

$$N_A = \frac{\varepsilon D_{AB}(c_{A1} - c_{A2})}{\tau(z_2 - z_1)} \tag{6.5-13}$$

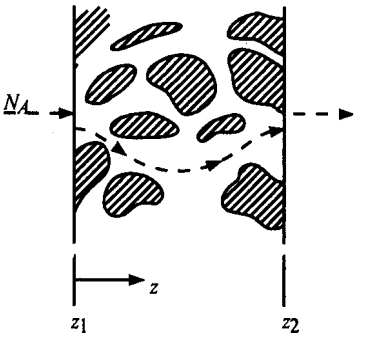


FIGURA 6.5-2. *Esquema de un sólido poroso típico.*

donde ε es la fracción de espacios vacíos, D_{AB} es la difusividad de la sal en agua y τ es un factor de corrección de la trayectoria más larga que $(z_2 - z_1)$. En sólidos de tipo inerte, τ varia desde 1.5 hasta 5. En muchos casos es conveniente combinar los términos en una expresión de difusividad efectiva:

$$D_{A\ \text{eff}} = \frac{\varepsilon}{\tau} D_{AB} \qquad \text{m}^2/\text{s} \tag{6.5-14}$$

EJEMPLO 6.5-3. Difusión de KCl en sílice porosa

Un sólido de sílice sinterizada de 2.0 mm de espesor tiene una fracción de espacios vacíos ε de 0.30 y una sinuosidad τ de 4.0. Los poros se llenan con agua a 298 K. La concentración de KCl en una de las caras se mantiene a 0.10 g mol/l y por la otra cara fluye agua pura con bastante rapidez. Despreciando las resistencias ajenas al sólido poroso, calcule la difusión en estado estacionario del KCl.

Solución: La tabla 6.3-l da un valor de la difusividad del KCl en agua de $D_{AB} = 1.87 \times 10^{-9}$ m^2/s. Además, $c_{A1} = 0.10/1000 = 1.0 \times 10^{-4}$ g mol/cm^3 = 0.10 kg mol/m^3 = y $c_{A2} = 0$. Sustituyendo en la ecuación (6.5-13),

$$N_A = \frac{\varepsilon D_{AB}(c_{A1} - c_{A2})}{\tau(z_2 - z_1)} = \frac{0.30(1.870 \times 10^{-9})(0.10 - 0)}{4.0(0.002 - 0)}$$

$$= 7.01 \times 10^{-9} \text{ kg mol KCl/s} \cdot \text{m}^2$$

2. Difusión de gases en sólidos porosos. Si los espacios vacíos de la figura 6.5-2 se llenan con gases, se presenta una situación mas o menos similar. Si los poros son muy grandes, de tal manera que la difusión sólo sea de tipo Fick, entonces la ecuación (6.5-13) para gases se transforma en

$$N_A = \frac{\varepsilon D_{AB}(c_{A1} - c_{A2})}{\tau(z_2 - z_1)} = \frac{\varepsilon D_{AB}(p_{A1} - p_{A2})}{\tau RT(z_2 - z_1)} \tag{6.4-l 5}$$

Nuevamente, el valor de la sinuosidad se determina por medios experimentales. Se supone que la difusión sólo se verifica a través de los espacios o poros y no a través de las partículas sólidas.

Una correlación de la sinuosidad en función de la fracción de espacios vacíos de diversos medios porosos no consolidados de lechos de esferas de vidrio, arena, sal, talco, etc. (S8), proporciona los siguientes valores aproximados de τ para diferentes valores de ε: $\varepsilon = 0.2$, $\tau = 2.0$; $\varepsilon = 0.4$, $\tau = 1.75$; $\varepsilon = 0.6$, $\tau = 1.65$.

Cuando los poros son bastante pequeños y del orden de magnitud de la trayectoria libre media del gas, se presentan otros tipos de difusión que se analizarán en la sección 7.6.

6.6 MÉTODOS NUMÉRICOS PARA LA DIFUSIÓN MOLECULAR EN ESTADO ESTACIONARIO EN DOS DIMENSIONES

6.6A Deducción de ecuaciones para el método numérico

1. Deducción del método para el estado estacionario: En la figura 6.6-1, un sólido bidimensional con un grosor unitario está dividido en cuadrados. Los métodos numéricos para la difusión molecular en estado estacionario son muy semejantes a los de la conducción de calor en estado estacionario que se analizaron en la sección 4.15. Por lo tanto, aquí solamente se dará un breve resumen. Puede imaginarse que el sólido dentro de un cuadrado está concentrado en el centro de él en $c_{n,\,m}$ y se llama "nodo", el cual está conectado a los nodos adyacentes mediante varillas conectoras a través de las cuales se difunde la masa.

Se efectua un balance de masa total en estado estacionario considerando que la suma de la difusión molecular hacia el área sombreada por grosor unitario debe ser igual a cero.

$$\frac{D_{AB}\,\Delta y}{\Delta x}\left(c_{n-1,\,m}-c_{n,\,m}\right)+\frac{D_{AB}\,\Delta y}{\Delta x}\left(c_{n+1,\,m}-c_{n,\,m}\right)+\frac{D_{AB}\,\Delta x}{\Delta y}\left(c_{n,\,m+1}-c_{n,\,m}\right)+\frac{D_{AB}\,\Delta x}{\Delta y}\left(c_{n,\,m-1}-c_{n,\,m}\right)=0 \qquad (6.6\text{-}1)$$

donde $c_{n,\,m}$ es la concentración de A en el nodo $n,\ m$ en kg mol A/m^3. *Al* establecer que $\Delta x = \Delta y$ y reordenar,

$$c_{n,\,m+1}+c_{n,\,m-1}+c_{n+1,\,m}+c_{n-1,\,m}-4c_{n,\,m}=0 \qquad (6.6\text{-}2)$$

2. Método de solución numérica por iteración, Para resolver la ecuación (6.6-2), se escribe una ecuación para cada punto desconocido, de lo que resultan N ecuaciones lineales para N puntos

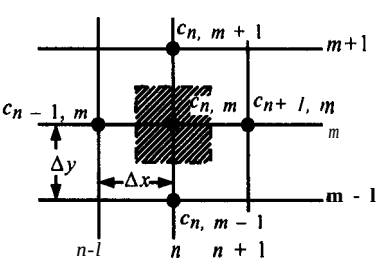


FIGURA 6.6-1. *Concentraciones y espaciamiento de los nodos para la difusión molecular bidimensional en estado estable.*

desconocidos. Para efectuar los cálculos a mano utilizando un número modesto de nodos, se puede emplear el método de iteraciónpara resolver las ecuaciones, y el lado derecho de la ecuación (6.6-2) se hace igual a un residuo N, $_m$.

$$c_{n,\,m+1} + c_{n,\,m-1} + c_{n+1,\,m} + c_{n-1,\,m} - 4c_{n,\,m} = \bar{N}_{n,\,m} \tag{6.6-3}$$

Si se iguala la ecuación a cero, $\bar{N}_{n,\,m} = 0$ en estado estacionario y $c_{n,\,m}$ se calcula mediante

$$c_{n,m} = \frac{c_{n-1,\,m} + c_{n+1,\,m} + c_{n,\,m+1} - c_{n,\,m-1}}{4} \tag{6.6-4}$$

Las ecuaciones (6.6-3) y (6.6-4) son las ecuaciones fínalos para calcular todas las concentraciones en estado estacionario.

El ejemplo 4.15- 1 para la conducción de calor en estado estacionario ilustra los pasos detallados del método de iteración, que son idénticos a los de la difusión en estado estacionario.

Una vez calculadas las concentraciones, puede determinarse el flujo específico para cada elemento como sigue. Haciendo referencia a la figura 6.6-1, el flujo específico para el nodo o elemento $c_{n,\,m}$ a $c_{n,\,m-1}$ es $(\Delta x = \Delta y)$.

$$N = \frac{AD_{AB}}{\Delta y}\left(c_{n,\,m} - c_{n,\,m-1}\right) = \frac{[(\Delta x)(1)]D_{AB}}{\Delta y}\left(c_{n,\,m} - c_{n,\,m-1}\right)$$
$$= D_{AB}(c_{n,\,m} - c_{n,m-1}) \tag{6.6-5}$$

donde el área A es Δx por 1 m de profundidad y N es en kg mol A/s. Se escriben ecuaciones para los otros elementos apropiados y se calcula la suma de los flujos especificos.

6.6B Ecuaciones para condiciones de frontera especiales para el método numérico

1. Ecuaciones para condiciones de frontera. Cuando uno de los puntos nodales c,, $_m$ esta en una frontera donde está ocurriendo una transferencia de masa convectiva hasta una concentración constante c_∞ en el fluido general que se muestra en la figura 6.6-2a, debe deducirse una ecuación diferente. Si se realiza un balance de masa en el nodo n, m, donde la masa que entra = la masa que sale en estado estable,

$$\frac{D_{AB}\,\Delta y}{\Delta x}\left(c_{n-1,\,m} - c_{n,\,m}\right) = \frac{D_{AB}\,\Delta x}{2_{AY}}\left(c_{n,\,m+1} - c_{n,\,m}\right)$$
$$+\frac{D_{AB}\,\Delta x}{2\,\dot{A}Y}\left(c_{n,\,m-1} - c_{n,\,m}\right) = k_c\,\Delta y\left(c_{n,\,m} - c_\infty\right) \tag{6.6-6}$$

donde k_c es el coeficiente de transferencia de masa convectiva en m/s que se definió con la ecuación (6.1-14).

Al establecer Δx = Ay, al reordenar y al establecer la ecuación resultante = $\bar{N}_{n,\,m}$, el residuo, se obtiene lo siguiente.

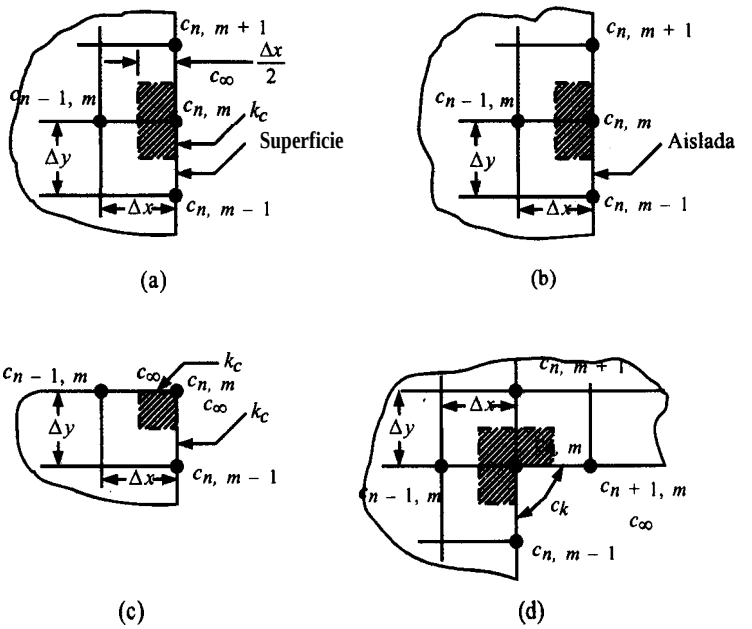


FIGURA 6.6-2. *Diferentes condiciones limitantes para la difusión en estado estacionario: a) convección en limite b) frontera aislada, c) esquina exterior con limite convectivo. d) esquina interior con limite convectivo.*

1. Para convección en un límite (Fig. 6.6-2a),

$$\frac{k_c\,\Delta x}{D_{AB}}\,c_\infty + \frac{1}{2}(2c_{n-1,\,m} + c_{n,\,m+1} + c_{n,\,m-1}) - c_{n,\,m}\left(\frac{k_c\,\Delta x}{D_{AB}} + 2\right) = \bar{N}_{n,\,m} \qquad (6.6\text{-}7)$$

Esta ecuación es semejante a la (4.15-16) para la conducción y convección de calor, pero se usa $k_c\,\Delta x/D_{AB}$ en lugar de $h\,\Delta x/k$. Del mismo modo, las ecuaciones (6.6-8) a (6.6-10) se dedujeron para las otras condiciones limitantes que se muestran en la figura 6.6-2.

2. Para un límite aislado (Fig. 6.6-2b),

$$\frac{1}{2}(c_{n,\,m+1} + c_{n,\,m-1}) + c_{n-1,\,m} - 2c_{n,\,m} = \bar{N}_{n,\,m} \qquad (6.6\text{-}8)$$

3. Para una esquina exterior con convección en el límite (Fig. 6.6-2c),

$$\frac{k_c\,\Delta x}{D_{AB}}\,c_\infty + \frac{1}{2}(c_{n-1,\,m} + c_{n,\,m-1}) - \left(\frac{k_c\,\Delta x}{D_{AB}} + 1\right) c_{n,\,m} = \bar{N}_{n,\,m} \qquad (6.6\text{-}9)$$

4. Para una esquina interior con convección en la frontera (Figura 6.6-2d),

$$\frac{k_c\,\Delta x}{D_{AB}}\,c_\infty + c_{n-1,\,m} + c_{n,\,m+1} + \frac{1}{2}(c_{n+1,\,m} + c_{n,\,m-1}) - \left(3 + \frac{k_c\,\Delta x}{D_{AB}}\right) c_{n,\,m} = \bar{N}_{n,\,m} \qquad (6.6\text{-}10)$$

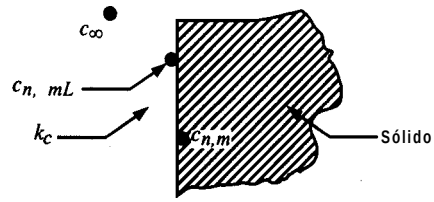


FIGURA 6.6-3. *Concentraciones en la interfaz para la transferencia de masa convectiva en una superficie sólida y con coeficiente de distribución de equilibrio* $K = c_{n,\,mL}/c_{n,\,m}$.

2. Condiciones limitantes con coeficiente de distribución. Cuando se dedujo la ecuación (6.6-7), el coeficiente de distribución K entre el líquido y el sólido en la interfaz superficial fue 1.0. El coeficiente de distribución, como se muestra en la figura 6.6-3, se define asi

$$K = \frac{c_{n,\,mL}}{c_{n,\,m}} \tag{6.6-11}$$

donde $c_{n,\,mL}$ es la concentración en el líquido adyacente a la superficie y $c_{n,\,m}$ es la concentración en el sólido adyacente a la superficie. Entonces, al deducir la ecuación (6.6-6), el miembro derecho $k_c A_Y (c_{n,\,m} - c,)$ se convierte en

$$k_c\,\Delta y(c_{n.\,mL} - c_\infty) \tag{6.6-12}$$

donde c_∞ es la concentración del volumen del fluido. Si se sustituye con $Kc_{n,\,m}$ la expresión $c_{n,\,mL}$ de la ecuación (6.6-11) en la (6.6-12) y si se multiplica y se divide entre K,

$$Kk_c\,\Delta y\left(\frac{Kc_{n,\,m}}{K} - \frac{c_\infty}{K}\right) = Kk_c\,\Delta y\left(c_{n,\,m} - \frac{c_\infty}{K}\right) \tag{6.6-13}$$

Por consiguiente, siempre que k_c aparezca como en la ecuación (6.6-7), debe remplazarse por Kk_c, y cuando aparezca c,, debe utilizarse c_∞/K. De esta manera, la ecuación (6.6-7) se transforma como sigue.

1. Para convección en un límite (Fig. 6.6-2a),

$$\left(\frac{Kk_c\,\Delta x}{D_{AB}}\right)\frac{c_\infty}{K} + \frac{1}{2}(2c_{n-1,\,m} + c_{n,\,m+1} + c_{n,\,m-1}) - c_{n,\,m}\left(\frac{Kk_c\,\Delta x}{D_{AB}}\right) = \bar{N}_{n\,m} \tag{6.6-14}$$

Las ecuaciones (6.6-9) y (6.6-10) pueden reescribirse de modo semejante, como sigue:

2. Para una esquina exterior con convección en el límite (Fig. 6.6-2c),

$$\left(\frac{Kk_c\,\Delta x}{D_{AB}}\right)\frac{c_\infty}{K} + \frac{1}{2}(c_{n-1,m} + c_{n,\,m-1}) - \left(\frac{Kk_c\,\Delta x}{D_{AB}} + 1\right)c_{n,\,m} = \bar{N}_{n,\,m} \tag{6.6-15}$$

3. Para una esquina interior con convección en el límite (Fig. 6.6-2d),

$$\left(\frac{Kk_c\,\Delta x}{D_{AB}}\right)\frac{c_\infty}{K} + c_{n-1,\,m} + c_{n,\,m+1} + \frac{1}{2}(c_{n+1,\,m} + c_{n,\,m-1}) - \left(3 + \frac{Kk_c\,\Delta x}{D_{AB}}\right)c_{n,\,m} = \bar{N}_{n,\,m} \tag{6.6-16}$$

EJEMPLO 6.6-l. ***Método numérico para la difusión por convección y en estado estacionario***

Para la cámara sólida hueca bidimensional que se muestra en la figura 6.6-4, determine las concentraciones en los nodos como se observan en estado estacionario. En las superficies interiores, las concentraciones permanecen constantes a 6.00×10^{-3} kg mol/m^3. En las superficies exteriores, el coeficiente de convecciones $k_c = 2 \times 10^{-7}$ m/s y $c_\infty = 2.00 \times 10^{-3}$ kg mol/m^3. La difusividad en el sólido es $D_{AB} = 1.0 \times 10^{-9}$ m^2/s. El tamaño de la rejilla es Δx = Ay = 0.005 m. Además, determine las velocidades de difusión a una profundidad de 1.0 m. El coeficiente de distribución es K = 1.0.

Solución: Para simplificar los cálculos, todas las concentraciones se multiplican por 10^3. Puesto que la cámara es simétrica, efectuamos los cálculos sobre la porción sombreada de 1/8 que se muestra. Los valores fijos conocidos son $c_{1,3} = 6.00$, $c_{1,4} = 6.00$, $c_\infty = 2.00$. Debido a la simetría, $c_{1,2} = c_{2,3}$, $c_{2,5} = c_{2,3}$, $c_{2,1} = c_{3,2}$, $c_{3,3} = c_{3,5}$. Con el fin de realizar los cálculos más rápidamente, haremos estimaciones de las concentraciones desconocidas como sigue: $c_{2,2} = 3.80$, $c_{2,3} = 4.20$, $c_{2,4} = 4.40$, $c_{3,1} = 2.50$, $c_{3,2} = 2.70$, $c_{3,3} = 3.00$, $c_{3,4} = 3.20$.

Para los puntos interiores $c_{2,2}$, $c_{2,3}$ y $c_{2,4}$ usamos las ecuaciones (6.6-3) y (6.6-4); para el punto de convección de la esquina $c_{3,1}$, la ecuación (6.6-9); para los otros puntos de convección $c_{3,2}$, $c_{3,3}$, $c_{3,4}$, la ecuación (6.6-7). El término $k_c\,\Delta x/D_{AB} = (2 \times 10^{-7})(0.005)/(1.0 \times 10^{-9}) = 1.00$.

Primera aproximación. Se empieza con $c_{2,2}$ y se usa la ecuación (6.6-3) para calcular el residuo $\bar{N}_{2,2}$.

$$c_{1,2} + c_{3,2} + c_{2,1} + c_{2,3} - 4c_{2,2} = \bar{N}_{2,2}$$
$$4.20 + 2.70 + 2.70 + 4.20 - 4(3.80) = -1.40$$

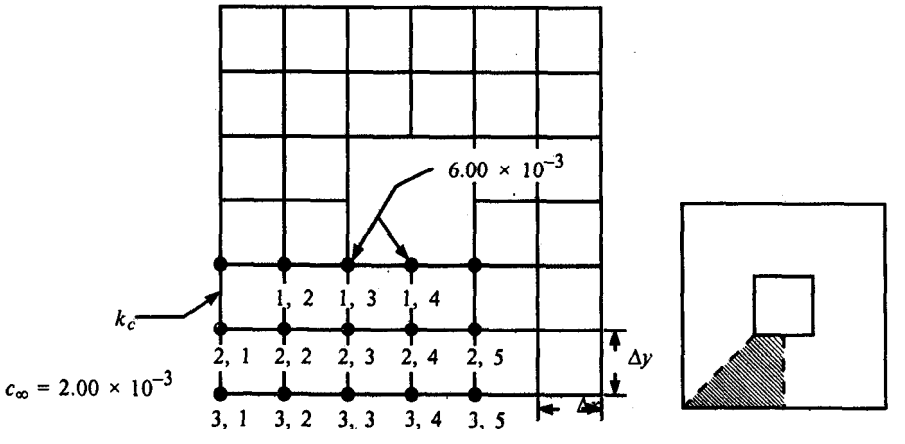


FIGURA 6.6-4 *Concentraciones para la cámara hueca del ejemplo 6.6-l.*

En consecuencia, $c_{2,2}$ no se encuentra en estado estacionario. En seguida hacemos que $\overline{N}_{2,2}$ sea cero y calculamos un nuevo valor de $c_{2,2}$ a partir de la ecuación (6.6-4),

$$c_{2,2} = \frac{c_{1,2} + c_{3,2} + c_{2,1} + c_{2,3}}{4} = \frac{4.20 + 2.70 + 2.70 + 4.20}{4} = 3.45$$

Este nuevo valor de $c_{2,2}$ sustituye al valor antiguo.

Para $c_{2,3}$,

$$c_{2,2} + c_{2,4} + c_{1,3} + c_{3,3} - 4c_{2,3} = \overline{N}_{2,3}$$

$$3.45 + 4.40 + 6.00 + 3.00 - 4(4.20) = 0.05$$

$$c_{2,3} = \frac{c_{2,2} + c_{2,4} + c_{1,3} + c_{3,3}}{4} = \frac{3.45 + 4.40 + 6.00 + 3.00}{4} = 4.21$$

Para $c_{2,4}$,

$$c_{2,3} + c_{2,5} + c_{1,4} + c_{3,4} - 4c_{2,4} = \overline{N}_{2,4}$$

$$4.21 + 4.21 + 6.00 + 3.20 - 4(4.40) = 0.02$$

$$c_{2,4} = \frac{c_{2,3} + c_{2,5} + c_{1,4} + c_{3,4}}{4} = \frac{4.21 + 4.21 + 6.00 + 3.20}{4} = 4.41$$

Para $c_{3,1}$, se utiliza la ecuación (6.6-9):

$$(1.0)c_{\infty} + \frac{1}{2}(c_{2,1} + c_{3,2}) - (1.0 + 1)\,c_{3,1} = \overline{N}_{3,1}$$

$$(1.0)2.00 + \text{f}(2.70 + 2.70) - 2.0(2.50) = -0.30$$

Al igualar la ecuación (6.6-9) a cero y despejar $c_{3,1}$,

$$(1.0)2.00 + \frac{1}{2}(2.70 + 2.70) - (2.0)c_{3,1} = 0 \qquad c_{3,1} = 2.35$$

Para $c_{3,2}$, se emplea la ecuación (6.6-7).

$$(1.0)c_{\infty} + \frac{1}{2}(2 \times c_{2,2} + c_{3,1} + c_{3,3}) - (1.0 + 2)c_{3,2} = \overline{N}_{3,2}$$

$$(1.0)2.00 + \frac{1}{2}(2 \times 3.45 + 2.35 + 3.00) - (3.0)2.70 = 0.03$$

$$(1.0)2.00 + \frac{1}{2}(2 \times 3.45 + 2.35 + 3.00) - (3.0)c_{3,2} = 0 \qquad c_{3,2} = 2.71$$

Para $c_{3,3}$,

$$(1.0)c_{\infty} + \frac{1}{2}(2 \times c_{2,3} + c_{3,2} + c_{3,4}) - (3.0)c_{3,3} = \overline{N}_{3,3}$$

$$(1.0)2.00 + \frac{1}{2}(2 \times 4.21 + 2.71 + 3.20) - (3.0)3.00 = 0.17$$

$$(1.0)2.00 + \frac{1}{2}(2 \times 4.21 + 2.71 + 3.20) - (3.0)c_{3,3} = 0 \qquad c_{3,3} = 3.06$$

Para $c_{3,4}$

$$(1.0)c_\infty + \frac{1}{2}(2 \times c_{2,4} + c_{3,3} + c_{3,5}) - (3.0)c_{3,4} = \bar{N}_{3,4}$$

$$(1.0)2.00 + \frac{1}{2}(2 \times 4.41 + 3.06 + 3.06) - (3.0)3.20 = -0.13$$

$$(1.0)2.00 + \frac{1}{2}(2 \times 4.41 + 3.06 + 3.06) - (3.0)c_{3,4} = 0 \qquad c_{3,4} = 3.16$$

Una vez que se termina un cálculo por el mapa de rejilla, se empieza una segunda aproximación utilizando los nuevos valores calculados e iniciando con $c_{2,2}$ o con cualquier otro nodo. Esto se sigue realizando hasta que todos los residuos sean tan pequeños como se desee. Los valores finales después de tres aproximaciones son $c_{2,2} = 3.47$, $c_{2,3} = 4.24$, $c_{2,4} = 4.41$, $c_{3,1} = 2.36$, $c_{3,2} = 2.72$, $c_{3,3} = 3.06$, $c_{3,4} = 3.16$. Para calcular las velocidades de difusión, primero se calcula la tasa de difusión convectiva total, dejando la superficie inferior en los nodos $c_{3,1}, c_{3,2}, c_{3,3}$ y $c_{3,4}$ para una profundidad de 1.0 m.

$$N = k_c(\Delta x \cdot 1)\left[\frac{c_{3,1} + c_\infty}{2} + (c_{3,2} - c_\infty) + (c_{3,3} + c_\infty) + \frac{c_{3,4} + c_\infty}{2}\right]$$

$$= (2 \times 10^{-7})(0.005 \times 1)\left[\frac{2.36 - 2.00}{2} + (2.72 - 2.00)\right.$$

$$\left. + (3.06 - 2.00) + \frac{3.16 - 2.00}{2}\right] \times 10^{-3}$$

$$= 2.540 \times 10^{-12} \text{ kg mol/s}$$

Nótese que las primera y cuarta trayectoria incluyen sólo $\frac{1}{2}$ de una superficie. En seguida se calcula la velocidad de difusión total en el sólido que entra en la superficie superior interior, utilizando una ecuación parecida a la ecuación (6.6-5).

$$N = \frac{D_{AB}(\Delta x \cdot 1)}{A Y}\left[\left(c_{1,3} - c_{2,3}\right) + \frac{c_{1,4} + c_{2,4}}{2}\right]$$

$$= \frac{(1.0 \times 10^{-9})(0.005 \times 1)}{0.005}\left[(6.00 - 4.24) + \frac{6.00 - 4.41}{2}\right] \times 10^{-3}$$

$$= 2.555 \times 10^{-12} \text{ kg mol/s}$$

En estado estacionario, la velocidad de difusión que sale por convección suele ser igual a la que entra por difusión, y estos resultados son una verificación razonable. Si se emplean rejillas menores se lograra aun más precisión. Nótese que los resultados para la velocidad de difusión deben multiplicarse por 8.0 para la cámara completa.

PROBLEMAS

6.1.1. ***Difusión de metano a través de helio.*** Un tubo contiene CH_4 y He gaseosos a 101.32 kPa de presión y 298 K. En un punto, la presión parcial del metano es $p_{A1} = 60.79$ kPa y en otro 0.02 m, de distancia $p_{A2} = 20.26$ kPa. Si la presión total es constante en todo el tubo, calcule el flujo específico de CH_4 (metano) en estado estacionario para contradifusión equimolar.

Respuesta: $J^*_{Az} = 5.52 \times 10^{-5}$ kg mol A/s · m^2 (5.52×10^{-6} g mol A/s · cm^2)

6.1-2. ***Difusión de CO_2 en una mezcla binaria de gases.*** Una corriente de CO_2 gaseoso se difunde en estado estacionario a través de un tubo de 0.20 m de longitud con un diámetro de 0.01 m que contiene N_2 a 298 K. La presión total es constante e igual a 101.32 kpa. La presión parcial del CO_2 en un extremo es 456 mm Hg y 76 mm Hg en el otro. La difusividad D_{AB} es 1.67×10^{-5} m^2/s a 298 K. Calcule el flujo específico de CO_2 en unidades cgs y SI para contradifusión equimolar.

6.2-l. ***Contradifusión equimolar de una mezcla binaria de gases.*** Un conducto de 5 mm de diámetro y 0.1 m de longitud contiene helio y nitrógeno gaseoso a 298 K y a presión uniforme constante de 1.0 atm abs. La presión parcial del He en un extremo del tubo es 0.060 atm y en el otro es 0.020 atm. La difusividad puede obtenerse de la tabla 6.2-l. Calcule lo siguiente para contradifusión equimolar en estado estacionario.

a) Flujo de He en kg mol/s . m^2 y g mol/s · cm^2.
b) Flujo de N_2.
c) Presión parcial del He en un punto a 0.05 m de cualquiera de los extremos.

6.2-2. ***Contradifusión equimolar de NH_3 y N_2 en estado estable.*** A través de un tubo recto de vidrio de 2.0 pies (0.610 m) de longitud, con diámetro'intemo de 0.080 pie (24.4 mm), se produce una contradifusión de amoniaco gaseoso (*A*) y nitrógeno gaseoso (*B*) a 298 K y 101.32 kPa. Ambos extremos del tubo están conectados a grandes cámaras de mezclado colocadas a 101.32 kPa. La presión parcial de NH_3 en una cámara es constante e igual a 20.0 kPa y en la otra cámara la presión es 6.666 kPa. La difusividad a 298 K y 101.32 kPa es 2.30×10^{-5} m^2/s.

a) Calcule la difusión del NH_3 en lb mol/h y kg mol/s.
b) Calcule la difusión del N_2.
c) Calcule las presiones parciales en un punto situado a 1.0 pie (0.305 m) en el tubo y grafíquense p_A, p_B y *P* en función de la distancia z.

Respuesta: a) Difusión de $NH_3 = 7.52 \times 10^{-7}$ lb mol *A*/h, 9.48×10^{-11} kg mol *A*/s;
c) $p_A = 1.333 \times 10^4$ Pa

6.2-3 ***Difusión de A a través de B en reposo y efecto del tipo de limite sobre el flujo específico.*** Se difunde amoniaco gaseoso a través de N_2 en estado estacionario, donde N_2 es el gas que no se difunde, puesto que es insoluble en uno de los límites. La presión total es 1.013×10^5 Pa y la temperatura marca 298 K. La presión parcial de NH_3 en un punto es 1.333×10^4 Pa y en el otro punto, situado a una separación de 20 mm, es 6.666×10^3 Pa. El valor de D_{AB} para la mezcla a 1.013×10^5 Pa y 298 K es 2.30×10^{-5} m^2/s.

a) Calcule el flujo específico de NH_3 en kg mol /s · m^2.
b) Haga lo mismo que en (a) pero suponiendo que el N_2 también se difunde, esto es, ambos límites son permeables a los dos gases y el flujo específico es una contradifusión equimolar. ¿En qué caso es mayor el flujo específico?

Respuesta: a) $N_A = 3.44 \times 10^{-6}$ kg mol/s · m^2

6.24. Difusión de metano a través de helio que no se difunde. Una corriente de metano gaseoso se difunde en un tubo recto de 0.1 m de longitud que contiene helio a 298 K y a presión total de 1.01325 $\times 10^5$ Pa. La presión parcial de CH_4 en un extremo es 1.400×10^4 Pa y en el otro extremo es 1.333×10^3 Pa. El helio es insoluble en uno de los límites, por lo que es un material en reposo que no se difunde. La difusividad puede encontrarse en la tabla 6.2-l. Calcule el flujo específico de metano en kg mol/s · m^2 en estado estable.

6.2-5. Transferencia de masa de una esfera de naftaleno al aire. Se verifica una transferencia de masa de una esfera de naftaleno con radio igual a 10 mm. La esfera esta en un gran volumen de aire en reposo a 52.6 °C y 1 atm abs de presión. La presión de vapor del naftaleno a 52.6 °C es 1.0 mm Hg. La difusividad del naftaleno en el aire a 0 °C es 5.16×10^{-6} m^2/s. Calcule la velocidad de evaporación del naftaleno de la superficie en kg mol/s · m^2. *[Nota:* La difusividad puede corregirse con respecto a la temperatura mediante el factor de corrección de temperatura de Fuller y colaboradores, de la ecuación (6.2-45.)]

6.2-6. ***Estimación de la difusividad de un gas binario.*** Pronostique la difusividad usando el método de Fuller y colaboradores de una mezcla gaseosa de etanol (CH_3CH_2OH) y metano (CH_4).
a) A 1.0132×10^5 Pa y 298 y 373 K.
b) A 2.0265×10^5 Pa y 298 K.

Respuesta: a) $D_{AB} = 1.43 \times 10^{-5}$ m²/s (298 K)

6.2-7. ***Flujo de difusión y efecto de la temperatura y de la presión.*** En un tubo de 0.11 m de longitud que contiene N_2 y CO gaseosos a presión total de 1.0 atm abs, se verifica una contradifusión equimolar en estado estacionario. La presión parcial N_2 es 80 mm Hg en un extremo y 10 mm en el otro. Pronostique el valor de D_{AB} con el método de Fuller y colaboradores.
a) Calcule el flujo específico en kg mol/s · m² a 298 K para el N_2
b) Repita a 473 K. ¿Hay un aumento del flujo específico?
c) Repita a 298 K, pero a una presión total de 3.0 atm abs. La presión parcial de N_2 permanece a 80 y 10 mm Hg, como en el inciso a). ¿Hay algún cambio del flujo específico?

Respuesta: a) $D_{AB} = 2.05 \times 10^{-5}$ m²/s, $N_A = 7.02 \times 10^{-7}$ kg mol/s · m²;
b) $N_A = 9.92 \times 10^{-7}$ kg mol/s · m²;
c) $N_A = 2.34 \times 10^{-7}$ kg mol/s · m²

6.2-8. ***Pérdidas de agua por evaporación en un canal de irrigación.*** Por un canal de irrigación subterráneo cubierto fluye agua a 25 "C. Cada 100 pies hay una línea de ventilación de 1.0 pulg de diámetro interno y 1 .O pie de longitud, que sale a la atmósfera a 25 "C. Hay diez líneas de ventilación en el canal de 1000 pies. Se puede suponer que el aire exterior está seco. Calcule la pérdida total de agua por evaporación en lb_m/d. Suponga que la presión parcial del vapor de agua en la superficie de la misma es su presión de vapor, 23.76 mm Hg a 25 "C. Use la difusividad de la tabla 6.2-l.

6.2-9. ***Tiempopara la evaporación completa de una esfera.*** Una gota de tolueno líquido se mantiene a una temperatura uniforme de 25.9 °C y se suspende en el aire mediante un alambre fino. El radio inicial es $r_1 = 2.00$ mm. La presión de vapor del tolueno a 25.9 °C es $P_{A1} = 3.84$ kPa y la densidad del tolueno líquido es 866 kg/m³.
a) Deduzca la ecuación (6.2-34) para predecir el tiempo t_F que tardara la gota en evaporarse completamente en un gran volumen de aire inmóvil. Muestre todos los pasos.
b) Calcule el tiempo en segundos que tardara la evaporación completa,

Respuesta: b) $t_F = 1388$ s

6.210. ***Difusión en un área de corte transversal no uniforme.*** El amoniaco gaseoso *(A)* se difunde en estado estacionario a través de N_2 (B) mediante contradifusión equimolar en un conducto de 1.22 m de largo a 25 °C y a presión total de 101.32 kPa absolutas. La presión parcial del amoniaco en el extremo izquierdo es de 25.33 kPa y de 5.066 kPa en el otro extremo. El corte transversal del conducto tiene forma de un triangulo equilátero; la longitud de cada lado del triangulo es de 0.0610 m en el extremo izquierdo, y se va ahusando uniformemente hasta que alcanza 0.0305 m en el extremo derecho. Calcule el flujo específico molar del amoniaco. La difusividad es $D_{AB} = 0.230 \times 10^{-4}$ m²/s.

6.3-l. ***Difusión de A a través de B en un liquido estacionario.*** El soluto HCl *(A)* se difunde a través de una película delgada de agua *(B)* de 2.0 mm de espesor a 283 K. La concentración del HCl en el punto 1, en uno de los límites de la película, es 12.0% de HCl en peso (densidad $\rho_1 = 1060.7$ kg/m³), y en el otro límite, en el punto 2, es 6.0% de HCl en peso ($\rho_2 = 1030.3$ kg/m³). El coeficiente de difusión de HCl en agua es 2.5×10^{-9} m²/s. Suponiendo estado estable y uno de los límites impermeables al agua, calcule el flujo específico de HCl en kg mol/s · m².

Respuesta: $N_A = 2.372 \times 10^{-6}$ kg mol/s · m²

6.3-2. Difusión de amoniaco en una solucidn acuosa. Una solución de amoniaco *(A)*–agua *(B)* a 278 K y 4.0 mm de espesor esta en contacto en una de sus superficies con un líquido orgánico. La concentración de amoniaco en la fase orgánica se mantiene constante, y es tal que la concentración de equilibrio del amoniaco en el agua en esta superficie es 2.0% de amoniaco en peso (la densidad de la solución acuosa es 991.7 kg/m^3) y la concentración del amoniaco en agua en el otro extremo de la película situado a una distancia de 4.0 mm, es de 10% en peso (densidad igual a 0.9617 g/cm^3). El agua y el producto orgánico son insolubles entre sí. El coeficiente de difusión del NH_3 en agua es 1.24×10^{-9} m^2/s.

a) Calcule el flujo específico N_A en kg $mol/s \cdot m^2$ en estado estacionario.
b) Calcule el flujo N_B. Explique su respuesta.

6.3-3. Estimación de la difusividad liquida. Se desea predecir el coeficiente de difusión del ácido acético diluido (CH_3COOH) en agua a 282.9 K y a 298 K, por el método de Wilke-Chang. Compare los valores estimados con los experimentales de la tabla 6.3-l.

Respuesta: $D_{AB} = 0.89 \times 10^{-9}$ m^2/s (282.9 K); $D_{AB} = 1.396 \times 10^{-9}$ m^2/s (298 K).

6.3-4. Estimación de la difusividad de metano1 en H_2O. Se ha determinado experimentalmente que la difusividad en agua del metano1 diluido es 1.26×10^{-9} m^2/s a 288 K.

a) Estime la difusividad a 293 K usando la ecuación de Wilke-Chang.
b) Estime la difusividad a 293 K por medio de la corrección del valor experimental de 288 K a 293K. (Sugerencia: Proceda usando la relación $D_{AB} \propto T/\mu_B$).

6.4-I. Predicción de la difusividad de la enzima ureasa en solucidn. Pronostique la difusividad de la enzima ureasa en una solución acuosa diluida a 298 K por el método modificado de Polson y compare el resultado con el valor experimental de la tabla 6.4- 1.

Respuesta: Valor estimado $D_{AB} = 3.995 \times 10^{-11}$ m^2/s

6.4-2. Difusión de sacarosa en gelatina. Una capa de gelatina en agua de 5 mm de espesor y que contiene 5.1% de gelatina en peso a 293 K, separa dos soluciones de sacarosa. La concentración de sacarosa en la solución de una de las superficies de la gelatina es constante e igual a 2.0 g sacarosa/100 mL de solución y en la otra superficie es 0.2 g/100 mL. Calcule el flujo específico de sacarosa en kg $sacarosa/s \cdot m^2$ a través del gel en estado estable.

6.4-3. Difusión del oxígeno en una solucidn proteica. Se difunde oxígeno a través de una solución de albúmina sérica de bovino (ASB) a 298 K. Se ha demostrado que el oxígeno no se enlaza a la ASB. Pronostique la difusividad D_{AP} del oxígeno en una solución proteica que contiene ll g de proteína/100 mL de solución. (*Nota:* Busque en la tabla 6.3-1 la difusividad del O_2 en el agua).

Respuesta: $D_{AP} = 1.930 \times 10^{-9}$ m^2/s

6.4-4. Difusión del ácido úrico en una solucidn proteica y enlace. Se difunde ácido úrico *(A)* a 37 °C en una solución acuosa de proteínas *(P)* que contiene 8.2 g de proteína000 mL de solución. El ácido úrico se enlaza a las proteínas en el intervalo de concentraciones presentes, se enlaza 1.0 g mol de ácido a las proteínas por ca& 3.0 g mol de ácido total presente en la solución. La difusividad D_{AB} del ácido úrico en el agua es de 1.21×10^{-5} cm^2/s y $D_p = 0.091 \times 10^{-5}$ cm^2/s.

a) Si se supone que no hay enlace, pronostique la relación D_{AP}/D_{AB} debida únicamente a efectos de bloqueo.
b) Si se supone bloqueo más efectos de enlace, prediga la razón D_{AP}/D_{AB}. Compárela con el valor experimental para D_{AP}/D_{AB} de 0.616 (C8).
c) Pronostique el flujo específico en g de ácido $úrico/s \cdot cm^2$ para una concentración de ácido de 0.05 g/L en el punto (1) y 0 g/L en el punto (2) a una distancia de 1.5 μm.

Respuesta: c) $N_A = 2.392 \times 10^{-6}$ $g/s \cdot cm^2$

6.5-l. *Difusión de CO_2 a través de caucho.* Para cerrar el orificio de un recipiente se emplea un tapón plano de 30 mm de espesor con área de 4.0×10^{-4} m^2 de caucho vulcanizado. El recipiente contiene CO_2 gaseoso a 25 °C y 2.0 atm de presión. Calcule el escape o difusión

total de CO_2 a través del tapón al exterior en kg mol CO_2/s en estado estacionario. Suponga que la presión parcial de CO_2 en el exterior es cero. Con base en los datos de Barrer (BS), la solubilidad del CO_2 gaseoso es 0.90 m^3 gas (a TPE, 0°C y 1 atm) por m^3 de caucho por atm de presión de CO_2. La difusividad es 0. ll $\times 10^{-9}$ m^2/s.

Respuesta: 1.178 $\times 10^{-13}$ kg mol CO_2/s

6.5-2. Escape de hidrógeno a través de caucho de neopreno. Una corriente de hidrógeno gaseoso puro a 2.0 atm abs de presión y 27 °C, fluye por una placa de caucho de neopreno vulcanizado de 5 mm de espesor. Con los datos de la tabla 6.5-1, calcule el flujo específico de difusión en kg mol /s · m^2 en estado estacionario estable. Suponga que no hay resistencia a la difusión en el exterior de la placa y que la presión parcial de H_2 en el exterior es cero.

6.5-3. Relación entre la difusividad y la permeabilidad. Una corriente de hidrógeno gaseoso se difunde a través de una lámina de caucho vulcanizado de 20 mm de espesor a 25°C. La presión parcial del H_2 en el interior es 1.5 atm y en el exterior es 0. Con los datos de la tabla 6.5-1, calcule lo siguiente:

a) La difusividad D_{AB} a partir de la permeabilidad P_M y la solubilidad S, y compárela con el valor de la tabla 6.5-l.
b) El flujo específico N_A de H_2 en estado estacionario.

Respuesta: b) $N_A = 1.144 \times 10^{-10}$ kg mol/s . m^2

6.5-4 Pérdidas en un tubo de neopreno. En un tubo de neopreno de 3.0 mm de diámetro interior, y 11 mm de diámetro exterior, fluye hidrógeno gaseoso a 2.0 atm y 27 "C. Calcule el escape de H_2 a través del tubo de 1.0 m de longitud en kg mol H_2/s en estado estacionario.

6.5-5. ***Difusión a través de membranas en serie.*** Una corriente de hidrógeno gaseoso a 2.0 atm y 30 °C se difunde a través de una membrana de nylon de 1.0 mm de espesor y de una membrana de polietileno de 8.0 mm de espesor colocada en serie. La presión parcial en el otro extremo de las dos películas es 0 atm. Suponiendo que no hay otras resistencias, calcule el flujo específico N_A en estado estacionario.

6.5-6. Difusión de CO_2 en un lecho empacado con arena. Se desea calcular la velocidad de difusión del CO_2 gaseoso en aire a través de un lecho de empaque poco compacto, formado por arena a 276 K y con presión total de 1 .O 13 $\times 10^5$ Pa. La profundidad del lecho es de 1.25 m y la fracción de espacios vacíos ε es 0.30. La presión parcial del CO_2 en la parte superior del lecho es 2.026 $\times 10^3$ Pa y es 0 Pa en el fondo. Use un valor de τ de 1.87.

Respuesta: $N_A = 1.609 \times 10^{-9}$ kg mol CO_2/s . m^2

6.5-7. Empacado para conservar la humedad de los alimentos. Se usa celofán para conservar la humedad de los alimentos a 38 °C. Calcule la pérdida de vapor de agua en g/d en estado estacionario para una envoltura de 0.10 mm de grosor y un área de 0.200 m^2 cuando la presión de vapor del agua en el interior es 10 mm Hg y el aire exterior contiene vapor de agua a 5 mm Hg. Use la permeabilidad mayor de la tabla 6.5-l.

Respuesta: 0.1667 g H_2O/día

6.5-8. Pérdida de helio y permeabilidad. Una ventana de SiO_2 de 2.0 mm de grosor y con un área de 1 .O × 1 0^{-4} m^2 se utiliza para observar el contenido de un recipiente metálico que está a 20 "C. El recipiente contiene helio gaseoso a 202.6 kPa. Para hacerlo en términos conservadores, use $D_{AB} = 5.5 \times 10^{-14}$ m^2/s de la tabla 6.5-l.

a) Calcule la pérdida de He en kg mol/h en estado estacionario.
b) Calcule la permeabilidad P_M y P''_M.

Respuesta: a) Pérdida = 8.833×10^{-15} kg mol He/h

6.6-l. ***Método numérico para la difusión en estado estacionario.*** Utilice los resultados del ejemplo 6.6-l para calcular la tasa de difusión total en el sólido usando los nodos inferiores y las trayectorias de $c_{2,2}$ a $c_{3,2}$, de $c_{2,3}$ a $c_{3,3}$, y así sucesivamente. Compárela con las otras tasas de difusión del ejemplo 6.6-l.

Respuesta: N = **2.555** $\times 10^{-12}$ kg mol/s

6.6-2. Método numérico para la difusión en estado estacionario con coeficiente de distribución. Use las condiciones del ejemplo 6.6-1, pero considere que el coeficiente de distribución definido por la ecuación (6.6-l 1) entre la concentración en el líquido adyacente a la superficie externa y la concentración en el sólido adyacente a la superficie externa es $K = 1.2$. Calcule las concentraciones en estado estacionario y las velocidades de difusión.

6.6-3. Solución digital para difusión en estado estacionario. Utilice las condiciones del ejemplo 6.6-1, pero en vez de r $\Delta x = 0.005$ m use $\Delta x =$ Ay = 0.001. Las dimensiones de la cámara hueca son globales como en el ejemplo 6.6-l; la única diferencia es que se usarán mucho más nodos. Escriba el programa de computadora y despeje las concentraciones en estado estacionario empleando el método numérico. Calcule también las velocidades de difusión y compárelas con las del ejemplo 6.6-l.

6.64. Método numérico con concentraciones fijas en la superficie. Se lleva a cabo una difusión en estado estable en un sólido bidimensional, como se muestra en la figura 6.6-4. La rejilla $\Delta x =$ Ay = 0.010 m. La difusividad $D_{AB} = 2.00 \times 10^{-9}$ m²/s. En el interior de la cámara, la concentración de la superficie se mantiene constante a $2.00 \times 1\ 0^{-3}$ kg mol/m³. En la superficie exterior la concentración es constante 8.00×10^{-3}. Calcule las concentraciones en estado estacionario y las velocidades de difusión por m de profundidad.

REFERENCIAS

(A1) **AMDUR, 1. y SHULER, L. M.** *J. Chem. Phys., 38,* 188 (1963).

(A2) **ANDERSON, D. K., HALL, J. R. y BARB, A.L.** *J. Phys. Chem., 62, 404* (1958).

(B1) **BUNDE, R.E.** *Univ. Wisconsin Naval Res. Lab. Rept. No. CM-850,* Agosto 1955.

(B2) **BOYD, C. A., STEIN, N., STEINGRIMISSON, V. y RUMPEL, W. F.** *J. Chem Phys,* 19, 548 (1951).

(B3) **BIRD, R. B., STEWART,** W.E. y **LIGHTFOOT, E.** *N. Transport Phenomena,* Nueva York: John Wiley & Sons, Inc., 1960.

(B4) **BIDSTRUP, D. E. y GEANKOPLIS,** *C.* J. *J. Chem. Eng. Data, 8,* 170 (1963).

(B5) **BARRER, R. M.** *Diffusion in and Through Solids,* Londres: Cambridge University Press, 1941.

(C1) **CARMICHAEL, L. T., SAGE, B. H. y LACEY, W.** *N. A.I.Ch.E.J.,* 1, 385 (1955).

(C2) **CARSWELL, A. J. y STRYLAND, J. C.** *Can. J. Phys.,* 41, 708 (1963).

(C3) **CHAKRABORTI, P. K. y GRAY, P.** *Trans. Faraday Soc., 62,* 3331 (1961).

(C4) **CHANG,** S. Y. Tesis de M. en C., Massachusetts Institute of Technology, 1959.

(C5) **CHANG, PIN y WILKE, C. R.** *J. Phys. Chem., 59, 592 (1955).*

(C6) **CHARLWOOD, P. A. J.** *Phys. Chem., 57,* 125 (1953).

(C7) **CAMERON,** J. R. Tesis de M. en C., Ohio State University, 1973.

(C8) **COLTON, C. K., SMITH, K. A., MERRILL, E.W. y REECE, J.** M. *Chem. Eng. Progr. Symp.,* 66, (99), 85 (1970).

(C9) **CRANK, J. y PARK,** *G. S. Diffusion in Polymers,* Nueva York: Academic Press, Inc., 1968.

(F1) **FULLER,** E. N., **SCHETTLER, P.D. y GIDDINGS,** J. C. *Ind. Eng. Chem.,* **58,** *19* (1966).

(F2) **FRIEDMAN, L. y KRAMER, E. 0.** *J. Am. Chem. Soc., 52,* 1298 (1930).

(F3) **FRIEDMAN, L.** *J. Am. Chem. Soc., 52,* 1305, 13 ll (1930).

(G1) **GILLILAND, E. R.** *Ind. Eng. Chem., 26,* 681 (1934).

(G2) **GEANKOPLIS,** *C.* J. *Mass Transport Phenomena,* Columbus, Ohio: Ohio State University Bookstores, 1972.

(G3) **GARNER, G. H. y MARCHANT, P. J. M.** *Trans. Znst. Chem. Eng. (Londres), 39, 397* (1961).

(G4) **GOSTING, L.** *S. Advances in Protein Chemistry,* Vol. 1, Nueva York: Academic Press, Inc., 1956.

(G5) **GEANKOPLIS, C. J., OKOS, M. R. y GRULKE, E. A.** *J. Chem. Eng. Data, 23, 40 (1978).*
(G6) **GEANKOPLIS, C. J., GRULKE, E. A.** *y* **OKOS, M. R.** *Znd. Eng. Chem. Fund.*, 18,233 (1979).
(H1) **HOLSEN, J. N. y STRUNK, M. R.** *Znd. Eng. Chem. Fund., 3, 143* (1964).
(H2) HUDSON, G. H., MCCOUBREY, J. C. y UBBELOHDE, A. R. *Trans. Faraday Soc., 56, 1144* (1960).
(H3) **HIRSCHFELDER, J. O., CURTISS, C. F. y BIRD, R. B.** *Molecular Theory of Gases nnd Liquids,* Nueva York: John Wiley & Sons, Inc., 1954.
(H4) **HAMMOND, B. R. y STOKES, R. H.** *Trans. Faraday Soc., 49, 890 (1953).*
(J1) **JOHNSON, P. A. y BABB, A. L.** *Chem. Revs., 56, 387* (1956).
(K1) KELLER, K. H. y FRIEDLANDER, S. K. *J. Gen. Physiol., 49, 68* (1966).
(L1) **LEE, C. Y. y WILKE,** C. R. *Znd. Eng. Chem., 46,* 2381 (1954).
(L2) **LE BAS,** *G. The Molecular Volumes of Liquid Chemical Compounds,* Nueva York: David McKay Co., Inc., 1915.
(L3) **LONGSWORTH, L.** *G. J. Phys. Chem., 58, 770* (1954).
(L4) **LANGDON, A. G. y THOMAS, H. C.** *J. Phys. Chem.,* **75,** 1821 (1971).
(M1) **MASON, E. A. y MONCHICK, L.** *J. Chem. Phys., 36, 2746* (1962).
(M2) **MONCHICK, L. y MASON, E. A.** *J. Chem. Phys., 35,* 1676 (1961).
(N1) **NEY,** E. P. **y ARMISTEAD,** F. C. *Phys. Rev.,* 71, 14 (1947).
(N2) National Research Council, *Znternational Critica1 Tables,* Vol. V, Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1929.
(N3) **NARVARI, R.M., GAINER, J. L. y HALL, K. R.** *A.I.Ch.E. J.,* 17, 1928 (1971).
(P1) **PERRY, R. H.** *y* **GREEN, D.** *Perry's Chemical Engineers' Handbook,* 6a. ed., Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1984.
(P2) **PERKINS, L. R. y GEANKOPLIS, C. J.** *Chem. Eng. Sci., 24,* 1035 (1969).
(P3) **POLSON, A.** *J. Phys. Colloid Chem., 54, 649* (1950).
(R1) REID, R. C., PRAUSNITZ, J. M. y SHERWOOD, T. K. *The Properties of Gases and Liquids,* 3a. ed., Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1977.
(R2) **REDDY, K. A. y DORAISWAMY, L. K.** *Znd. Eng. Chem. Fund., 6, 77* (1967).
(R3) ROGERS, C. E. *Engineering Design for Plastics,* Nueva York: Reinhold Publishing Co., Inc., 1964.
(S1) **SCHAFER,** K. L. Z. *Elecktrochem.* 63, 111 (1959).
(S2) **SEAGER, S.L. GEERTSON, L. R. y GIDDINGS, J. C.** *J. Chem. Eng. Data, 8,* 168 (1963).
(S3) **SCHWERTZ, F. A. y BROW, J. E.** *J. Chem. Phys.,* 19, 640 (1951).
(S4) **SRIVASTAVA, B. N. y SRIVASTAVA. 1. B.** *J. Chem. Phys., 38,* 1183 (1963).
(S5) **SKELLAND, A. H. P.** *Diffusional Mass Transfer,* Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1974.
(S6) **SORBER, H. A.** *Handbook of Biochemistry, Selected Data for Molecular Biology,* Cleveland: Chemical Rubber Co., Inc., 1968.
(S7) **SPALDING, G. E. J.** *Phys. Chem., 73, 3380* (1969).
(S8) **SATTERFIELD,** *C. N. Mass Trunsfer in Heterogeneous Catalysis,* Cambridge, Mass: The MIT Press, 1978.
(T1) TRAUTZ, M. y **MULLER,** W. *Ann. Physik, 22, 333* (1935).
(T2) **TREYBAL, R. E.** *Liquid Extruction,* 2a. ed., Nueva York: McGraw-Hill, Book Company, 1963.
(T3) **TREYBAL, R. E.** *Mass Trunsfer Operutions,* 3a. ed., Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1 9 8 0 .
(V1) VIVIAN, J. E. y KING, C. J. *A.I.Ch.E.J.,* 10, 220 (1964).
(W1) **WINTERGERST, V. E.** *Ann, Physik, 4, 323* (1930).
(W2) **WESTENBERG, A. A. y FRAZIER, G.** *J. Chem. Phys., 36, 3499 (1962).*
(W3) **WALKER, R. E. y WESTENBERG, A. A.** *J. Chem. Phys., 29,* 1139 (1958).
(W4) WALKER, R. E. y WESTENBERG, A. A. *J. Chem. Phys., 32, 436* (1960).
(W5) **WILKE,** C. R. *y* **CHANG,** PIN, *A.Z.Ch.E.J.,* 1, 264 (1955).

CAPITULO 7

Principios de transferencia de masa en estado no estacionario y por convección

7.1 DIFUSIÓN EN ESTADO NO ESTACIONARIO

7.1A. Deducción de la ecuación básica

En las secciones anteriores se consideraron diversos sistemas de transferencia de masa en los cuales la concentración 0 la presión parcial en cualquier punto y el flujo específico de difusión eran constantes con respecto al tiempo; es decir, sistemas en estado estacionario. Antes que se alcance el estado estacionario, debe transcurrir un cierto tiempo después de iniciar el proceso de transferencia de masa para que desaparezcan las condiciones de estado no estacionario.

En la sección 2.3 se realizó un balance general de propiedad para la difusión molecular en estado no estacionario para las propiedades de momento lineal, calor y masa.En ausencia de generación, es

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \delta \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial z^2} \qquad \textbf{(2.13-12)}$$

En la sección 5.1 se dedujo una ecuación de estado inestable para la conducción de calor:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad \textbf{(5.1-10)}$$

El procedimiento para deducir la fórmula de difusión en estado no estacionario en una dirección para transferencia de masa es similar al de la ecuación (5.1-10) de transferencia de calor. Con referencia a la figura 7.1- 1, la masa se difunde en dirección x en un cubo constituido por un sólido, un gas o un líquido inmóvil, cuyas dimensiones son Δx, Ay y Az. Para la difusión en la dirección x,

$$N_{Ax} = -D_{AB} \frac{\partial c_A}{\partial x} \qquad \textbf{(7.1-1)}$$

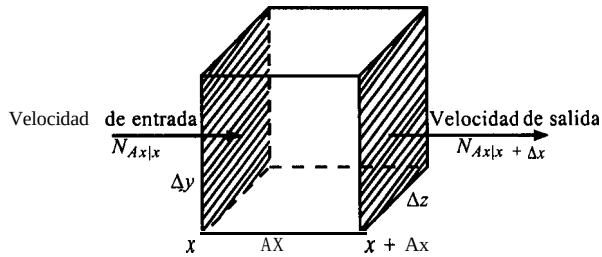


FIGURA *7.1-l. Difusión en estado no estacionario en una dirección*

El término $\partial c_A / \partial x$ es la derivada parcial de c_A con respecto a x o la velocidad de cambio de c_A con respecto a x cuando la otra variable t se mantiene constante.

Después se procede aun balance del componente A en términos molares en ausencia de generación:

$$\text{velocidad de entrada} = \text{velocidad de salida} + \text{velocidad acumulada} \tag{7.1-2}$$

La velocidad de entrada y la velocidad de salida en kg mol de A/s son

$$\text{velocidad de entrada} = N_{Ax|x} = -D_{AB}\left.\frac{\partial c_A}{\partial x}\right|_x \tag{7.1-3}$$

$$\text{velocidad de salida} = N_{Ax|x+\Delta x} = -D_{AB}\left.\frac{\partial c_A}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} \tag{7.1-4}$$

La velocidad de acumulación para el volumen Δx Ay Δz m^3:

$$\text{velocidad de acumulación} = (\Delta x \text{ Ay } \Delta z)\frac{\partial c_A}{\partial t} \tag{7.1-5}$$

Al sustituir las ecuaciones (7.1-3), (7.1-4) y (7.1-5) en la (7.1-2) y dividir entre $\Delta x \cdot \Delta y$ Az,

$$-D_{AB}\frac{\left.\frac{\partial c_A}{\partial x}\right|_x - \left.\frac{\partial c_A}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}}{\Delta x} = \frac{\partial c_A}{\partial t} \tag{7.1-6}$$

Cuando Ax tiende a cero,

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} = D_{AB}\frac{\partial^2 c_A}{\partial x^2} \tag{7.1-7}$$

La ecuación anterior es válida para una difusividad constante D_{AB}. Si D_{AB} varía,

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} = \frac{\partial (D_{AB}\partial c_A/\partial x)}{\partial x} \tag{7.1-8}$$

La ecuación (7.1-7) relaciona la concentración c_A con la posición x y el tiempo t. Para difusión en las tres direcciones, una deducción similar nos lleva a

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} = D_{AB}\left(\frac{\partial^2 c_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c_A}{\partial z^2}\right) \tag{7.1-9}$$

En el resto de esta sección se considerarán las resoluciones de las ecuaciones (7.1-7) y (7.1-g). Nótese la similitud matemática entre la ecuación para transferencia de calor,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{5.1-6}$$

y la ecuación (7.1-7) de difusión. Debido a esta semejanza, los métodos matemáticos que se aplican a la igualdad de conducción de calor en estado no estacionario pueden usarse también para la transferencia de masa en estado no estacionario. Esto se estudia con más detalle en las secciones 7.1B, 7.1C y 7.7.

7.1B Difusión en una placa plana con resistencia superficial despreciable

Para ilustrar el método analítico empleado para la ecuación (7.1-7), deduciremos la respuesta para la difusión en estado no estacionario en la dirección x en una placa de espesor $2x_1$, tal como se muestra en la figura 7.1-2. Para difusión en una dirección,

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} = D_{AB}\frac{\partial^2 c_A}{\partial x^2} \tag{7.1-7}$$

Al eliminar por conveniencia los subíndices A y B:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \tag{7.1-10}$$

El perfil inicial de concentraciones en la placa en el tiempo $t = 0$ es uniforme con c = c_0 para todos los valores de x, tal como lo muestra la figura 7.1-2. En el tiempo t = 0, la concentración del fluido en el medio circundante cambia repentinamente a c_1. Para un coeficiente de transferencia de masa muy alto en el exterior, la resistencia superficial en despreciable y la concentración en la superficie es igual a la del fluido, que es c_1.

Las condiciones iniciales y limitantes son

$$\begin{aligned}
&c = c_0, \quad t = 0, \quad x = x, \quad Y = \frac{c_1 - c_0}{c_1 - c_0} = 1\\
&c = c_1, \quad t = t, \quad x = 0, \quad Y = \frac{c_1 - c_1}{c_1 - c_0} = 0\\
&c = c_1, \quad t = t, \quad x = 2x_1, \quad Y = \frac{c_1 - c_1}{c_1 - c_0} = 0
\end{aligned} \tag{7.1-11}$$

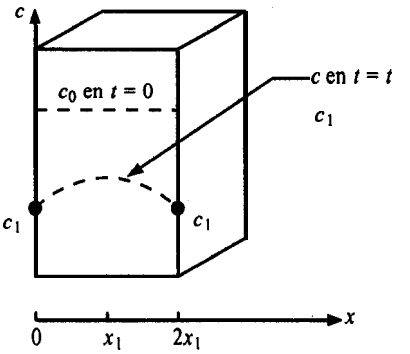


FIGURA 7.1-2. *Difusión en estado no estacionario en una placa plana con resistencia superficial despreciable.*

Al redefinir la concentración de tal manera que varíe entre 0 y 1,

$$Y \equiv \frac{c_1 - c}{c_1 - c_0} \tag{7.1-12}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = D\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \tag{7.1-13}$$

La solución de la ecuación (7. l-l 3) es una serie de Fourier infinita idéntica a la de la ecuación (5.1-6) para transferencia de calor:

$$Y = \frac{c_1 - c}{c_1 - c_0} = \frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{1}\exp\left(-\frac{1^2\pi^2 X}{4}\right)\operatorname{sen}\frac{1\pi x}{2x_1}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{3}\exp\left(-\frac{3^2\pi^2 X}{4}\right)\operatorname{sen}\frac{3\pi x}{2x_1} + \frac{1}{5}\exp\left(-\frac{5^2\pi^2 X}{4}\right)\operatorname{sen}\frac{5\pi x}{2x_1} + \cdots\right] \tag{7.1-14}$$

donde

$X = Dt / x_1^2$, adimensional

c = concentración en el punto x al tiempo t en la placa

Y = $(c_1 - c)/(c_1 - c_0)$ = fracción de cambio incompleto, adimensional

1 − Y = $(c - c_0)/(c_1 - c_0)$ = fracción de cambio

La solución de ecuaciones similares a la (7.1- 14) es bastante tediosa; existen gráficas convenientes para diversas geometrías, las cuales se analizan en la siguiente sección.

7.1C Difusión en estado no estacionario en diversas geometrías

1. Convección y condiciones límite en la superficie. En la figura 7.1-2 no hay resistencia convectiva en la superficie. Sin embargo, en muchos casos cuando un fluido está en el exterior de un sólido hay transferencia convectiva de masa en la superficie. El coeficiente convectivo de transferencia de masa k_c, similar al coeficiente convectivo de transferencia de calor, se define como sigue:

$$N_A = k_c (c_{L1} - c_{Li}) \tag{7.1-15}$$

donde k_c es el coeficiente de transferencia de masa en m/s, c_{L1} es la concentración general del fluido en kg mol A/m^3 y c_{Li} es la concentración en el fluido adyacente a la superficie del sólido. El coeficiente k_c es un coeficiente empírico y se analiza en detalle en la sección 7.2.

En la figura 7.1-3a se muestra el caso de un coeficiente de transferencia de masa presente en el límite. La caída de concentración a través del fluido es $c_{L1} - c_{Li}$; la concentración c_i en la superficie del sólido esta en equilibrio con c_{Li}.

En la figura 7.1-3a la concentración c_{Li} en el líquido adyacente al sólido y la concentración c_i en la superficie del sólido están en equilibrio y también son iguales. No obstante, y a diferencia de la transferencia de calor cuando las temperaturas son iguales, las concentraciones están en equilibrio y se relacionan por medio de la expresión:

$$K\text{-}CL' \qquad c_i \tag{7.1-16}$$

donde K es el coeficiente de distribución de equilibrio (similar al coeficiente de la ley de Henry para un gas y un líquido). El valor de K en la figura 7.1-3a es 1.0.

En la figura 7.1-3b, el coeficiente de distribución K es > 1 y $c_{Li} > c_i$, aun cuando están en equilibrio. En las figuras 7.1-3c y d se muestran otros casos. Este tema también se estudia en la sección 6.6B.

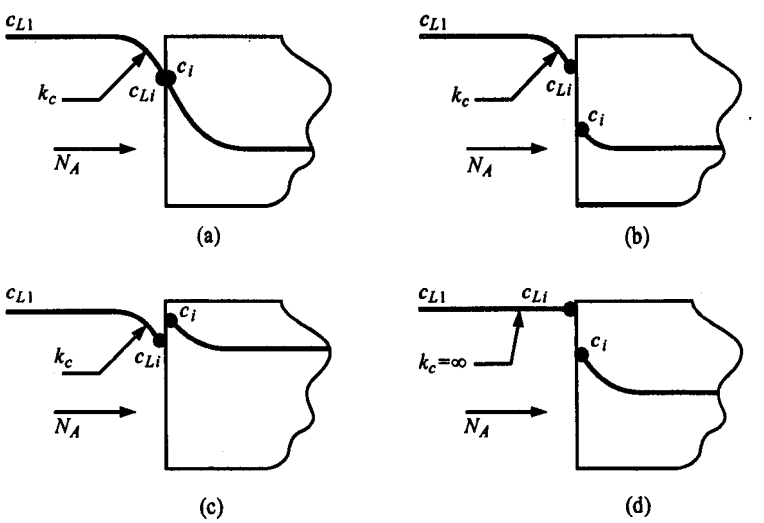


FIGURA 7.1-3. *Condiciones interfaciales para la transferencia convectiva de masa con un coeficiente de distribución de equilibrio* $K = c_{Li}/c_i$; *a)* $K = 1$, *b)* $K > 1$, *c)* $K < 1$. *d)* $K > 1$ *y* $k_c = \infty$.

2. Relación entre los parámetros de transferencia de masa y calor. Para usar las gráficas de conducción de calor en estado no estacionario del capítulo 4 en la resolución de problemas de difusión en estado no estacionario, las variables adimensionales o parámetros de transferencia de calor se deben relacionar con las de transferencia de masa. En la tabla 7.1-1 se tabulan las relaciones entre estas variables. Para $K \neq 1.0$, k_c, se sustituye por Kk_c y c_1 por c_1/K.

TABLA 7.1-1. *Relación entre los parámetros de transferencia de masa y calor para difusión en estado no estacionario* *

	Transferencia de masa	
Transferencia de calor	$K = c_L/c = 1.0$	$K = c_L/c \neq 1.0$
$Y, \dfrac{T_1 - T}{T_1 - T_0}$	$\dfrac{c_1 - c}{c_1 - c_0}$	$\dfrac{c_1/K - c}{c_1/K - c_0}$
$1 - Y, \dfrac{T - T_0}{T_1 - T_0}$	$\dfrac{c - c_0}{c_1 - c_0}$	$\dfrac{c - c_0}{c_1/K - c_0}$
$x, \dfrac{\alpha t}{x_1^2}$	$\dfrac{D_{AB} t}{x_1^2}$	$\dfrac{D_{AB} t}{x_1^2}$
$\dfrac{x}{2\sqrt{\alpha t}}$	$\dfrac{x}{2\sqrt{D_{AB} t}}$	$\dfrac{x}{2\sqrt{D_{AB} t}}$
$m, \dfrac{k}{hx_1}$	$\dfrac{D_{AB}}{k_c x_1}$	$\dfrac{D_{AB}}{Kk_c x_1}$
$\dfrac{h}{k}\sqrt{\alpha t}$	$\dfrac{k_c}{D_{AB}}\sqrt{D_{AB} t}$	$\dfrac{Kk_c}{D_{AB}}\sqrt{D_{AB} t}$
$n, \dfrac{x}{x_1}$	$\dfrac{x}{x_1}$	$\dfrac{x}{x_1}$

* x es la distancia al centro de la placa, cilindro o esfera. En una placa semiinfinita, x es la distancia a la superficie, c_0 es la concentración original uniforme en el sólido, c_1 es la concentración del fluido en el exterior de la placa y c es la concentración en el sólido en la posición x en el tiempo t

3. Gráficas para difusión en diversas geometrías. Las gráficas de transferencia de calor para conducción en estado no estacionario que pueden emplearse para difusión en estado no estacionario, son:

1. Sólido semiinfinito, figura 5.3-3.
2. Placa plana, figuras 5.3-5 y 5.3-6.
3. Cilindro largo, figuras 5.3-7 y 5.3-8.
4. Esfera, figuras 5.3-9 y 5.3-10.
5. Concentraciones promedio y resistencia convectiva cero, figura 5.3-13.

EJEMPLO 7.1-1. ***Difusión en estado no estacionario en una placa de gel de agar***

Una placa sólida de 5.15% de agar en peso, a 278 K y 10.16 mm de espesor, contiene una concentración uniforme de 0.1 kg mol/m^3 de urea. La difusión sólo se verifica en la dirección x a través de dos superficies paralelas planas con separación de 10.16 mm. La placa se sumerge súbitamente en agua pura turbulenta, por lo que puede suponerse que la resistencia superficial es despreciable; es decir, el coeficiente convectivo k_c es muy grande. La difusividad de la urea en agar (consúltese la tabla 6.4-2, es 4.72×10^{-10} m^2/s.

a) Calcule las concentraciones en el punto medio de la placa (a 5.08 mm de la superficie) y a 2.54 mm de la superficie después de 10 h.

b) ¿Cuál sería la concentraciónen el punto medio después de 10 h si el espesor de la placa se redujera a la mitad?

Solución: Para el inciso a), $c_0 = 0.10$ kg mol/m^3, $c_1 = 0$ para el agua pura y c = concentración a la distancia x de la línea central en el tiempo t s. El coeficiente de distribución de equilibrio K en la ecuación (7. l-l 6) puede suponerse igual a 1 .0, pues el agua de la solución acuosa del gel y del exterior debe tener propiedades muy semejantes. A partir de la tabla 7.1-1,

$$\mathbf{Y} = \frac{c_1/K - c \quad 0/1.0 - c}{c_1/K - c_0 = 0/1.0 - 0.10}$$

Además, $x_1 = 10.16/(1000 \times 2) = 5.08 \times 10^{-3}$ m (espesor medio de laplaca), x= 0 (centro), $X = D_{AB}t / x_1^2 = (4.72 \times 10^{-10})(10 \times 3600)/(5.08 \times 10^{-3})^2 = 0.658$. La posición relativa $n = x/x_1 = 0/5.08 \times 10^{-3} = 0$ y la resistencia relativa $m = D_{AB}/Kk_c x_1 = 0$, pues k_c es muy grande (resistencia cero).

Con base en la figura 5.3-5, para $X = 0.658$, $m = 0$ y $n = 0$,

$$Y = 0.275 = \frac{0 - c}{0 - 0.10}$$

Al resolver, c = 0.0275 mol kg/m^3 cuando x = 0.

Para el punto situado a 2.54 mm de la superficie o 2.54 mm del centro, x = 2.54/1000 = 2.54×10^{-3}/ m, $X = 0.658$, $m = 0$, $n = x/x_1 = 2.54 \times 10^{-3}/5.08 \times 10^{-3} = 0.5$. Entonces, según la figura 5.3-5, Y = 0.172. Despejando, c = 0.0172 kg mol/m^3.

Para el inciso b) y la mitad del espesor, $X = 0.658/(0.5)^2 = 2.632$, $n = 0$ y m = 0. Por tanto, $Y = 0.0020$ y $c = 2.0 \times 10^{-4}$ kg mol /m^3.

EJEMPLO 7.1-2. ***Difusión en estado no estacionario en una placa semiinfinita***

Una placa muy gruesa tiene concentración uniforme de soluto A de $c_0 = 1.0 \times 10^{-2}$ kg mol A/m^3. La cara frontal se expone de manera repentina a la acción de flujo de un fluido a concentración $c_1 = 0.10$ kg mol A/m^3 y coeficiente convectivo $k_c = 2 \times 10^{-7}$ m/s. El coeficiente de distribución de equilibrio $K = c_{Li}/c_i = 2.0$. Suponiendo que la placa es un sólido semiinfinito, calcule la concentración en el sólido en la superficie (x = 0) y x = 0.01 m de la superficie después de $t = 3 \times 10^4$ s. La difusividad en el sólido es $D_{AB} = 4 \times 10^{-9}$ m^2/s.

Solución: Para usar la figura 5.3-3,

$$\frac{Kk_c}{D_{AB}}\sqrt{D_{AB}t} = \frac{2.0(2 \times 10^{-7})}{4 \times 10^{-9}}\sqrt{(4 \times 10^{-9})(3 \times 10^4)} = 1.095$$

Para $x = 0.01$ m de la superficie del sólido.

$$\frac{x}{2\sqrt{D_{AB}t}} = \frac{0.01}{2\sqrt{(4 \times 10^{-9})(3 \times 10^{4})}} = 0.457$$

Con base en la gráfica, 1 − Y = 0.26. Entonces, sustituyendo en la ecuación para $(1 - Y)$ de la tabla 7.1-1 y resolviendo,

$$1 - Y = \frac{c - c_0}{c_1/K - c_0} = \frac{c - 1 \times 10^{-2}}{(10 \times 10^{-2})/2 - (1 \times 10^{-2})} = 0.26$$

$$c = 2.04 \times 10^{-2} \text{ kg mol /m}^3 \quad \text{(cuando } x = 0.01 \text{ m)}$$

Para $x = 0$ m (esto es, en la superficie del sólido),

$$\frac{x}{2\sqrt{D_{AB}t}} = 0$$

De acuerdo con la gráfica, 1 − Y = 0.62. Despejando, $c = 3.48 \times 10^{-2}$. Este valor es el mismo que el de c_i que muestra la figura 7.1-3b. Para calcular la concentración c_{Li} en el líquido de la interfaz,

$$c_{Li} = Kc_i = 2.0(3.48 \times 10^{-2}) = 6.96 \times 10^{-2} \text{ kg mol /m}^3$$

Con estos valores se obtiene una figura similar a la 7.1-3b.

4. Difusión en estado no estacionario en más de una dirección. En la sección 5.3F se analizó un método para la conducción de calor en estado no estacionario que combina las soluciones monodimensionales para obtener los resultados en sistemas polidimensionales. Para la difusión en estado no estacionario en más de una dirección se usa el mismo método. Volviendo a escribir la ecuación (5.3-l 1) para la difusión en un bloque rectangular en las direcciones x, y y z,

$$Y_{x,y,z} = (Y_x)(Y_y)(Y_z) = \frac{c_1/K - c_{x,y,z}}{c_1/K - c_0} \tag{7.1-17}$$

donde $c_{x,y,z}$ es la concentración en el punto x, y, z con respecto al centro del bloque. El valor de Y_x para las dos caras paralelas se obtiene con la figura 5.3-5 o 5.3-6 de una placa plana en la dirección x. Los valores de Y_y y Y_z se determinan de manera análoga con las gráficas. Para un cilindro corto, se usa una expresión similar a la ecuación (5.3-12) y para concentraciones promedio, las soluciones son parecidas a las ecuaciones (5.3-14), (5.3-15) y (5.3-16).

7.2 COEFICIENTES DE TRANSFERENCIA CONVECTIVA DE MASA

7.2A Introducción a la transferencia convectiva de masa

En secciones precedentes de este capítulo se hizo hincapié en la difusión molecular en fluidos en reposo o con flujo laminar. En muchos casos, la velocidad de difusión es lenta y se desea una

transferencia más rápida. Para lograrlo, se incrementa la velocidad del fluido hasta obtener una transferencia de masa turbulenta.

Para que el fluido tenga un flujo convectivo se requiere que pase sobre otro fluido en el que sea imniscible, o sobre una superficie sólida. Un ejemplo es el fluido de una tubería, donde parte de la pared de la tubería está recubierta de un material sólido de disolución lenta, como el ácido benzoico. El ácido benzoico se disuelve y se transporta perpendicularmente a la corriente principal desde la pared. Cuando un fluido tiene flujo turbulento y pasa sobre una superficie, no es posible describir la velocidad real de las partículas pequeñas del mismo con la misma claridad que en el flujo laminar. En el flujo laminar, el fluido circula con una trayectoria más o menos recta y su comportamiento puede describirse por medios matemáticos. No obstante, en el movimiento turbulento no hay corrientes rectas sino que se forman grandes remolinos o "paquetes" de fluido que se desplazan de forma desordenada.

Cuando un soluto A se disuelve en una superficie, hay gran concentración del mismo en el fluido que está en la superficie, y en general, esta concentración disminuye a medida que aumenta la distancia a la pared. Sin embargo, las cantidades minúsculas de porciones de fluido adyacentes no siempre tienen concentraciones parecidas. Esto se debe a que los remolinos que contienen soluto se mueven con rapidez de una parte de fluido a otra, transfiriendo cantidades relativamente grandes de soluto. Esta difusión turbulenta (o transferencia de remolinos) es muy rápida en comparación con la transferencia molecular.

Se pueden visualizar tres regiones de transferencia de masa. En la primera, adyacente a la superficie, existe una subcapa delgada en forma de película viscosa. La mayor parte de la transferencia de masa se verifica por difusión molecular, puesto que hay pocos o ningún remolino presente. Como resultado de la lentitud de de difusión, se produce una gran caída de concentración a través de esta película.

La región de transición o reguladora se encuentra adyacente a la primera zona. Aquí hay algunos remolinos y la transferencia de masa es la suma de la difusión turbulenta más la molecular. Hay entonces una transición gradual en esta región entre una transferencia que se verifica principalmente por difusión molecular en un extremo hasta la que es de tipo turbulento, en el extremo opuesto.

En la ***región turbulenta*** adyacente a la de transición, la mayor parte de la transferencia ocurre por difusión turbulenta, con una porción pequeña causada por difusión molecular. La disminución de concentración es muy pequeña, pues los remolinos tienden a mantener la concentración uniforme. En la sección 3.10G se incluye un análisis más detallado de estas tres regiones.

En la figura 7.2-l se muestra la gráfica típica de transferencia de masa para la disolución de un sólido desde una superficie en un fluido turbulento que circula por un ducto. La caída o disminución de concentración desde c_{A1}, en la zona adyacente a la superficie, es muy abrupta en las regiones cercanas y después se nivela. Esta curva es semejante a las formas que se presentan para la transferencia de calor y momento lineal. Se incluye la concentración mezclada o promedio $\bar{c}_A$, que es ligeramente superior a la mínima c_{A2}.

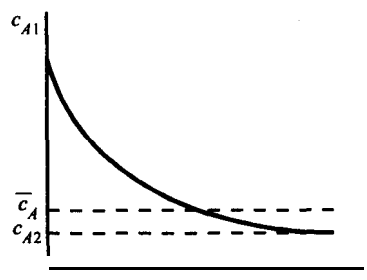


FIGURA 7.2-1. *Perfil de concentraciones en la transferencia turbulenta de masa de una superficie a un fluido.*

7.2B Tipos de coeficientes de transferencia de masa

1. Definición del coeficiente de transferencia de masa. Puesto que nuestros conocimientos del flujo turbulento son incompletos, el enfoque que se utiliza para deducir las ecuaciones de la difusión turbulenta será similar al que se usó para la difusión molecular. Para la transferencia turbulenta de masa para c constante, la ecuación (6.1-6) se escribe

$$J_A^* = -(D_{AB} + \varepsilon_M)\frac{dc_A}{dz} \tag{7.2-1}$$

donde D_{AB} es la difusividad molecular en m^2/s y ε_M es la diiüsividad de masa de remolinos en m^2/s. El valor de ε_M es variable, cercano a cero en la interfaz o en la superficie y va en aumento a medida que se incrementa la separación de la pared. Se usa entonces un valor promedio $\bar{\varepsilon}_M$, pues por lo general no se conoce su variación exacta. Integrando la ecuación (7.2-l) entre los puntos 1 y 2,

$$J_{A1}^* = \frac{D_{AB} + \varepsilon_M}{z_2 - z_1}(c_{A1} - c_{A2}) \tag{7.2-2}$$

El flujo J_{A1}^* se basa en el área superficial A_1, pues el corte transversal puede variar. Por lo general, no se conoce el valor de $z_2 - z_1$, esto es, la longitud de la trayectoria. De esta forma, la ecuación (7.2-2) se simplifica y se escribe con un coeficiente convectivo de transferencia de masa k_c'.

$$J_{A1}^* = k_c'(c_{A1} - c_{A2}) \tag{7.2-3}$$

donde J_{A1}^* es el flujo específico de A desde la superficie A_1 con respecto a la totalidad de la fase, k_c' es $(D_{AB} + \bar{\varepsilon}_M)/(z_2 - z_1)$, que corresponde a un coeficiente experimental de transferencia de masa en kg $mol/s \cdot m^2 \cdot$ (kg mol/m^3), o simplificado como m/s; y c_{A2} es la concentración en el punto 2 en kg mol A/m^3 o, por lo general, la concentración promedio total $\bar{c}_{A2}$. Esta definición del coeficiente convectivo de transferencia de masa k_c' es muy parecida a la del coeficiente convtctivo de transferencia de calor, h.

2. Coeficiente de transferencia de masa para contradifusión equimolar. El valor que casi siempre interesa es N_A, esto es, el flujo específico de A con respecto a coordenadas estacionarias. Podemos empezar con la siguiente expresión, que es similar a la de difusión molecular, pero añadiendo el término ε_M:

$$N_A = -c(D_{AB} + \varepsilon_M)\frac{dx_A}{dz} + x_A(N_A + N_B) \tag{7.2-4}$$

Para el caso de contradifusión equimolar, donde $N_A = -N_B$, integrando en estado estacionario y estableciendo que $k_c' = (D_{AB} + \bar{\varepsilon}_M)/(z_2 - z_1)$,

$$N_A = k_c'(c_{A1} - c_{A2}) \tag{7.2-5}$$

La ecuación (7.2-5) es la fórmula que define al coeficiente de transferencia de masa. Sin embargo, la concentración también suele definirse en términos de fracciones mol en un líquido o un gas o en términos de presiones parciales en el caso de gases. Por consiguiente, podemos definir el coeficiente de transferencia de masa de varias maneras. Si y_A es la fracción mol en una fase gaseosa y x_A en una fase líquida, la ecuación (7.2-5) puede tomar las siguientes formas para la contradifusión equimolar:

$$\text{Gases:} \quad N_A = k_c'(c_{A1} - c_{A2}) = k_G'(p_{A1} - p_{A2}) = k_y'(y_{A1} - y_{A2}) \tag{7.2-6}$$

$$\text{Líquidos:} \quad N_A = k_c'(c_{A1} - c_{A2}) = k_L'(c_{A1} - c_{A2}) = k_x'(x_{A1} - x_{A2}) \tag{7.2-7}$$

TABLA 7.2-1 *Ecuaciones de flujo específico y coeficiente de transferencia de masa*

Ecuaciones de flujo para contradijiisión equimolar.

Gases: $N_A = k_c'(c_{A1} - c_{A2}) = k_G'(p_{A1} - p_{A2}) = k_y'(y_{A1} - y_{A2})$

Liquidos: $N_A = k_c'(c_{A1} - c_{A2}) = k_L'(c_{A1} - c_{A2}) = k_x'(x_{A1} - x_{A2})$

Ecuaciones de flujo para la difusión de A a través de B en reposo y no difusivo:

Gases: $N_A = k_C(c_{A1} - c_{A2}) = k_G(p_{A1} - p_{A2}) = k_y(y_{A1} - y_{A2})$

Líquidos: $N_A = k_C(c_{A1} - c_{A2}) = k_L(c_{A1} - c_{A2}) = k_x(x_{A1} - x_{A2})$

Conversiones para coeficientes de transferencia de masa.

Gases:

$$k_c'c = k_c'\frac{P}{RT} = k_c\frac{p_{BM}}{RT} = k_c'P = k_G p_{BM} = k_y y_{BM} = k_y' = k_c y_{BM} c = k_G y_{BM} P$$

Líquidos:

$$k_c' c = k_L' c = k_L x_{BM} c = k_L' \rho / M \quad k_x' = k_x x_{BM}$$

(donde ρ es la densidad del líquido y M su peso molecular)

Unidades de los coeficientes de transferencia de masa:

	Unidades SI	Unidades cgs	Unidades del sistema inglés
k_c, k_L, k_c', k_L'	m/s	cm/s	pie/h
k_x, k_y, k_x', k_y'	$\frac{\text{kg mol}}{\text{s} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{mol frac}}$	$\frac{\text{g mol}}{\text{s . cm* . mol frac}}$	$\frac{\text{lb mol}}{\text{h pie}^2 \text{ mol frac}}$
k_G, k_G'	$\frac{\text{kg mol}}{\text{s . m}^2 \text{ Pa}}$ $\frac{\text{kg mol}}{\text{s . m}^2 \text{ atm}}$ (preferible)	$\frac{\text{gmol}}{\text{s cm}^2 \text{ atm}}$	$\frac{\text{lb mol}}{\text{h . pie}^2 \text{ atm}}$

Todos estos coeficientes de transferencia de masa están relacionados entre sí. Por ejemplo, si se toma la ecuación (7.2-6) y se sustituye $y_{A1} = c_{A1}/c$ y $y_{A2} = c_{A2}/c$ en la expresión,

$$N_A = k_c'(c_{A1} - c_{A2}) = k_y'(y_{A1} - y_{A2}) = k_y'\left(\frac{c_{A1}}{c} - \frac{c_{A2}}{c}\right) = \frac{k_y'}{c}(c_{A1} - c_{A2}) \tag{7.2-8}$$

Por lo que,

$$k_c' = \frac{k_y'}{c} \tag{7.2-9}$$

En la tabla 7.2-l se muestran estas relaciones entre coeficientes de transferencia de masa, así como las correspondientes a las diferentes ecuaciones de flujo específico.

3. *Coeficiente de transferencia de masa de A a través de B en reposo y* ***no*** *difusivo.* Para el caso de *A* que se difunde a través de *B* no difusivo y en reposo, donde $N_B = 0$, la ecuación (7.2-4) nos da, para estado estacionario,

$$N_A = \frac{k_c'}{x_{BM}}(c_{A1} - c_{A2}) = k_c(c_{A1} - c_{A2}) \tag{7.2-10}$$

donde x_{BM} y su contraparte y_{BM} son similares a la ecuación (6.2-21) y k_c es el coeficiente de transferencia de masa para la difusión de *A* a través de *B* estacionario. Además,

$$x_{BM} = \frac{x_{B2} - x_{B1}}{\ln(x_{B2}/x_{B1})} \quad y_{BM} = \frac{y_{B2} - y_{B1}}{\ln(y_{B2}/y_{B1})} \tag{7.2-11}$$

Ahora al escribir la ecuación (7.2-10) en otras unidades,

(Gases): $$N_A = k_c(c_{A1} - c_{A2}) = k_G(p_{A1} - p_{A2}) = k_y(y_{A1} - y_{A2}) \tag{7.2-12}$$

(Líquidos): $$N_A = k_c(c_{A1} - c_{A2}) = k_L(c_{A1} - c_{A2}) = k_x(x_{A1} - x_{A2}) \tag{7.2-13}$$

Nuevamente, todos los coeficientes de transferencia de masa pueden relacionarse entre sí como lo indica la tabla 7.2-l. Por ejemplo, si se iguala la ecuación (7.2-10) con la (7.2-13),

$$N_A = \frac{k_c'}{x_{BM}}(c_{A1} - c_{A2}) = k_x(x_{A1} - x_{A2}) = k_x\left(\frac{c_{A1}}{c} - \frac{c_{A2}}{c}\right) \tag{7.2-14}$$

Por lo que,

$$\frac{k_c'}{x_{BM}} = \frac{k_c}{c} \tag{7.2-15}$$

EJEMPLO 7.2-l. ***Vaporización de A y transferencia convectiva de masa***

Un gran volumen del gas *B* puro a 2 atm de presión fluye sobre una superficie de la cual se vaporiza *A* puro. El líquido *A* moja completamente la superficie, que es papel secante. Por

tanto, la presión parcial de A en la superficie corresponde a su presión parcial a 298 K, que es 0.20 atm. Se estima que el valor de k'_y es 6.78 $\times 10^{-5}$ mol kg/s . $m^2 \cdot$ frac mol. Calcule N_A, la velocidad de evaporación y los valores k_y y k_G.

Solución: Éste es un caso en que A difunde a través de B, donde el flujo de B normal a la superficie es cero, pues B no es soluble en el líquido A. En el gas B puro, $p_{A1} = 0.20$ atm y $p_{A2} = 0$. Además, $y_{A1} = p_{A1}/P = 0.20/2.0 = 0.10$ y $y_{A2} = 0$. Podemos usar la ecuación (7.2-12) con fracciones mol:

$$N_A = k_y(y_{A1} - y_{A2}) \qquad (7.2\text{-}12)$$

Sin embargo, contamos con un valor de k'_y relacionado con k_y, de acuerdo con la tabla 7.2-1, por medio de la expresión

$$k_y y_{BM} = k'_y \qquad (7.2\text{-}16)$$

El término y_{BM} es similar a x_{BM} y, de acuerdo con la ecuación (7.2-l 1), es

$$y_{BM} = \frac{y_{B2} - y_{B1}}{\ln(y_{B2}/y_{B1})} \qquad (7.2\text{-}l\ 1)$$

$$y_{B1} = 1 - y_{A1} = 1 - 0.10 = 0.90 \qquad y_{B2} = 1 - y_{A1} = 1 - 0 = 1.0$$

Sustituyendo en la ecuación (7.2-l 1),

$$Y_{BM} = \frac{1.0 - 0.90}{\ln(1.0/0.90)} = 0.95$$

Entonces, con base en la ecuación (7.2- 16),

$$k_y = \frac{k'_y}{y_{BM}} = \frac{6.78 \times 10^{-5}}{0.95} = 7.138 \times 10^{-5} \text{ kg mol/s} \cdot m^2 \text{ . frac mol}$$

Además, de la tabla 7.2-1,

$$k_G y_{BM} P = k_y y_{BM} \qquad (7.2.17)$$

Por consiguiente, despejando k_G y sustituyendo los valores conocidos,

$$k_G = \frac{k_y}{P} = \frac{7.138 \text{ x } 10^{-5}}{2 \text{ x } 1.01325 \text{ x } 10^5 \text{ Pa}} = 3.522 \text{ x } 10^{-10} \text{ kg mol/s} \cdot m^2 \text{ . Pa}$$

$$k_G = \frac{k_y}{P} = \frac{7.138 \text{ x } 10^{-5}}{2.0 \text{ atm}} = 3.569 \text{ x } 10^{-5} \text{ kg mol/s} \cdot m^2 \text{ . atm}$$

Con la ecuación (7.2-12) para el flujo específico,

$$N_A = k_y(y_{A1} - y_{A2}) = 7.138 \times 10^{-5}(0.10 - 0) = 7.138 \times 10^{-6} \text{ kg mol /s} \cdot m^2$$

Además,

$$p_{A1} = 0.20 \text{ atm} = 0.20(1.01325 \times 10^5) = 2.026 \times 10^4 \text{ Pa}$$

De nuevo, usando la ecuación (7.2-12) y

$$N_A = k_G(p_{A1} - p_{A2}) = 3.522 \times 10^{-10}(2.026 \times 10^4 - 0)$$

$$= 7.138 \times 10^{-6} \text{ kg mol/s} \cdot \text{m}^2$$

$$N_A = k_G(p_{A1} - p_{A2}) = 3.569 \times 10^{-5}(0.20 - 0)$$

$$= 7.138 \times 10^{-6} \text{ kg mol/s} \cdot \text{m}^2$$

Nótese que en este caso, debido a que las concentraciones son diluidas, y_{BM} es cercano a 1 .O y k_y y k'_y, difieren muy poco.

7.2C Métodos para determinar coeficientes de transferencia de masa

Se han empleado muchos métodos experimentales diferentes para obtener experimentalmente los coeficientes de transferencia de masa. Para determinar el coeficiente de transferencia de masa de una esfera, Steele y Geankoplis (S3) utilizaron una esfera sólida de ácido benzoico sostenida rígidamente de un apoyo en la parte posterior de una tubería. Antes de empezar, se pesó la esfera. Después de que el fluido fluyó durante un intervalo de tiempo medido, la esfera se retiró, se secó y se pesó de nuevo para obtener la cantidad de masa transferida, que fue pequeña comparada con el peso de la esfera. A partir de la masa transferida y el área de la esfera, se calculó el flujo NA. Entonces se usó la fuerza impulsora $(c_{AS} - 0)$ para calcular k_L, donde c_{AS} es la solubilidad y el agua no contenía ácido benzoico.

Otro método que se usa consiste en hacer fluir gases por varias geometrías humedecidas con líquidos en evaporación. Para estudiar la transferencia de masa a partir de una placa plana, un papel secante humedecido con el líquido puede hacer la función de la placa.

7.3 COEFICIENTES DE TRANSFERENCIA DE MASA PARA DIVERSAS GEOMETRÍAS

7.3A Números adimensionales para correlacionar datos

Los datos experimentales de coeficientes de transferencia de masa, obtenidos mediante diversos tipos de fluidos, diferentes velocidades y varias geometrías, se correlacionan entre sí usando números adimensionales similares a los de transferencia de calor y de momento lineal. Los métodos de análisis dimensional se estudian en las secciones 3.11, 4.14 y 7.8.

El número adimensional más importante es el de Reynolds N_{Re}, que indica el grado de turbulencia.

$$N_{Re} = \frac{Lv\rho}{\mu} \tag{7.3-1}$$

donde L es el diámetro D_p de una esfera, el diámetro D de una tubería o la longitud L de una placa plana. v es la velocidad de masa promedio en una tubería. En un lecho empacado, generalmente se usa la velocidad superficial v' del corte transversal vacío, y, algunas veces, se usa $v = v'/\varepsilon$, donde v es la velocidad intersticial y ε es la fracción de espacios huecos del lecho.

El *número de Schmidt es*

$$N_{Sc} = \frac{\mu}{\rho D_{AB}} \tag{7.3-2}$$

La viscosidad μ y la densidad p corresponden al flujo real de la mezcla de soluto A y el fluido B. Si la mezcla es diluida, se pueden usar las propiedades de B puro. El número de Prandtl, $c_p\ \mu/k$, para transferencia de calor, es análogo al número de Schmidt para transferencia de masa. El número de Schmidt es la relación entre el componente cortante de la difusividad μ/ρ y la difusividad de transferencia de masa D_{AB} y relaciona físicamente el espesor relativo de la capa hidrodinámica con la capa límite de transferencia de masa.

El *número de Sherwood,* también adimensional, es

$$N_{Sh} = k_c' \frac{L}{D_{AB}} = k_c\, y_{BM} \frac{L}{D_{AB}} = \frac{k_x'}{c} \frac{L}{D_{AB}} = \cdots \tag{7.3-3}$$

El valor de k_c' en la ecuación (7.3-3) puede sustituirse por otras equivalencias de la tabla 7.2-l.

El *número de Stanton* es bastante frecuente

$$N_{St} = \frac{k_c'}{v} = \frac{k_y'}{G_M} = \frac{k_G' P}{G_M} = \cdots \tag{7.3-4}$$

Nuevamente, k_c' puede sustituirse por diversas funciones: $G_M = v\rho/M_{prom} = vc$.

Con frecuencia, el coeficiente de transferencia de masa se correlaciona como un factor adimensional J_D, que se relaciona con k_c' y N_{Sh} como sigue.

$$J_D = \frac{k_c'}{v}(N_{Sc})^{2/3} = \frac{k_G' P}{G_M}(N_{Sc})^{2/3} = \ldots = N_{Sh}/(N_{Re} N_{Sc}^{1/3}) \tag{7.3-5}$$

Para la transferencia de calor, el factor J_H adimensional es el siguiente:

$$J_H = \frac{h}{c_p G}(N_{Pr})^{2/3} \tag{7.3-6}$$

7.3B Analogías entre las transferencias de masa, calor y momento lineal

1. Introducción. En el transporte molecular de momento lineal, calor y masa hay muchas semejanzas, señaladas en los capítulos 2 a 6. Las ecuaciones de difusión molecular de Newton para el momento lineal, de Fourier para el calor y de Fick para la masa son muy parecidas y se puede decir

que hay analogías entre esos tres procesos de transporte molecular. También hay semejanzas en el transporte turbulento, como se estudió en las secciones 5.7C y 6.1A, donde las ecuaciones de flujo específico se escribieron utilizando la ditüsividad de momento lineal con remolino turbulento ε_t, la difusividad térmica con remolino turbulento α_t, y la difusividad de masa con remolino turbulento ε_M. Sin embargo, tales semejanzas no están tan bien definidas desde el punto de vista matemático o físico y son más difíciles de relacionar unas con otras.

Se ha dedicado un gran esfuerzo en la literatura para desarrollar analogías entre estos tres procesos de transporte para transferencia turbulenta a fin de permitir la predicción de una a partir de cualquiera de las otras. En seguida analizamos algunas.

2. Analogía de Reynolds. Reynolds fue el primero en notar las semejanzas en los procesos de transporte y relacionó el momento lineal turbulento con la transferencia de calor. A partir de entonces, la transferencia de masa también se relacionó con la transferencia de momento lineal y de calor. Dedujimos esta analogía a partir de las ecuaciones (6.1-4) a (6.1-6) para el transporte turbulento. Para el flujo de fluido en una tubería, si se produce la transferencia de calor desde el fluido hasta la pared, la ecuación (6.1-5) se convierte en la siguiente, donde z es la distancia a la pared:

$$\frac{q}{A} = -\rho c_p(\alpha + \alpha_t)\frac{dT}{dz} \tag{7.3-7}$$

Para la transferencia de momento lineal, la ecuación (6.1-4) se transforma en

$$\tau = -\rho\left(\frac{\mu}{\rho} + \varepsilon_t\right)\frac{dv}{dz} \tag{7.3-8}$$

Después se supone que a y μ/ρ son despreciables y que $\alpha_t = \varepsilon_t$. En seguida se divide la ecuación (7.3-7) entre la (7.3-8) para obtener

$$\left(\frac{\tau}{q/A}\right)c_p\,dT = dv \tag{7.3-9}$$

Si suponemos que el flujo específico de calor q/A en un sistema turbulento es análogo al flujo específico de momento lineal τ, la relación $\tau/(q/A)$ debe ser constante para todas las posiciones radiales. Ahora integramos entre las condiciones en la pared donde $T = T_i$ y v = 0 hasta algún punto del fluido donde Tsea igual a Tgeneral, y suponemos que la velocidad en ese punto es igual a v_{prom}, la velocidad general. Además, se entiende que q/A *es* el flujo en la pared, y el esfuerzo de corte en la pared, es τ_s. Por consiguiente,

$$\frac{\tau_s}{q/A}c_p(T - T_i) = v_{prom} - 0 \tag{7.3-10}$$

Además, si se sustituye $q/A = h(T - T_i)$ y $\tau_s = fv_{prom}^2\ p/2$ de la ecuación (2.10-4) en la ecuación (7.3-10),

$$\frac{f}{2} = \frac{h}{c_p v_{prom}\rho} = \frac{h}{c_p G} \tag{7.3-11}$$

De la misma manera, utilizando la ecuación (6.1-6) para J_A^* y también $J_A^* = k_c' (c_A - c_{Ai})$, se puede relacionar ésta con la ecuación (7.3-8) para la transferencia de momento lineal. Entonces, la analogía de Reynolds completa es,

$$\frac{f}{2} = \frac{h}{c_p G} = \frac{k_c'}{v_{\text{prom}}} \tag{7.3-12}$$

Los datos experimentales para las corrientes de gases concuerdan aproximadamente con la ecuación (7.3-12) si los números de Schmidt y de Prandtl están cerca de 1 .O y si sólo existe fricción de superficie en el flujo alrededor de una placa plana o dentro de una tubería. Cuando hay líquidos presentes, esfuerzo de arrastre de forma, o ambos, la analogía no es válida.

3. Otras analogías. La analogía de Reynolds supone que las difusividades turbulentas ε_t, α_t y ε_M son todas iguales y que las difusividades moleculares μ/ρ, α y D_{AB} son despreciables comparadas con las difusividades turbulentas. Cuando el numero de Prandtl $(\mu/\rho)/\alpha$ es 1 .O, entonces $\mu/\rho = \alpha$; además, para $N_{Sc} = 1.0$, $\mu/\rho = D_{AB}$. Entonces, $(\mu/\rho + \varepsilon_t) = (\alpha + \alpha_t) = (D_{AB} + \varepsilon_M)$ y la analogía de Reynolds puede obtenerse con los términos moleculares presentes. Pero la analogía no es válida cuando una subcapa viscosa adquiere importancia, puesto que las difusividades de remolino disminuyen hasta cero y las difusividades moleculares se vuelven importantes.

Prandtl modificó la analogía de Reynolds escribiendo la ecuación normal de difusión molecular para la subcapa viscosa y una ecuación de analogía de Reynolds para la región central turbulenta. Así, como estos procesos se verifican en serie, estas ecuaciones se combinaron para producir una ecuación global (G1). No obstante los resultados no son muy buenos para los fluidos cuando los números de Prandtl y de Schmidt difieren de 1 .O.

Von Kármán modificó todavía más la analogía de Prandtl considerando la región amortiguadora además de la subcapa viscosa y el centro turbulento. Estas tres regiones se muestran en el perfil de velocidad universal de la figura 3.10-4. Una vez más, se escribe una ecuación para la difusión molecular en la subcapa viscosa usando sólo la difusividad molecular y una ecuación de la analogía de Reynolds para el centro turbulento. Tanto la difusividad molecular como la difusividad de remolino se usan en una ecuación para la capa amortiguadora, donde la velocidad en esta capa se emplea para obtener una ecuación para la difusividad del remolino. Las tres ecuaciones se combinan para dar la analogía de Von Kármán. Desde entonces se han propuesto muchas otras analogías (P1 , S4).

4. Analogía delfactor Jde Chilton y Colburn. La analogía de más éxito y más usada es la del factor *J* de Chilton y Colbum (C2). Se basa en datos experimentales para gases y líquidos en las regiones de flujo tanto laminar como turbulento y se escribe de la manera siguiente:

$$\frac{f}{2} = J_H = \frac{h}{c_p G}(N_{Pr})^{2/3} = J_D = \frac{k_c'}{v_{\text{prom}}}(N_{Sc})^{2/3} \tag{7.3-13}$$

Aunque es una ecuación basada en datos experimentales para flujo laminar y flujo turbulento, puede demostrarse que satisface la solución exacta derivada a partir del flujo laminar sobre una placa plana en las secciones 3.10 y 5.7.

La ecuación (7.3-l 3) ha demostrado ser sumamente útil para correlacionar los datos de transferencia de momento lineal, calor y masa. Permite la predicción de un coeficiente de transferencia desconocido cuando se conoce alguno de los otros coeficientes. En la transferencia de momento lineal, el factor de fricción se obtiene para la pérdida total por arrastre o fricción, que incluye el esfuerzo de

arrastre o las pérdidas de momento lineal debidas a objetos burdos y también la fricción de superficie. Para el flujo alrededor de una placa plana o en una tubería donde no hay esfuerzo de arrastre, j72 = J_H = J_D. Cuando hay esfuerzo de arrastre, como en el flujo en lechos empacados o alrededor de objetos burdos, j72 es mayor que J_H o J_D y $J_H \cong J_D$.

7.3C Deducción de los coeficientes de transferencia de masa en el flujo laminar

1. Zn troducción. Cuando un fluido tiene flujo laminar y hay transferencia de masa por difusión molecular, las ecuaciones son muy semejantes a las de la transferencia de calor por conducción en el flujo laminar. Los fenómenos de la transferencia de calor y de masa no siempre son completamente análogos, ya que en la transferencia de masa pueden difundirse varios componentes. Además, el flujo de masa perpendicular a la dirección del flujo debe ser pequeño de modo que no deforme el perfil de velocidad laminar.

En teoría no es necesario conocer los coeficientes de transferencia de masa experimentales para el flujo laminar, puesto que pueden resolverse las ecuaciones para la transferencia de momento lineal y para la difusión. Sin embargo, en muchos casos reales es difícil describir matemáticamente el flujo laminar en geometrías, como sucede con el flujo alrededor de un cilindro o en un lecho empacado. Por consiguiente, muchas veces se obtienen los coeficientes de transferencia de masa experimentales y se correlacionan. Se dará una deducción teórica simplificada para dos casos de flujo laminar.

2. Transferencia de masa en el flujo laminar en un tubo. Consideramos el caso de la transferencia de masa desde una pared de un tubo hacia un fluido que tiene en el interior flujo laminar, donde, por ejemplo, la pared está hecha de ácido benzoico sólido que se disuelve en agua. Esto se parece a la transferencia de calor desde una pared hacia el fluido que corre, donde la convección natural es despreciable. Para el fluido completamente desarrollado, la velocidad parabólica deducida mediante las ecuaciones (2.6-18) y (2.6-20) es,

$$v_x = v_{\text{máx}}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right] = 2v_{\text{prom}}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \qquad \textbf{(7.3-14)}$$

donde v_x es la velocidad en la dirección x a una distancia r del centro. Para la difusión en estado estacionario en un cilindro, puede hacerse un balance de masa sobre un elemento diferencial donde la velocidad de entrada por convección más la difusión es igual a la velocidad de salida real por difusión, para dar

$$v_x\frac{\partial c_A}{\partial x} = D_{AB}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial c_A}{\partial r}+\frac{\partial^2 c_A}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 c_A}{\partial x^2}\right) \qquad \textbf{(7.3-15)}$$

Entonces $\partial^2 c_A/\partial x^2 = 0$ si la difusión en la dirección x es despreciable comparada con la convección. Si se combinan las ecuaciones (7.3-14) y (7.3-l 5), la solución final (S1) es una serie compleja similar a la solución de Graetz'para la transferencia de calor y un perfil de velocidad parabólico.

Cuando se supone que el perfil de velocidad es plano, como en el flujo en forma de bastón, la solución se obtiene más fácilmente (S1). Se ha obtenido una tercera solución, llamada *solución de Leveque* aproximada, en la que hay un perfil de velocidad lineal cerca de la pared y el soluto se difunde sólo una corta distancia desde la pared hasta el fluido. Ésta es semejante a la solución del perfil

de velocidad parabólico a altos valores de flujo. Para este caso se presentan ecuaciones de diseño experimental en la sección 7.3D.

3. Difusión en una película laminar descendente. En la sección 2.9C dedujimos la ecuación para el perfil de velocidad en una película descendente que se muestra en la figura 7.3-1a. Ahora consideraremos la transferencia de masa de un soluto A hácia una película laminar descendente, que es importante en columnas de pared húmeda al desarrollar teorías para explicar la transferencia de masa en bolsas estancadas de fluidos y en la transferencia de masa turbulenta. El soluto A en el gas es absorbido en la interfaz y luego se difunde una distancia dentro del líquido, de manera que no penetra la distancia completa $x = \delta$ en la pared. En estado estacionario, Ea concentración de entrada $c_A = 0$. En la figura 7.3-la se muestra el perfil de concentración de c_A a una distancia z de la entrada.

Se hará un balance de masa sobre el elemento que se muestra en la figura 7.3-lb. En estado estacionario, velocidad de entrada = velocidad de salida.

$$N_{Ax}|_x(1\ \Delta z) + N_{Az}|_z(1\ \Delta x) = N_{Ax}|_{x+\Delta x}(1\ \Delta z) + N_{Az}|_{z+\Delta z}(1\ \Delta x) \tag{7.3-16}$$

En una solución diluida, la ecuación de difusión de A en la dirección x es

$$N_{Ax} = -D_{AB}\frac{\partial c_A}{\partial x} + \text{convección cero} \tag{7.3-17}$$

En la dirección z la difusión es despreciable.

$$N_{Az} = 0 + c_A v_z \tag{7.3-18}$$

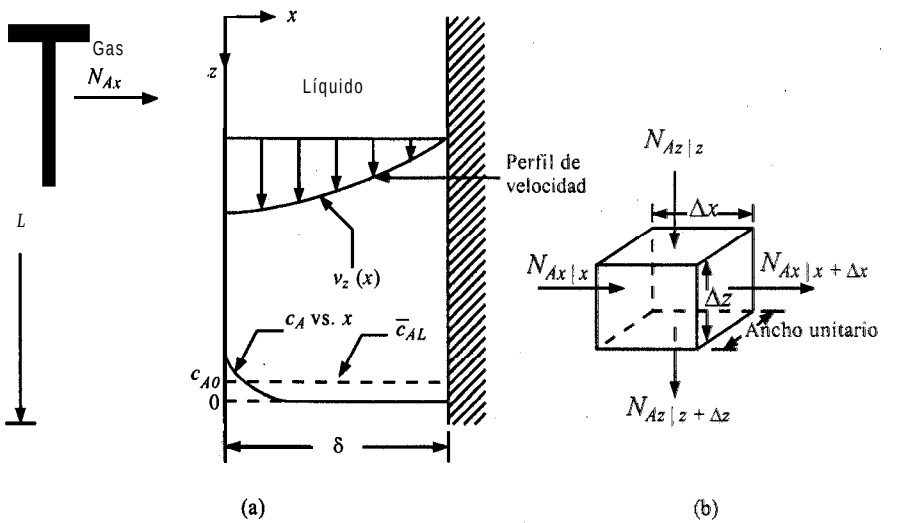


FIGURA 7.3-1. *Difusión del soluto A en una película laminar descendente: a) perfil de velocidad y per-l de concentración, b) elemento pequeño para el balance de masa.*

Si se divide la ecuación (7.3-16) entre Δx Az, se hace que Δx y Az tiendan a cero y se sustituye en las ecuaciones (7.3-17) y (7.3-18) en el resultado, se obtiene

$$v_z \frac{\partial c_A}{\partial z} = D_{AB} \frac{\partial^2 c_A}{\partial x^2} \tag{7.3-19}$$

A partir de las ecuaciones (2.9-24) y (2.9-25), el perfil de velocidad es parabólico y es $v_z = v_{z\ máx}$ $[1 - (x/\delta)^2]$. Ademas, $v_{z\ máx} = (3/2)v_{z\ prom}$. Si el soluto penetra tan sólo una corta distancia. dentro del fluido, es decir, tiempos de contacto cortos de t segundos iguales a $z/v_{máx}$, entonces el A que se difunde es arrastrado a una velocidad $v_{z\ máx}$ o $v_{máx}$ si se elimina el subíndice z. Por tanto la ecuación (7.3- 19) se convierte en

$$\frac{\partial c_A}{\partial (z / v_{máx})} = D_{AB} \frac{\partial^2 c_A}{\partial x^2} \tag{7.3-20}$$

Al utilizar las condiciones límite $c_A = 0$ en z $= 0$, $c_A = c_{A0}$ en $x = 0$ y $c_A = 0$ en $x = \infty$, podemos integrar la ecuación (7.3-20) para obtener

$$\frac{c_A}{c_{A0}} = \left(\text{ferc} \frac{x}{\sqrt{4 D_{AB} z / v_{máx}}} \right) \tag{7.3-21}$$

donde fer y es la función de error y ferc y = 1 − fer y. Los valores de fer y son funciones tabuladas estándar.

Para determinar el flujo molar local en la superficie $x = 0$ en la posición z con respecto a la parte superior de la entrada, se escribe (B 1)

$$N_{Ax}(z)\Big|_{x=0} = -D_{AB} \frac{\partial c_A}{\partial x}\Big|_{x=0} = c_{A0} \sqrt{\frac{D_{AB} v_{máx}}{\pi z}} \tag{7.3-22}$$

El total de moles de A transferidos por segundo hacia el líquido a lo largo de la longitud completa z $=$ 0 a z $= L$, donde la superficie vertical es el ancho unitario, es

$$N_A(L \cdot 1) = (1) \int_0^L (N_{Ax|x=0}) dz$$

$$= (1) \int_0^L c_{A0} \left(\frac{D_{AB} v_{máx}}{\pi} \right)^{1/2} \frac{1}{z^{1/2}} dz$$

$$= (L \cdot 1) c_{A0} \sqrt{\frac{4 D_{AB} v_{máx}}{\pi L}} \tag{7.3-23}$$

El término $L/v_{máx}$ es t_L, el tiempo de exposición del líquido al soluto A en el gas. Esto significa que la velocidad de transferencia de masa es proporcional a $D_{AB}^{0.5}$ y $1/t_L^{0.5}$. Ésta es la base de la teoría de la penetración en la transferencia de masa turbulenta, cuando hay bolsas de líquido expuestas a la difusión de estado no estacionario (penetración) para tiempos de contacto breves.

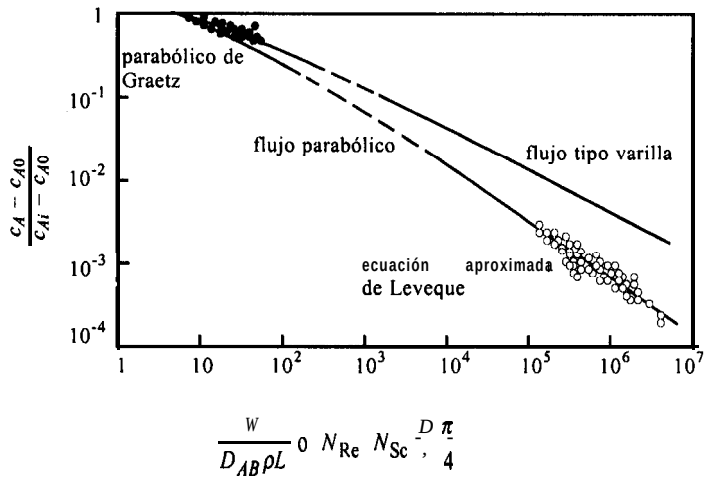


FIGURA 7.3-2. *Datos para la difusión en un fluido de flujo rectilíneo en el interior de una tubería: círculos negros, datos de vaporización de Gilliland y Sherwood; círculos blancos, datos de disolución de sólidos de Linton y Sherwood. [Tomado de W.H. Linton y T.K. Sherwood, Chem. Eng. Progr. 46. 258 (1950). Reproducido con permiso.]*

7.3D Transferencia de masa en flujos por tuberías

1. Transferencia de masa en flujo por tuberías. Cuando un líquido o un gas fluye por el interior de una tubería y el número de Reynolds $Dv\rho/\mu$ es inferior a 2 100, existe un flujo laminar. En la figura 7.3-2 se grafican los datos experimentales obtenidos para la transferencia de masa de las paredes con gases (G2, Ll) para valores de $W/D_{AB}\rho L$ inferiores a 70. La ordenada es $(c_A - c_{A0})/(c_{Ai} - c_{A0})$, donde c_A es la concentración de salida, c_{A0} es la concentración de entrada y c_{Ai} es la concentración en la interfaz entre la pared y el gas. La abcisa adimensional es $W/D_{AB}\rho L$ o $N_{Re}N_{Sc}(D/L)(\pi/4)$, donde W es el flujo en kg/s y L es la longitud de la sección de transferencia de masa en metros. Puesto que los datos experimentales coinciden con la gráfica de flujo tipo varilla, debe utilizarse esta línea. Se supone que el perfil de velocidades está totalmente desarrollado con forma parabólica en la entrada.

Para líquidos que tengan valores pequeños de D_{AB}, los datos coinciden con la línea de flujo parabólico que es como sigue para valores de $W/D_{AB}\rho L$ superiores a 400:

$$\frac{c_A - c_{A0}}{c_{Ai} - c_{A0}} = 5.5\left(\frac{W}{D_{AB}\rho L}\right)^{-2/3} \tag{7.3-24}$$

2. Transferencia de masa para el flujo turbulento dentro de tuberías. Para flujo turbulento con valores de $Dv\rho/\mu$ superiores a 2100, con gases o líquidos que fluyen en el interior de una tubería,

$$N_{Sh} = k_c' \frac{D}{D_{AB}} = \frac{k_c p_{BM}}{P} \frac{D}{D_{AB}} = 0.023\left(\frac{Dv\rho}{\mu}\right)^{0.83}\left(\frac{\mu}{\rho D_{AB}}\right)^{0.33} \tag{7.3-25}$$

La ecuación es válida para valores de N_{Sc} entre 0.6 y 3000 (G2, Ll). Adviértase que el N_{Sc} para gases está en el intervalo de 0.5 a 3 y en el caso de líquidos suele ser superior a 100. La ecuación (7.3-25) de transferencia de masa y la ecuación (4.5-8) de transferencia de calor, ambas en el interior de una tubería, son similares entre sí.

3. Transferencia de masa para el flujo en torres de pared húmeda. Cuando un gas fluye en el interior del centro de una torre de pared húmeda, son aplicables las mismas correlaciones que se usan para la transferencia de masa de un gas en flujo laminar o turbulento en una tubería. Esto significa que las ecuaciones (7.3-24) y (7.3-25) pueden utilizarse para predecir la transferencia de masa del gas. En la transferencia de masa en la película líquida que fluye hacia abajo de la torre de pared húmeda, pueden usarse las ecuaciones (7.3-22) y (7.3-23) para números de Reynolds de $4\Gamma/\mu$ como se define en la ecuación (2.9-29) hasta cerca de 1200, y los valores predichos teóricamente deben multiplicarse por 1.5 debido a las ondas y a otros factores. Estas ecuaciones son válidas para tiempos de contacto breves o números de Reynolds superiores a 100 (S1).

EJEMPLO 7.3-l. Transferencia de masa** dentro de un **tubo

Un tubo está recubierto en el interior con naftaleno y tiene un diámetro interior de 20 mm, con una longitud de 1.10 m. A través de esta tubería fluye aire a 3 18 K, con presión promedio de 101.3kPa y velocidad de 0.80 m/s. Si se supone que la presión absoluta permanece esencialmente constante, calcule la concentración de naftaleno en el aire que sale. Utilice las propiedades físicas del ejemplo 6.2-4.

Solución: Según el ejemplo 6.2-4, $D_{AB} = 6.92\times10^{-6}$ m^2/s y la presión de vapor $p_{Ai} = 74.0$ Pa o $c_{Ai} = p_{Ai}/RT = 74.0/(8314.3 \times 318) = 2.799 \times 10^{-5}$ kg mol/m^3. Para el aire, según el Apéndice A.3, $\mu = 1.932 \times 10^{-5}$ Pa · s, $\rho = 1.114$ kg/m^3. El número de Schmidt es

$$N_{Sc} = \frac{\mu}{\rho D_{AB}} = \frac{1.932 \text{ x } 10^{-5}}{1.114 \text{ x } 6.92 \text{ x } 10^{-6}} = 2.506$$

El número de Reynolds es

$$N_{Re} = \frac{Dv\rho}{\mu} = \frac{0.020(0.80)(1.114)}{1.932 \text{ x } 10^{-5}} = 922.6$$

Por lo tanto, el flujo es laminar. Entonces,

$$N_{Re}\,N_{Sc} = \frac{D}{L}\frac{\pi}{4} = 922.6(2.506)\frac{0.020}{1.10}\frac{\pi}{4} = 33.02$$

Si se utiliza la figura 7.3-2 y la línea de flujo en forma de varilla, $(c_A - c_{A0})/(c_{Ai} - c_{A0}) = 0.55$. Además, c_{A0}(entrada) = 0. Así, $(c_A - 0)/(2.799 \times 10^{-5} - 0) = 0.55$. Después de resolver, c_A (concentración de salida) = 1.539×10^{-5} kg mol/m^3.

7.3E Transferencia de masa para el flujo fuera de superficies sólidas

1. Transferencia de masa de flujo paralelo a placas planas. La transferencia de masa o la vaporización de líquidos de una placa o superficie plana a una corriente, reviste gran interés en el secado de materiales inorgánicos y biológicos, en la evaporación de disolventes de pinturas, para las placas en túneles de viento y en los canales de flujo de equipos de proceso químico.

Cuando el fluido fluye sobre una placa con corriente libre en un espacio abierto, la capa límite no esta totalmente desarrollada. Para gases o la evaporación de líquidos a fase gaseosa en la región laminar de $N_{Re,\,L} = Lv\rho/\mu$ inferior a 15000, los datos pueden representarse con exactitud de ±25% por medio de la ecuación (S4)

$$J_D = 0.664\ N_{Re,\,L}^{-0.5} \tag{7.3-26}$$

Al escribir la ecuación (7.3-26) en términos del número de Sherwood N_{Sh},

$$\frac{k_c' L}{D_{AB}} = N_{Sh} = 0.664\ N_{Re,\,L}^{0.5}\, N_{Sc}^{1/3} \tag{7.3-27}$$

donde L es la longitud de la placa en el sentido de flujo. Además, $J_D = J_H = f/2$ en esta geometría. Para gases y $N_{Re,\,L}$ entre 15000 y 300000, los datos se representan con exactitud de ±30% por medio de $J_D = J_H = f/2$ como

$$J_D = 0.036\ N_{Re,\,L}^{-0.2} \tag{7.3-28}$$

Los datos experimentales para líquidos se correlacionan con exactitud de ±40% cuando $N_{Re,\,L}$ está entre 600-50000 (L2) por medio de

$$J_D = 0.99\ N_{Re,\,L}^{-0.5} \tag{7.3-29}$$

EJEMPLO 7.3-2. Transferencia de masa en una placa plana

Un gran volumen de agua pura a 26.1 °C fluye en paralelo a una placa plana de ácido benzoico sólido, donde L = 0.244 m en la dirección del flujo: La velocidad del agua es 0.061 m/s. La solubilidad del ácido benzoico en agua es 0.0295 kg mol/m^3. La difusividad del ácido benzoico es 1.245 × 10^{-9} m^2/s. Calcule el coeficiente de transferencia de masa k_L y el flujo específico N_A.

Solución: Puesto que la solución es muy diluida, se pueden usar las propiedades físicas del agua del Apéndice A.2.

$$\mu = 8.71 \times 10^{-4}\ \text{Pa} \cdot \text{s}$$

$$p = 996\ \text{kg/m}^3$$

$$D_{AB} = 1.245 \times 10^{-9}\ \text{m}^2/\text{s}$$

El número de Schmidt es

$$N_{Sc} = \frac{8.71 \times 10^{-4}}{996(1.245 \times 10^{-9})} = 702$$

El número de Reynolds es

$$N_{\mathrm{Re},\,L} = \frac{Lv\rho}{\mu} = \frac{0.244(0.0610)(996)}{8.71 \times 10^{-4}} = 1.700 \times 10^{4}$$

Usando la ecuación (7.3-29)

$$J_D = 0.99\, N_{\mathrm{Re},\,L}^{-0.5} = 0.99(1.700 \times 10^{4})^{-0.5} = 0.00758$$

La definición de J_D según la ecuación (7.3-5) es

$$J_D = \frac{k_c'}{v}(N_{\mathrm{Sc}})^{2/3} \qquad (7.34)$$

Despejando k_c', $k_c' = J_D\, v(N_{\mathrm{Sc}})^{-2/3}$. Sustituyendo los valores conocidos y resolviendo,

$$k_c' = 0.00758(0.0610)(702)^{-2/3} = 5.85 \times 10^{-6}\ \mathrm{m/s}$$

Se trata en este caso de la difusión de A a través de B que no se difunde, por lo que debe usarse el valor de k_c de la ecuación (7.2-10).

$$N_A = \frac{k_c'}{x_{BM}}(c_{A1} - c_{A2}) = k_c(c_{A1} - c_{A2}) \qquad \textbf{(7.2-10)}$$

Puesto que la solución es muy diluida, $x_{BM} \cong 1.0$ y $k_c' \cong k_c$. Además, $c_{A1} = 2.948 \times 10^{-2}$ kg mol/m^3 (solubilidad) y $c_{A2} = 0$ (gran volumen de agua pura). Sustituyendo en la ecuación (7.2-10),

$$N_A = (5.85 \times 10^{-6})(0.02948 - 0) = 1.726 \times 10^{-7}\ \mathrm{kg\ mol/s \cdot m^2}$$

2. *Transferencia de masa con flujo que pasa por esferas individuales.* Para el flujo que pasa por esferas y con valores muy bajos de $N_{\mathrm{Re}} = D_p v\rho/\mu$, donde v es la velocidad promedio en la sección de huecos antes de llegar a la esfera, el número de Sherwood ($k_c' D_p/D_{AB}$) tiende a un valor de 2.0 Esto puede demostrarse mediante la ecuación (6.2-33), que se dedujo para un medio estacionario. Reescribiendo la ecuación (6.2-33) como sigue, si D_p es el diámetro de la esfera:

$$N_A = \frac{2D_{AB}}{D_p}(c_{A1} - c_{A2}) = k_c(c_{A1} - c_{A2}) \qquad \textbf{(7.3-30)}$$

El coeficiente de transferencia de masa k_c, que equivale a k_c' para una solución diluida, es

$$k_c' = \frac{2D_{AB}}{D_p} \qquad \textbf{(7.3-31)}$$

Reordenando,

$$\frac{k_c' D_p}{D_{AB}} = N_{\mathrm{Sh}} = 2.0 \qquad (7.3\text{-}32)$$

Claro está que los efectos de la convección natural pueden aumentar el valor de k_c' .

Para gases con número de Schmidt entre 0.6 y 2.7 y número de Reynolds en el intervalo de 1 a 48000, puede usarse una ecuación modificada (G1).

$$N_{Sh} = 2 + 0.552 N_{Re}^{0.53} N_{Sc}^{1/3} \qquad (7.3\text{-}33)$$

Esta fórmula también es válida para transferencias en las que el número de Prandtl remplaza al de Schmidt y el número de Nusselt hD_p/k remplaza al de Sherwood.

Para líquidos (G3) con números de Reynolds en el intervalo de 2 a más o menos 2000, puede ser útil la siguiente expresión:

$$N_{Sh} = 2 + 0.95 N_{Re}^{0.50} N_{Sc}^{1/} \qquad (7.3\text{-}34)$$

Para líquidos con números de Reynolds entre 2000 a 17000, puede aplicarse la siguiente ecuación (S5),

$$N_{Sh} = 0.347 N_{Re}^{0.62} N_{Sc}^{1/} \qquad (7.3\text{-}35)$$

EJEMPLO 7.3-3. Transferencia de masa desde una esfera

Calcule el coeficiente de transferencia de masa y el flujo específico para transferencia de masa desde una esfera de naftaleno expuesta al aire a 45 °C y a 1 atm abs, que fluye a velocidad de 0.305 m/s. El diámetro de la esfera es 25.4 mm. La difusividad del naftaleno en aire, a 45 "C, es 6.92 $\times 10^{-6}$ m^2/s y la presión de vapor del naftaleno sólido es 0.555 mm Hg. Use unidades SI y del sistema inglés:

Solución: En unidades del sistema inglés, $D_{AB} = 6.92 \times 10^{-6}(3.875 \times 10^4) = 0.2682$ pie^2/h. El diámetro $D_p = 0.0254$ m = $0.0254(3.2808) = 0.0833$ pie. Se usarán las propiedades físicas del aire del Apéndice A.3, pues la concentración de naftaleno es baja.

$$\mu = 1.93 \times 10^{-5} \text{ Pa . s} = 1.93 \times 10^{-5}(2.4191 \times 10^3) = 0.0467 \text{ lb}_m/\text{pie . h}$$

$$\rho = 1.113 \text{ kg/m}^3 = \frac{1.113}{16.0185} = 0.0695 \text{ lbm/pie}^3$$

$$v = 0.305 \text{ m/s} = 0.305(3600 \times 3.2808) = 3600 \text{ pie/h}$$

El número de Schmidt es

$$N_{Sc} = \frac{\mu}{\rho D_{AB}} = \frac{0.0467}{0.0695(0.2682)} = 2.505$$

$$N_{Sc} = \frac{1.93 \times 10^{-5}}{1.113(6.92 \times 10^{-6})} = 2.505$$

El número de Reynolds es

$$N_{Re} = \frac{D_p v \rho}{\mu} = \frac{0.0833(3600)(0.0695)}{0.0467} = 446$$

$$N_{Re} = \frac{0.0254(0.3048)(1.113)}{1.93 \times 10^{-5}} = 446$$

Se usará la ecuación (7.3-33) para gases:

$$N_{Sh} = 2 + 0.552(N_{Re})^{0.53}(N_{Sc})^{1/3} = 2 + 0.552(446)^{0.53}(2.505)^{1/3} = 21.0$$

A partir de la ecuación (7.3-3),

$$N_{Sh} = k_c' \frac{L}{D_{AB}} = k_c' \frac{D_p}{D_{AB}}$$

Sustituyendo los valores conocidos y resolviendo,

$$21\ 0 = \frac{k_c'(0.0833)}{0.2682} \qquad k_c' = 67.6 \text{ pie/h}$$

$$21.0 = \frac{k_c'\ (0.0254)}{6.92 \times 10^{-6}} \qquad k_c' = 5.72 \times 10^{-3} \text{ m/s}$$

De la tabla 7.2-1,

$$k_c'c = k_c' \frac{P}{RT} = k_G' P$$

Por tanto, para $T = 45 + 273 = 318$ K $= 318(1.8) = 574$ °R,

$$k_G' = \frac{k_c'}{RT} = \frac{67.6}{(0.730)(573)} = 0.1616 \text{ lb mol/h} \cdot \text{pie}^2 \cdot \text{atm}$$

$$k_G' = \frac{5.72 \times 10^{-3}}{8314(318)} = 2.163 \times 10^{-9} \text{ kg mol/s} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{Pa}$$

Puesto que el gas está muy diluido, $y_{BM} \cong 1.0$ y $k_G' \cong k_G$. Sustituyendo en la ecuación (7.2-12) para la difusión de A a través de B en reposo y observando que $p_{A1} = 0.5551760 = 7.303 \times 10^{-4}$ atm $= 74.0$ Pa y $p_{A2} = 0$ (aire puro),

$$N_A = k_G(p_{A1} - p_{A2}) = 0.1616(7.303 \times 10^{-4} - 0)$$

$$= 1.180 \times 10^{-4} \text{ lb mol/h} \cdot \text{pie}^2$$

$$= 2.163 \times 10^{-9}(74.0 - 0) = 1.599 \times 10^{-7} \text{ kg mol/s} \cdot \text{m}^2$$

El área de la esfera es

$$A = \pi D_p^2 = \pi(0.0833)^2 = 2.18 \times 10^{-2} \text{ pie}^2$$

$$= (2.18 \times 10^{-2}) \left(\frac{1}{3.2808}\right)^2 = 2.025 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

Cantidad total evaporada = $N_A A$ = $(1.18 \times 10^{-4})(2.18 \times 10^{-2})$ = 2.572×10^{-6} Ib mol/h = $(1.599 \times 10^{-7})(2.025 \times 10^{-3})$ = 3.238×10^{-10} kg mol /s.

3. Transferencia de masa en lechos empacados. La transferencia de masa a y desde lechos empacados es frecuente en las operaciones de proceso, incluyendo el secado, la adsorción o desorción de gases o líquidos por medio de partículas solidas como el carbón, y la transferencia de masa de gases y líquidos a partículas de catalizadores. Mediante un lecho empacado puede obtenerse un área de transferencia extensa de masa con un volumen relativamente pequeíio.

La fracción de espacios huecos en un lecho es E, que son los metros cúbicos de espacios huecos, divididos entre el volumen total en metros cúbicos de los espacios huecos mas el sólido. Los valores varían entre 0.3 y 0.5. Debido a la canalización del flujo, el empacado no uniforme, etc., es difícil obtener datos experimentales exactos, y los datos de diferentes investigadores difieren considerablemente.

Cuando el numero de Reynolds es de 10 a 10000 para gases en lechos de esferas (D4), la correlación recomendada con una desviación promedio de cerca de ±20% y una desviación máxima de cerca de ±50% es,

$$J_D = J_H = \frac{0.4548}{\varepsilon} N_{Re}^{-0.4069} \qquad (7.3\text{-}36)$$

Se ha demostrado (G4, G5) que J_D y J_H son aproximadamente iguales. El numero de Reynolds se define como $N_{Re} = D_p v' \rho/\mu$, donde D_p es el diámetro de las esferas y v' es la velocidad de masa superficial promedio en el recipiente vacío sin empaque. En las ecuaciones (7.3-36) a (7.3-39) y las ecuaciones *(7.3-5) y (7.3-6)* se usa v'.

Para transferencia de masa de líquidos en lechos empacados, se recomiendan las correlaciones de Wilson y Geankoplis (W 1). Si el numero de Reynolds $D_p v' \rho/\mu$ se encuentra en el intervalo de 0.00 16 a 55 y el número de Schmidt está entre 165 y 70600, la ecuación idónea es

$$J_D = \frac{1.09}{\varepsilon} N_{Re}^{-2/3} \qquad (7.3\text{-}37)$$

Para líquidos y un numero de Reynolds entre 55 y 1500, y un numero de Schmidt entre 165 y 10690

$$J_D = \frac{0.250}{\varepsilon} N_{Re}^{-0.31} \qquad (7.3\text{-}38)$$

Otra alternativa es usar la ecuación (7.3-36) para líquidos en el intervalo de números de Reynolds de 10 a 1500.

En lechos fluidizados de esferas, es válida la siguiente ecuación (7.3-36) para gases y líquidos y un número de Reynolds en el intervalo de 10 a 4000. Para líquidos en un lecho fluidizado y un número de Reynolds en el intervalo de 1 a 10(D4),

$$\varepsilon J_D = 1.1068\ N_{Re}^{-0.7} \qquad (7.3.39)$$

Cuando se usan lechos empacados con sólidos no esféricos, pueden usarse factores de corrección aproximados con las ecuaciones (7.3-36) a la (7.3-38) para esferas. Para una partícula no esférica dada, por ejemplo, esto se lleva a cabo como sigue: el diámetro de partícula que se debe usar en las ecuaciones para predecir J_D es el diámetro de una esfera con la misma área superficial que la partícula sólida dada. El flujo hacia esas partículas en el lecho se calcula luego usando el área de las partículas dadas. En otros libros se da un procedimiento aproximado alterno (G6).

4. Método de cálculo para lechos empacados. Para calcular el flujo específico total en un lecho empacado, primero se obtiene J_D y después se calcula k_c con base en este valor. A continuación, si se conoce el volumen total V_b m^3 del lecho (espacios vacíos más sólido) se determina el área superficial externa total A m^2 de los sólidos para la transferencia de masa, a través de las ecuaciones (7.3-40) y (7.3-41).

$$a = \frac{6(1-\varepsilon)}{D_p} \tag{7.3-40}$$

donde a es m^2 de área superficial/m^3 volumen total de lecho cuando los sólidos son esferas.

$$A = aV_b \tag{7.3-41}$$

Para calcular la velocidad de transferencia de masa se usa la media logarítmica de la fuerza impulsora a la entrada y a la salida del lecho.

$$N_A A = Ak_c \frac{(c_{Ai} - c_{A1}) - (c_{Ai} - c_{A2})}{\ln \dfrac{c_{Ai} - c_{A1}}{c_{Ai} - c_{A2}}} \tag{7.3-42}$$

donde el término final es la media logarítmica de la fuerza impulsora: c_{Ai} es la concentración en la superficie del sólido, en kg mol/m^3; c_{A1} es la concentración general del fluido en la entrada y c_{A2} la concentración general en la salida. La ecuación del balance de materia en la corriente general es,

$$N_A A = V(c_{A2} - c_{A1}) \tag{7.3-43}$$

donde V es la velocidad volumétrica de flujo del fluido que entra en m^3/s. Es necesario que las ecuaciones (7.3-42) y (7.3-43) se satisfagan simultáneamente. El empleo de estas dos expresiones es semejante al uso de la media logarítmica de las diferencias de temperatura y del balance de' calor en intercambiadores de calor. Estas dos ecuaciones también pueden usarse para un fluido que fluye en una tubería o alrededor de una placa plana, donde A es el área de la pared de la tubería o el área de la placa.

EJEMPLO 7.3-4. Transferencia de masa de un líquido en un lecho empacado

Fluye agua pura a 26.1 °C a una velocidad de 5.5 14 $\times 10^{-7}$ m^3/s a través de un lecho empacado con esferas de ácido benzoico de 6.375 mm de diámetro. El área superficial total de las esferas del lecho es de 0.01198 m^2 y la fracción de vacío es de 0.436. El diámetro de la torre es 0.0667 m. La solubilidad del ácido benzoico en agua es 2.948 $\times 10^{-2}$ kg mol/m^3.

a) Pronostique el coeficiente de transferencia de masa k_c y compárelo con el valor experimental de 4.665 $\times 10^{-6}$ m/s de Wilson y Geankoplis (W1).
b) Utilice el valor experimental de k_c para predecir laconcentración de salida del ácido benzoico en el agua que sale.

Solución: Como la solución está diluida, se emplean las propiedades físicas del agua a 26.1 °C, como indica el Apéndice A.2. A 26.1 "C, $\mu = 0.8718 \times 10^{-3}$ Pa · s, $p = 996.7$

kg/m^3. A 25 °C, $\mu = 0.8940 \times 10^{-3}$ Pa · s y, según la tabla 6.3-1, $D_{AB} = 1.21 \times 10^{-9}$ m^2/s. Para corregir D_{AB} a 26.1 °C usando la ecuación (6.3-9), $D_{AB} \propto T/\mu$. Por consiguiente,

$$D_{AB}(26.1\ ^\circ C) = (1.21 \times 10^{-9})\left(\frac{299.1}{298}\right)\left(\frac{0.8940 \times 10^{-3}}{0.8718 \times 10^{-3}}\right)$$

$$= 1.254 \times 10^{-9}\ \text{m}^2/\text{s}$$

El área de corte transversal de la torre = $(\pi/4)(0.0667)^2 = 3.494 \times 10^{-3}$ m^2 entonces $v' = (5.514 \times 10^{-7})/(3.494 \times 10^{-3}) = 1.578 \times 10^{-4}$ m/s. Así,

$$N_{Sc} = \frac{\mu}{\rho D_{AB}} = \frac{0.8718 \times 10^{-3}}{996.7(1.245 \times 10^{-9})} = 702.6$$

El número de Reynolds es

$$N_{Re} = \frac{Dv'\rho}{\mu} = \frac{0.006375(1.578 \times 10^{-4})(996.7)}{0.8718 \times 10^{-3}} = 1.150$$

Si se utiliza la ecuación (7.3-37) y se supone que $k_c = k_c'$ para las soluciones diluidas,

$$J_D = \frac{1.09}{\varepsilon}(N_{Re})^{-2/3} = \frac{1.09}{0.436}(1.150)^{-2/3} = 2.277$$

Entonces se aplica la ecuación (7.3-5) y se resuelve para obtener

$$J_D = \frac{k_c'}{v'}(N_{Sc})^{2/3} \quad 2.277 = \frac{k_c'}{1.578 \times 10^{-4}}(702.6)^{2/3}$$

El valor $k_c' = 4.447 \times 10^{-6}$ m/s predicho se compara con el valor experimental de 4.665×10^{-6} m/s.

Para el inciso b), se usan las ecuaciones (7.3-42) y (7.3-43),

$$Ak_c \frac{(c_{Ai} - c_{A1}) - (c_{Ai} - c_{A2})}{\ln \dfrac{c_{Ai} - c_{A1}}{c_{Ai} - c_{A2}}} = V(c_{A2} - c_{A1}) \qquad (7.3\text{-}44)$$

Los valores que se sustituyen en la ecuación (7.3-44) son $c_{Ai} = 2.948 \times 10^{-2}$, $c_{A1} = 0$, $A = 0.01198$, $V = 5.514 \times 10^{-7}$.

$$\frac{0.01198(4.665 \times 10^{-6})(c_{A2} - 0)}{\ln \dfrac{2.948 \times 10^{-2} - 0}{2.948 \times 10^{-2} - c_{A2}}} = (5.514 \times 10^{-7})(c_{A2} - 0)$$

Se resuelve y se obtiene $c_{A2} = 2.842 \times 10^{-3}$ kg mol/m^3.

5. Transferencia de masa para flujo alrededor de cilindros sencillos. Se han obtenido datos experimentales para la transferencia de masa desde cilindros sencillos cuando el flujo es perpendicular al cilindro. Los cilindros son largos y no se considera la transferencia de masa hacia los extremos del cilindro. Para números de Schmidt de 0.6 a 2.6, en gases y de 1000 a 3000 en líquidos, y números de Reynolds de 50 a 50000, ya se han graficado los datos de muchas referencias (B3, Ll, M1, S4, V1) y la correlación que se usa:

$$J_D = 0.600(N_{Re})^{-0.487} \qquad (7.3\text{-}45)$$

Los datos se dispersan considerablemente hasta un ±30%. Esta correlación también puede usarse para la transferencia de calor con $J_D = J_H$.

6. Transferencia de masa en metales líquidos. En años recientes han aparecido en la bibliografía diversas correlaciones de coeficientes de transferencia de masa de metales líquidos. Se ha determinado (G1) que con factores de seguridad moderados, pueden usarse las correlaciones de transferencia de masa para metales sólidos para transferencia de masa con metales líquidos. Debe comprobarse que la superficie sólida esté humedecida. Ademas, si el solido es una aleación, puede haber una resistencia a la difusión en la fase sólida.

7.4 TRANSFERENCIA DE MASA A SUSPENSIONES DE PARTÍCULAS PEQUEÑAS

7.4A Introducción

La transferencia de masa a o desde partículas pequefias en suspensión en solución agitada se verifica en varias aplicaciones de proceso. En la hidrogenación en fase líquida, el hidrógeno se difunde partiendo de burbujas gaseosas hacia un líquido orgánico y, después, a las pequefias partículas de catalizador en suspensión. En las fermentaciones, el oxígeno se difunde de las burbujas al medio acuoso y a los microorganismos en suspensión.

En una dispersión líquido-sólido, un aumento de la agitación por encima de la necesaria para suspender las partículas muy pequeíias tiene poco efecto sobre el coeficiente de transferencia de masa k_L a la partícula (B2). Cuando las partículas en un recipiente con agitación están en suspensión, las fuerzas turbulentas contrarrestan la de gravedad, y la velocidad de transferencia de masa es igual a la que se produce en las partículas que se mueven libremente por acción de la gravedad. Con particulas muy pequeñas, digamos de más o menos 1 μm (que es el tamaño de los microorganismos en las fermentaciones y de los sólidos catalíticos), su tamaño es menor que el de los remolinos, que son de aproximadamente 100 μm. Por consiguiente, un aumento de la agitación tendrá poco efecto sobre la transferencia de masa, a menos que la agitación sea considerable.

En una dispersión gas-líquido-sólido, como en el caso de fermentaciones, se aplican los mismos principios. Sin embargo, un aumento de agitación incrementa el numero de burbujas de gas y, por tanto, el área interfacial. Los coeficientes de transferencia de masa de la burbuja de gas al líquido y del líquido al sólido casi no son afectados.

7.4B Ecuaciones para transferencia de masa a particulas pequefias

1. Transferencia de masa a partículas pequeñas <0.6 mm. Se han desarrollado ecuaciones para predecir la transferencia de masa a partículas pequeñas en suspensión, para tres intervalos de tamaños de partículas. Primero se estudiará la ecuación para las partículas de <0.6 mm (600 μm).

Se ha demostrado que la siguiente ecuación es válida para predecir los coeficientes de transferencia de masa desde burbujas gaseosas pequeñas, tales como oxígeno o aire a la fase líquida, o de la fase líquida a la superficie de partículas pequeñas de catalizador o microorganismos, otros sólidos o gotas líquidas (B2, C3).

$$k'_L = \frac{2D_{AB}}{D_p} + 0.31 N_{Sc}^{-2/3} \left(\frac{\Delta \rho \mu_c g}{\rho_c^2} \right)^{1/3} \tag{7.4-1}$$

donde D_{AB} es la difusividad de soluto A en solución en m^2/s, D_p es el diámetro de la burbuja de gas o de la partícula sólida en m, μ_c es la viscosidad de la solución en kg/m . s, g = 9.80665 m/s^2, Ap = $(\rho_c - \rho_p)$ o $(\rho_p - \rho_c)$, PC es la densidad de la fase continua en kg/m^3 y ρ_p es la densidad del gas o partícula sólida. El valor de Ap siempre es positivo.

El primer término del lado derecho de la ecuación (7.4-I) es la difusión molecular, y el segundo se debe a la caída o ascensión libre de la esfera provocada por fuerzas gravitacionales. Esta ecuación se ha comprobado en forma experimental en dispersiones de sólidos de baja densidad en un sistema agitado, así como en burbujas gaseosas pequeñas con agitación.

EJEMPLO 7.4-l. Transferencia de masa desde burbujas de aire en la fermentación

Calcule la velocidad máxima de absorción de O_2 en un fermentador desde burbujas de aire a 1 atm abs de presión y con diámetro de 100 μm a 37 °C, a agua con una concentración de O_2 igual a cero. La solubilidad del O_2 del aire en agua a 37 °C es 2.26×10^{-7} g mol O_2/cm^3 de líquido o 2.26×10^{-4} kg mol O_2/m^3. La difusividad del O_2 en agua es 3.25×10^{-9} m^2/s. Se usa agitación para producir las burbujas de aire.

Solución : La resistencia a la transferencia de masa del interior de la burbuja gaseosa a la interfaz exterior puede despreciarse por ser muy baja (B2). Por tanto, se necesita el coeficiente de transferencia de masa en el exterior de la burbuja k'_L . Los datos disponibles son

$$D_p = 100\ \mu m = 1 \times 10^{-4}\ m \qquad D_{AB} = 3.25 \times 10^{-9}\ m^2/s$$

A 37°C,

$$\mu_c(\text{agua}) = 6.947 \times 10^{-4}\ Pa \cdot s = 6.947 \times 10^{-4}\ kg/m \cdot s$$

$$\rho_c(\text{agua}) = 994\ kg/m^3 \qquad \rho_p(\text{aire}) = 1.13\ kg/m^3$$

$$N_{Sc} = \frac{\mu_c}{\rho_c D_{AB}} = \frac{6.947 \times 1\,0^{-4}}{(994)(3.25 \text{x}\ 10^{-9})} = 215$$

$$N_{Sc}^{2/3} = (215)^{2/3} = 35.9 \qquad \Delta\rho = \rho_c - \rho_p = 994 - 1.13 = 993\ kg/m^3$$

Sustituyendo en la ecuación (7.4-l),

$$k'_L = \frac{2D_{AB}}{D_p} + 0.31N_{Sc}^{-2/3}\left(\frac{\Delta\rho\mu_c g}{\rho_c^2}\right)^{1/3}$$

$$= \frac{2(3.25 \times 10^{-9})}{1 \times 10^{-4}} + \frac{0.31}{35.9}\left[\frac{993 \times 6.947 \times 10^{-4} \times 9.806}{(994)^2}\right]^{1/3}$$

$$= 6.50 \times 10^{-5} + 16.40 \times 10^{-5} = 2.290 \times 10^{-4} \text{ m/s}$$

El flujo específico es como se muestra si suponemos que $k_L = k'_L$ para soluciones diluidas

$$N_A = k_L(c_{A1} - c_{A2}) = 2.290 \times 10^{-4} (2.26 \times 10^{-4} \quad 0)$$

$$= 5.18 \times 10^{-8} \text{ kg mol } O_2/\text{s} \cdot \text{m}^2$$

Conocido el número total de burbujas y su área, es posible calcular la velocidad máxima de transferencia de O_2 al líquido de fermentación.

En el ejemplo 7.4- 1, k_L es más pequeña. Para la transferencia de masa de O_2 en una solución a un microorganismo con $D_p \cong 1$ μm, el término $2D_{AB}/D_p$ puede ser 1 OO veces más grande. Adviértase que con diámetros grandes, el segundo término de la ecuación (7.4-l) se hace pequeño y el coeficiente de transferencia de masa k_L se vuelve esencialmente independiente del tamaño D_p. En recipientes agitados en los que se introduce gas por debajo del agitador en soluciones acuosas, o cuando los líquidos se aerean con placas sinterizadas, las burbujas de gas suelen adoptar un tamaño en el intervalo que cubre la ecuación (7.4-l) (B2, C3, Tl).

En recipientes de mezcla aereados, los coeficientes de transferencia de masa son esencialmente independientes de la entrada de potencia. Sin embargo, conforme aumenta la potencia disminuye el tamaño de la burbuja y el coeficiente de transferencia de masa continúa siguiendo la ecuación (7.4-l). Las dispersiones incluyen aquellas en las cuales las partículas sólidas apenas están completamente suspendidas en los recipientes de mezcla. Cuando se aumenta la intensidad de la agitación por encima del nivel necesario para completar la suspensión de esas pequeñas partículas sólo se producen pequeños aumentos de k_L *(C3).*

La ecuación (7.4-l) ha demostrado ser aplicable ala transferencia de calor y puede escribirse como sigue (B2, C3):

$$N_{Nu} = \frac{hD_p}{k} = 2.0 + 0.31N_{Pr}^{1/3}\left(\frac{D_p^3\rho_c\Delta\rho g}{\mu_c^2}\right)^{1/3} \tag{7.4-2}$$

2. Transferencia de masa hacia grandes burbujas de gas > 2.5 *mm.* Para burbujas de gas grandes o gotas de líquido > 2.5 mm, el coeficiente de transferencia de masa puede predecirse mediante,

$$k'_L = 0.42N_{Sc}^{-0.5}\left(\frac{\Delta\rho\mu_c g}{\rho_c^2}\right)^{1/3} \tag{7.4-3}$$

Se producen burbujas de gas grandes cuando los líquidos puros se aerean en recipientes de mezcla y en columnas de placa de criba (Cl). En este caso el coeficiente de transferencia de masa k'_L o k_L es independiente del tamaño de la burbuja y es constante para determinado conjunto de propiedades físicas. Con las mismas propiedades físicas, la ecuación (7.4-3) para la burbuja grande da valores de k_L casi tres o cuatro veces más grandes que la ecuación (7.4-l) para partículas pequeñas. Nuevamente, la ecuación (7.4-3) muestra que k_L es esencialmente independiente de la intensidad de agitación en un recipiente agitado y de la velocidad del gas en una torre de platillos de criba.

3. Transferencia de masa hacia partículas en la región de transición. En la transferencia de masa en la región de transición entre burbujas pequeíías y grandes en el intervalo de tamaíios de 0.6 a 2.5 mm, el coeficiente de transferencia de masa puede aproximarse suponiendo que crece linealmente con el diámetro de la burbuja (B2, C3).

4. Transferencia de masa hacia partículas en mezcladoras muy turbulentas. En las tres regiones anteriores, la diferencia de densidad entre fases es lo bastante grande como para que la fuerza de gravedad determine principalmente el coeficiente de transferencia de masa. Esto también incluye a los sólidos apenas completamente suspendidos en los recipientes de mezcla. Cuando la potencia de agitación se aumenta más allá de lo necesario para suspender las partículas sólidas o líquidas y las fuerzas de turbulencia se vuelven más grandes que la fuerza gravitatoria, la ecuación (7.4-l) ya no es válida y debe utilizarse la ecuación (7.4-4), donde se observan pequeños incrementos en k'_L (B2, C3).

$$k'_L = N_{Sc}^{2/3} = 0.13\left(\frac{(P/V)\mu_c}{\rho_c^2}\right)^{1/4} \qquad \textbf{(7.4-4)}$$

donde P/V es la entrada de potencia por volumen unitario definida en la sección 3.4. Los datos se desvían sustancialmente hasta más del 60% de esta correlación. En dispersiones gas-líquido es muy poco práctico que los sistemas de agitación superen las fuerzas gravitacionales.

Los datos experimentales se complican por el hecho de que las partículas muy pequeíías se suspenden fácilmente, y si su tamaño es del orden de los remolinos mas pequeños, el coeficiente de transferencia de masa permanecerá constante hasta que sea incrementada la potencia por encima de la que se requiere para la suspensión.

7.5 DIFUSIÓN MOLECULAR MÁS CONVECCIÓN Y REACCIÓN QUÍMICA

7.5A Diversos tipos de flujos específicos y la ley de Fick

En la sección 6.2B se definió el flujo específico J_A^* como el flujo específico molar de A en kg mol A/s · m^2 con respecto a la velocidad molar promedio v_M de la corriente total o general. Además, se definió N_A como el flujo específico molar de A con respecto a coordenadas estacionarias. Los flujos específicos y las velocidades también pueden definirse de otras maneras. En la tabla 7.5-l se incluyen los diferentes tipos de flujos específicos y velocidades más frecuentes en los sistemas binarios.

TABLA 7.5-1 *Diferentes tipos de flujos especijicos y velocidades en sistemas binarios*

	Flujo específico de masa ($kg\ A/s \cdot m^2$)	*Flujo específico molar* ($kg\ mol\ A/s\ m^2$)
Con respecto a coordenadas fijas	$n_A = \rho_A v_A$	$N_A = c_A v_A$
Con respecto a la velocidad promedio molar v_M	$j_A^* = \rho_A(v_A - v_M)$	$J_A^* = c_A(v_A - v_M)$
Con respecto a la velocidad promedio de masa v	$j_A = \rho_A(v_A - v)$	$J_A = c_A(v_A - v)$

Relaciones entre estos flujos específicos

$$N_A + N_B = cv_M \qquad N_A = n_A/M_A \qquad N_A = J_A + c_A v$$

$$J_A^* + J_B^* = 0 \qquad J_A = j_A/M_A \qquad n_A + n_B = \rho v$$

$$j_A + j_B = 0 \qquad N_A = J_A^* + c_A v_M \qquad n_A = j_A + \rho_A v$$

Diferentes formas de la ley de Fick para flujo por difusión

$$J_A^* = -cD_{AB}\,dx_A/dz \qquad j_A = -\rho D_{AB}\,dw_A/dz$$

v es la velocidad promedio de masa de la corriente con respecto a coordenadas estacionarias, y se determina pesando físicamente el flujo durante un incremento de tiempo. Se relaciona con la velocidad v_A y v_B por medio de

$$v = w_A v_A + w_A v_B = \frac{P_A}{P} v_A + \frac{P_B}{P} v_B \qquad \textbf{(7.5-1)}$$

donde w_A es ρ_A/ρ, la fracción en peso de *A; w_B* es la fracción en peso de *B;* y v_A es la velocidad de *A* con respecto a coordenadas estacionarias en m/s. La velocidad molar promedio v_M en m/s se refiere a coordenadas estacionarias

$$v_M = x_A v_A + x_B v_B = \frac{c_A}{c} v_A + \frac{c_B}{c} v_B \qquad \textbf{(7.5-2)}$$

El flujo específico molar por difusión relativo a la velocidad promedio molar v_M que se definió antes, es

$$J_A^* = c_A(v_A - v_M) \qquad \textit{(7.5-3)}$$

El flujo específico molar por difusión J_A con respecto a la velocidad promedio de masa v es,

$$J_A = c_A(v_A - v) \qquad \textit{(7.5-4)}$$

La ley de Fick de la tabla 7.5-l se enunció con respecto a v_M, y es

$$J_A^* = -cD_{AB}\frac{dx_A}{dz} \qquad \textit{(7.5-5)}$$

La ley de Fick también puede definirse en términos de un flujo de masa con respecto a v, tal como lo indica la tabla 7.5-l.

$$j_A = -\rho D_{AB} \frac{dw_A}{dz} \tag{7.5-6}$$

EJEMPLO 7.5-l. Demostración de la ecuación de flujo específico de masa
La tabla 7.5-l incluye la siguiente relación:

$$j_A + j_B = 0 \tag{7.5-7}$$

Demuestre la validez de esta expresión usando las definiciones de los flujos específicos en términos de velocidades.

Solución : Con base en la tabla 7.5-l sustituyendo j_A por $\rho_A(v_A - v)$ y j_B por $\rho_B(v_B - v)$ y reordenando,

$$\rho_A v_A - \rho_A v + \rho_B v_B - \rho_B v = 0 \tag{7.5-8}$$

$$\rho_A v_A + \rho_B v_B - v(\rho_A + \rho_B) = 0 \tag{7.5-9}$$

Sustituyendo v por la ecuación (7.5-l) y $\rho_A + \rho_B$ por ρ, se demuestra la identidad.

7.5B Ecuación de continuidad para una mezcla binaria

Es posible deducir una ecuación general para una mezcla binaria de *A* y *B* con difusión y convección, que también incluya los términos para difusión en estado no estacionario y una reacción química. Se procederá a hacer un balance de masa del componente *A* en un elemento Δx Ay Δz fijo en el espacio, tal como se ve la figura 7.5-l. El balance general de masa de *A es*

$$\left(\begin{matrix}\text{velocidad de entrada}\\ \text{de masa de } A\end{matrix}\right) - \left(\begin{matrix}\text{velocidad de salida}\\ \text{de masa de } A\end{matrix}\right) + \left(\begin{matrix}\text{velocidad de generación}\\ \text{de masa de } A\end{matrix}\right) = \left(\begin{matrix}\text{velocidad de acumulación}\\ \text{de masa de } A\end{matrix}\right) \tag{7.5-10}$$

La velocidad de entrada de masa de *A* en la dirección relativa a las coordenadas estacionarias es $(n_{Ax|x})$ Ay Δz kg *A*/s y la de salida es $(n_{Ax|x+\Delta x})$ Ay Az. Para las direcciones y y zpueden escribirse términos similares. La velocidad de producción química de *A* es r_A kg *A* generados/s . m^3 volumen y el total generado es $r_A(\Delta x$ Ay Az) kg *A*/s. La velocidad de acumulación de *A* es $(\partial\rho_A/\partial t)\Delta x$ Ay Az. Sustituyendo en la ecuación (7.5-10) y haciendo que Δx, Ay y Δz tiendan a cero,

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \left(\frac{\partial n_{Ax}}{\partial x} + \frac{\partial n_{Ay}}{\partial y} + \frac{\partial n_{Az}}{\partial z}\right) = r_A \tag{7.5-l 1}$$

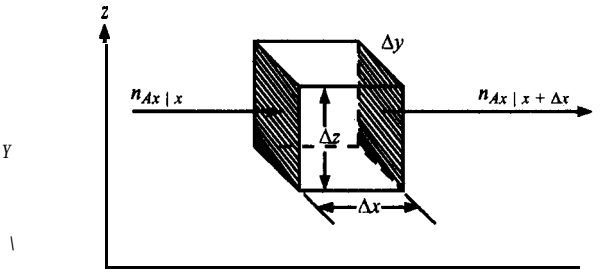


FIGURA 7.5-1. *Balance de masa de A en una mezcla binaria.*

En notación vectorial,

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + (\nabla \cdot \mathbf{n}_A) = r_A \tag{7.5-12}$$

Dividiendo ambos lados de la ecuación (7.5-l 1) entre M_A,

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} + \left(\frac{\partial N_{Ax}}{\partial x} + \frac{\partial N_{Ay}}{\partial y} + \frac{\partial N_{Az}}{\partial z} \right) = R_A \tag{7.5-13}$$

donde R_A son los kg mol A generado& $\cdot m^3$. Sustituyendo N_A y la ley de Fick de la tabla 7.5-1,

$$N_A = -cD_{AB} \frac{dx_A}{dz} + c_A v_M \tag{7.5.-14}$$

y escribiendo la expresión para las tres direcciones, la ecuación (7.5-13) se transforma en

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} + (\nabla \cdot c_A \mathbf{v}_M) - (\nabla \cdot cD_{AB} \nabla x_A) = R_A \tag{7.5-15}$$

Ésta es la ecuación general **final.**

7.5C Casos especiales de la ecuación de continuidad

1. Ecuación para c y D_{AB} constantes. En la difusión con gases, la presión total P suele ser constante. Entonces, como $c = P/RT$, c es constante para la temperatura constante T. Si empezamos con la ecuación general (7.5-15) y sustituimos $\nabla x_A = \nabla c_A/c$, obtenemos

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} + c_A(\nabla \cdot \mathbf{v}_M) + (\mathbf{v}_M \cdot \nabla c_A) - D_{AB} \nabla^2 c_A = R_A \tag{7.5-16}$$

2. Contradifusión equimolarpara gases. Para el caso especial de contradifusión equimolar de gases a presión constante sin reacción, c = constante, $v_M = 0$, D_{AB} = constante, $R_A = 0$ y la ecuación (7.515) se transforma en

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} = D_{AB}\left(\frac{\partial^2 c_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c_A}{\partial z^2}\right) \tag{7.1-9}$$

Esta ecuación es la (7.1-9) que se dedujo antes y también se usa para la difusión en estado no estacionario de un soluto diluido *A* en un sólido o en un líquido cuando D_{AB} es constante.

3. Ecuación para p y D_{AB} constantes (liquidos). En soluciones líquidas diluidas, la densidad de masa *p y* D_{AB} a menudo pueden considerarse constantes. Si se empieza con la ecuación (7.5-12), se sustituye $\mathbf{n}_A = -\rho D_{AB}\nabla w_A + \rho_A \mathbf{v}$ de la tabla 7.5-1 en esta ecuación. Luego se aprovecha que para *p* constante, $\nabla w_A = \nabla \rho_A/\rho$ y también que $(\mathbf{V} \cdot \mathbf{v}) = 0$; se sustituyen éstos en la ecuación resultante y se dividen ambos lados entre M_A, con lo que se obtiene

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla c_A) - D_{AB}\nabla^2 c_A = R_A \tag{7.5-17}$$

7.5D Casos especiales de la ecuación general de difusión en estado estacionario

1. Introducción y condiciones físicas en los limites. La ecuación general de difusión y convección de una mezcla binaria en una dirección sin reacción química (que ya se analizó) es

$$N_A = -cD_{AB}\frac{dx_A}{dz} + \frac{c_A}{c}(N_A + N_B) \tag{6.2-14}$$

Para integrar esta ecuación en estado estacionario es necesario especificar las condiciones limitantes en z_1 y en z_2. A menudo, en muchos problemas de transferencia de masa la relación molar N_A/N_B se determina mediante las condiciones físicas que ocurren en los dos límites.

Por ejemplo, un límite de la trayectoria de difusión puede ser impermeable a la especie *B* porque *B* es insoluble en la fase de dicho límite. La difusión del amoniaco *(A)* y del nitrógeno *(B)* a través de una fase gaseosa hasta una fase acuosa en el límite es uno de estos casos, ya que el nitrógeno es esencialmente insoluble en agua. Por lo tanto, $N_B = 0$, puesto que en estado estacionario N_B debe tener el mismo valor en todos los puntos de la trayectoria de $z_2 - z_1$. En algunos casos, un balance de calor en la fase adyacente al límite puede determinar las proporciones de flujo específico. Por ejemplo, si el componente *A* se condensa en un límite y libera su calor latente al componente *B*, que se vaporiza y se difunde de regreso, las proporciones de los calores latentes determinan la proporción de flujos específicos.

En otro ejemplo, la concentración en el límite puede quedar fija si tiene un gran volumen de una fase fluyendo rápidamente con una concentración dada x_{A1}. En algunos casos la concentración x_{A1} se establece mediante una condición de equilibrio, por la cual x_{A1} está en equilibrio con alguna composición fija en el límite. Las reacciones químicas también pueden influir en las tasas de difusión y en las condiciones de los límites.

2. Contradifusión equimolar. Para el caso especial de contradifusión equimolar, donde $N_A = -N_B$, la ecuación (6.2-14) para estado estacionario y c constante se transforma, tal como se demostró en la expresión:

$$N_A = J_A^* = -cD_{AB}\frac{dx_A}{dz} = \frac{D_{AB}(c_{A1} - c_{A2})}{z_2 - z_1} \tag{7.5-18}$$

3. Difusión *de A a* través *de B inmóvil y que no se difunde.* Para la difusión del gas *A* a través del gas *B* en reposo, $N_B = 0$, y la integración de la ecuación (6.2-14) produce la ecuación (6.2-22),

$$N_A = \frac{D_{AB}P}{RT(z_2 - z_1)p_{BM}}(p_{A1} - p_{A2}) \tag{6.2-22}$$

Otros casos más complicados de integración de la ecuación (6.2-14) se consideran a continuación

4. Difusión y reacción química en el limite. Con frecuencia, en reacciones catalíticas donde *A y B* se difunden desde y hacia una superficie catalítica, la relación entre los flujos específicos N_A y N_B en estado estacionario, está controlada por la estequiometría de la reacción en una frontera. Un ejemplo es el gas *A* que se difunden desde la fase gaseosa general a la superficie catalítica, donde reacciona instantánea e irreversiblemente en una reacción heterogénea como sigue:

$$A \rightarrow 2B \tag{7.5-19}$$

Después el gas *B* se difunde en la fase gaseosa, tal como se muestra en la figura 7.5-2.

En condiciones de estado estacionario, 1 mol de *A* se difunde al catalizador por cada 2 moles de *B* que se difunden desde éste, o $N_B = -2N_A$. El signo negativo indica que los flujos específicos son en sentido opuesto. Volviendo a escribir la ecuación (6.2-14) en términos de fracciones mol,

$$N_A = -cD_{AB}\frac{dx_A}{dz} + x_A(N_A + N_B) \tag{7.5-20}$$

Ahora, sustituyendo $N_B = -2N_A$ en la ecuación (7.5-20),

$$N_A = -cD_{AB}\frac{dx_A}{dz} + x_A(N_A - 2N_A) \tag{7.5-21}$$

Reordenando e integrando con c constante (*P* = constante),

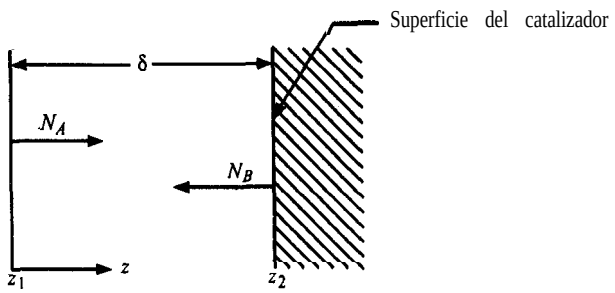


FIGURA 7.5-2. *Difusión de A y reacción heterogénea en una superficie.*

1. *Reacción superficial instantánea:*

$$N_A \int_{z_1=0}^{z_2=\delta} dz = -cD_{AB} \int_{x_{A1}}^{x_{A2}} \frac{dx_A}{1+x_A} \tag{7.5-22}$$

$$N_A = \frac{cD_{AB}}{\delta} \ln \frac{1 + x_{A1}}{1 + x_{A2}} \tag{7.5-23}$$

Puesto que la reacción es instantánea, $x_{A2} = 0$, pues no puede existir *A* adyacente a la superficie catalítica. La ecuación (7.5-23) describe la velocidad general del proceso de difusión más la reacción química instantánea.

2. *Reacción superficial lenta.* Si la reacción heterogénea en la superficie no es instantánea, sino que $A \rightarrow 2B$ procede con lentitud, y la reacción es de primer orden,

$$N_{Az=\delta} = k_1' c_A = k_1' c x_A \tag{7.5-24}$$

aquí k_1' es la constante velocidad de primer orden de la reacción heterogénea en m/s. La ecuación (7.5-23) aún es válida para este caso, pero la condición límite x_{A2} cuando z = δ se obtiene al despejar x_A de la ecuación (7.5-24),

$$x_A = x_{A2} = \frac{N_{Az=\delta}}{k_1' c} = \frac{N_A}{k_1' c} \tag{7.5-25}$$

En estado estacionario, $N_{Az=\delta} = N_A$. Sustituyendo la ecuación (7.5-25) en la (7.5-23),

$$N_A = \frac{cD_{AB}}{\delta} \ln \frac{1 + x_{A1}}{1 + N_A/k_1' c} \tag{7.5-26}$$

La velocidad en la ecuación (7.5-26) es inferior a la de la ecuación (7.5-23), pues el denominador de esta última es $1 + x_{A2} = 1 + 0$ y en la primera es $1 + N_A/k_1' c$.

EJEMPLO 7.5-2. ***Difusión y reacción química en un límite***

El gas puro *A* se difunde desde el punto 1 que tiene una presión parcial de 101.32 kPa hasta el punto 2 que está auna distancia de 2.00 mm. En el punto 2 el gas experimenta una reacción química en la superficie del catalizador y $A \rightarrow 2B$. El componente *B* se difunde de regreso en estado estacionario. La presión total es *P* = 101.32 kPa. La temperatura es de 300 K y $D_{AB} = 0.15 \times 10^{-4}$ m²s.

a) Para la velocidad instantánea de reacción, calcule x_{A2} y N_A.

b) Para una reacción lenta, en la que $k_1' = 5.63 \times 10^{-3}$ m/s, calcule x_{A2} y N_A.

Solución: Para la parte a), $p_{A2} = x_{A2} = 0$, puesto que no puede existir nada de *A* cerca de la superficie del catalizador. Como $N_B = 2N_A$, la ecuación (7.5-23) deberá usarse como sigue: $\delta = 2.00 \times 10^{-3}$ m, $T = 300$ K, $c = P/RT = 101.32 \times 10^3/(8314 \times 300) = 4.062 \times 10^{-2}$ kg mol/m³, $x_{A1} = p_{A1}/P = 101.32 \times 10^3/101.32 \times 10^3 = 1.00$.

$$N_A = \frac{cD_{AB}}{\delta} \ln \frac{1 + x_{A1}}{1 + x_{A2}} = \frac{(4.062 \times 10^{-2})(0.15 \times 10^{-4})}{2.00 \times 10^{-3}} \ln \frac{1 + 1.00}{1 - 0}$$

$$= 2.112 \times 10^{-4} \text{ kg mol } A/\text{s} \cdot \text{m}^2$$

Para la parte b), a partir de la ecuación (7.5-25), $x_{A2} = N_A/k_1' c = N_A/(5.63 \times 10^{-3} \times 4.062 \times 10^{-2}$. Al sustituir en la ecuación (7.5-26),

$$N_A = \frac{(4.062 \text{ x } 10^{-2})(0.15 \text{ x } 10^{-4})}{2.00 \text{ x } 10^{-3}} \ln$$

$$\frac{1 + \text{LOO}}{1 + N_A/(5.63 \text{ x } 10^{-3} \text{ x } 4.062 \text{ x } 10^{-2})}$$

Si se resuelve mediante aproximaciones sucesivas, $N_A = 1.004 \times 10^{-4}$ kg mol A/s . m^2. Entonces, $x_{A2} = (1.004 \times 10^{-4})/(5.63 \times 10^{-3} \times 4.062 \times 10^{-2}) = 0.4390$.

Aunque en inciso (a) del ejemplo 7.5-2 la tasa de reacción es instantánea, el flujo específico N_A está controlado por difusión. A medida que se vuelve más lenta la velocidad de reacción, también va decreciendo el flujo específico N_A.

5. Difusión y reacción homogénea en una fase. La ecuación (7.5-23) se dedujo para una reacción química de A en el límite de una superficie catalítica. En algunos casos, el componente A participa en una reacción química irreversible en la fase homogénea B mientras se difunde como sigue: $A \rightarrow C$. Supóngase que el componente A está muy diluido en la fase B, que puede ser un gas o un líquido. Entonces, la ecuación para la difusión de A en estado estacionario es como sigue, donde el término de flujo' general se descarta.

$$N_{Az} = -D_{AB} \frac{dc_A}{dz} + 0 \tag{7.5-27}$$

Escribiendo un balance de material con respecto a A para el elemento Δz de la figura 7.5-3 en estado estacionario,

$$\begin{pmatrix}\text{velocidad de}\\ \text{entrada de } A\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\textbf{velocidad de}\\ \textbf{generación de } A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\textbf{velocidad de}\\ \textbf{salida de } A\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\textbf{velocidad de}\\ \textbf{acumulación de } A\end{pmatrix} \tag{7.5-28}$$

La velocidad de reacción de primer orden de A por metro cúbico de volumen es

$$\text{velocidad de generación} = -k'c_A \tag{7.5-29}$$

donde k' es la constante de velocidad de-reacción en s^{-1}. Sustituyendo en la ecuación (7.5-28) un área de corte transversal de 1 m^2 con velocidad de acumulación 0 en estado estacionario,

$$N_{Az|z}(1) - k'c_A(1)(\Delta z) = N_{Az|z + \Delta z}(1) + 0 \tag{7.5-30}$$

Al dividir todo entre Δz y si Δz tiende a cero

$$-\frac{dN_{Az}}{dz} = k'c_A \tag{7.5-31}$$

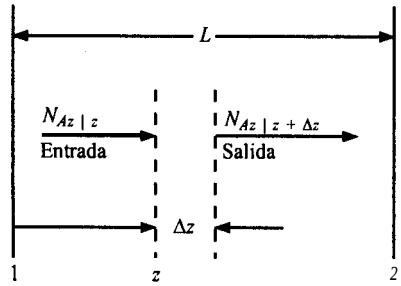


FIGURA 7.5-3. *Reacción química homogénen y difusión en un fluido.*

Sustituyendo la ecuación (7.5-27) en la (7.5-3 1).

$$\frac{d^2 c_A}{dz^2} = \frac{k'}{D_{AB}} c_A \tag{7.5-32}$$

Las condiciones límite son $c_A = c_{A1}$ para z = 0 y $c_A = c_{A2}$ para z = L. Resolviendo,

$$c_A = \frac{c_{A2}\,\text{senh}\left(\sqrt{\frac{k'}{D_{AB}}}\,z\right) + c_{A1}\,\text{senh}\left[\sqrt{\frac{k'}{D_{AB}}}\,(L-z)\right]}{\text{senh}\left(\sqrt{\frac{k'}{D_{AB}}}\,L\right)} \tag{7.5-33}$$

Esta ecuación puede usarse en estado estacionario para calcular c_A con cualquier valor de z y es aplicable a gases, líquidos e incluso sólidos, cuando el soluto A está diluido.

Otra manera de deducir la ecuación (7.5-32), es aplicar la ecuación (7.5-17) para ρ y D_{AB} constantes.

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla c_A) - D_{AB}\nabla^2 c_A = R_A \tag{7.5-17}$$

Establecemos el primer término $\partial c_A/\partial t$ = 0 para estado estacionario. Como se supone que las soluciones son diluidas se desprecia el término de flujo general, v = 0, igualando el segundo término de la ecuación (7.5-17) a cero. Para una reacción de A de primer orden donde A desaparece, $R_A = -k'c_A$ kg mol A generado/s · m^3.

Si escribimos el término de difusión $-D_{AB}\nabla^2 c_A$ sólo para la dirección z obtenemos,

$$D_{AB}\frac{d^2 c_A}{dz^2} = k' c_A \tag{7.5-34}$$

que es, por supuesto, idéntica a la ecuación (7.5-32).

7.5E. Difusión en estado no estacionario y reacción en un medio semiinfinito

En esta sección se considera un caso en el que A diluido se absorbe en la superficie de un sólido o en una fase diluida en reposo en la que se verifica una difusión en estado no estacionario y una reacción química.

La fase sólida o fluida B se considera como **semiinfinita.** En la superficie, donde z = 0, la concentración c_A es constante e igual a c_{A0}. El soluto A diluido reacciona por un mecanismo de primer orden.

$$A + B \rightarrow C \tag{7.5.35}$$

y la velocidad de generación es $-k'c_A$. El diagrama de la figura 7.5-3 también es representantivo de este caso. Usando la ecuación (7.530) pero sustituyendo la velocidad de acumulación por $(\partial c_A/\partial t)(\Delta z)(1)$.

$$N_{Az|z}(1) - k'c_A(1)(\Delta z) = N_{Az|z+\Delta z}(1) + \left(\frac{\partial c_A}{\partial t}\right)(\Delta z)(1) \tag{7.5-36}$$

Esto se transforma en

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} = -D_{AB}\frac{\partial^2 c_A}{\partial z^2} - k'c_A \tag{7.5-37}$$

Las condiciones iniciales y límite son

$t = 0$,	$c_A = 0$	cuando $z > 0$	
$z = 0$,	$c_A = c_{A0}$	cuando $t > 0$	*(7.5-38)*
$z = \infty$,	$c_A = 0$	cuando $t > 0$	

La solución de Danckwerts (D1) es

$$\frac{c_A}{c_{A0}} = \frac{1}{2}\exp(-z\sqrt{k'/D_{AB}})\cdot\operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{tD_{AB}}} - \sqrt{k't}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\exp(z\sqrt{k'/D_{AB}})\cdot\operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{tD_{AB}}} + \sqrt{k't}\right) \tag{7.5-39}$$

La cantidad total Q de A absorbido en el tiempo t es

$$Q = c_{A0}\sqrt{D_{AB}/k'}\left[k't + \tfrac{1}{2}\right)\operatorname{erf}\sqrt{k't} + \sqrt{k't/\pi}e^{-k't}] \tag{7.5-40}$$

donde Q es kg mol A **absorbido/m²**. Este caso representa de manera aproximada a muchos casos reales. La ecuación es útil cuando hay absorción en la superficie de un fluido en reposo o de un sólido y ocurre difusión en estado no estacionario y una reacción en el sólido o fluido. Los resultados pueden utilizarse para medir la **difusividad** de un gas en una **solución,** para determinar las constantes de la velocidad de reacción K de gases disueltos y para determinar las solubilidades del gas en los líquidos con los que reacciona. Los detalles se dan en otras obras (D3).

EJEMPLO 7.5-3. Reacción y difusión en estado no estacionario

Se absorbe CO_2 puro gaseoso a 101.32 **kPa** de presión en una solución amortiguadora alcalina diluida que contiene un catalizador. El soluto CO_2 absorbido y diluido experimenta

una reacción de primer orden con k' = 35 s-t y D_{AB} = 1.5 × 10^{-9} m^2/s. La solubilidad del CO_2 es 2.961 × 10^{-7} kg $mol/m^3 \cdot Pa$ (D3). La superficie está expuesta al gas durante 0.010 s. Calcule los kg mol de CO_2 absorbidos/m^2 de superficie.

Solución: Para usar en la ecuación (7.5-40), $k't$ = 35(0.01) = 0.350. Además, c_{A0} = 2.961 = 10^{-7} (kg $mol/m^3 \cdot Pa$)(101.32 × 10^3 Pa) = 3.00 × 10^{-2} kg mol CO_2/m^3.

$$Q = (3.00 \times 10^{-2})\sqrt{1.5 \times 10^{-9}/35}\left[(0.35+\tfrac{1}{2})\operatorname{erf}\sqrt{0.35} + \sqrt{0.35/\pi}e^{-0.35}\right]$$

$$= 1.458 \times 10^{-7} \text{ kg mol } CO_2/m^2$$

7.5F Difusión de gases con componentes múltiples

Las ecuaciones deducidas en este capítulo se refieren a un sistema binario de A y B, que suele ser el más importante y de mayor utilidad. Sin embargo, en algunos casos de difusión de componentes múltiples hay presentes varios gases, A, B, C, . . . El caso más simple es la difusión de A en un gas constituido por una mezcla en reposo de B, C, D, ... que no se difunde y que está a presión total constante. Por lo tanto, N_B = 0, N_c = 0, . . . La ecuación final, deducida mediante el método de Stefan-Maxwell (G1) para estado estacionario, es

$$N_A = \frac{D_{Am}P}{RT(z_2 - z_1)p_{iM}}(p_{A1} - p_{A2}) \qquad (7.5\text{-}41)$$

donde p_{iM} es la media logarítmica de $p_{i1} = P - p_{A1}$ y $p_{i2} = P - p_{A2}$. Además,

$$D_{AM} = \frac{1}{x'_B/D_{AB} + x'_C/D_{AC} + \cdots} \qquad (7.5\text{-}42)$$

donde x'_B = mol B/mol inertes = $x_B/(1 - x_A)$, $x'_C = x_C/(1 - x_A)$, . . .

EJEMPLO 7.5-4. Difusión de A a través de B y C que no se difunden.
Se difunde metano gaseoso (A) en estado estacionario a través de una mezcla (que no se difunde) de argón (B) y helio (C), a 298 K y 1 atm de presión total. Cuando z_1 = 0, las presiones parciales en atm son p_{A1} = 0.4, p_{B1} = 0.4, p_{C1} = 0.2 y a z_2 = 0.005 m, p_{A2} = 0.1, p_{B2} = 0.6 y p_{C2} = 0.3. Las difusividades binarias de la tabla 6.2-l son D_{AB} = 2.02 × 10^{-5} m^2/s, D_{AC} = 6.75 × 10^{-5} m^2/s y D_{BC} = 7.29 × 10^{-5} m^2/s. Calcule N_A.

Solución: En el punto 1, $x'_B = x_B/(1 - x_A)$ = 0.4/(1 − 0.4) = 0.667. En el punto 2, x'_B = 0.6/(1 − 0.1) = 0.667. El valor de x'_B es constante en toda la trayectoria. Además, $x'_C = x_C/(1 - x_A)$ = 0.2/(1 − 0.4) = 0.333.
Sustituyendo en la ecuación (7.5-42),

$$D_{Am} = \frac{1}{x'_B/D_{AB} + x'_c/D_{Ac}} = \frac{1}{0.667/2.02 \times 10^{-5} + 0.333/6.75 \times 10^{-5}}$$

$$= 2.635 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$$

Para calcular p_{iM}, $p_{i1} = P - p_{A1} = 1.0 - 0.4 = 0.6$ atm, $p_{i2} = P - p_{A2} = 1.0 - 0.1 = 0.90$. Entonces,

$$p_{iM} = \frac{p_{i2} - p_{i1}}{\ln(p_{i2}/p_{i1})} = \frac{0.90 - 0.60}{\ln(0.90/0.60)} = 0.740\,\text{atm} = 7.496 \times 10^4\ \text{Pa}$$

$$p_{A1} = 0.4(1.01325 \times 10^5) = 4.053 \times 10^4\ \text{Pa}$$

$$p_{A2} = 0.1(1.01325 \times 10^5) = 1.013 \times 10^4\ \text{Pa}$$

Sustituyendo en la ecuación (7.5-41),

$$N_A = \frac{D_{Am}P}{RT(z_2 - z_1)p_{iM}}(p_{A1} - p_{A2})$$

$$= \frac{(2.635 \times 10^{-5})(1.01325 \times 10^5)(4.053 - 1.013)(10^4)}{(8314)(298)(0.005 - 0)(7.496 \times 10^4)}$$

$$= 8.74 \times 10^{-5}\ \text{kg mol } A/\text{s} \cdot \text{m}^2$$

Expresando la presión en atm,

$$N_A = \frac{D_{Am}P}{RT(z_2 - z_1)p_{iM}}(p_{A1} - p_{A2}) = \frac{(2.635 \times 10^{-5})(1.0)(0.4 - 0.1)}{(82.06 \times 10^{-3})(298)(0.005 - 0)(0.740)}$$

$$= 8.74 \times 10^{-5}\ \text{kg mol } A/\text{s} \cdot \text{m}^2$$

Se han obtenido varias soluciones analíticas para casos como la difusión equimolar de tres componentes, la difusión de los componentes *A* y *B* a través de C en reposo, y el caso general de dos o más componentes que se difunden en una mezcla de varios componentes. Estos casos se estudian en detalle con ejemplos, en la referencia Geankoplis (G1), que el lector puede consultar si desea profundizar en el tema.

7.6 DIFUSIÓN DE GASES EN SÓLIDOS POROSOS Y CAPILARES

7.6A Introducción

En la sección 6.5C se analizó la difusión de gases y líquidos en sólidos porosos que depende de la estructura. En el caso de gases se supuso que los poros eran muy grandes y que se verificaba una difusión de tipo Fick. No obstante, los poros también pueden ser bastante pequeños, y en este caso el mecanismo de difusión varía fundamentalmente.

La difusión de gases en poros pequeños suele ser común en la catálisis heterogénea, donde los gases se difunden a través de poros muy pequeños para reaccionar en la superficie del catalizador. En el secado de alimentos por congelación, carne de pavo, por ejemplo, el vapor de H_2O gaseoso se difunde a través de los poros muy finos de la estructura de la carne.

Como los poros o capilares de los sólidos porosos pueden ser muy pequeños, la difusión de gases depende del diámetro de los poros. Primero, se define una trayectoria libre media (que es la distancia promedio que una molécula de gas recorre antes de chocar con otra.

$$\lambda = \frac{3.2\mu}{P}\sqrt{\frac{RT}{2\pi M}} \qquad \textbf{(7.6-1)}$$

donde λ se de en m, μ es la viscosidad en Pa · s, P es la presión en N/m^2, T es la temperatura en K, M = peso molecular en kg/kg mol y R = 8.3 143 × 1 0^3 N · m/kg mol · K. Adviértase que las presiones bajas producen valores altos de λ. Para líquidos, puesto que λ es muy pequeña, la difusión sigue la ley de Fick.

En las siguientes secciones se considera lo qué sucede con los mecanismos básicos de la difusión de gases, con respecto al valor relativo de la trayectoria libre media, en comparación con la variación del diámetro de los poros. La presión total P del sistema será constante, pero las presiones parciales de A y B pueden ser diferentes.

7.6B Difusión de gases de Knudsen

En la figura 7.6-1, una molécula del gas A a presión parcial p_{A1} en la entrada de un capilar con diámetro d m se difunde a través de éste. La presión total P es constante en todo el sistema. La trayectoria libre media λ es grande en comparación con el diámetro d. Como resultado, la molécula choca con la pared, y estas colisiones revisten gran importancia. Este mecanismo se llama *difusión de Knudsen.*

La difusividad de Knudsen es independiente de la presión P y se calcula así

$$D_{KA} = \frac{2}{3} \bar{r} \bar{v}_A \qquad (7.6\text{-}2)$$

donde D_{KA} es la difusividad en m^2/s, $\bar{r}$ es el radio promedio de los poros en m y $\bar{v}_A$ es la velocidad molecular promedio del componente A en m/s. Usando la teoría cinética de los gases para evaluar $\bar{v}_A$, la ecuación final de D_{KA} es

$$D_{KA} = 97.0\bar{r}\left(\frac{T}{M_A}\right)^{1/2} \qquad (7.6\text{-}3)$$

donde M_A es el peso molecular de A en kg/kg mol y T es la temperatura en K.

EJEMPLO 7.6-l. Difusividad de Knudsen del hidrógeno

Una mezcla gaseosa de H_2 *(A)* y C_2H_6 (B) se difunde por el poro de un catalizador de níquel usado para hidrogenación, a 1.01325 × 10^5 Pa de presión y 373 K. El radio del poro es 60 Å (angstrom). Calcule la difusividad de Knudsen D_{KA} para el H_2.

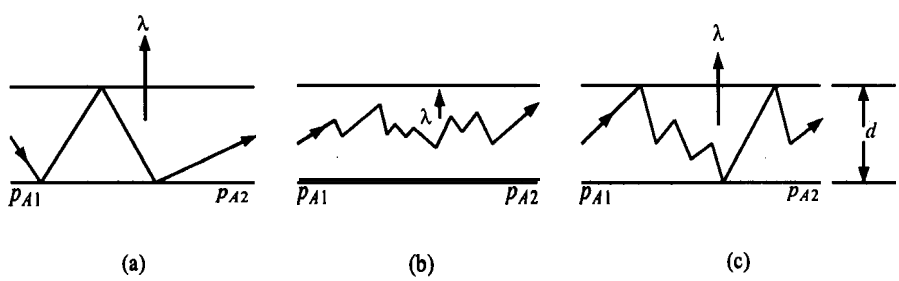


FIGURA 7.6-l. *Tipos de difusión de gases en tubos capilares pequeños: a) difusión de gases de Knudsen, b) difusión de gases de Fick o molecular, c) difusión de gases de transición.*

Solución: Sustituyendo en la ecuación (7.6.3), $\bar{r} = 6.0 \times 10^{-9}$ m, $M_A = 2.016$ y $T = 373$ K,

$$D_{KA} = 97.0\bar{r}\left(\frac{T}{M_A}\right)^{1/2} = 97.0(6.0 \times 10^{-9})\left(\frac{373}{2.016}\right)^{1/2}$$

$$= 7.92 \times 10^{-6}\ \text{m}^2/\text{s}$$

La ecuación de flujo específico para la difusión de Knudsen en un poro es

$$N_A = -D_{KA}\frac{dc_A}{dz} = -\frac{D_{KA}}{RT}\frac{dp_A}{dz} \qquad (7.6\text{-}4)$$

Integrando entre $z_1 = 0$, $p_A = p_{A1}$ y $z_2 = L$, $p_A = p_{A2}$,

$$N_A = \frac{D_{KA}P}{RTL}(x_{A1} - x_{A2}) = \frac{D_{KA}}{RTL}(p_{A1} - p_{A2}) \qquad (7.6\text{-}5)$$

La difusión de A tipo Knudsen es totalmente independiente de B, pues A choca con las paredes del poro y no con B. Es posible escribir una ecuación similar para el componente B.

Cuando el número de Knudsen N_{Kn} definido como

$$N_{Kn} = \frac{\lambda}{2\bar{r}} \qquad (7.6\text{-}6)$$

es $\geq 10/1$, la difusión es primordialmente de tipo Knudsen y la ecuación (7.6-5) predice el flujo específico con exactitud del 10%. A medida que N_{Kn} aumenta el error disminuye, puesto que la difusión se asemeja a la de Knudsen.

7.6C Difusión molecular de gases

Como se muestra en la figura 7.6-lb, cuando la trayectoria libre media λ es pequeña en comparación con el diámetro del poro d, o cuando $N_{Kn} \leq 1/1$ OO, predominan las colisiones molécula-molécula y las colisiones molécula-pared son muy escasas. Existe entonces una difusión molecular común o de tipo Fick y la ley de Fick predice la difusión dentro de límites del 10%. El error disminuye a medida que N_{Kn} se reduce porque la difusión se acerca más al tipo de Fick.

La ecuación de difusión molecular analizada en secciones anteriores es

$$N_A = -\frac{D_{AB}P}{RT}\frac{dx_A}{dz} + x_A(N_A + N_B) \qquad (7.6\text{-}7)$$

Se puede definir un factor de relación de flujos como

$$\alpha = 1 + \frac{N_B}{N_A} \qquad (7.6\text{-}8)$$

Combinando las ecuaciones (7.6-7) y (7.6-8) e integrando en la trayectoria con longitud L cm,

$$N_A = \frac{D_{AB}P}{\alpha RTL}\ln\frac{1 - \alpha x_{A2}}{1 - \alpha x_{A1}} \qquad (7.6\text{-}9)$$

Si la difusión es equimolar, $N_A = -N_B$ y la ecuación (7.6-7) se transforma en la ley de Fick. La difusividad molecular D_{AB} es inversamente proporcional a la presión total P.

7.6D Difusión de gases en la región de transición

Como muestra la figura 7.6-1c, cuando la trayectoria libre media λ y el diámetro de los poros son de tamaño intermedio entre los límites de la difusión de Knudsen y la molecular, se presenta una difusión de transición, donde las colisiones molécula-molécula y molécula-pared son importantes para la difusión.

La ecuación de la difusión en la región de transición puede deducirse sumando la pérdida de momento lineal debida a las colisiones molécula-pared en la ecuación (7.6-4) y la debida a las colisiones molécula-molécula en la ecuación (7.6-7), en un corte del capilar, puesto que no se verifican reacciones químicas. La ecuación diferencial final es (G1).

$$N_A = -\frac{D_{NA} P}{R T}\frac{dx_A}{dz} \tag{7.640}$$

donde

$$D_{NA} = \frac{1}{(1 - \alpha x_A)/D_{AB} + 1/D_{KA}} \tag{7.6-11}$$

Esta difusividad de la región de transición D_{NA} depende en cierto grado de la concentración x_A.

Integrando la ecuación (7.6-10),

$$N_A = \frac{D_{AB} P}{\alpha R T L} \ln \frac{1 - \alpha x_{A2} + D_{AB}/D_{KA}}{1 - \alpha x_{A1} + D_{AB}/D_{KA}} \tag{7.6-12}$$

Se ha demostrado experimentalmente que esta ecuación es válida en toda la región de transición (R1). Se reduce a la ecuación de Knudsen a presiones bajas y a la ecuación de difusión molecular a presiones altas. Para el componente B también puede escribirse una ecuación semejante a la (7.6-12).

El término D_{AB}/D_{KA} es proporcional a $1/P$. Por consiguiente, a medida que aumenta la presión total P, el término D_{AB}/D_{KA} se va haciendo muy pequeflo y N_A de la ecuación (7.6-12) se vuelve independiente de la presión total, puesto que $D_{AB}P$ es independiente de P. A presiones totales bajas, la expresión (7.6-12) se convierte en la ecuación de difusión de Knudsen (7.6-5) y el flujo específico N_A se vuelve directamente proporcional a P para x_{A1} y x_{A2} constantes.

Esto se ilustra en la figura 7.6-2 para un diámetro capilar fijo, donde el flujo específico aumenta conforme aumenta la presión total y luego se nivela a alta presión. La posición relativa de la curva depende, desde luego, del diámetro del capilar y de las difusividades moleculares y de Knudsen. Si se utiliza sólo un diámetro mas pequeño, D_{KA} será más pequeño, y la línea de flujo específico de Knudsen será paralela a la línea que existe abajas presiones. A altas presiones la línea de flujo específico se acerca asintóticamente a la línea horizontal existente, ya que la difusión molecular es independiente del diámetro del capilar.

Si A se difunde en un poro catalítico y reacciona en la superficie del final del poro, de forma que $A \rightarrow B$, se verifica una contradifusión molecular en estado estacionario o $N_A = -N_B$. Entonces, con base en la ecuación (7.6-8), $\alpha = 1 - 1 = 0$. La difusividad efectiva D_{NA} en la ecuación (7.6-1 1) se transforma en

$$D'_{NA} = \frac{1}{1/D_{AB} + 1/D_{KA}} \tag{7.6-13}$$

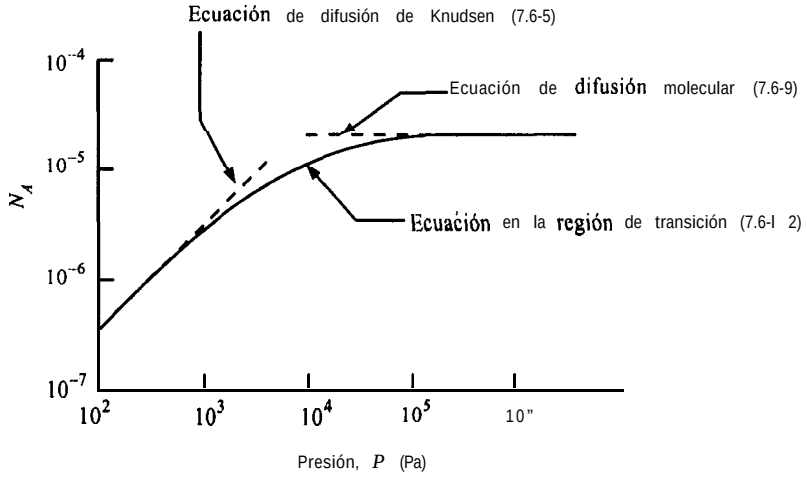


FIGURA 7.6-2. *Efecto de la presión total P en el flujo especifico de difusión NA en la región de transición.*

Así, la difusividad resulta independiente de la concentración y es constante. Al integrar la ecuación (7.6-10) da

$$N_A = \frac{D'_{NA}P}{RTL}(x_{A1} - x_{A2}) = \frac{D'_{NA}}{RTL}(p_{A1} - p_{A2}) \qquad \textbf{(7.6-14)}$$

Esta difusividad simplificada D'_{NA} se usa con frecuencia para difusión en catalizadores porosos aun cuando no haya contradifusión equimolar. Así se simplifican las ecuaciones de difusión y reacción al aplicar esta difusividad simplificada.

Otra difusividad simplificada alterna se obtiene empleando un valor promedio de x_A en la ecuación (7.6-11), para obtener

$$D''_{NA} = \frac{1}{(1 - \alpha x_{A\,\text{prom}})/D_{AB} + 1/D_{KA}} \qquad \textbf{(7.6-15)}$$

donde $x_{A\,\text{prom}} = (x_{A1} + x_{A2})/2$. Esta diiüsividad es más precisa que D'_{NA}. La integración de la ecuación (7.6-10) da

$$N_A = \frac{D''_{NA}P}{RTL}(x_{A1} - x_{A2}) = \frac{D''_{NA}}{RTL}(p_{A1} - p_{A2}) \qquad \textbf{(7.6-16)}$$

7.6E Relaciones de flujo especifico para la difusión de gases en capilares

1. Difusión en un sistema abierto. Si hay difusión en sólidos porosos o canales sin que se verifique una reacción química, cuando la presión total P permanece constante, en caso de un sistema binario abierto a contradifusión, la relación N_A/N_B es constante en los tres sistemas de difusión, y es, (G1),

$$\frac{N_B}{N_A} = -\sqrt{\frac{M_A}{M_B}} \qquad \textbf{(7.6-17)}$$

Por lo que

$$\alpha = 1 - \sqrt{\frac{M_A}{M_B}} \tag{7.6-18}$$

En este caso, el gas fluye por los dos extremos abiertos del sistema. Sin embargo, cuando se verifica una reacción química, la estequiometría determina la relación N_B/N_A, y no la ecuación (7.6-17).

2. *Difusión* en un *sistema cerrado.* Cuando hay difusión molecular en un sistema cerrado como se muestra en la figura 6.2- 1, a presión total constante *P,* ocurre una contradifusión equimolar.

EJEMPLO 7.6-2. Difusión de He y N_2 en la región de transición.

Una mezcla gaseosa a presión total de 0.10 atm abs y 298 K contiene por N_2 (*A*) y He (*B*). La mezcla se difunde por un capilar abierto de 0.0 10 m de longitud con diámetro de $5 \times 1\ 0^{-6}$ m. La fracción mol del N_2 en un extremo es x_{A1} = 0.8 y en el otro, x_{A2} = 0.2. La difusividad molecular D_{AB} es 6.98×10^{-5} m²/s a 1 atm, que es un valor promedio de diversos investigadores

a) Calcule el flujo específico N_A en estado estacionario.

b) Para este caso use las ecuaciones aproximadas (7.6-14) y (7.6-16).

Solución: Los valores conocidos son $T = 273 + 25 = 298$ K, $\bar{r} = 5 \times 10^{-6}/2 = 2.5 \times 10^{-6}$ m, $L = 0.01$ m, $P = 0.1(1.01325 \times 10^5) = 1.013 \times 10^4$ Pa, $x_{A1} = 0.8$, $x_{A2} = 0.2$, $D_{AB} = 6.98 \times 10^{-5}$ m²/ a 1 atm. Otros valores necesarios son $M_A = 28.02$ kg/kg mol, $M_B = 4.003$.

La difusividad molecular a 0.1 atm es $D_{AB} = 6.98 \times 10^{-5}/0.1 = 6.98 \times 10^{-4}$ m²/s. Sustituyendo en la ecuación (7.6-3) de la difusividad de Knudsen,

$$D_{KA} = 97.0(2.5 \times 10^{-6})\sqrt{298/28.02} = 7.91 \times 10^{-4}\ \text{m}^2/\text{s}$$

Según la ecuación (7.6-17),

$$\frac{N_B}{N_A} = -\sqrt{\frac{M_A}{M_B}} = -\sqrt{\frac{28.02}{4.003}} = -2.645$$

Aplicando la ecuación (7.6-8),

$$\alpha = 1 + \frac{N_B}{N_A} = 1 - 2.645 = -1.645$$

Sustituyendo en la ecuación (7.6-12) para el inciso a),

$$N_A = \frac{(6.98 \times 10^{-4})(1.013 \times 10^4)}{(-1.645)(8314)(298)(0.01)} \ln \frac{1 + 1.645(0.2) + 6.98/7.91}{1 + 1.645(0..8) + 6.98/7.91}$$

$$= 6.40 \times 10^{-5}\ \text{kg mol/s . m}^2$$

Para el inciso b) se usa la ecuación aproximada (7.6-13),

$$D'_{NA} = \frac{1}{1/D_{AB} + 1/D_{KA}} = \frac{1}{1/6.98 \times 10^{-4} + 1/7.91 \times 10^{-4}}$$

$$= 3.708 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$$

Sustituyendo en la ecuación (7.6-14), el flujo específico aproximado es

$$N_A = \frac{D'_{NA} P}{RTL}(x_{A1} - x_{A2}) = \frac{(3.708 \times 10^{-4})(1.013 \times 10^4)}{8314(298)(0.01)}(0.8 - 0.2)$$

$$= 9.10 \times 10^{-5} \text{ kg mol/s} \cdot \text{m}^2$$

Por tanto, el flujo específico calculado es aproximadamente un 40% más alto cuando se usa la aproximación de la contradifusión equimolar ($\alpha = 0$).

En seguida se utiliza la ecuación aproximada más exacta (7.6-15). La concentración promedio es $x_{A\ \text{prom}} = (x_{A1} + x_{A2})/2 = (0.8 + 0.2)/2 = 0.50$.

$$D''_{NA} = \frac{1}{(1 - \alpha x_{A\ \text{prom}})/D_{AB} + 1/D_{KA}}$$

$$= \frac{1}{(1 + 1.645 \times 0.5)/(6.98 \times 10^{-4}) + 1/(7.91 \times 10^{-4})}$$

$$= 2.581 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$$

Si se sustituye en la ecuación (7.6-16),

$$N_A = \frac{D''_{NA}}{RTL}(x_{A1} - x_{A2})$$

$$= \frac{(2.581 \times 10^{-4})(1.013 \times 10^{-4})}{8314(298)(0.01)}(0.8 - 0.2)$$

$$= 6.33 \times 10^{-5} \text{ kg mol/s} \cdot \text{m}^2$$

En este caso el flujo específico es sólo un -1.1% más bajo.

7.6F Difusión de gases en sólidos porosos

En la difusión real en sólidos porosos no se verifica en poros rectos y cilíndricos, sino de forma irregular. Por consiguiente, las ecuaciones de difusión en poros tienen que modificarse en cierto grado para aplicarlas a sólidos porosos reales. El problema se complica más porque el diámetro de los poros varía y la difusividad de Knudsen esta en función de dicho diámetro.

Como resultado de estas complicaciones, los investigadores suelen medir difusividades efectivas $D_{A\,\text{eff}}$ en medios porosos, donde

$$N_A = \frac{D_{A\text{eff}} P}{RTL}(x_{A1} - x_{A2}) \tag{7.6-19}$$

Si se emplea un factor de sinuosidad τ para corregir la longitud L en la ecuación (7.6-16) y el lado derecho se multiplica por la fracción de espacios vacíos ε, la ecuación (7.6-16) se transforma en

$$N_A = \frac{\varepsilon D''_{NA}}{\tau}\frac{P}{RTL}(x_{A1} - x_{A2}) \tag{7.6-20}$$

Al comparar las ecuaciones (7.6-19) y (7.6-20),

$$D_{A\,\text{eff}} = \frac{\varepsilon D''_{NA}}{\tau} \tag{7.6-21}$$

En algunos casos los investigadores miden $D_{A\,\text{eff}}$ pero utilizan D'_{NA} en lugar del más preciso D''_{NA} en la ecuación (7.6-21).

Los datos experimentales (C4, S2, S6) demuestran que τ varía de 1.5 a más de 10. Un intervalo razonable para muchos sólidos porosos comerciales es 2-6 (S2). Si el sólido poroso consta de un sistema bidispersado de microporos y macroporos, en lugar de un sistema de poros monodispersos el enfoque que se acaba de explicar debe modificarse (C4, S6).

Las referencias (S2, S6) incluyen discusiones y datos para la difusión en sólidos porosos de tipo inorgánico, orgánico y alimentos secados por congelación, como carnes y vegetales.

Otro tipo de difusión es la superficial. Cuando el sólido tiende una capa molecular de absorción, las moléculas pueden migrar a la superficie. Los detalles de este mecanismo se describen en las referencias (S2, S6).

7.7 MÉTODOS NUMÉRICOS PARA DIFUSIÓN MOLECULAR EN ESTADO NO ESTACIONARIO

7.7A Introducción

La difusión en estado no estacionario es muy frecuente en los materiales sólidos inorgánicos, orgánicos y biológicos. Si las condiciones límite son constantes con respecto al tiempo, si son iguales en todos los lados y superficies del sólido, y si el perfil inicial de concentraciones es uniforme en toda la extensión del material, son aplicables los métodos descritos en la sección 7.1. Sin embargo, no siempre se logran estas condiciones. Por tanto, es necesario aplicar métodos numéricos.

7.7B Métodos numéricos para difusión en estado no estacionario

1. Deducción para estado no estacionario para una placa. Para la difusión en estado no estacionario en una dirección, la ecuación (7.1-g) se transforma en

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} = D_{AB}\frac{\partial^2 c_A}{\partial x^2} \tag{7.7-1}$$

Puesto que esta ecuación es matemáticamente idéntica a la conducción de calor en estado no estacionario, ecuación (5.10-10),

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{5.10-10}$$

hay métodos matemáticos idénticos para resolver tanto la difusión como la conducción de forma numérica.

La figura 7.7-l muestra una placa con espesor Δx centrada en el punto n representado por el área sombreada. Efectuando un balance de moles de A en esta placa al tiempo t, cuando velocidad de entrada − velocidad de salida = velocidad de acumulación en At s,

$$\frac{D_{AB}A}{\Delta x}({}_t c_{n-1} - {}_t c_n) - \frac{D_{AB}A}{\Delta x}({}_t c_n - {}_t c_{n+1}) = \frac{(A\Delta x)}{\Delta t}({}_{t+\Delta t} c_n - {}_t c_n) \tag{7.7-2}$$

donde A es el área de corte transversal y ${}_{t+\Delta t} c_n$ es la concentración en el punto n después de At. Al reordenar,

$${}_{t+\Delta t} c_n = \frac{1}{M}[{}_t c_{n+1} + (M-2){}_t c_n + {}_t c_{n-1}] \tag{7.7-3}$$

donde M es una constante,

$$M = \frac{(\Delta x)^2}{D_{AB}\Delta t} \tag{7.7-4}$$

Como en el caso de la conducción de calor, $M \geq 2$.

Al aplicar la ecuación (7.7.3), la concentración ${}_{t+\Delta t} c_n$ en la posición n y en el nuevo tiempo t + At se calcula explícitamente con base en los tres puntos conocidos en el tiempo t. En este método de cálculo, empezando con las concentraciones conocidas en t = 0, las determinaciones proceden directamente de un incremento de tiempo al siguiente hasta llegar al tiempo final.

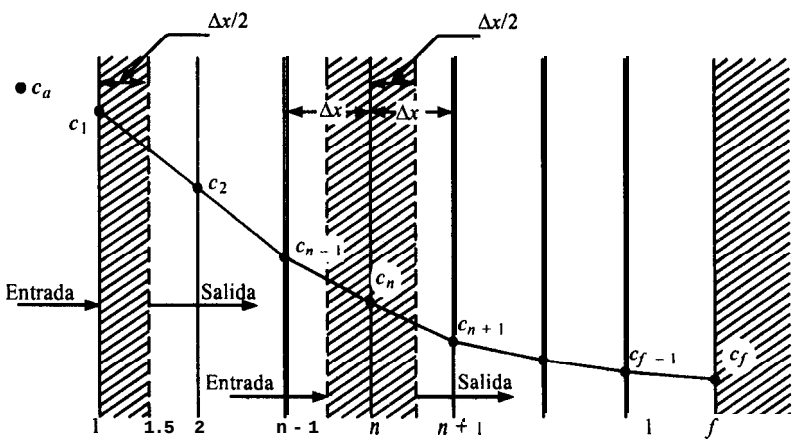


FIGURA 7.7-1. *Difusión en estado no estacionario en una placa*

2. Método de Schmidt simplificado para una placa. Si $M = 2$, se presenta una simplificación de la ecuación (7.7-3), que constituye el método de Schmidt.

$$ {}_{t+\Delta t}c_n = \frac{{}_t c_{n-1} + {}_t c_{n+1}}{2} \tag{7.7-5} $$

7.7C Condiciones limite para el método numérico para una placa

1. ***Convección en un limte.*** Si hay convección en el exterior en el fluido y la concentración de éste varía repentinamente a c_a, puede realizarse un balance de masa en la media placa exterior de la figura 7.7-l. Siguiendo los métodos empleados en la transferencia de calor para deducir la ecuación (5.4-7), podemos escribir: velocidad de entrada de masa por convección − velocidad de salida por difusión = velocidad de acumulación en At horas.

$$ k_c A({}_t c_a - {}_t c_1) - \frac{D_{AB} A}{\Delta x}({}_t c_1 - {}_t c_2) = \frac{(A\Delta x/2)}{\Delta t}({}_{t+\Delta t}c_{1.25} - {}_t c_{1.25}) \tag{7.7-6} $$

donde ${}_t c_{1.25}$ es la concentración en el punto medio a 0.5 Δx fuera de la placa. Como aproximación, se toma ${}_t c_1$ en lugar de ${}_t c_{1.25}$ y se reordena la ecuación (7.7-6),

$$ {}_{t+\Delta t}c_1 = \frac{1}{M}[2N_t c_a + [M - (2N+2)]_t c_1 + 2_t c_2] \tag{7.7-7} $$

$$ N = \frac{k_c \Delta x}{D_{AB}} \tag{7.7-8} $$

donde k_c es el coeficiente convectivo de transferencia de masa en m/s. Nuevamente, adviértase que $M > (2N + 2)$.

*2. **Condición de limite aislado.*** Para el límite aislado enfde la figura 7.7-1, si $k_c = 0$ $(N = 0)$ en la ecuación (7.7-7), se obtiene

$$ {}_{t+\Delta t}c_f = \frac{1}{M}[(M-2)_t c_f + 2_t c_{f-1}] \tag{7.7-9} $$

3. Ecuación convectiva alterna en el limite. Puede obtenerse otra forma de la ecuación (7.7-7) que es útil cuando N es demasiado grande, y que se deduce despreciando la acumulación en la media placa frontal de la ecuación (7.7-6),

$$ {}_{t+\Delta t}c_1 = \frac{N}{N+1}, {}_{+\Delta t}c_a + \frac{1}{N+1'} {}_{+\Delta t}c_2 \tag{7.7-10} $$

En esta ecuación, el valor de M no está limitado por el valor de N. Cuando se usa un gran número de incrementos de Δx, la cantidad de masa despreciada es pequeña comparada con el total.

4. Procedimiento para aplicar la concentración limite inicial. En el primer incremento de tiempo debe tomarse un valor promedio de ${}_1 c_a$ de $(c_a + {}_0 c_1)/2$, donde ${}_0 c_1$ es la concentración inicial en el punto 1. Para los tiempos sucesivos, debe usarse el valor total de c_a. La precisión del método numérico aumenta especialmente después algunos intervalos de tiempo.

En la sección 5.4B, que describe los métodos numéricos de la transferencia de calor, se hizo un estudio detallado sobre el mejor valor de Mpara la ecuación (7.7-3). Los resultados más exactos se obtienen para $M = 4$.

5. Condiciones límite con coeficiente de distribución. Las expresiones para las condiciones límite en las ecuaciones (7.7-7) y (7.7-10) se dedujeron cuando el coeficiente de distribución K de la ecuación (7.7-7) es 1.0. Si K no es 1.0, como en el caso de las condiciones límite en estado estacionario, Kk_c debe sustituir a k_c en la ecuación (7.7-8) para convertirse en la siguiente ecuación. (Véanse también las secciones 6.6B y 7.1C.)

$$N = \frac{Kk_c \Delta x}{D_{AB}} \qquad (7.7\text{-}11)$$

Además, en las ecuaciones (7.7-7) y (7.7-10), el término c_a/K se sustituye por c_a.

En otros textos (G1) se analizan en detalle varios casos de difusión entre placas diferentes en serie, resistencia entre placas en serie, etc. incluyendo ejemplos numéricos reales. Además, en la referencia (G1) se analiza el método numérico implícito.

EJEMPLO 7.7-1. Resolución numérica para difusión en estado no estacionario con un coeficiente de distribución

Una placa de material de 0.004 m de espesor tiene el siguiente perfil inicial de concentraciones de soluto A como sigue, donde x es la distancia en metros a la superficie expuesta:

$x(m)$	Concentración (kg mol A/m^3)	Posición, n
0	1.0×10^{-3}	1 (expuesta)
0.001	1.25×10^{-3}	2
0.002	1.5×10^{-3}	3
0.003	1.75×10^{-3}	4
0.004	2.0×10^{-3}	5 (aislada)

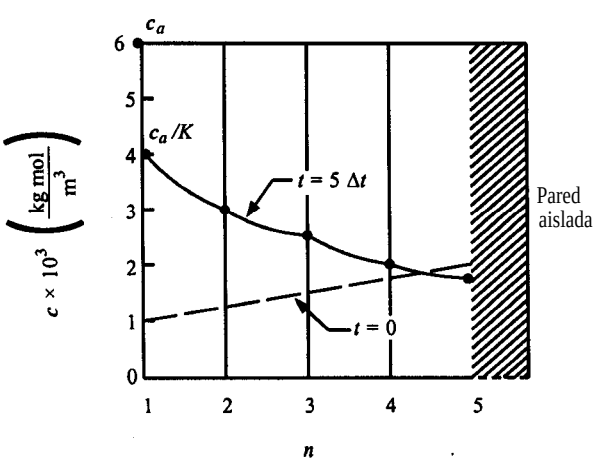


FIGURA 7.7-2. *Concentraciones para el método numérico de difusión en estado no estacionario del ejemplo 7.7-l.*

La difusividad $D_{AB} = 1.0 \times 10^{-9}$ m²/s. La superficie superior se expone de repente ala acción de un fluido de concentración constante $c_a = 6 \times 10^{-3}$ kg mol A/m^3. El coeficiente de distribución $K = c_a/c_n = 1$ SO. La superficie superior está aislada y la difusión en estado no estacionario sólo se verifica en la dirección x. Calcule el perfil de concentraciones después de 2500 s, si se supone que el coeficiente convectivo de transferencia de masa k_c es infinito. Use $\Delta x = 0.001$ m y $M = 2.0$.

Solución: La figura 7.7-2 muestra el perfil inicial de concentraciones para cuatro cortes y $c_a = 6 \times 10^{-3}$. Puesto que $M = 2$, sustituyendo en la ecuación (7.7-4) con $\Delta x = 0.001$ m, y despejando *At,*

$$M = 2 = \frac{(\Delta x)^2}{D_{AB}\Delta t} = \frac{(0.001)^2}{(1 \times 10^{-9})(\Delta t)}$$

$$\text{At} = 500 \text{ s}$$

Por consiguiente, se requieren 2500 s/(500 s/incremento) o cinco incrementos de tiempo. Para la superficie frontal donde n = 1, la concentración que debe aplicarse para el primer incremento de tiempo, tal como se mencionó antes, es

$$_1c_a = \frac{c_a/K + {}_0c_1}{2} = {}_1c_1 \qquad (n = 1) \tag{7.7-12}$$

donde ${}_0c_1$ es la concentración inicial en n = 1. Para los incrementos de tiempo restantes,

$$c_1 = \frac{c_a}{K} \quad (n = 1) \tag{7.7-13}$$

Para calcular las concentraciones en todos los incrementos de tiempo en las placas n = 2, 3, 4, Se usa la ecuación (7.7-5) con M = 2,

$$_{t+\Delta t}c_n = \frac{{}_tc_{n-1} + {}_tc_{n+1}}{2} \qquad (n = 2,3,4) \tag{7.7-14}$$

Para el extremo aislado con n = 5, sustituyendo M = 2 y $f = n = 5$ en la ecuación (7.7-9),

$$_{t+\Delta t}c_5 = \frac{(2-2)_tc_5 + 2_tc_4}{2} = {}_tc_4 \qquad (n = 5) \tag{7.7-15}$$

En 1 Ato t + 1 *At,* esto es, el primer incremento de tiempo, la concentración se calcula cuando n = 1 con la ecuación (7.7-12),

$$_{t+\Delta t}c_1 = \frac{c_a/K + {}_0c_1}{2} = \frac{6 \times 10^{-3}/1.5 + 1 \times 10^{-3}}{2} = 2.5 \times 10^{-3}$$

Para n = 2, 3 y 4, usando la ecuación 7.7-14,

$$_{t+\Delta t}c_2 = \frac{{}_tc_{n-1} + {}_tc_{n+1}}{2} = \frac{{}_tc_1 + {}_tc_3}{2} = \frac{2.5 \times 10^{-3} + 1.5 \times 10^{-3}}{2} = 2 \times 10^{-3}$$

$$t + \Delta t\, c_3 = \frac{{}_t c_2 + {}_t c_4}{2} = \frac{1.25 \times 10^{-3} + 1.75 \times 10^{-3}}{2} = 1.5 \times 10^{-3}$$

$$t + \mathrm{At}\ c_4 = \frac{{}_t c_3 + {}_t c_5}{2} = \frac{1.5 \times 10^{-3} + 2 \times 10^{-3}}{2} = 1.75 \times 10^{-3}$$

Para $n = 5$ con la ecuación (7.7-15),

$$t + \Delta t\, c_5 = {}_t c_4 = 1.75 \times 10^{-3}$$

Para 2 At, y la ecuación (7.7-l 3) cuando $n = 1$, usando la ecuación (7.7-14) para $n = 2$-4, y usando la ecuación (7.7- 15) para $n = 5$,

$$t + 2\Delta t\, c_1 = \frac{c_a}{K} = \frac{6 \times 10^{-3}}{1.5} = 4.0 \times 10^{-3} \text{ (constante para el tiempo restante)}$$

$$t + 2\Delta t\, c_2 = \frac{t + \Delta t c_1 + t + \Delta t c_3}{2} = \frac{4 \times 10^{-3} + 1.5 \times 10^{-3}}{2} = 2.75 \times 10^{-3}$$

$$t + 2\Delta t\, c_3 = \frac{t + \Delta t c_2 + t + \Delta t c_4}{2} = \frac{2 \times 10^{-3} + 1.75 \times 10^{-3}}{2} = 1.875 \times 10^{-3}$$

$$t + 2\Delta t\, c_4 = \frac{t + \Delta t c_3 + t + \Delta t c_5}{2} = \frac{1.5 \times 10^{-3} + 1.75 \times 10^{-3}}{2} = 1.625 \times 10^{-3}$$

$$t + 2\Delta t\, c_5 = {}_{t + \Delta t} c_4 = 1.75 \times 10^{-3}$$

Para 3 At,

$$t + 3\Delta t\, c_1 = 4 \times 10^{-3}$$

$$t + 3\Delta t\, c_2 = \frac{4 \times 10^{-3} + 1.875 \times 10^{-3}}{2} = 2.938 \times 10^{-3}$$

$$t + 3\Delta t\, c_3 = \frac{2.75 \times 10^{-3} + 1.625 \times 10^{-3}}{2} = 2\,188 \times 10^{-3}$$

$$t + 3\Delta t\, c_4 = \frac{1.875 \times 10^{-3} + 1.75 \times 10^{-3}}{2} = 1\,813 \times 10^{-3}$$

$$t + 3\Delta t\, c_5 = 1.625 \times 10^{-3}$$

Para 4 At,

$$t + 4\Delta t\, c_1 = 4 \times 10^{-3}$$

$$t + 4\Delta t\, c_2 = \frac{4 \times 10^{-3} + 2.188 \times 10^{-3}}{2} = 3.094 \times 10^{-3}$$

$$t + 4\Delta t\, c_3 = \frac{2.938 \times 10^{-3} + 1.813 \times 10^{-3}}{2} = 2\,376 \times 10^{-3}$$

$$t + 4\Delta t\, c_4 = \frac{2.188 \times 10^{-3} + 1.625 \times 10^{-3}}{2} = 1.906 \times 10^{-3}$$

$$t + 4\Delta t\, c_5 = 1.813 \times 10^{-3}$$

Para 5 At,

$$t + 5\Delta t\, c_1 = 4 \times 10^{-3}$$

$$t + 5\Delta t\, c_2 = \frac{4 \times 10^{-3} + 2.376 \times 10^{-3}}{2} = 3.188 \times 10^{-3}$$

$$t + 5\Delta t\, c_3 = \frac{3.094 \times 10^{-3} + 1.906 \times 10^{-3}}{2} = 2\,500 \times 10^{-3}$$

$$t + 5\Delta t\, c_4 = \frac{2.376 \times 10^{-3} + 1.813 \times 10^{-3}}{2} = 2\,095 \times 10^{-3}$$

$$t + 5\Delta t\, c_5 = 1.906 \times 10^{-3}$$

En la figura 7.7-2 se muestra el perfil final de concentración. Para aumentar la precisión, se necesitan más incrementos de placas y de tiempo. Es conveniente realizar este tipo de cálculo con una computadora digital.

7.8 ANÁLISIS DIMENSIONAL EN LA TRANSFERENCIA DE MASA

7.8A Introducción

El análisis dimensional permite predecir diferentes grupos dimensionales que son de gran ayuda para correlacionar los datos de transferencia de masa. Como ya se vio en el flujo de fluidos y en la transferencia de calor, los números de Reynolds, de Prandtl, de Grashof y de Nusselt se utilizan con frecuencia para correlacionar datos experimentales. El teorema de Buckingham que se analizó en las secciones 3.11 y en la sección 4.14 establece que la relación funcional entre q cantidades o variables cuyas unidades se dan en términos de u unidades fundamentales o dimensiones fundamentales puede escribirse como $(q - u)$ grupos adimensionales.

7.8B Análisis dimensional para la transferencia de masa convectiva

Consideramos un caso de transferencia de masa convectiva en el cual un fluido experimenta convección forzada en una tubería y ocurre una transferencia de masa de la pared al fluido. El fluido tiene una velocidad ven una tubería de diámetro D y se desea relacionar el coeficiente de transferencia de masa k_c' con las variables $D, \rho, \mu,$ v, y D_{AB}. El número total de variables es $q = 6$. Las unidades

o dimensiones fundamentales son u = 3 y son masa M, longitud L y tiempo t. Las unidades de las variables son

$$k_c' = \frac{L}{t} \qquad \rho = \frac{M}{L^3} \qquad \mu = \frac{M}{Lt} \qquad \nu = \frac{L}{t} \qquad D_{AB} = \frac{L^2}{t} \qquad D = L$$

El número de grupos adimensionales o π' es 6 − 3, o sea 3. Así,

$$\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3) \tag{7.8-1}$$

Elegimos que las variables D_{AB}, p, y D sean las comunes a todos los grupos adimensionales, que son

$$\pi_1 = D_{AB}^a \rho^b D^c k_c' \tag{7.8-2}$$

$$\pi_2 = D_{AB}^d \rho^e D^f \nu \tag{7.8-3}$$

$$\pi_3 = D_{AB}^g \rho^h D^i \mu \tag{7.8-4}$$

Para π_1 sustituimos las dimensiones reales como sigue:

$$1 = \left(\frac{L^2}{t}\right)^a \left(\frac{M}{L^3}\right)^b (L)^c \left(\frac{L}{t}\right) \tag{7.8-5}$$

Si se suma para cada exponente,

$$\begin{aligned} &(\mathrm{L})\ 0 = 2a - 3b + c + 1 \\ &(\mathrm{M})\ 0 = b \\ &(\mathrm{t})\quad 0 = a - 1 \end{aligned} \tag{7.8-6}$$

Al resolver simultáneamente estas ecuaciones, $a = -1, b = 0, c = 1$. Al sustituir estos valores en la ecuación (7.8-2),

$$\pi_1 = \frac{k_c' D}{D_{AB}} = N_{\mathrm{Sh}} \tag{7.8-7}$$

Repitiendo para π_2 y π_3,

$$\pi_2 = \frac{\nu D}{D_{AB}} \tag{7.8-8}$$

$$\pi_3 = \frac{\mu}{\rho D_{AB}} = N_{\mathrm{Sc}} \tag{7.8-9}$$

Si dividimos π_2 entre π_3 obtenemos el número de Reynolds.

$$\frac{\pi_2}{\pi_3} = \frac{\nu D}{D_{AB}} \Big/ \left(\frac{\mu}{\rho D_{AB}}\right) = \frac{D\nu\rho}{\mu} = N_{\mathrm{Re}} \tag{7.8-10}$$

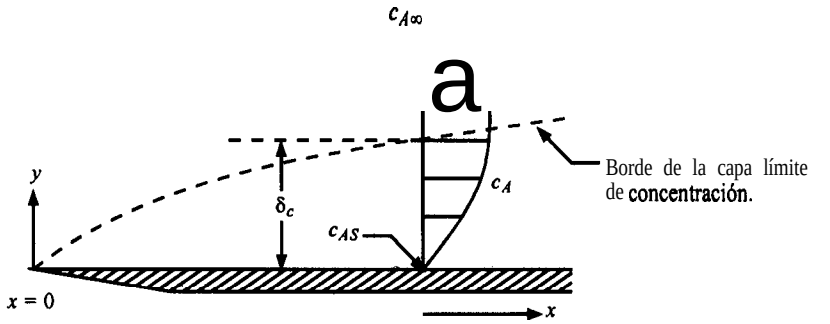


FIGURA 7.9-1. *Flujo laminar de fluidos alrededor de una placa plana y capa límite de concentración.*

Por lo tanto, al sustituir en la ecuación (7.8-1),

$$N_{Sh} = f(N_{Re}, N_{Sc}) \tag{7.8-l 1}$$

7.9 FLUJO DE CAPA LÍMITE Y TURBULENCIA EN LA TRANSFERENCIA DE MASA

7.9A Flujo laminar y teoría de la capa lfmite en la transferencia de masa

En la sección 3.10C se obtuvo una solución exacta para la capa límite hidrodinámica para el flujo laminar isotérmico alrededor de una placa, y en la sección 5.7A también se utilizó una extensión de la solución de Blasius para deducir una expresión para la transferencia de calor convectiva. De manera análoga, usamos la solución de Blasius para la transferencia de masa convectiva para la misma geometría y flujo laminar. En la figura 7.9-1 se muestra la capa limite de concentración, donde la concentración del fluido que se acerca a la placa es $c_{A\infty}$ y c_{AS} en el fluido adyacente a la superficie.

Empezamos usando el balance de masa diferencial, ecuación (7.5-l 7), y simplificándolo para el estado estacionario cuando $\partial c_A/\partial t = 0$, $R_A = 0$, con flujo sólo en las direcciones x y y, de modo que $v_z = 0$, y despreciando la difusión en las direcciones x y z para obtener

$$v_x \frac{\partial c_A}{\partial x} + v_y \frac{\partial c_A}{\partial y} = D_{AB} \frac{\partial^2 c_A}{\partial y^2} \tag{7.9-l}$$

La ecuación de capa límite de momento lineal es muy semejante.

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \tag{3.10-5}$$

La ecuación de capa límite térmica también es parecida.

$$v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{k}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{5.7-2}$$

La ecuación de continuidad que se usó antes es

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \qquad (3.10\text{-}3)$$

Las condiciones límite de concentración adimensionales son

$$\frac{v_x}{v_\infty} = \frac{T - T_S}{T_\infty - T_S} = \frac{c_A - c_{AS}}{c_{A\infty} - c_{AS}} = 0 \qquad \text{en } y = 0$$

$$\frac{v_x}{v_\infty} = \frac{T - T_S}{T_\infty - T_S} = \frac{c_A - c_{AS}}{c_{A\infty} - c_{AS}} = 1 \qquad \text{en } y = \infty \qquad (7.9\text{-}2)$$

La semejanza entre las tres ecuaciones diferenciales (7.9-1), (3.10-5) y (5.7-2) es obvia, al igual que los tres conjuntos de condiciones límite en la ecuación (7.9-2). En la sección 5.7A se aplicó la solución de Blasius a la transferencia de calor convectiva cuando $(\mu/\rho)/\alpha = N_{Pr} = 1.0$. Se utiliza el mismo tipo de solución para la transferencia de masa convectiva laminar cuando $(\mu/\rho)/D_{AB} = N_{Sc} = 1.0$.

El gradiente de velocidad en la superficie se dedujo antes.

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0} = 0.332 \frac{v_\infty}{x} N_{Re,x}^{1/2} \qquad (5.7\text{-}5)$$

donde $N_{Re,x} = xv_\infty\rho/\mu$. Además, a partir de la ecuación (7.9-2),

$$\frac{v_x}{v_\infty} = \frac{c_A - c_{AS}}{c_{A\infty} - c_{AS}} \qquad (7.9\text{-}3)$$

Al diferenciar la ecuación (7.9-3) y combinar el resultado con la ecuación (5.7-5),

$$\left(\frac{\partial c_A}{\partial y}\right)_{y=0} = (c_{A\infty} - c_{AS})\left(\frac{0.332}{x} N_{Re,x}^{1/2}\right) \qquad (7.9\text{-}4)$$

La ecuación de transferencia de masa convectiva puede escribirse como sigue, y también se relaciona con la ecuación de Fick para soluciones diluidas:

$$N_{Ay} = k_c'(c_{AS} - c_{A\infty}) = -D_{AB}\left(\frac{\partial c_A}{\partial y}\right)_{y=0} \qquad (7.9\text{-}5)$$

Si se combinan las ecuaciones (7.9-4) y (7.9-5),

$$\frac{k_c' x}{D_{AB}} = N_{Sh,x} = 0.332 N_{Re,x}^{1/2} \qquad (7.9\text{-}6)$$

Esta relación se restringe a los gases con un $N_{Sc} = 1.0$.

La relación entre el grosor δ de la capa límite hidrodinámica y δ_c de la capa límite de concentración donde el número de Schmidt no es 1.0, es

$$\frac{\delta}{\delta_c} = N_{Sc}^{1/3} \tag{7.9-7}$$

Como resultado, la ecuación para el coeficiente de transferencia de masa convectiva local es

$$\frac{k_c' x}{D_{AB}} = N_{Sh,x} = 0.332 N_{Re,x}^{1/2} N_{Sc}^{1/3} \tag{7.9-8}$$

Podemos obtener la ecuación para el coeficiente medio de transferencia de masa k_c' desde $x = 0$ hasta $x = L$ para una placa de ancho b integrando como sigue:

$$k_c' = \frac{b}{bL} \int_0^L k_c' \, dx \tag{7.9-9}$$

El resultado es

$$\frac{k_c' L}{D_{AB}} = N_{Sh} = 0.664 N_{Re,L}^{1/2} N_{Sc}^{1/3} \tag{7.9-10}$$

Ésta expresión es similar a la ecuación de transferencia de calor para una placa plana (5.7-15) y también se ajusta a la ecuación de transferencia de masa experimental (7.3-27) para una placa plana.

En la sección 3.10 se realizó un análisis integral aproximado para la capa límite hidrodinámica laminar y también para la capa límite hidrodinámica turbulenta. Esto se hizo también en la sección 5.7 para la capa límite térmica. El análisis integral aproximado también puede realizarse exactamente de la misma manera para las capas límite de concentración turbulenta y laminar.

7.9B Longitud de mezcla de Prandtl y difusividad de masa en remolino turbulento

En muchas aplicaciones, el flujo en la transferencia de masa es turbulento y no laminar. El flujo turbulento de un fluido es muy complejo y este experimenta una serie de movimientos de remolino aleatorios por todo el centro turbulento. Cuando ocurre una transferencia de masa, se llama este efecto difusión de masa en remolino. En las secciones 3.10 y 5.7 se dedujeron ecuaciones para la difusividad térmica en remolino turbulento y para la difusividad de momento lineal utilizando la teoría de la longitud de mezcla de Prandtl.

De la misma manera, se puede deducir una relación para la difusividad de masa de remolino turbulento, ε_M. Los remolinos son transportados una distancia L, llamada longitud de mezcla de Prandtl, en la dirección y. En este punto L la velocidad del remolino de fluido difiere de la del fluido adyacente en v_x', que es la componente de velocidad fluctuante que se mencionó en la sección 3.1 OF. La tasa instantánea de transferencia de masa de A a velocidad v_y' para una distancia L en la dirección y es

$$J_{Ay}^* = c_A' v_y' \tag{7.9-11}$$

donde c'_A es la concentración fluctuante instantánea. La concentración instantánea del fluido es $c_A = c'_A + \bar{c}_A$ donde $\bar{c}_A$ es el valor medio y c'_A la desviación del valor medio. La longitud de mezcla L es lo bastante pequeña como para que la diferencia de concentración sea

$$c'_A = L\frac{d\bar{c}_A}{dy} \tag{7.9-12}$$

La proporción de masa transportada por área unitaria es J^*_{Ay}. Al combinar las ecuaciones (7.9-11) y (7.9-12).

$$J^*_{Ay} = -v'_y L\frac{d\bar{c}_A}{dy} \tag{7.9-13}$$

A partir de la ecuación (5.7-23),

$$v'_y = v'_x = L\left|\frac{d\bar{v}_x}{dy}\right| \tag{7.9-14}$$

Si se sustituye la ecuación (7.9-14) en la (7.9-13),

$$J^*_{Ay} = -L^2\left|\frac{d\bar{v}_x}{dy}\right|\frac{d\bar{c}_A}{dy} \tag{7.9-15}$$

El término $L^2 \left|d\bar{v}_x/dy\right|$ se llama ditüsividad de masa de remolino turbulento, ε_M. Al combinar la ecuación (7.9-15) con la ecuación de difusión en términos de D_{AB}, se obtiene el flujo específico total

$$J^*_{Ay} = -(D_{AB} + \varepsilon_M)\frac{d\bar{c}_A}{dy} \tag{7.9-16}$$

Las semejanzas entre la ecuación (7.9-16) para la transferencia de masa y la transferencia de calor y momento lineal se señalaron con detalle en la sección 6.1A.

7.9C Modelos para los coeficientes de transferencia de masa

1. Introducción. Durante muchos años, en el diseño de equipos de proceso usaron coeficientes de transferencia de masa que se basaban principalmente en correlaciones empíricas. Se necesita un mejor conocimiento de los mecanismos de turbulencia para dar una explicación teórica de los coeficientes de transferencia de masa convectiva. Algunas teorías de la transferencia de masa convectiva, como la teoría de difusividad en remolino, se han presentado en este capítulo; en las siguientes secciones se mencionan someramente diversas teorías y también se analiza cómo pueden usarse para extender las correlaciones empíricas.

2. Teoría de la transferencia de masa en películas. La teoría de película, que es la más simple y elemental, supone la presencia de una película laminar ficticia cerca del límite. Esta película, donde se supone que ocurre sólo una difusión molecular, tiene la misma resistencia a la transferencia de masa

que la que existe realmente en las regiones centrales turbulentas, de transición y viscosas. De este modo, el coeficiente de transferencia de masa real k_c' se relaciona con el grosor de película δ_f mediante

$$J_{Ay}^{*} = k_c'(c_{A1} - c_{A2}) = \frac{D_{AB}}{\delta_f}(c_{Al} - c_{A2}) \quad \textbf{(7.9-17)}$$

$$k_c' = \frac{D_{AB}}{\delta_f} \quad (7.9\text{-}18)$$

El coeficiente de transferencia de masa es proporcional a $D_{AB}^{1.0}$. Sin embargo, puesto que ya demostramos en la ecuación (7.3-13) que J_D es proporcional a $(\mu/\rho\, D_{AB})^{2/3}$, entonces $k_c' \propto D_{AB}^{2/3}$. Por lo tanto, la teoría de película no es correcta. La gran ventaja de teoría es su sencillez y puede aplicarse a situaciones complejas como en la difusión y reacción química simultáneas.

3. Teoría de la penetración. La teoría de la penetración, deducida por Higbie y modificada por Danckwerts. (D3), se dedujo para la difusión o penetración en una película laminar que cae con tiempos de contacto breves en la ecuación (7.3-23), y es la siguiente:

$$k_c' = \sqrt{\frac{4D_{AB}}{\pi t_L}} \quad (7.9\text{-}19)$$

donde t_L es el tiempo de penetración del soluto en segundos. Fue ampliada por Danckwerts, quien la modificó para la transferencia de masa turbulenta y postuló que un remolino de fluido tiene una concentración uniforme en el centro turbulento, que es barrido hacia la superficie y experimenta una difusión en estado no estacionario. Después, el remolino es arrastrado hacia el centro y otros remolinos son barridos hacia la superficie, donde permanecen un tiempo aleatorio. El factor medio de renovación de la superficie s en s^{-1} se define como sigue:

$$k_c' = \sqrt{D_{AB}s} \quad (7.9\text{-}20)$$

El coeficiente de transferencia de masa k_c' es proporcional a $D_{AB}^{0.5}$. En algunos sistemas, como aquellos donde el líquido fluye sobre empaquetamientos y aparecenbolsas semiestancadas al renovarse la superficie, los resultados concuerdan aproximadamente con la ecuación (7.9-20). El valor de s debe obtenerse en forma experimental. Otros (D3, T2) han deducido teorías combinadas de renovación de la superficie de la película más complejas que predicen un cambio gradual del exponente de D_{AB} desde 0.5 hasta 1 .0, dependiendo de la turbulencia y de otros factores. Las teorías de penetración se han utilizado en casos de difusión y reacción química (D3).

4. Teoría de la capa límite. La teoría de la capa límite se analizó en detalle en la sección 7.9 y es útil para predecir y correlacionar datos para los fluidos alrededor de superficies sólidas. Para flujo laminar y flujo turbulento, el coeficiente de transferencia de masa $k_c' \propto D_{AB}^{2/3}$. Esto se ha verificado experimentalmente muchas veces.

PROBLEMAS

7.1-1. ***Difusión en estado no estacionario en una placa gruesa.*** Repita el ejemplo 7.1-2 con un coeficiente de distribución $K = 0.50$ en lugar de 2.0. Grafique los datos.

Respuesta: $c = c_i = 5.75 \times 10^{-2}$ ($x = 0$), $c = 2.78 \times 10^{-2}$ ($x = 0.01$ m), $c_{Li} = 2.87 \times 10^{-2}$ kg mol/m^3

7.1-2. ***Gráfica del perfil de concentraciones con difusión en estado no estacionario.*** Con las mismas condiciones del ejemplo 7.1-2, calcule las concentraciones en los puntos x = 0, 0.005, 0.01, 0.015 y 0.02 m, desde la superficie. Calcule también el valor de c_{Li} en el líquido en la interfaz. Grafique las concentraciones de manera similar a la figura 7.1-3b, indicando las concentraciones interfaciales.

7.1-3. ***Difusión en estado no estacionario en varias direcciones.*** Use las mismas condiciones del ejemplo 7. l-l, para un bloque rectangular de 10.16 mm de espesor en la dirección x, 7.62 mm de espesor en la dirección y, y 10.16 mm en la dirección z, considerando que la difusión se verifica en las seis caras. Calcule la concentración en el punto medio después de 10 h.

Respuesta: $c = 6.20 \times 10^{-4}$ kg mol/m^3

7.1-4. ***Secado de arcilla húmeda.*** Una placa muy gruesa de arcilla tiene un contenido inicial de humedad de c_0 = 14% en peso. Se hace pasar aire sobre la superficie superior para secarla. Supóngase una resistencia relativa del gas en la superficie igual a cero. El contenido de humedad de equilibrio en la superficie es constante, con c_1 = 3.0% en peso. Puede estimarse que la difusión de la humedad en la arcilla se basa en una difusividad $D_{AB} = 1.29 \times 10^{-8}$ m^2/s. Después de secar durante 1 .O calcule la concentración del agua en los puntos situados a 0.005, 0.01 y 0.02 m por debajo de la superficie. Suponga que la arcilla es un sólido semiinfinito y que el valor de Y se puede representar usando las concentraciones del porcentaje en peso en lugar de kg mol /m^3. Grafique los valores en función de x.

7.1-5. ***Difusión en estado no estacionario en un cilindro de gel de agur.*** Un cilindro húmedo de gel de agar a 278 K y con concentración uniforme de urea de 0.1 kg mol /m^3, tiene un diámetro de 30.48 mm y longitud de 38.1 mm, con extremos planos paralelos. La difusividad es 4.72 $\times 10^{-10}$ m^2/s. Calcule la concentración en el punto medio del cilindro después de 100 h para los siguientes casos, si el cilindro se sumerge repentinamente en agua pura turbulenta.

a) Únicamente para difusión radial.

b) Para difusión radial y axial.

7.1-6. ***Secado de madera.*** Una placa plana de madera de pino Douglas de 50.8 mm de espesor que contiene 30% de humedad en peso se seca por ambos lados (desprecie los extremos y los bordes). El contenido de humedad en equilibrio en la superficie de la madera, debido al aire de secado que se hace pasar sobre ella, se mantiene al 5% de humedad en peso. Puede suponerse que el secado tiene una difusividad de 3.72×10^{-6} m^2/h. Calcule el tiempo necesario para que el centro de la madera tenga un 10% de humedad.

7.2-l. ***Flujo y conversión de coeficientes de transferencia de masa.*** Se determina experimentalmente en la difusión de A a través de B en reposo que el valor de k_G 1.08 lb mol /h · pie^2 · atm. Para el mismo flujo y concentraciones, desea predecirse el valor de k'_G y el flujo de A para contradifusión equimolar en unidades del sistema inglés y SI. Las presiones parciales son $p_{A1} = 0.20$ atm, p_{A2} = 0.05 atm y P = 1.0 atm abs total. Use unidades del sistema inglés y SI.

Respuesta: k'_G = 0.942 lb mol /h · pie^2 · atm, 1.261×10^{-8} kg mol /s · m^2 · Pa, N_A = 0.141 lb mol A/h · pie^2, 1.912×10^{-4} kg mol /s . m^2

7.2-2. ***Conversión de coeficientes de transferencia de masa.*** Demuestre las siguientes relaciones empezando por las ecuaciones de flujo específico.

a) Transforme k'_c a k_y y k_G.

b) Transforme k_L a k_x y k'_x.

c) Transforme k_G a k_y y k_c.

7.2-3. ***Absorción de H_2S en agua.*** Por una torre de paredes mojadas fluye una mezcla de aire y H_2S con una película delgada de agua que fluye por un plano vertical. El H_2S se absorbe del aire al agua a presión total de 1.50 atm abs y 30°C. Se estima un valor de k'_c de 9.567×10^{-4} m/s para el coeficiente de transferencia de masa de la fase gaseosa. La fracción mol de H_2S en el líquido en cierto punto de la interfaz líquido-gas, es 2.0 (10^{-5}) y la p_A de H_2S en el gas es

0.05 atm. La relación de equilibrio de la ley de Henry es p_A (atm) = $609x_A$ (fracción mol en el líquido). Calcule la velocidad de absorción del H_2S. (Sugerencia: Llame punto 1 a la interfaz y punto 2 a la fase gaseosa. Después, calcule el valor de p_{A1} con base en la ley de Henry y el valor dado de x_A. El valor de p_{A2} es 0.05 atm).

Respuesta: $N_A = -1.485 \times 10^{-6}$ kg mol/s · m^2

7.3-l. ***Transferencia de masa de una placa plana a un líquido.*** Con los datos y las propiedades físicas del ejemplo 7.3-2, calcule el flujo específico para agua con velocidad de 0.152 m/s y una longitud de placa L = 0.137 m. No debe suponerse que x_{BM} = 1.0, ya que es necesario calcular su valor real.

7.3-2. ***Transferencia de masa desde la pared de una tubería.*** En un tubo con un diámetro interior de 6.35 mm fluye agua pura a 26.1 "C, a 0.10 pie/s. El tubo mide 1.829 m, pero en los últimos 1.22 m las paredes están recubiertas de ácido benzoico. Suponiendo que el perfil de velocidad esta totalmente desarrollado, calcule la concentración promedio de ácido benzoico en la salida. Use los datos de propiedades físicas del ejemplo 7.3-2. *[Sugerencia:* Calcule primero el número de Reynolds Dvp/μ. Después calcule $N_{Re}\, N_{Sc}(D/L)(\pi/4)$, que es lo mismo que $W/D_{AB}\rho L$].

Respuesta: $(c_A - c_{A0})/(c_{Ai} - c_{A0}) = 0.0744$, $c_A = 2.193 \times 10^{-3}$ kg mol/m^3

7.3-3. ***Coeficiente de transferencia de masa para diversas geometrías.*** Se desea estimar el coeficiente de transferencia de masa k_G en kg mol/s · m^2 . Pa para vapor de agua en aire a 338.6 K y 101.32 kPa, que fluye por un ducto grande pasando por sólidos de diferentes geometrías. La velocidad por el ducto es 3.66 m/s. La concentración de vapor de agua en el aire es pequeña, por lo que pueden aplicarse las propiedades físicas del aire. El vapor de agua se transfiere a los sólidos. Haga los cálculos para las siguientes geometrías.

a) Una sola esfera de 25.4 mm de diámetro
b) Un lecho empacado con esferas de 25.4 mm, y valor de ε = 0.35.

Respuesta. a) $k_G = 1.98 \times 1\ 0^{-8}$ kg mol/s · m^2 · Pa. (1.48 lb mol /h · pie^2 · atm)

7.3-4. ***Transferencia de masa a formas definidas.*** Estime el valor del coeficiente de transferencia de masa en una corriente de aire a 325.6 K, que fluye por un ducto pasando por las siguientes formas de naftaleno sólido. La velocidad del aire es 1.524 m/s a 325.6 K y 202.6 kPa. El valor de D_{AB} del naftaleno en el aire es 5.16 $\times 10^{-6}$ m^2/s a 273 K y 101.3 kPa.

a) Para aire que fluye paralelo a una placa plana de 0.152 m de longitud.
b) Para aire que fluye por una sola esfera. de 12.7 mm de diámetro

7.3-5. ***Transferencia de masa a un lecho empacado y fuerza impulsora.*** Una corriente de agua pura a 26.1 °C fluye a 0.0701 pie^3/h a través de un lecho empacado con esferas de ácido benzoico de 0.25 1 pulg, con área superficial total de 0.129 pie^2. La solubilidad del ácido benzoico en agua es 0.00184 Ib mol de ácido benzoico/pie^3 solución. La concentración de salida c_{A2} es $1.80 \times 1\ 0^{-4}$ lb mol/pie^3. Calcule el coeficiente de transferencia de masa k_c.

7.3-6. ***Transferencia de masa en metales líquidos.*** Cierta cantidad de mercurio a 26.5 °C fluye a través de un lecho empacado de esferas de plomo con diámetro de 2.096 mm a una fracción de vacío de 0.499. La velocidad superficial es de 0.02198 m/s. La solubilidad del plomo en el mercurio es 1.721% de peso, el número de Schmidt es 124.1, la viscosidad de la solución es 1.577×10^{-3} Pa.s y la densidad es 13530 kg/m^3.

a) Pronostique el valor de J_D. Use la ecuación (7.3-38) si es aplicable. Compare con el valor experimental de J_D = *0.076* (D2).
b) Pronostique el valor de k_c para el caso en que A se difunda a través de un B que no se difunde

Respuesta: a) J_D = *0.0784,* b) $k_c = 6.986 \times 10^{-5}$ m/s

7.3-7. ***Transferencia de masa desde una tubería y media logarítmica de la fuerza impulsora*** Utilice las mismas condiciones físicas del problema 7.3-2, pero con una velocidad de 3.05 m/s. Haga lo siguiente:

a) Prediga el coeficiente de transferencia de masa k_c'. (¿Es flujo turbulento?)

b) Calcule la concentración promedio de ácido benzoico en la salida. [Nota: En este caso aplican las ecuaciones (7.3-42) y (7.3-43) con la media logarítmica de la fuerza impulsora, donde A es el área superficial de la tubería].

c) Calcule los kg mol totales de ácido benzoico que se disuelven por segundo.

7.3-8. Deducción de la relación entre J_D y N_{Sh}. La ecuación (7.3-3) define el número de Sherwood y la ecuación (7.3-5) define el factor J_D. Deduzca la relación entre N_{Sh} y J_D en términos de N_{Re} y N_{Sc}.

Respuesta: $N_{Sh} = J_D N_{Re} N_{Sc}^{1/3}$

7.3-9. Fuerza impulsora para usarse en la transferencia de masa. Deduzca la ecuación (7.3-42) para la media logarítmica de la fuerza impulsora para un fluido que fluye en un lecho empacado o en un tubo. *(Sugerencia:* Empiece por hacer un balance de masa y un balance de velocidad de difusión sobre un área diferencial dA como sigue:

$$N_A\, dA = k_c(c_{Ai} - c_A)\, dA = V\, dc_A$$

donde $V = m^3/s$ de flujo volumétrico. Suponga soluciones diluidas.)

7.4-l. *Absorción máxima de oxígeno en un microorganismo.* Calcule la velocidad máxima posible de absorción de oxígeno a 37 °C en microorganismos con diámetro de $\frac{2}{3}$ µm, suspendidos en una solución acuosa con agitación. Se supone que el líquido circundante está saturado de O_2 del aire a 1 atm abs de presión. Suponga también, que el microorganismo utiliza el oxígeno con mucha mayor mpidez que con la que puede difundirse hacia él. El microorganismo tiene una densidad muy cercana a la del agua. Use los datos de propiedades físicas del ejemplo 7.4-l. *(Sugerencia:* Puesto que el oxígeno se consume con más rapidez que la de suministro, la concentración c_{A2} en la superficie es cero. La concentración c_{A1} en la solución corresponde a la de saturación.)

Respuesta: k_c = 9.75 × 10^{-3} m/s, N_A = 2.20 × 10^{-6} kg mol O_2/s · m^2

7.4-2. Transferencia de masa de O_2 en un proceso de fermentación. Un total de 5.0 g de microorganismos húmedos, con densidad de 1100 kg/m^3 y diámetro de 0.667 µm, se añaden a 0.100 L de solución acuosa a 37 °C en un frasco agitado en el cual se verifica una fermentación. El tapón poroso permite el paso del aire al frasco. Use las propiedades físicas del ejemplo 7.4-l.

a) Calcule la velocidad máxima posible de transferencia de masa de oxígeno en kg mol O_2/s a la superficie de los microorganismos, suponiendo que la solución está saturada con aire a 101.32 kPA atm abs de presión.

b) Por medio de balances de materia con respecto a otros nutrimentos, se determina que la utilización real de O_2 en los microorganismos es 6.30 × 10^{-6} kg mol O_2/s. ¿Cuál sera la concentración real de O_2 en la solución en forma de porcentaje de saturación durante la fermentación?

Respuesta: a) k_L' = 9.82 × 10^{-3} m/s, $N_A A$ = 9.07 × 10^{-5} kg mol O_2/s,
b) 6.95% saturación

7.5-l. *Suma de flujos específicos mofares.* Demuestre la siguiente ecuación según las definiciones de la tabla 7.5-l.

$$N_A + N_B = cv_M$$

7.5-2. Prueba de una deducción. Apoyándose en las definiciones de la tabla 7.5-l demuestre la siguiente expresión:

$$j_A = n_A - w_A(n_A + n_B)$$

7.5-3. Diferentes formas de fa ley de Fick. Con la ecuación (1) demuestre la validez de la ecuación (2):

$$j_A = -\rho D_{AB} \frac{dw_A}{dz} \qquad (1)$$

$$j_A = -\frac{c^2}{\rho} M_A M_B D_{AB} \frac{dx_A}{dz} \quad (2)$$

(Sugerencia: Primero, relacione w_A con x_A. Después, proceda a diferenciar esta ecuación para relacionar dw_A con dx_A. Finalmente, Use la expresión $M = x_A M_A + x_B M_B$ para simplificar.)

7.5-4. ***Otra forma de la ley de Fick.*** Demuestre la validez de la siguiente expresión de la ley de Fick:

$$c(v_A - v_B) = -\frac{cD_{AB}}{x_A x_B} \frac{dx_A}{dz}$$

(Sugerencia: Empiece por $N_A = J_A^* + c_A v_M$. Sustituya la expresión para J_A^* de la tabla 7.5-l y simplifique)

7.5-5. Forma diferente de la ecuación de continuidad. Empezando con la ecuación 7.5-12.

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + (\nabla \cdot \mathbf{n}_A) = r_A \quad (7.5\text{-}12)$$

transforme la siguiente expresión a p constante:

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla \rho_A) - (\nabla \cdot D_{AB} \nabla \rho_A) = r_A \quad (1)$$

[Sugerencia: Consulte la tabla 7.5-l y sustituya en la ecuación (7.5-12) $\mathbf{n}_A = \mathbf{j}_A + \rho_A \mathbf{v}$. Advierta que (V · v) = 0 cuando p es constante. Después sustituya la ley de Fick en términos de $\mathbf{j}_A$.]

7.5-6. Difusión y reacción en una superficie. El gas ***A se*** difunde desde una corriente gaseosa en el punto 1 a una superficie catalítica en el punto 2, y reacciona de manera instantánea e irreversible como sigue:

$$2A \rightarrow B$$

El gas ***B*** se difunde de regreso a la corriente gaseosa. Deduzca la ecuación final para N_A a Presión ***P*** constante y en estado estable en términos de presiones parciales.

Respuesta: $N_A = \dfrac{2D_{AB}P}{RT(z_2 - z_1)} \ln \dfrac{1 - p_{A2}/2P}{1 - p_{A1}/2P}$

7.5-7. Difusión en estado no estacionario y con reacción. El soluto ***A*** se difunde en estado no estacionario en un medio semiinfinito de ***B*** puro y participa en una reacción de primer orden con ***B.*** El soluto ***A*** está diluido. Calcule la concentración c_A en los puntos z = 0, 4 y 10 mm de la superficie en $t = 1 \times 10^{-5}$ s. Las propiedades físicas son $D_{AB} = 1 \times 10^{-9}$ m²/s, $k' = 1 \times 10^{-4}$ s^{-1}, $c_{A0} = 1.0$ kg mol /m³. Calcule también los kg mol absorbidos/m².

7.5-8. Difusión de componentes múltiples. A una presión total de 202.6 kPa y a 358 K, se difunde amoníaco gaseoso ***(A)*** en estado estacionario a través de una mezcla inerte (que no se difunde) de nitrógeno ***(B) e*** hidrógeno ***(C)***: Las fracciones en mol $z_1 = 0$ son, $x_{A1} = 0.8$, $x_{B1} = 0.15$ y $x_{C1} = 0.05$; y en $z_2 = 4.0$ mm, $x_{A2} = 0.2$, $x_{B2} = 0.6$ y $x_{C2} = 0.2$. Las difusividades a 358 K y 101.3 kPa son $D_{AB} = 3.28 \times 10^{-5}$ m²/s y $D_{AC} = 1.093 \times 10^{-4}$ m²/s. Calcule el flujo específico de amoníaco.

Respuesta: $N_A = 4.69 \times 10^{-4}$ kg mol A/s · m²

7.5-9 Difusión en metales líquidos y difusividad variable. La difusión de estaño ***(A)*** en plomo líquido ***(B)*** a 5 10 °C se lleva a cabo usando un tubo capilar de 10.0 mm de largo y manteniendo la fracción molar del estaño en x_{A1} en el extremo izquierdo y en x_{A2} en el extremo derecho del tubo. En el intervalo de concentraciones de $0.2 \leq x_A \leq 0.4$ se encuentra que la difusividad del estaño en plomo es una función lineal de x_A (87).

$$D_{AB} = A + Bx_A$$

donde ***A*** y ***B*** son constantes y D_{AB} ***se*** da en m²/s.

a) Suponiendo que la densidad molar es constante en $c = c_A + c_B = c_{prom}$, deduzca la ecuación integrada final para el flujo específico N_A suponiendo estado estacionario y que A se difunde a través de B estancado.

b) En este experimento, $A = 4.8 \times 10^{-9}$, $B = -6.5 \times 10^{-9}$, $c_{prom} = 50$ kg mol/m^3, $x_{A1} = 0.4$, $x_{A2} = 0.2$. Calcule N_A.

Respuesta. b) $N_A = 4.055 \times 10^{-6}$ kg mol A/s . m^2

7.510. ***Difusión*** *y reacción quimica de hierro fundido en* ***metalurgia*** *de proceso.* En un proceso de fabricación de acero se utiliza hierro en bruto fundido que contiene carbono, una cantidad de partículas de hierro fundido atomizadas con 4.0% de carbono cae a través de una atmósfera de oxígeno puro. El carbono se difunde a través del hierro fundido hacia la superficie de la gota, donde se supone que reacciona instantáneamente debido a la alta temperatura, con esta reacción de primer orden:

$$C + \tfrac{1}{2} O_2(g) \rightarrow CO(g)$$

Calcule el tamaño máximo de gota permisible para que la gota final después de una caída de 2.0 s contenga un promedio de 0.1% de carbono, Suponga que la velocidad de transferencia de masa de los gases en la superficie es muy grande, de modo que no hay resistencia externa. Suponga que no hay circulación interna del líquido. Por lo tanto, la rapidez de descarburización esta controlada por la velocidad de difusión de carbono hacia la superficie de la gota. La difusividad del carbono en hierro es de 7.5×10^{-9} m^2/s (S7). (*Sugerencia*: ¿Se puede usar la figura 5.3-13 en este caso?)

Respuesta: radio = 0.217 mm

7.511. Efecto de una velocidad de reacción lenta sobre Ra difusión. El gas A se difunde desde el punto 1 hasta una superficie catalizadora en el punto 2, donde reacciona como sigue: $2A \rightarrow B$. El gas B se difunde de regreso una distancia δ hasta el punto 1.

a) Deduzca la ecuación para N_A para una reacción muy rápida utilizando unidades de fracción molar x_{A1}, etc.

b) Para $D_{AB} = 0.2 \times 10^{-4}$ m^2/s, $x_{A1} = 0.97$, $P = 101.32$ kPa, $\delta = 1.30$ mm y $T = 298$ K, despeje N_A.

c) Haga lo mismo que en el inciso a), pero para una reacción lenta de primer orden donde k_1' es la constante de velocidad de reacción.

d) Calcule N_A y x_{A2} para el inciso c) cuando $k_1' = 0.53 \times 10^{-2}$ m/s.

Respuesta. b) $N_A = 8.35 \times 10^{-4}$ kg mol/s · m^2

7.5-12. ***Difusión y reacción heterogénea en la superficie.*** En un tubo de radio R m heno de líquido, el componente diluido A se difunde en una fase liquida que no fluye representada por

$$N_A = -D_{AB} \frac{dc_A}{dz}$$

donde z es la distancia a lo largo del eje del tubo, La pared Interior del tubo ejerce un efecto catalítico y descompone A de manera que la tasa heterogénea de descomposición sobre la pared en kg mol A/s es igual a $kc_A A_w$, donde k es una constante de primer orden y A_w, es el área de la pared en m^2. Desprecie cualquier gradiente radial (lo cual significa una concentración radial uniforme).

Deduzca la ecuación diferencial en estado no estacionario para la difusión y la reacción en este sistema. ***[Sugerencia:*** Primero haga un balance de masa para A para una longitud Δz de tubo como sigue: velocidad de entrada (difusión) + velocidad de generación (heterogénea) = velocidad de salida (difusión) + velocidad de acumulación.]

Respuesta: $\dfrac{\partial c_A}{\partial t} = D_{AB} \dfrac{\partial^2 c_A}{\partial z^2} - \dfrac{2k}{R} c_A$

7.6-l. ***Difusividades de Knudsen.*** Una mezcla de He (A) y Ar (B) se difunde a 1.013×10^5 Pa de presión total y 298 K, a través de un capilar con radio de 100 Å.

a) Calcule la difusividad de Knudsen del He (A)

b) Calcule la difusividad de Knudsen del Ar (B).

c) Compare con la diiüsividad molecular D_{AB}.

Respuesta: a) $D_{KA} = 8.36 \times 10^{-6}$ m²/s; c) $D_{AB} = 7.29 \times 10^{-5}$ m²/s

7.6-2. ***Difusión en la región de transición.*** Una mezcla de He (A) y Ar (B) a 298 K, se difunde a través de un capilar abierto de 15 mm de longitud y con radio de 1000 Å. La presión total es 1.013×10^5 Pa. La difusividad molecular D_{AB} a 1.013×10^5 Pa, es 7.29×10^{-5} m²/s.

a) Calcule la difusividad de Knudsen para el He (A).

b) Pronostique el flujo específico N_A según las ecuaciones (7.6-l 8) y (7.6-12), en $x_{A1} = 0.8$ y $x_{A2} = 0.2$. Suponga estado estacionario.

c) Pronostique el flujo específico N_A usando las ecuaciones aproximadas (7.6-14) y (7.6-16).

7.6-3. ***Difusión en un poro en la región de transición.*** Una corriente gaseosa de H_2 puro (A) se difunde por el extremo de un poro no catalítico de radio 50 Å y longitud 1.0 mm $(x_{A1} = 1.0)$. Hay C_2H_6 gaseoso (B) en el otro extremo del poro, con $x_{A2} = 0$. La presión total es constante e igual a 1013.2 kPa. La difusividad molecular estimada del H_2–C_2H_6 es 8.60×10^{-5} m²/s a 101.32 kPa y 373 K. Calcule la difusividad de Knudsen del H_2 y el flujo N_A del H_2 en la mezcla a 373 K y en estado estacionario.

Respuesta: $D_{KA} = 6.60 \times 10^{-6}$ m²/s, $N_A = 1.472 \times 10^{-3}$ kg mol A/s · m²

7.64. ***Difusión en la región de transición en un capilar.*** Una mezcla de nitrógeno gaseoso *(A) y* helio (B) a 298 K se difunde por un capilar de 0.10 m de largo en un sistema abierto con un diámetro de 10 μm. Las fracciones molares son constantes, $x_{A1} = 1.0$ y $x_{A2} = 0$. Vea en el ejemplo 7.6-2 las propiedades físicas.

a) Calcule la difusividad de Knudsen D_{KA} *y* D_{KB} a las presiones totales de 0.001, 0.1 y 10.0 atm

b) Calcule el flujo específico N_A en estado estacionario a esas presiones.

c) Grafique N_A en función de P en papel logarítmico. ¿Cuáles son las líneas limitantes a las menores presiones y a presiones muy altas? Calcúlelas y grafíquelas.

7.7-l. ***Método numérico para difusión en estado no estacionario.*** Una placa sólida de 0.01 m de espesor tiene una concentración inicial uniforme del soluto A de 1.00 kg mol/m³. La difusividad de A en el sólido es $D_{AB} = 1.0 \times 10^{-10}$ m²/s. Todas las superficies de la placa están aisladas, excepto la superior. La concentración superficial se reduce repentinamente a cero y se mantiene en dicho valor. Se verifica entonces una difusión en estado no estacionario en la dirección x, con la superficie posterior aislada. A través de un método numérico, determine las concentraciones después de 12×10^4 s. Use Ax = 0.002 m y $M = 2.0$. El valor de K es 1.0.

Respuesta: $c_1 = 0$ (superficie frontal, x = 0 m),
$c_2 = 3125$ kg mol/m³ (x = 0.002 m)
$c_3 = 5859$ (x = 0.004 m),
$c_4 = 7813$ (x = 0.006 m)
$c_5 = 0.8984$ (x = 0.008 m),
$c_6 = 0.9375$ (superficie aislada, x = 0.01m)

7.7-2. ***Computadora digital y difusión en estado no estacionario.*** En las condiciones del problema 7.7-1 resuelva el problema por medio de una computadora digital. Use $\Delta x = 0.0005$ m. Escriba el programa de cómputo y grafique las concentraciones finales. Use el método explícito con $M = 2$.

7.7-3 ***Método numérico y diferentes condiciones límite.*** Utilice las mismas condiciones del ejemplo 7.7-1, pero considere que la superficie posterior no está aislada. En $t = 0$ la concentración en la superficie posterior también cambia súbitamente a $c_5 = 0$ y se mantiene ahí. Calcule el perfil de concentración después de 2500 s. Grafique los perfiles de concentración inicial y final y compárelos con el perfil final del ejemplo 7.7-l.

7.8-1. ***Análisis dimensional en la transferencia de masa.*** Un fluido corre en una tubería vertical y hay transferencia de masa desde-la pared de la tuberia al fluido. Relacione el coeficiente de transferencia de masa convectiva k_c' con las variables $D, \rho, \mu,$ v, D_{AB}, g, y Ap, si D *es* el diámetro de la tubería, L es la longitud y Ap es la diferencia de densidades.

Respuesta: $\frac{k_c' D}{D_{AB}} = f\left(\frac{gL^3\rho\Delta\rho}{\mu^2}, \frac{Dv\rho}{\mu}, \frac{\mu}{\rho D_{AB}}\right)$

7.9.1. ***Transferencia de masa y modelos de turbulencia.*** Cierta cantidad de agua pura a 26.1 °C fluye 0.11 m/s alrededor de una placa plana de ácido benzoico sólida, L = 0.40 m. Calcule lo siguiente:

a) Suponiendo soluciones diluidas, calcule el coeficiente de transferencia de masa k_c. Utilice las propiedades físicas del ejemplo 7.3-2.

b) Use el modelo de película para calcular el grosor de la película equivalente.

c) Aplique que el modelo de penetración para calcular el tiempo de penetración.

d) Calcule el factor medio de renovación de la superficie utilizando el modelo modificado de penetración.

Respuesta: b) δ_f = 0.2031 mm, d) $s = 3.019 \times 10^{-2}\ s^{-1}$

REFERENCIAS

(B1) **Bird,** R.B., **Stewart,** W. E. y **Lightfoot,** E.N. *Transport Phenomena.* Nueva York: John Wiley & Sons, Inc. 1960.

(B2) Blakebrough, *N. Biochemical and Biological Engineering Science,* Vol. 1, Nueva York: Academic Press, Inc., 1967.

(B3) Beddington, C. H. Jr. y Drew. T. B. *Ind. Eng. Chem., 42,* 1164 (1950).

(C1) **Carmichael, L. T. Sage B. H. y** Lacey, W. *N. A.I.Ch.E.J.,* **1, 385 (1955).**

(C2) Chilton, T. H. y **Colburn,** A. P. *Znd. Eng. Chem, 26,* 1183 (1934).

(C3) **Calderbank,** P. H. y Moo-Young, M. B. *Chem. Eng. Sci.,* **16, 39** (1961).

(C4) Cunningham, R. S. y **Geankoplis,** C.J. *Znd. Eng. Chem. Fund., 7, 535* (1968).

(D1) **Danckwerts, P. V.** *Trans. Faraday Soc., 46, 300* (1950).

(D2) Dunn, W. E. **Bonilla, C. F.,** Ferstenberg, *C. y* Gross, B. *A.I. Ch.E.J., 2,* 184 (1956).

(D3) **Danckwerts,** P. V. *Gas-Liquid Reactions.* Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1970

(D4) **Dwivedi,** P. N. y **Upadhyay,** *S. N. Ind. Eng. Chem., Proc. Des. Dev.,* **16, 157** (1977).

(G1) **Geankoplis,** *C.* J. *Mass Trunsport Phenomena:* Columbus,Ohio: Ohio State University Bookstores, 1972.

(G2) **Gilliland,** E. R. y Sherwood, T. K. *Znd. Eng. Chem., 26, 5* 16 (1934).

(G3) **Garner,** F. H. y **Suckling,** R. D. *A.Z.Ch.E.J., 4,* 114 (1958).

(G4) **Gupta,** A. S. y **Thodos,** *G. Znd. Chem. Eng. Fund., 3* , 2 18 (1964).

(G5) **Gupta,** A. S. y **Thodos,** *G. A.I.Ch.E.J., 8, 609 (1962).*

(G6) **Gupta,** A. S. y **Thodos,** *G. Chem. Eng. Progr., 58* (7), *58* (1962).

(L1) **Linton,** W. H. Jr. y **Sherwood,** T. K. *Chem. Eng. Progr., 46,258* (1950).

(L2) **Litt,** M. y **Friedlander,** *S. K. A.I.Ch.E.J., 5,483* (1959).

(M1) McAdams, W. H. *Heat Trunsmission,* 3a. ed., Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1954.

(P1) **Perry,** R. H. y **Green,** D. *Perry's Chemical Engineers' Handbook,* 6a. ed., Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1984.

(R1) **Remick,** R. R. **y Geankoplis,** C.J. *Znd. Eng. Chem. Fund.,* **12, 214** (1973).

(S1) **Seager,** S. L., **Geertson,** L. R. y Giddings, J. C. *J. Chem. Eng. Data, 8,* 168 (1963).

(S2) SATTERFIELD, *C. N. Mass Transfer in Heterogeneous Catalysis* Cambridge, Mass: The MIT Press, 1970.
(S3) STEELE, L. R. y GEANKOPLIS, *C.* J. *A.I.Ch.E.J., 5,* 178 *(1959).*
(S4) SHERWOOD, T. K., PIGFORD, R. L. y WILKE, C. R. *Mass Transfer,* Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1975.
(S5) STEINBERGER, W. L. y TREYBAL, R. E. *A.I.Ch.E.J., 6,227* (1960).
(S6) SMITH, H. M. *Chemical Engineering Kinetics,* 2a. ed., Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1970.
(S7) SZEKELY, J. y THEMELIS, *N. Rate Phenomena in Process Metallurgy. Nueva* York: Wiley-Interscience, 197 1 .
(T1) TREYBAL, R. E. *Mass Transfer Operations,* 3a. *ed., Nueva* York: McGraw-Hill Book Company, 1980.
(T2) TOOR, H. L. y MARCHELLO, J. M. *A.I.Ch.E.J., 1, 97* (1958).
(V1) VOGTLANDER, P. H. y BAKKER, C. A. P. *Chem. Eng. Sci., 18, 583* (1963).
(W1) WILSON, E. J. y GEANKOPLIS, C. J. *Ind. Eng. Chem. Fund.,* **5**, *9 (1966).*

CAPÍTULO 8

Evaporación

8.1 INTRODUCCIÓN

8.1A Objetivos

En la sección 4.8 se analizó el caso de la transferencia de calor a un líquido en ebullición. Un ejemplo muy importante de este tipo de transferencia de calor, bastante frecuente en las industrias de proceso, es el que recibe el nombre general de ***evaporación.*** En la evaporación se elimina el vapor formado por ebullición de una solución líquida de la que se obtiene una solución más concentrada. En la gran mayoría de los casos, la operación unitaria de evaporación se refiere a la eliminación de agua de una solución acuosa.

Entre los ejemplos típicos de procesos de evaporación están la concentración de soluciones acuosas de azúcar, cloruro de sodio, hidróxido de sodio, glicerina, gomas, leche y jugo de naranja. En estos casos, la solución concentrada es el producto deseado y el agua evaporada suele desecharse. En otros, el agua que contiene pequeñas cantidades,de minerales se evapora para obtener agua libre de solidos que se emplea en la alimentación de calderas, para procesos químicos especiales, o para otros propósitos. Actualmente se están desarrollando y usando procesos de evaporación de agua de mar para obtener agua potable. Ocasionalmente, el principal objetivo de la evaporación consiste en concentrar una solución de manera que al enfriarse ésta se formen cristales que puedan separarse. Este proceso especial de evaporación se llama ***cristalización y*** se estudiará en el capítulo 12.

8.1B Factores de proceso

Las propiedades físicas y químicas de la solución que se esta concentrando y del vapor que se separa tienen un efecto considerable sobre el tipo de evaporador que debe usarse y sobre la presión y la temperatura del proceso. A continuación se analizan algunas propiedades que afectan a los métodos de procesamiento.

1. Concentración en el liquido. Por lo general, la alimentación líquida a un evaporador es bastante diluida, por lo que su viscosidad, bastante baja, es similar a la del agua y se opera con coeficientes

de transferencia de calor bastante altos. A medida que se verifica la evaporación, la solución se concentra y su viscosidad puede elevarse notablemente, causando una marcada disminución del coeficiente de transferencia de calor. Se requiere entonces una circulación o turbulencia adecuada para evitar que el coeficiente se reduzca demasiado.

2. Solubilidad. A medida que se calienta la solución y aumenta la concentración del soluto o sal, puede excederse el límite de solubilidad del material en solución y se formaran cristales. Esto limita la concentración máxima que puede obtenerse por evaporación de la solución. En la figura 8.1-l se muestran algunas solubilidades en agua de ciertas sales en función de la temperatura. En la mayoría de los casos, la solubilidad de la sal aumenta con la temperatura. Esto significa que, al enfriar a temperatura ambiente una solución concentrada caliente que proviene de un evaporador puede presentarse una cristalización.

3. Sensibilidad térmica de los materiales. Muchos productos, en especial los alimentos y otros materiales biológicos, son sensibles a la temperatura y se degradan cuando ésta sube o el calentamiento es muy prolongado. Entre ellos están los materiales farmacéuticos; productos alimenticios como leche, jugo de naranja y extractos vegetales; y materiales químicos orgánicos delicados. La cantidad de degradación está en función de la temperatura y del tiempo.

4. Formación de espumas. En algunos casos, los materiales constituidos por soluciones cáusticas, soluciones de alimentos como leche desnatada y algunas soluciones de ácidos grasos, forman espuma durante la ebullición. Esta espuma es arrastrada por el vapor que sale del evaporador y puede producir pérdidas de material.

5. Presión y temperatura. El punto de ebullición de la solución está relacionado con la presión del sistema. Cuanto más elevada sea la presión de operación del evaporador, mayor será la temperatura de ebullición. Además, la temperatura de ebullición también se eleva a medida que aumenta la concentración del material disuelto por la acción de la evaporación. Este fenómeno se llama elevación del punto de ebullición y se estudiara en la sección 8.4. Para mantener a un nivel bajo la temperatura de los materiales termosensibles suele ser necesario operar a presiones inferiores a 1 atm, esto es, al vacío.

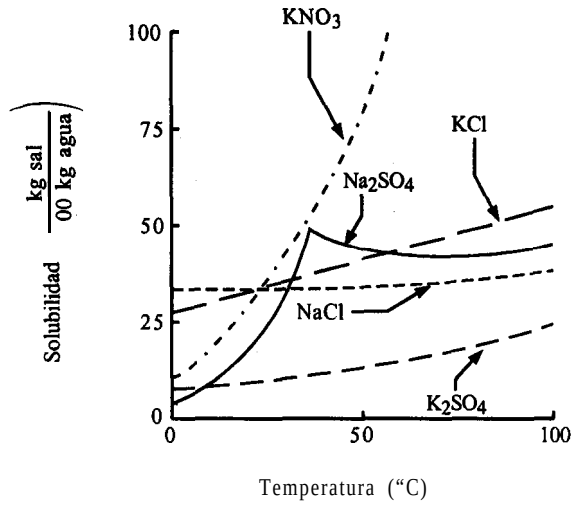


FIGURA 8.1-I. *Curvas de solubilidad en agua de algunas sales típicas.*

6. Formación de incrustaciones y materiales de construcción. Algunas soluciones depositan materiales solidos llamados *incrustaciones* sobre las superficies de calentamiento. Estas incrustaciones se forman a causa de los productos de descomposición o por disminución de la solubilidad. El resultado es una reducción del coeficiente de transferencia de calor, lo que obliga a limpiar el evaporador. La selección de los materiales de construcción del evaporador tiene importancia en la prevención de la corrosión.

8.2 TIPOS DE EQUIPOS DE EVAPORACIÓN Y MÉTODOS DE OPERACIÓN

8.2A Tipos generales de evaporadores

La evaporación consiste en la adición de calor a una solución para evaporar el disolvente que, por lo general, es agua. Usualmente, el calor es suministrado por condensación de un vapor (como vapor de agua) en contacto con una superficie metálica, con el líquido del otro lado de dicha superficie. El tipo de equipo usado depende tanto de la configuración de la superficie para la transferencia de calor como de los medios utilizados para lograr la agitación o circulación del líquido. A continuación se analizan los tipos generales de equipo.

1. Marmita abierta o artesa. La forma más simple de un evaporador es una marmita abierta o artesa en la cual se hierve el líquido. El suministro de calor proviene de la condensación de vapor de agua en una chaqueta o en serpentines sumergidos en el líquido. En algunos casos, la marmita se calienta a fuego directo. Estos evaporadores son económicos y de operación simple, pero el desperdicio de calor es excesivo. En ciertos equipos se usan paletas o raspadores para agitar el líquido.

2. Evaporador de tubos horizontales con circulación natural. En la figura 8.2-1a se muestra un evaporador de tubos horizontales con circulación natural. El banco horizontal de tubos de calentamiento es similar al banco de tubos de un intercambiador de calor. El vapor de agua entra a los tubos y se condensa; el condensado sale por el otro extremo de los tubos. La solución a ebullición está por fuera de ellos. El vapor se desprende de la superficie líquida; después, casi siempre se hace pasar por dispositivos de tipo deflector para impedir el arrastre de gotas de líquido y sale por la parte superior. Este equipo, relativamente económico, puede utilizarse para líquidos no viscosos con altos coeficientes de transferencia de calor y para líquidos que no formen incrustaciones. Puesto que la circulación del líquido no es muy buena, son poco adecuados para materiales viscosos. En casi todos los casos, tanto este evaporador como los que se estudian después operan con régimen continuo, con alimentación a velocidad constante y salida de concentrado a velocidad constante.

3. Evaporador vertical con circulación natural. En este tipo de evaporador se usan tubos verticales en lugar de horizontales y el líquido esta dentro de los tubos, por lo que el vapor se condensa en el exterior. Debido a la ebullición y a la disminución de densidad, el líquido se eleva en los tubos por circulación natural, tal como se muestra en la figura 8.2-lb, y fluye hacia abajo a través de un espacio central abierto grande, o bajada. Esta circulación natural incrementa el coeficiente de transferencia de calor. No es útil con líquidos viscosos. Este equipo se llama con frecuencia *evaporador de tubos cortos.* Una variación de este modelo es el evaporador de canasta, que usa tubos verticales, pero el elemento de calentamiento se cuelga en el cuerpo, de tal manera que haya un espacio anular que sirva de bajada. El modelo de canasta difiere del evaporador vertical de circulación natural, pues éste tiene un espacio central en vez del anular como bajada. Este tipo se usa con frecuencia en las industrias del azúcar, la sal y la sosa cáustica.

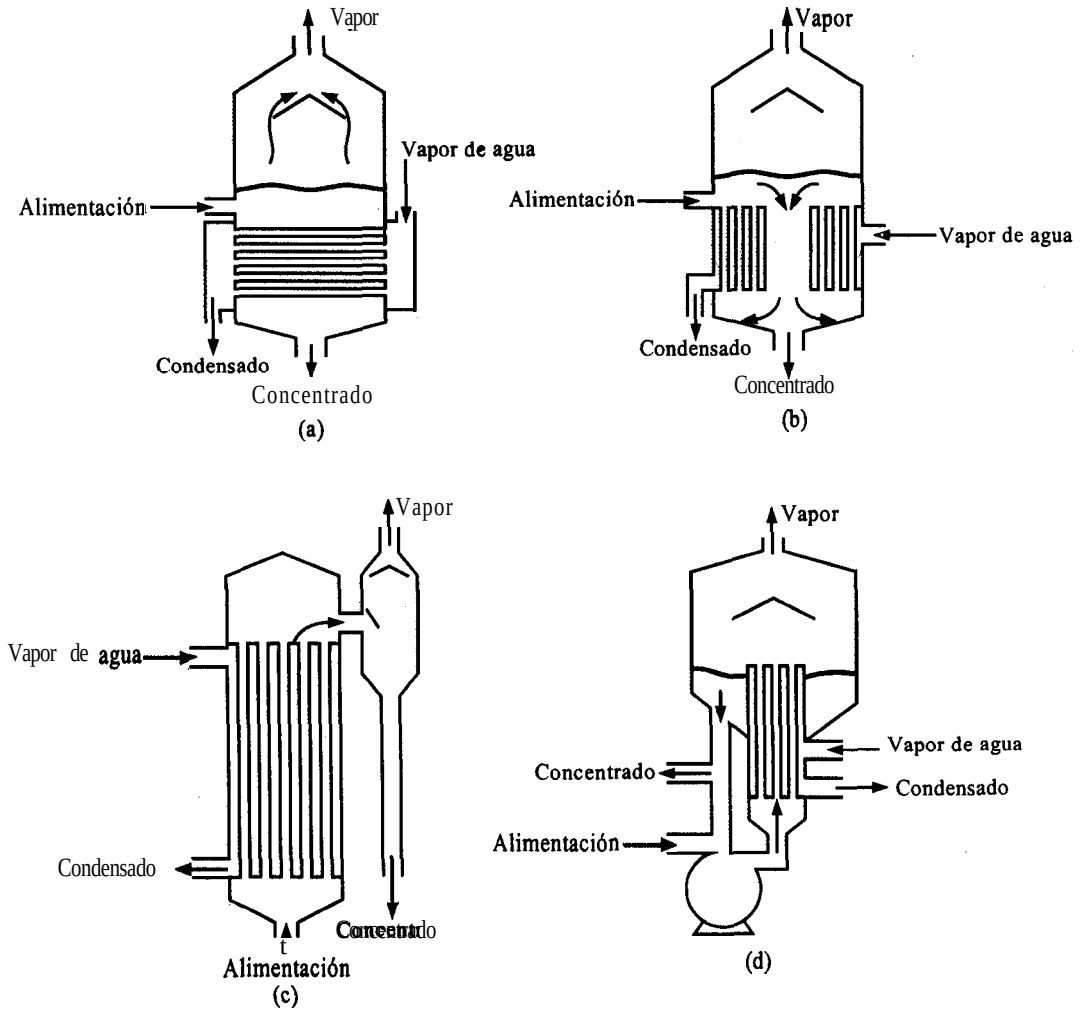


FIGURA 8.2-1. *Diferentes tipos de evaporadores: a) de tubos horizontales, b) de tubos verticales, c) de tubos largos verticales, d) de circulación forzada.*

4. Evaporador vertical de tubos largos. Puesto que el coeficiente de transferencia de calor del lado del vapor es muy alto en comparación con el del lado del líquido que se evapora, es conveniente contar con velocidades altas para el líquido. En un evaporador de tipo vertical con tubos largos como el de la figura 8.2-1c, el líquido esta en el interior de los tubos. Estos miden de 3 a 10 m de alto, lo que ayuda a obtener velocidades de líquido muy altas. Por lo general, el líquido pasa por los tubos una sola vez y no se recircula. Los tiempos de contacto suelen ser bastante breves en este modelo. En algunos casos, como cuando la relación entre la velocidad de alimentación y la velocidad de evaporación es baja, puede emplearse recirculación natural del producto a través del evaporador, añadiendo una conexión de tubería entre la salida del concentrado y la línea de alimentación. Éste es un método muy común en la producción de leche condensada.

5. Evaporador de caída de película. Una variación del modelo de tubos largos es el evaporador de caída de película, en el cual el líquido se alimenta por la parte superior de los tubos y fluye por

sus paredes en forma de película delgada. Por lo general, la separación de vapor y líquido se efectúa en el fondo. Este modelo se usa mucho para la concentración de materiales sensibles al calor, como jugo de naranja y otros zumos de frutas, debido a que el tiempo de retención es bastante bajo (entre 5 y 10 s) y el coeficiente de transferencia de calor es alto.

6. *Evaporador de circulación forzada.* El coeficiente de transferencia de calor de la película líquida puede aumentarse por bombeo provocando una circulación forzada del líquido en el interior de los tubos. Para esto se emplea el modelo de tubos verticales largos de la figura 8.2-1c añadiendo una tubería conectada a una bomba entre las líneas de salida del concentrado y la de alimentación. Sin embargo, los tubos de un evaporador de circulación forzada suelen ser más cortos que los tubos largos, tal como se ilustra en la figura 8.2-ld. Además, en otros casos se usa un intercambiador de calor horizontal externo e independiente. Este modelo es muy útil para líquidos viscosos.

7. Evaporador de película agitada. La principal resistencia a la transferencia de calor en un evaporador corresponde al líquido. Por tanto, un método para aumentar la turbulencia de la película líquida y el coeficiente de transferencia de calor, consiste en la agitación mecánica de dicha película. Esto se lleva a cabo en un evaporador de caída de película modificado, usando un solo tubo grande enchaquetado que contiene un agitador interno. El líquido penetra por la parte superior del tubo y a medida que fluye hacia abajo se dispersa en forma de película turbulenta por la acción de aspas de agitación vertical. La solución concentrada sale por el fondo y el vapor pasa por un separador para salir por la parte superior. Este tipo de evaporador es practico para materiales muy viscosos, pues el coeficiente de transferencia de calor es mayor que en los modelos de circulación forzada. Se usa para materiales viscosos sensibles al calor como látex de caucho, gelatina, antibióticos y jugos de frutas. Sin embargo, tiene costo alto y capacidad baja. Para los lectores interesados en el tema, Perry y Green (P2) incluyen estudios y descripciones más detallados de equipos de evaporación.

8. Evaporador solar de artesa abierta. Un proceso muy antiguo pero que todavía se usa es la evaporación solar en artesas abiertas. El agua salina se introduce en artesas o bateas abiertas y de poca profundidad y se deja evaporar lentamente al sol hasta que cristalice.

8.2B Métodos de operación para evaporadores

1. Evaporadores de efecto simple. En la figura 8.2-2 se muestra un diagrama simplificado del evaporador de una sola etapa o de efecto simple. La alimentación entra a T_F K *y* en la sección de intercambio de calor entra vapor saturado a T_S. El vapor condensado sale en forma de pequeños chorros. Puesto que se supone que la solución del evaporador está completamente mezclada, el producto concentrado y la solución del evaporador tienen la misma composición y temperatura T_1, que corresponde al punto de ebullición de la solución. La temperatura del vapor también es T_1, pues esta en equilibrio con la solución en ebullición. La presión es P_1, que es la presión de vapor de la solución a T_1.

Si se supone que la solución que se va a evaporar es bastante diluida y parecida al agua, 1 kg de vapor de agua producirá aproximadamente 1 kg de vapor al condensarse. Esto ocurrirá siempre que la alimentación tenga una temperatura T_F cercana al punto de ebullición.

En el cálculo de la velocidad de transferencia de calor en un evaporador se emplea el concepto de un coeficiente total de transferencia de calor. Se establece entonces la ecuación

$$q = U A \text{ AT} = U A(T_S - T_1) \qquad (8.2\text{-}1)$$

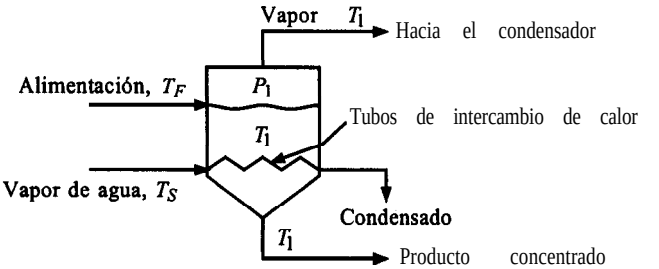


FIGURA. 8.2-2. Diagrama simplificado de un evaporador de efecto simple.

donde q es la velocidad de transferencia de calor en W (btu/h), U es el coeficiente total de transferencia de calor en W/m² · K (btu/h . pie² . °F), A es el área de transferencia de calor en m² (pie²), T_s es la temperatura del vapor que se condensa en K (°F) y T_1 es el punto de ebullición del líquido en K (°F).

Los evaporadores de efecto simple se usan con frecuencia cuando la capacidad necesaria de operación es relativamente pequeña o el costo del vapor es relativamente barato comparado con el costo del evaporador. Sin embargo, la operación de gran capacidad, al usar más de un efecto, reducirá de manera significativa los costos del vapor.

2. Evaporadores de efecto múltiple con alimentación hacia adelante. Un evaporador de efecto simple como el que se muestra en la figura 8.2-2 desperdicia bastante energía, pues el calor latente del vapor que sale no se utiliza. No obstante, una buena parte de este calor latente se recupera y se utiliza al emplear evaporadores de efecto múltiple. En la figura 8.2-3 se muestra el diagrama simplificado de un evaporador de efecto triple con alimentación hacia adelante.

Si la alimentación del primer efecto esta a una temperatura cercana al punto de ebullición y a la presión de operación de dicho efecto, 1 kg de vapor de agua evaporará casi 1 kg de agua. El primer efecto opera a una temperatura suficientemente alta como para que el agua que se evapora sirva como medio de calentamiento del segundo efecto. Nuevamente, en el segundo efecto se evapora casi 1 kg de agua, que se emplea como medio de calentamiento del tercer efecto. De manera aproximada, en un evaporador de efecto triple se evaporan 3 kg de agua por kilogramo de vapor de agua usado. Por consiguiente, el resultado es un aumento de la *economía de vapor de agua,* que es kg de vapor evaporado/kg de vapor de agua usado. Esto también resulta cierto de forma aproximada para más de tres efectos. Sin embargo, este aumento de la economía del vapor de agua en un evaporador de efecto múltiple se logra a expensas de mayor inversión en el equipo.

En la operación de alimentación hacia adelante que se muestra en la figura 8.2-3, la alimentación se introduce en el primer efecto y fluye hacia el siguiente en el mismo sentido del flujo del vapor. Éste es el método de operación que se emplea cuando la alimentación esta caliente o cuando el producto concentrado final puede dañarse a temperaturas elevadas. Las temperaturas de ebullición van disminuyendo de efecto a efecto. Esto significa que si el primer efecto esta a P_1 = 1 atm abs de presión, el último estará al vacío, a presión P_3.

3. Evaporadores de efecto múltiple con alimentación en retroceso. En la operación de alimentación en retroceso que se muestra para el evaporador de efecto triple de la figura 8.2-4, la alimenta-

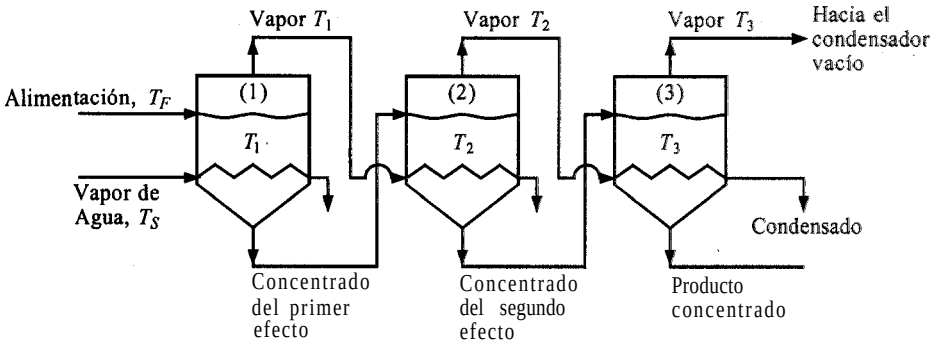


FIGURA 8.2-3. *Diagrama simplificado de un triple evaporador de triple efecto con alimentación hacia adelante.*

ción entra al último efecto, que es el más frío, y continúa hacia atrás hasta que el producto concentrado sale por el primer efecto. Este método de alimentación en retroceso tiene ventajas cuando la alimentación es fría, pues la cantidad de líquido que debe calentarse a temperaturas más altas en el segundo y primer efectos es más pequeña. Sin embargo, es necesario usar bombas en cada efecto, pues el flujo va de baja a alta presión. Este método también es muy útil cuando el producto concentrado es bastante viscoso. Las altas temperaturas de Pos primeros efectos reducen la viscosidad y permiten coeficientes de transferencia de calor de valor razonable.

4. Evaporadores de efecto múltiple con alimentación en paralelo. *La* alimentación en paralelo en evaporadores de efecto múltiple implica ta adición de alimentación nueva y la extracción de producto concentrado en cada uno de los efectos. El vapor de cada efecto se usa para calentar el siguiente. Este método de operación se utiliza principalmente cuando la alimentación está casi saturada y el producto son cristales sólidos, tal como sucede en la evaporación de salmueras para la producción de sal.

8.3 COEFICIENTES TOTALES DE TRANSFERENCIA DE CALORENEVAPORADORES

El coeficiente total de transferencia de calor U un evaporador está constituido por el coeficiente del lado del vapor que se condensa, cuyo valor aproximado es de 5700 W/m^2 · k (1000 btu/h · pie^2 · "F); por la pared metálica, que tiene una conductividad térmica alta y casi siempre una

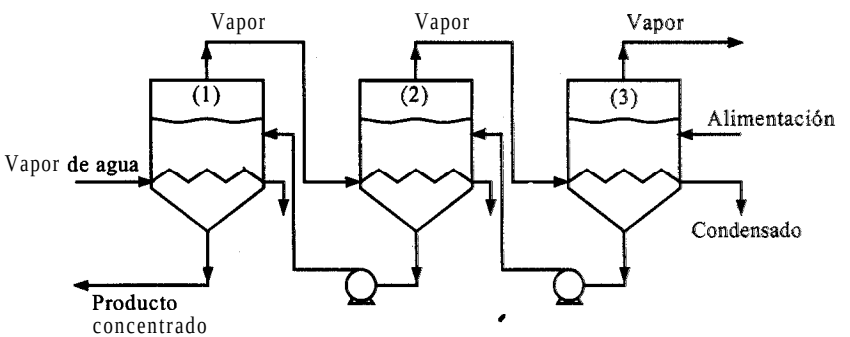


FIGURA 8.2-4. *Diagrama simplificado de un evaporador de efecto triple can alimentación en retroceso.*

resistencia despreciable; por la resistencia de las incrustaciones en el lado del liquido, y por el coeficiente de la película líquida, que por lo general se forma en el interior de los tubos.

El coeficiente del vapor de agua que se condensa en el exterior de los tubos puede estimarse usando las ecuaciones (4.8-20) a la (4.8-26). La resistencia debida a la formación de incrustaciones es difícil de predecir. Al aumentar la velocidad de circulación del líquido en los tubos, la formación de incrustaciones se reduce notablemente. Ésta es una de las mayores ventajas de los evaporadores de circulación forzada. La incrustación puede estar formada por sales, tales como sulfato de calcio o sulfato de sodio, cuya solubilidad disminuye al aumentar la temperatura y, por tanto, tienden a depositarse en los tubos calientes.

En el caso de evaporadores de circulación forzada es posible predecir el coeficiente h en el interior de los tubos cuando ahí hay poca o ninguna evaporación. La carga hidrostática del liquido en los tubos evita la ebullición casi por completo. Pueden usarse entonces las ecuaciones estudiadas para predecir el valor de h para líquidos en el interior de los tubos. Las velocidades empleadas suelen variar entre 2 y 5 m/s (7 y 15 pies/s). El coeficiente de transferencia de calor puede determinarse con la ecuación (4.5-8), pero empleando la constante de 0.028 en lugar de 0.027 (B1). Si hay algo de ebullición en alguno de los tubos o en todos ellos, el uso de la ecuación que supone que no hay ebullición dará resultados conservadoramente seguros (P1).

En el caso de evaporadores de tubos verticales largos con circulación natural, es más difícil predecir el coeficiente de transferencia de calor, pues hay una zona sin ebullición en el fondo de los tubos y una zona de ebullición en la parte superior. La longitud de la zona shn ebullición depende de la transferencia de calor en ambas zonas y de la caída de presión en la región de ebullición de dos fases. El coeficiente de transferencia de calor en la película de la zona sin ebullición puede estimarse por medio de la ecuación (4.5-8) con una constante de 0.028. Para la zona de ebullición de dos fases, Perry y Green (P2) proporcionan varias ecuaciones aplicables.

En evaporadores de tubos verticales cortos, los coeficientes de transferencia de calor pueden estimarse con los mismos métodos de las unidades de tubos verticales Bargos con circulación natural. Los evaporadores de tubos horizontales tienen coeficientes de transferencia de calor del mismo orden de magnitud de los evaporadores de tubos verticales cortos.

En el caso de evaporadores de película con agitación, el coeficiente de transferencia de calor puede estimarse con la ecuación (4.13-4), correspondiente a un intercambio de calor con raspadores de superficie.

Estos métodos son útiles para el diseño de evaporadores en Pa practica, o para evaluar los efectos de los cambios de condiciones de operación sobre los coeficientes. Al llevara cabo diseños preliminares o estimaciones de costos, resulta conveniente contar con información relativa a los coeficientes totales de transferencia de calor de los equipos comerciales. Las referencias (B3, P1) dan algunos valores y límites preliminares para diversos tipos de evaporadores, que aparecen en la tabla 8.3-1.

TABLA 8.3.1 *Coficientes típicos de transferencia de calor para diversos evaporadores* (B3, B4, LI, P2)*

Tipo de evaporador	*General U*	
	$W/m^2 \cdot K$	$Btu/h \cdot pie^2 \cdot °F$
Tubo vertical corto, circulación natural	1100-2800	200-500
Tubo horizontal, circulación natural	1100-2800	200-500
Tubo vertical largo, circulación natural	1100-400	200-700
Tubo vertical largo, circulación forzada	2300-11000	400-2000
Película con agitación	680-2300	120-400

* Por lo general, los líquidos no viscosos tienen los coeficientes más altos y los liquides viscosos, los más bajos en los intervalos dados

8.4 MÉTODOS DE CÁLCULO PARA EVAPORADORES DE UN SOLO EFECTO

8.4A Balance de calor y de materia para evaporadores

La expresión básica para determinar la capacidad de un evaporador de efecto simple es la ecuación (8.2-1), que puede escribirse como

$$q = UA\ \text{AT} \qquad \textbf{(8.4-l)}$$

donde AT K (°F) es la diferencia de temperatura entre el vapor de agua que se condensa y el líquido a ebullición en el evaporador. Para resolver la ecuación (8.4-l) es necesario determinar el valor de q en W (btu/h) llevando a cabo un balance de calor y materia en el evaporador de la figura 8.4-1. La alimentación al evaporador es F kg/h (lb_m/h) con contenido de sólidos de fracción de masa x_F, temperatura T_F y entalpía h_F J/Kg (btu/lb_m). La salida es de un líquido concentrado L kg/h (lb_m/h) con un contenido de sólidos x_L, una temperatura T_1 y una entalpía h_L. El vapor V kg/h (lb_m/h) se desprende como disolvente puro con un contenido de sólidos $y_V = 0$, temperatura T_1 y una entalpía H_V. La entrada de vapor de agua saturado S kg/h (lb_m/h) tiene temperatura de T_S y entalpía H_S. *Se* supone que el vapor de agua condensado S kg/h sale a T_S, esto es, a la temperatura de saturación, y con entalpía de h_S. Esto significa que el vapor de agua **sólo** transfiere su calor latente, λ, que es

$$\lambda = H_S - h_S \qquad (8.4\text{-}2)$$

Puesto que el vapor V esta en equilibrio con el líquido L, las temperaturas de ambos son iguales. Además, la presión P_1 es la de vapor de saturación del líquido de composición x_L a su punto de ebullición T_1. (Esto supone que no hay elevación del punto de ebullición.)

Para el balance de materia, y puesto que se trata de estado estacionario, la velocidad de entrada de masa = velocidad de salida de masa. Entonces, para un balance total,

$$F = L + V \qquad (8.4\text{-}3)$$

Para un balance con respecto al soluto (sólidos) solamente,

$$Fx_F = Lx_L \qquad (8.4\text{-}4)$$

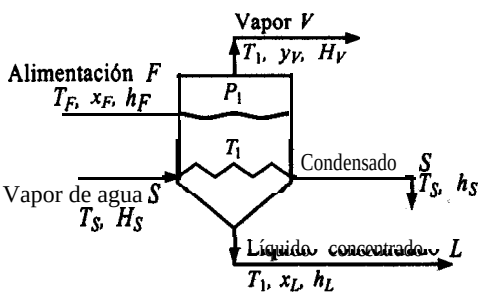


FIGURA 8.4-l. *Balance de calor y de masa para un evaporador de efecto simple.*

Para el balance de calor, y puesto que calor total que entra = calor total que sale,

calor en la alimentación + calor en el vapor de agua = calor en el líquido concentrado + calor en el vapor + calor en el vapor de agua condensado **(8.4-5)**

Se supone que no hay pérdidas de calor por radiación o convección. Sustituyendo en Ba ecuación (8.4-5),

$$Fh_F + SH_S = Lh_L + VH_V + Sh_S \tag{8.4-6}$$

Sustituyendo la ecuación (8.4-2) en la (8.4-6),

$$Fh_F + S\lambda = Lh_L + VH_V \tag{8.4-7}$$

Entonces, el calor q transferido en el evaporador es

$$q = S(H_S - h_S) = S\lambda \tag{8.4-8}$$

En la ecuación (8.4-7) el calor latente λ del vapor de agua a la temperatura de saturación T_S se obtiene de las tablas de vapor de agua del Apéndice A.2. Sin embargo, generalmente no se dispone de las entalpías de la alimentación y de los productos. Los datos de entalpía y concentración sólo se tienen para algunas sustancias en disolución. Por tanto, se establecen algunas aproximaciones para determinar el balance de calor, como sigue:

1. Se puede demostrar en forma aproximada que el calor latente de evaporación de 1 kg masa de agua de una solución acuosa se calcula con las tablas de vapor mediante la temperatura de la solución a ebullición T_1 (temperatura de la superficie expuesta) en lugar de la temperatura de equilibrio del agua pura a P_1.

2. Si se conoce la capacidad calorífica c_{pF} de Ba alimentación liquida y c_{pL} del producto, estos valores son útiles para calcular las entalpías. (Se desprecian los calores de dilución, que en la mayoría de los casos se desconocen.)

EJEMPLO 8.4-l. Área de transferencia de calor en un evaporador de un solo efecto

Un evaporador continuo de efecto simple concentra 9072 kg/h de una solución de sal al 1 .0% en peso que entra a 3 ll .O K (37.8 "C), hasta una conc entracion final de 1.5% en peso. El vapor en el evaporador está a 101.325 kPa (1 .O atm abs) y el vapor de agua que se introduce está saturado a 143.3 kPa. El coeficiente total U = 1704 W/m^2 · K. Calcule las cantidades de vapor y de producto líquido, así como el área de transferencia de calor que se requiere. Puesto que se trata de una solución diluida, suponga que su punto de ebullición es igual al del agua.

Solución: El diagrama de flujo es igual al de la figura 8.4-1. Para el balance de materiales, sustituyendo en la ecuación (8.4-3),

$$F = L + V \tag{8.4-3}$$

$$9072 = L + V$$

Sustituyendo en la ecuación (8.4-4) y resolviendo,

$$Fx_F = Lx_L \qquad (8.4\text{-}4)$$

$$9072(0.01) = L(0.015)$$

$$L = 6048 \text{ kg/h de líquido}$$

Sustituyendo en la ecuación (8.4-3) y resolviendo,

$$V = 3024 \text{ kg/h de vapor}$$

Se supone que la capacidad calorífica de la alimentación es $c_{pF} = 4.14$ kJ/kg . K. (Con frecuencia, para sales inorgánicas en agua, puede suponerse que el valor de c_p es aproximadamente igual al del agua pura.) Para llevar a cabo un balance de calor con la ecuación (8.4-7), es conveniente seleccionar el punto de ebullición de la solución diluida en el evaporador, que se supone equivale al del agua a 101.32 kPa, T_1 = 373.2 K (100 "C), como temperatura base. Entonces, H_V es el calor latente del agua a 373.2 K que, de acuerdo con las tablas de vapor del Apéndice A.2 es 2257 kJ/kg (970.3 btu/lb$_m$). El calor latente λ del vapor de agua a 143.3 kPa [temperatura de saturación T_S = *383.2* K (230 "F)] es 2230 kJ/kg (958.8 btu/lb$_m$).
La entalpía de la alimentación puede calcularse con

$$h_F = c_{pF}(T_F - T_1) \qquad (8.4\text{-}9)$$

Sustituyendo en la ecuación (8.4-7) con h_L = 0, puesto que está a la temperatura base de *373.2* K,

$$9072(4.14)(311.0 - 373.2) + S(2230) = 6048(0) + 3024(2257)$$

$$S = 4108 \text{ kg vapor de agua/h}$$

El calor q transferido a través del área superficial de calentamiento A es, con base en la ecuación (8.4-8).

$$4 = S(\lambda) \qquad (8.4\text{-}8)$$

$$q = 4108(2230)(1000/3600) = 2\,544\,000 \text{ W}$$

Sustituyendo en la ecuación (8.4-1), donde AT = $T_S - T_1$,

$$q = 2\,544\,000 = UA \text{ AT} = 1704(A)(383.2 - 373.2)$$

Despejando, A = 149.3 m^2.

8.4B Efectos de las variables de proceso en la operación de evaporadores

1. Efecto de la temperatura de alimentación. La temperatura de entrada de la alimentación tiene un gran efecto sobre la operación del evaporador. En el ejemplo 8.4-1, la alimentación entra a una temperatura fría de 311.0 K, en comparación con la temperatura de ebullición de 373.2 K.

Aproximadamente una cuarta parte del vapor de agua utilizado en el proceso se consume al elevar la temperatura de la alimentación hasta el punto de ebullición. Por tanto, sólo quedan $\frac{3}{4}$ del vapor de agua para la vaporización de la alimentación. Si la alimentación está a presión y temperatura superior al punto de ebullición en el evaporador, se logra una vaporización adicional por medio de la evaporación instantánea de una parte de la alimentación caliente. El precalentamiento de la alimentación reduce el tamaño del evaporador y el área de transferencia de calor que se requiere.

2. Efecto de la presión. En el ejemplo 8.4-l se usó una presión de 101.32 kPa abs en el vapor del evaporador. Esto fijó el punto de ebullición de la solución en 373.2 K y produjo un valor de AT para usarse en la ecuación (8.4-l) de 383.2 − 373.2, o 10 K. En muchos casos es deseable contar con un valor más alto de AT, pues a medida que ΔT aumenta, el área de la superficie de calentamiento A y el costo del evaporador disminuyen. Para reducir la presión abajo de 101.32 kPa (esto es, para operar el vacío), debe usarse un condensador y una bomba de vacío. Por ejemplo, si la presión se redujera a 41.4 kPa, el punto de ebullición del agua sería 349.9 K y el nuevo valor de AT sería 383.2 − 349.9, o 33.3 K. Se obtendría entonces una disminución considerable del área superficial de calentamiento.

3. Efecto de la presión del vapor de agua. Cuando se usa vapor de agua saturado a presión más alta, el valor de AT aumenta, con lo cual disminuye el tamaño y el costo del evaporador. Sin embargo, el vapor de alta presión cuesta más y suele ser más valioso como fuente de potencia en otros equipos. Por consiguiente, la presión óptima del vapor de agua se determina mediante un balance económico general.

8.4C Elevación del punto de ebullición de las disoluciones

En la mayoría de los casos de evaporación, las soluciones no son tan diluidas como la del ejemplo 8.4-l. Por tanto, las propiedades térmicas de las soluciones que se evaporan pueden ser muy diferentes a las del agua. Las concentraciones de las soluciones son bastante altas por lo cual los valores de capacidad calorífica y punto de ebullición son muy distintos de los del agua.

En soluciones concentradas de solutos disueltos no es posible predecir la elevación del punto de ebullición debido a la presencia del soluto. Sin embargo, se puede usar una ley empírica muy útil conocida como *regla de Dühring.* Con esta técnica se obtiene una línea recta cuando se grafica el punto de ebullición de una solución en °C o °F en función del punto de ebullición del agua pura a la misma presión para determinada concentración a diferentes presiones. Para cada concentración se obtiene una línea recta diferente. En la figura 8.4-2 se muestra una gráfica de líneas de Dühring para soluciones de hidróxido de sodio en agua. Sólo es necesario conocer el punto de ebullición de una solución sujeta a dos presiones para trazar la línea.

EJEMPLO 8.4-2. Uso de la gráfica de Dühring para la elevación del punto de ebullición

Como ejemplo del uso de la gráfica, considere una presión de 25.6 kPa (3.72 psia) para la evaporación de una solución de NaOH al 30%. Determine la temperatura de ebullición de la solución de NaOH, así como la elevación del punto de ebullición EPE de lasolucióncon respecto a la ebullición del agua a la misma presión.

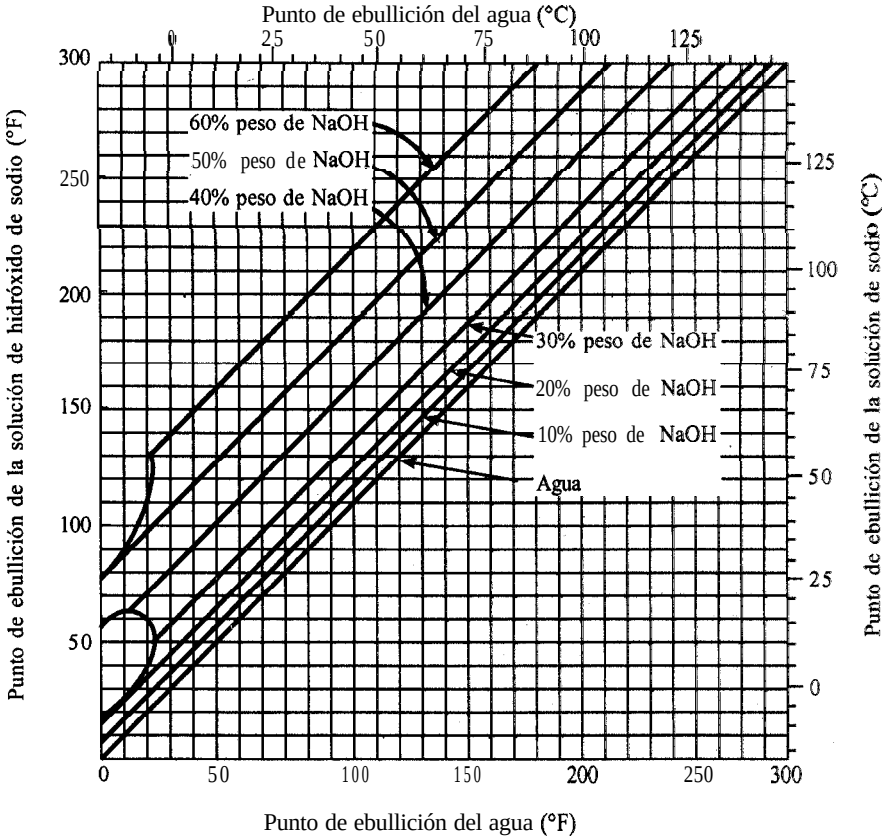


FIGURA 8.4-2. *Líneas de Dühring para soluciones acuosas de hidróxido de sodio*

Solución: De acuerdo con las tablas de vapor del Apéndice A.2, el punto de ebullición del agua a 25.6 kPa es 65.6°C. Con base en la figura 8.4-2, a 65.6°C (150 "F) para NaOH al 30%, el punto de ebullición de la solución es 79.5 °C (175 "F). La elevación del punto de ebullición es (EPE) 79.5 − 65.6 = 13.9 °C (25 °F).

En la referencia de Perry y Green (P2) se incluye una gráfica para estimar la EPE de gran número de soluciones acuosas comunes en procesos químicos y biológicos. Además de sales y solutos comunes, tales como $NaNO_3$, NaOH, NaC 1 y H_2SO_4, se incluyen los solutos biológicos sacarosa, ácido cítrico, solución kraft y glicerol. Estos solutos biológicos tienen valores de EPE bastante bajos en comparación con los de las sales comunes.

8.4D Gráficas de entalpía y concentración de soluciones

Cuando el calor de disolución de la solución acuosa que se está concentrando en el evaporador es bastante alto, despreciarlo en los balances de calor puede causar errores considerables. Este fenómeno del calor de disolución se explica como sigue. Cuando se disuelven lentejas de NaOH en cierta cantidad de agua, se observa que se presenta una elevación considerable de la temperatura, esto es, se desprende calor, al cual se le llama *calor de disolución.* La cantidad de calor desprendida depende del tipo de sustancia y de la cantidad de agua usada. Además, cuando una solución

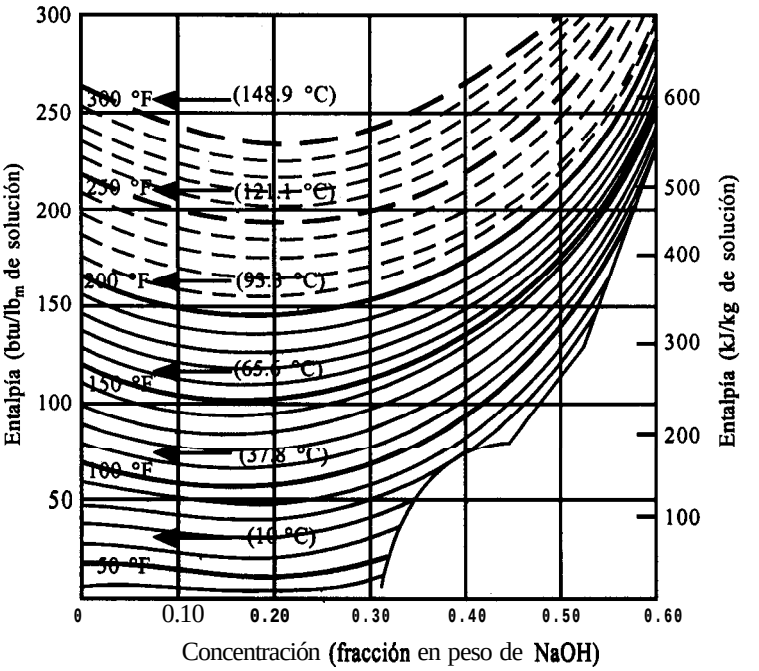


FIGURA 8.4-3. *Gráfica de entalpia y concentración para el sistema NaOH-agua. Estado de referencia, agua liquida a 0 °C (273 K) o 32 °F. [Tomado de W. L. McCabe, Trans. A.I.Ch.E,. 31, 129 (1935). Reproducida con autorización.]*

concentrada de NaOH se diluye a concentraciones más bajas también se libera calor. Por consiguiente, cuando una solución se concentra de una concentración baja a una más alta, es necesario suministrar calor.

En la figura 8.4-3 se muestra una gráfica entalpía-concentración para NaOH (M1), donde la entalpía está en kJ/kg (btu/lb$_m$) de solución, la temperatura en °C (°F) y la concentración en fracción de NaOH en peso en la solución. Por lo general, estas gráficas de entalpía y concentración no se construyen para soluciones con calores de disolución despreciables, pues en estos casos es más fácil usar las capacidades caloríficas para el cálculo de las entalpias. Además, estas gráficas sólo existen para algunas soluciones.

La entalpía del agua líquida de la figura 8.4-3 se refiere al mismo estado base o de referencia de las tablas de vapor, esto es, agua líquida a 0 °C (273 K). Esto significa que las entalpías de la figura pueden usarse con las de las tablas de vapor. Para la ecuación (8.4-7), los valores de h_F y h_L pueden tomarse de la figura 8.4-3 y los valores de λ y H_V de las tablas de vapor de agua. El siguiente ejemplo ilustra el uso de la figura 8.4-3.

Ejemplo 8.4-3. ***Evaporación de una solución de NaOH***

Se usa un evaporador para concentrar 4536 kg/h de una solución al 20% de NaOH en agua que entra a 60 °C (140°F) y sale con 50% de sólidos. La presión del vapor de agua saturado que se usa es 172.4 kPa (25 lb/pulg^2 abs) y la presión del vapor en el evaporador es ll .7 kPa (1.7 lb/pulg^2 abs). El coeficiente total de transferencia de calor es 1560 W/m^2 · K (275 btu/h · pie^2 · °F). Calcule la cantidad de vapor de agua usado, la economía de vapor en kg vaporizados/kg de vapor de agua usados y el área superficial de calentamiento en metros cuadrados.

Solución: El diagrama de flujo del proceso y la nomenclatura son iguales a los de la figura 8.4-l. Las variables conocidas son F = 4536 kg/h, x_F = 0.20 fracción en peso, T_F = 60 °C, P_1 = ll .7 kPa, presión del vapor de agua = 172.4 kPa y x_L = 0.50 fracción en peso. Para el balance total de materiales, sustituyendo en la ecuación (8.4-3),

$$F = 4536 = L + V \qquad (8.4\text{-}3)$$

Sustituyendo en la ecuación (8.4-4) y resolviendo simultáneamente las ecuaciones (8.4-3) y (8.4-4),

$$Fx_F = Lx_L \qquad (8.4\text{-}4)$$

$$4536(0.20) = L(0.50)$$

$$L = 1814 \text{ kg/h} \quad V = 2722 \text{ kg/h}$$

Para determinar el punto de ebullición T_1 de la solución al 50% de concentración, se obtiene primero el punto de ebullición del agua pura a ll .7 kPa. Las tablas de vapor, Apéndice A.2, indican que está a 48.9 °C o 120 "F. Con la gráfica de Dühring, figura 8.4-2, para un punto de ebullición del agua a 48.9 °C y NaOH al 50%, el punto de ebullición de la solución es T_1 = 89.5 °C (193 "F). Por consiguiente,

$$\text{EPE} = T_1 - 48.9 = 89.5 - 48.9 = 40.6 \text{ °C } (73 \text{ °F})$$

De acuerdo con la gráfica de entalpía y concentración (Fig. 8.4-3), para NaOH al 20% a 60 °C (140 "F), h_f = 214 kJ/kg de (92 btu/lb_m). Para NaOH al 50% y 89.5 °C (193 "F), h_L = 505 kJ/kg (217 btu/lb_m).

Para el vapor sobrecalentado *Va* 89.5 °C (193 "F) y ll .7 kPa [sobrecalentado a 40.6 °C (73 "F), puesto que el punto de ebullición del agua es 48.9 °C (120 °F) a ll.7 kPa], y de acuerdo con las tablas de vapor, H_V = 2667 kJ/kg (ll47 btu/lb_m). Otro método para calcular H_V consiste en obtener primero la entalpía del vapor saturado a 48.9°C (120 °F) y ll .7 kPa de 2590 kJ/kg (ll 13.5 btu/lb_m). Entonces, usando una capacidad calorífica de 1.884 kJ/kg . K para vapor de agua sobrecalentado con (89.5 - 48.9)°C = (89.5 - 48.9) K,

$$H_V = 2590 + 1.884(89.5 - 48.9) = 2667 \text{ kJ/kg}$$

Para el vapor de agua saturado a 172.4 kPa, la temperatura de saturación en las tablas de vapor alcanza 115.6 °C (249 °F) y el calor latente es λ = 2214 kJ/kg (952 btu/lb_m). Sustituyendo en la ecuación (8.4-7) y despejando S,

$$Fh_f + S\lambda = Lh_L + VH_V \qquad (8.4\text{-}7)$$

$$4535(214) + S(2214) = 1814(505) + 2722(2667)$$

$$S = 3255 \text{ kg vapor de agua/h}$$

Sustituyendo en la ecuación (8.4-8),

$$q = S\lambda = 3255(2214)\left(\frac{1}{3600}\right) = 2002 \text{ kW}$$

Sustituyendo en la ecuación (8.4-l) y resolviendo,

$$2002(1000) = 1560(A)(115.6 - 89.5)$$

Por tanto, A = 49.2 m^2. Por otra parte, la economía de vapor de agua = 272213255 = 0.836.

8.5 MÉTODOS DE CÁLCULO PARA EVAPORADORES DE EFECTO MÚLTIPLE

8.5A Introducción

En la evaporación de soluciones en un evaporador de efecto simple, uno de los costos más importantes es el del vapor de agua utilizado para evaporar el agua. Un evaporador de efecto simple desperdicia bastante vapor de agua, pues no se utiliza el calor latente del vapor que sale del evaporador. Sin embargo, este costo puede reducirse en evaporadores de efecto múltiple que recuperan el calor latente del vapor que se desprende y lo vuelven a utilizar.

En la figura 8.2-3 se muestra un evaporador de efecto triple que se estudió brevemente en la sección 8.2B. En este sistema, ca& efecto actúa como un evaporador de efecto simple. En el primer efecto se usa vapor de agua como medio de calentamiento, temperatura de ebullición T_1 a presión P_1. El vapor extraído del primer efecto se usa como medio de calentamiento, se condensa en el segundo efecto y se vaporiza agua a temperatura T_2 y presión P_2 en este efecto. Para transferir calor del vapor que se condensa al líquido en ebullición en este segundo efecto, la temperatura de ebullición T_2 debe ser inferior a la de condensación. Esto significa que la presión P_2 del segundo efecto debe ser menor que la presión P_1 del primer efecto. De manera similar, el vapor del segundo efecto se condensa al calentar el tercer efecto; por consiguiente, la presión P_3 es inferior a P_2. Si el primer efecto opera a 1 atm abs de presión, los efectos segundo y tercero estarán al vacío.

En el primer efecto se introduce alimentación nueva que se concentra parcialmente. Después, el líquido más concentrado (Fig. 8.2-4) fluye al segundo evaporador en serie, donde se concentra más. El líquido del segundo efecto fluye al tercer efecto para llegar a su concentración final.

Cuando un evaporador de efecto múltiple opera en estado estacionario, la velocidad de flujo y la de evaporación son constantes en cada efecto. Las presiones, las temperaturas y las velocidades del flujo interno se mantienen constantes de manera automática por las condiciones de estado estacionario del propio proceso. Para modificar la concentración del efecto final, es indispensable variar la velocidad de alimentación al primer efecto. Es necesario que se satisfaga el balance total de materia del sistema general y el de cada evaporador. Si la solución final está demasiado concentrada, se aumenta la velocidad de alimentación y viceversa; entonces, la solución final alcanzará un nuevo estado estacionario a la concentración deseada.

8.5B Caídas de temperatura y capacidad de los evaporadores de efecto múltiple

1. Caídas de temperatura en los evaporadores de efecto múltiple. La cantidad de calor transferido por hora en el primer efecto de un evaporador de efecto triple con alimentación hacia adelante, tal como se muestra en la figura 8.2-3, se expresa como

$$q_1 = U_1 A_1 \Delta T_1 \tag{8.5-1}$$

donde ΔT_1 es la diferencia entre el vapor de agua que se condensa y el punto de ebullición del líquido, $Ts - T_1$. Suponiendo que las soluciones no tienen elevación del punto de ebullición ni calor de disolución y despreciando el calor sensible necesario para calentar la alimentación hasta el punto de ebullición, puede decirse de manera aproximada, que todo el calor latente del vapor de agua que se condensa aparece como calor latente en el vapor que se produce. Entonces, este vapor se condensa en el segundo efecto, cediendo aproximadamente la misma cantidad de calor.

$$q_2 = U_2 A_2 \Delta T_2 \tag{8.5-2}$$

Este razonamiento es aplicable a q_3. Entonces, como $q_1 = q_2 = q_3$, se obtiene la siguiente expresión aproximada:

$$U_1 A_1 \mathbf{AT}, = U_{2,} Az, \text{ AT}, = U_3 A_3 \Delta T_3 \qquad \textbf{(8.5-3)}$$

En general, los equipos comerciales se construyen con áreas iguales en todos los efectos, y

$$\frac{q}{A} = U_1 \Delta T_1 = U_2 \Delta T_2 = U_3 \Delta T_3 \qquad \textbf{(8.5-4)}$$

Por consiguiente, las caídas de temperatura **AT** en un evaporador de efecto múltiple son de manera aproximada, inversamente proporcionales a los valores de U. Estableciendo el valor de $\Sigma\Delta T$ como sigue, cuando no hay elevación del punto de ebullición:

$$\Sigma\Delta T = \Delta T_1 + \Delta T_2 + \Delta T_3 = T_S - T_3 \qquad \textbf{(8.5-S)}$$

Adviértase que ΔT_1 °C = ΔT_1 K, ΔT_2 °C = ΔT_2 K, etc. Puesto que AT, es proporcional a $1/U_1$, entonces,

$$\Delta T_1 = \Sigma\Delta T \frac{1/U_1}{1/U_1 + 1/U_2 + 1/U_3} \qquad \textbf{(8.5-G;}$$

Se pueden escribir ecuaciones semejantes para ΔT_2 y ΔT_3.

2. ***Capacidad de los evaporadores de efecto múltiple.*** Es posible obtener una estimación aproximada de la capacidad de un evaporador de efecto triple en comparación con la de uno de efecto simple, sumando los valores de q de cada evaporador,

$$q = q_1 + q_2 + q_3 = U_1 A_1 \Delta T_1 + U_2 A_2 \Delta T_2 + U_3 A_3 \Delta T_3 \qquad \textbf{(8.5-7)}$$

Si se supone que el valor de U es el mismo para todos los efectos y que los valores de A son iguales, la ecuación (8.5-7) se transforma en

$$q = UA(\Delta T_1 + \Delta T_2 + \Delta T_3) = UA\,AT \qquad \textbf{(8.5-8)}$$

donde $\mathbf{AT} = \Sigma\Delta T = \Delta T_1 + \Delta T_2 + \Delta T_3 = T_S - T_3$.

Si se utiliza un evaporador de efecto simple con la misma área A, el mismo valor de Uy la misma caída total de temperatura AT, **entonces**

$$q = UA\ \mathbf{AT} \qquad \textbf{(8.5-9)}$$

Evidentemente, esto da la misma capacidad que un evaporador de efecto múltiple. Por consiguiente, el aumento de la economía de vapor de agua que se obtiene en los evaporadores de efecto múltiple se logra a expensas de una reducción de capacidad.

8.5C Cálculos para evaporadores de efecto múltiple

Al efectuar los cálculos para un sistema de evaporador de efecto múltiple, los valores necesarios son el área de la superficie de calentamiento en cada efecto, los kilogramos de vapor de agua por hora que deben suministrarse y la cantidad de vapor que sale de cada efecto, en especial del último. Los valores conocidos son casi siempre los siguientes: (1) presión del vapor de agua en el primer efecto,

(2) presión final del espacio del vapor en el último efecto, (3) condiciones de alimentación y flujo en el primer efecto, (4) concentración final del líquido que sale del último efecto, (5) propiedades físicas tales como entalpías o capacidades caloríficas del líquido y de los vapores, y (6) los coeficientes totales de transferencia de calor en cada efecto. En general, se supone que las áreas de los efectos son iguales.

Los cálculos se llevan a cabo por medio de balances de materia, balances de calor y ecuaciones de capacidad $q = UA\,\Delta T$ para cada efecto. Un método conveniente para resolver estas ecuaciones es el de aproximaciones sucesivas. A continuación se describen los pasos básicos a seguir para un evaporador de efecto triple.

8.5D Método de cálculo paso a paso para evaporadores de efecto triple

1. Con base en los valores conocidos de la concentración de salida y la presión en el último efecto, se determina el punto de ebullición en este último efecto. (Si existe una EPE, ésta se estima con la gráfica de Dühring.)
2. Por medio de un balance total de material, se determina la cantidad total de vapor que se evapora. Para esta primera aproximación este total se prorratea entre los tres efectos y se calcula la concentración en cada uno de ellos por medio de un balance de materia. (Por lo general, en la primera aproximación se suponen cantidades iguales de vapor producidas en los tres efectos, de modo que $V_1 = V_2 = V_3$.
3. Con la ecuación (8.5-6), se estiman las caídas de temperatura $\Delta T_1, \Delta T_2$ y ΔT_3 en los tres efectos. Cualquier efecto que tenga una carga de calentamiento adicional, tal como una alimentación fría, requerirá un valor de AT proporcionalmente más alto. Después se calcula el punto de ebullición en cada efecto.

   [Si se tiene EPE en °C, se estiman las presiones en los efectos 1 y 2 y se determina EPE en los tres efectos. Sólo se requiere una estimación aproximada de la presión, pues EPE es casi independiente de la misma. De esta manera se obtiene el valor de $\Sigma\Delta T$ disponible para la transferencia de calor sin el sobrecalentamiento, sustrayendo la suma de todas las EPE, del valor total AT de $T_S - T_3$ (saturación). Mediante la ecuación (8.5-6), se estiman $\Delta T_1, \Delta T_2$ y ΔT_3. Luego se calcula el punto de ebullición en ca& efecto.]
4. Empleando los balances de material y de calor de cada efecto, se calculan la cantidad vaporizada y los flujos de líquido en cada efecto. Si las cantidades vaporizadas difieren de manera apreciable de los valores supuestos en el paso 2, entonces se repiten los pasos 2, 3 y 4 con las cantidades de evaporación que acaban de calcularse. (En el paso 2 sólo se repite el balance para los sólidos.)
5. Calcule el valor de q transferido en cada efecto. Mediante la ecuación $q = UA\,\Delta T$ de ca& efecto, se calculan las áreas A_1, A_2 y A_3. Después se calcula el valor promedio de A_m mediante,

$$A_m = \frac{A_1 + A_2 + A_3}{3} \tag{8.5-10}$$

   Si estas áreas están razonablemente cerca una de otra, los cálculos están completos y no se necesita un segundo intento. Si las áreas no son aproximadamente iguales, es necesario realizar un segundo intento como sigue.
6. Para empezar el intento 2, utilice los nuevos valores de L_1, L_2, L_3, V_1, V_2 y V_3 calculados para los balances de calor del paso 4 y calcule las nuevas concentraciones de sólidos en cada efecto mediante un balance de sólidos en cada efecto.

7. Obtenga los nuevos valores AT,', $\Delta T_2'$ y AT;, a partir de

$$\Delta T_1' = \frac{\Delta T_1 A_1}{A_m} \qquad \Delta T_2' = \frac{\Delta T_2 A_2}{A_m} = \qquad \text{AT;} = \frac{\Delta T_3 A_3}{A_m} \tag{8.5-l 1}$$

La suma de $\Delta T_1' + \Delta T_2' + \Delta T_3'$ debe ser igual al valor original de $\Sigma\Delta T$. Si no es así, los valores de AT' se reajustan proporcionalmente para satisfacer esta condición. Entonces, se calcula el punto de ebullición en cada efecto.

[Si existe una EPE, entonces, usando las concentraciones del paso 6 se determinan nuevos valores de las EPE en los tres efectos. Esto produce otro valor de $\Sigma\Delta T$ disponible para la transferencia de calor, sustrayendo del valor total de AT la suma de las tres EPE. Por medio de la ecuación (8.5-l 1) se calculan nuevos valores de AT'. La suma de los valores de AT' que se acaban de calcular debe reajustarse a este nuevo valor de $\Sigma\Delta T$ Entonces se calcula el punto de ebullición en cada efecto.] El paso 7 es, en esencia, una repetición del paso 3, pero con el uso de la ecuación (8.5-l 1) para obtener una mejor estimación de los valores de AT'.

8. Con los nuevos valores de AT' del paso 7, se repite el cálculo desde el paso 4. Dos intentos suelen bastar para que las áreas sean razonablemente iguales.

EJEMPLO 8.5-l. Evaporación de una disolución de azúcar en un evaporador de efecto triple

Se usa un evaporador de efecto triple y de alimentación hacia adelante para evaporar una disolución de azúcar que contiene 10% de sólidos en peso, hasta una concentración de 50% en peso. La EPE de las soluciones (independiente de la presión) puede estimarse con la expresión EPE °C = $1.78x + 6.22xT^2$ (EPE °F = $3.2x$ + ll $.2x^2$), donde x es fracción en peso de azúcar en solución (K1). Se usa vapor de agua saturado a 205.5 kPa (29.8 lb/pulg^2 abs) [121.1 °C (250 "F) de temperatura de saturación]. La presión en el espacio del vapor del tercer efecto es 13.4 kPa (1.94 lb_m/pulg^2 abs). La velocidad de alimentación es 22680 kg/h (50000 lb_m/h) a 26.7 °C (80 °F). La capacidad calorífica de la disolución líquida es (K1) $c_p = 4.19 - 2.35x$ kJ/kg · K $(1.0 - 0.56x$ btu/lb_m · °F). Se considera que el calor de disolución es despreciable. La estimación de los coeficientes de transferencia de calor arroja los siguientes resultados: U_1 = 3 123, U_2 = 1987 y U_3 = ll 36 W/m^2 · K o 550,350 y 200 btu/h · pie^2 · "F. Suponiendo la misma área en los efectos, calcule el área, la cantidad de vapor de agua y la economía de vapor.

Solución: En la figura 8.5-l se muestra el diagrama de flujo del proceso. Siguiendo los siete pasos descritos, los cálculos son los siguientes:

Paso 1. Para 13.4 kPa (1.94 lb/pulg^2 abs) la temperatura de saturación es 51.67 °C (125 °F), de acuerdo con las tablas de vapor de agua. Mediante la ecuación de EPE para el evaporador número 3 con x = 0.5,

$$\text{EPE}_3 = 1.78x + 6.22x^2 = 1.78(0.5) + 6.22(0.5)^2 = 2.45 \text{ °C } (4.4 \text{ °F})$$

$$T_3 = 51.67 + 2.45 = 54.12 \text{ °C} (129.4 \text{ "F})$$

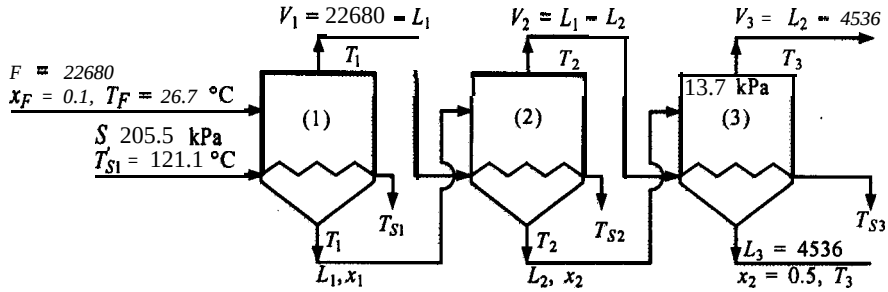


FIGURA 8.5-1. *Diagrama de flujo para la evaporación de efecto triple del ejemplo 8.5-l.*

Paso 2. Efectúe un balance total y de sólidos para calcular la cantidad total vaporizada $(V_1 + V_2 + V_3)$ y L_3.'

$$F = 22680 = L_3 + (V_1 + V_2 + V_3)$$
$$Fx_F = 22680(0.1) = L_3(0.5) + (V, + V_2 + V_3)(0)$$
$$L_3 = 4536 \text{ kg/h } (10000 \text{ lb}_m/\text{h})$$
$$\text{total vaporizado} = (V_1 + V_2 + V_3) = 18144 \text{ kg/h } (40000 \text{ lb}_m/\text{h})$$

Si se suponen cantidades iguales vaporizadas en cada efecto, $V_1 = V_2 = V_3 = 6048$ kg/h (13 333 lb_m/h). Efectuando un balance total de materiales en los efectos 1, 2 y 3 y resolviendo,

(1) $F' = 22680 = V_1 + L_1 = 6048 + L_1, \quad L_1 = 16632$ kg/h (33667 lb_m/h)

(2) $L_1 = 16632 = V_2 + L_2 = 6048 + L_2, \quad L_2 = 10584(23334)$

(3) $L_2 = 10584 = V_3 + L_3 = 6048 + L_3, \quad L_3 = 4536(10000)$

Después de practicar un balance de sólidos en los efectos 1, 2 y 3 y despejar x.

(1) $22680(0.1) = L_1 x_1 = 16632(x_1), \quad x_1 = 0.136$

(2) $16632(0.136) = L_2 x_2 = 10584(x_2), \quad x_2 = 0.214$

(3) $10584(0.214) = L_3 x_3 = 4536(x_3), \quad x_3 = 0.500$ (comprobación del balance)

Paso 3. La EPE en cada efecto se calcula así:

(1) $\text{EPE}_1 = 1.78x_1 + 6.22x_1^2 = 1.78(0.136) + 6.22(0.136)^2 = 0.36$ °C(0.7 °F)

(2) $\text{EPE}_2 = 1.78(0.214) + 6.22(0.214)^2 = 0.65$ °C (1.2°F)

(3) $\text{EPE}_3 = 1.78(0.5)+6.22(0.5)^2 = 2.45$ °C(4.4 °F)

$\Sigma\Delta T$ disponible = $T_{S1} - T_3$ (saturación) $- (\text{EPE}_1 + \text{EPE}_2 + \text{EPE}_3)$

$= 121.1 - 51.67 - (0.36 + 0.65 + 2.45) = 65.97$ °C(118.7 "F)

Con la ecuación (8.5-6) para ΔT_1 y ecuaciones similares para ΔT_2 y ΔT_3,

$$\Delta T_1 = \Sigma \Delta T \frac{1/U_1}{1/U_1 + 1/U_2 + 1/U_3} = \frac{(65.97)(1/3123)}{(1/3123)+(1/1987)+(1/1136)}$$

AT, = 12.40 °C ΔT_2 = 19.50 °C *AT, = 34.07* °C

Sin embargo, puesto que al efecto 1 entra alimentación fría, éste requiere más calor. Aumentando ΔT_1 y disminuyendo ΔT_2 y ΔT_3 proporcionalmente como primera estimación.

AT, = 15.56 °C = 15.56K ΔT_2 = 18.34 °C = 18.34 K

AT, = 32.07 °C = 32.07 K

Para calcular el punto de ebullición real de la solución en cada efecto,

(1) *T,* = T_{S1} -AT,

= 121.1 − 15.56 = 105.54 "C,

T_{S1} = 121.1 °C (temperatura de condensación del vapor saturado en el efecto 1)

(2) T_2 = T_1 − EPE, − ΔT_2

= 105.54 − 0.36 − 18.34 = 86.84 °C

T_{S2} = T_1 − EPE, = 105.54 − 0.36

= 105.18°C (temperatura de condensación del vapor en el efecto 2)

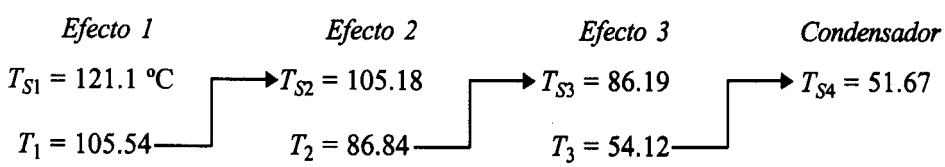
(3) T_3 = T_2 − EPE_2 − ΔT_3

= 86.84 − 0.65 − 32.07 = 54.12 °C

T_{S3} = T_2 − EPE_2

= 86.84 − 0.65 = 86.19 °C (temperatura de condensación del vapor en el efecto 3)

Las temperaturas en los tres efectos son las siguientes:



Paso 4. La capacidad calorífica del líquido en cada efecto se calcula con la ecuación c_p = 4.19 − 2.35x.

F: c_p = 4.19 − 2.35(0.1) = 3.955 kJ/kg . K

L_1: c_p = 4.19 − 2.35(0.136) = 3.869

L_2: c_p = 4.19 − 2.35(0.214) = 3.684

L_3: c_p = 4.19 − 2.35(0.5) = 3.015

Los valores de la entalpía H de las diversas corrientes de vapor con respecto al agua a 0 °C como base, se obtienen de las tablas de vapor y son:

Efecto 1:

$T_1 = 105.54$ °C, $T_{S2} = 105.18$ (221.3 "F), $\mathrm{EPE}_1 = 0.36$, $T_{S1} = 121.1$ (250 "F)

$H_1 = H_{S2}$ (entalpía de saturación a T_{S2}) + 1.884 (0.36 °C de sobrecalentamiento)

$= 2684 + 1.884(0.36) = 2685$ kJ/kg

$\lambda_{S1} = H_{S1}$ (entalpía de saturación del vapor) − h_{S1} (entalpía del líquido a T_{S1})

$= (2708 - 508) = 2220$ kJ/kg calor latente de condensación

Efecto 2:

$$T_2 = 86.84 \text{ "C}, \quad T_{S3} = 86.19, \quad \mathrm{EPE}_2 = 0.65$$

$$H_2 = H_{S3} + 1.884(0.65) = 2654 + 1.884(0.65) = 2655 \text{ kJ/kg}$$

$$\lambda_{S2} = H_1 - h_{S2} = 2685 - 441 = 2244 \text{ kJ/kg}$$

Efecto 3:

$$T_3 = 54.12 \text{ °C}, \quad T_{S4} = 51.67, \quad \mathrm{EPE}_3 = 2.45$$

$$H_3 = H_{S4} + 1.884(2.45) = 2595 + 1.884(2.45) = 2600 \text{ kJ/kg}$$

$$\lambda_{S3} = H_2 - h_{S3} = 2655 - 361 = 2294 \text{ kJ/kg}$$

(Obsérvese que las correcciones por sobrecalentamiento en este ejemplo son pequeñas y podrían haberse despreciado. Sin embargo, se usaron en este caso para demostrar el método de cálculo.) Las relaciones de flujo que se usan en los balances de calor son:

$$V_1 = 22680 - L_1, V_2 = L_1 - L_2, \quad V_3 = L_2 - 4536, \quad L_3 = 4536$$

Se escribe un balance de calor para cada efecto. Se toma 0 °C como base, pues los valores de H de los vapores corresponden a esta temperatura y además $(T_F - 0)$ °C = $(T_F - 0)$ K y $(T_1 - 0)$ °C = $(T_1 - 0)$ K,

(1) $$Fc_p(T_F - 0) + S\lambda_{S1} = L_1c_p(T_1 - 0) + V_1H_1$$

Sustituyendo los valores conocidos,

$$22680(3.955)(26.7 - 0) + S(2200) = L_1(3.869)(105.54 - 0) + (22680 - L_1)(2685)$$

(2) $$L_1c_p(T_1 - 0) + V_1\lambda_{S2} = L_2c_p(T_2 - 0) + V_2H_2$$

$$L_1(3.869)(105.54 - 0) + (22680 - L_1)(2244) = L_2(3.684)(86.84 - 0) + (L_1 - L_2)(2655)$$

(3) $$L_2c_p(T_2 - 0) + V_2\lambda_{S3} = L_3c_p(T_3 - 0) + V_3H_3$$

$$L_2(3.684)(86.84 - 0) + (L_1 - L_2)(2294) = 4536\,(3.015)(54.12 - 0) + (L_2 - 4536)(2600)$$

Resolviendo simultáneamente las dos últimas ecuaciones para despejar& y L_2 y sustituyendo en la primera ecuación,

$$L_1 = 17078 \text{ kg/h} \quad L_2 = 11068 \quad L_3 = 4536$$
$$S = 8936 \quad V_1 = 5602 \quad V_2 = 6010 \quad V_3 = 6532$$

Los valores calculados para V_1, V_2 y V_3 son bastante cercanos a los valores supuestos, por lo que no es necesario repetir los pasos 2, 3 y 4. Si se repitieran los cálculos, los nuevos valores de V_1, V_2 y V_3 se usarían empezando en el paso 2 y sería necesario efectuar un balance de sólidos para cada efecto.

Puso 5. Despejando los valores de q en cada efecto y área,

$$q_1 = S\lambda_{S1} = \left(\frac{8936}{3600}\right)(2200 \times 1000) = 5.460 \times 10^6 \text{ W}$$

$$q_2 = V_1\lambda_{S2} = \left(\frac{5602}{3600}\right)(2244 \times 1000) = 3.492 \times 10^6 \text{ W}$$

$$q_3 = V_2\lambda_{S3} = \left(\frac{6010}{3600}\right)(2294 \times 1000) = 3.830 \times 10^6 \text{ W}$$

$$A_1 = \frac{q_1}{U_1 \Delta T_1} = \frac{5.460 \times 10^6}{3123(15.56)} = 112.4 \text{ m}^2$$

$$A_2 = \frac{q_2}{U_2 \text{ AT,}} = \frac{3.492 \times 10^6}{1987(18.34)} = 95.8 \text{ m}^2$$

$$A_3 = \frac{q_3}{U_3 \Delta T_3} = \frac{3.830 \times 10^6}{1136(32.07)} = 105.1 \text{ m}^2$$

El área promedio $A_m = 104.4 \text{ m}^2$. Las áreas difieren del valor promedio por menos del 10% y en realidad no se necesita un segundo intento. Sin embargo, debe hacerse un segundo intento empezando en el paso 6 para indicar los métodos de cálculo utilizados.

Puso 6. Si se hace otro balance de sólidos en los efectos 1, 2 y 3, utilizando los nuevos L_1 = 17078, L_2 = 11068 y L_3 = 4536 y despejando x,

(1) $22680(0.1) = 17078(x_1)$, $x_1 = 0.133$

(2) $17078(0.133) = 11068(x_2)$, $x_2 = 0.205$

(3) $11068(0.205) = 4536(x,)$, $x_3 = 0.500$ (balance de verificación)

Paso 7. El nuevo EPE en cada efecto es, entonces,

(1) $\text{EPE}, = 1.78\ x_1 + 6.22x_1^2 = 1.78(0.133) + 6.22(0.133)^2 = 0.35$ °C

(2) $\text{EPE}_2 = 1.78(0.205) + 6.22(0.205)^2 = 0.63$ °C

(3) $\text{EPE}_3 = 1.78(0.5) + 6.22(0.5)^2 = 2.45$ °C

$\Sigma\Delta T$ disponible = 121.1 − 51.67 − (0.35 + 0.63 + 2.45) = 66.00 °C

Los nuevos valores de AT se obtienen con la ecuación (8.5-l 1).

$$\Delta T_1' = \frac{\Delta T_1 A_1}{A_m} = \frac{15.56(112.4)}{104.4} = 16.77 \text{ K} = 16.77 \text{ °C}$$

$$\Delta T_2' = \frac{\Delta T_2 A_2}{A_m} = \frac{18.34(95.8)}{104.4} = 16.86 \text{ °C}$$

$$\Delta T_3' = \frac{\Delta T 32.07(105.1)}{A_m} = \frac{3\ 2\quad 3\ .4}{104.4} \text{ °C}$$

$$\Sigma\Delta T = 16.77 + 16.86 + 32.34 = 65.97 \text{ °C}$$

Estos valores de AT' se reajustan de modo que AT,' = 16.77, $\Delta T_2'$ = 16.87, $\Delta T_3'$ = 32.36 y $\Sigma\Delta T$ = 16.77 + 16.87 + 32.36 = 66.00 "C. Para calcular el punto de ebullición real de la solución en cada efecto,

(1) $T_1 = T_{S1}$ -AT,' = 121.1 – 16.77 = 104.33 °C, T_{S1} = 121.1 °C

(2) $T_2 = T_1$ – EPE, -AT; = 104.33 – 0.35 – 16.87 = 87.11 °C

$T_{S2} = T_1 - \text{EPE}_1 = 104.33 - 0.35 = 103.98$ °C

(3) $T_3 = T_2 - \text{EPE}_2 - \text{AT}; = 87.11 - 0.63 - 32.36 = 54.12$ °C

$T_{S3} = T_2 - \text{EPE}_2 = 87.11 - 0.63 = 86.48$ °C

Puso 8. Si se sigue el paso 4, la capacidad calorífica del líquido es $c_p = 4.19 - 2.35x$.

F: c_p = 3.955 kJ/kg · K

L_1: $c_p = 4.19 - 2.35(0.133) = 3.877$

L_2: $c_p = 4.19 - 2.35(0.205) = 3.708$

L_3: $c_p = 3.015$

Los nuevos valores de la entalpía H en cada efecto son los siguientes.

(1) $H_1 = H_{S,2} + 1.884$(°C de sobrecalentamiento) = 2682 + 1.884(0.35) = 2683 kJ/kg

$\lambda_{S1} = H_{S1} - h_{S1} = 2708 - 508 = 2200$ kJ/kg

(2) $H_2 = H_{S3} + 1.884(0.63) = 2654 + 1.884(0.63) = 2655$ kJ/kg

$\lambda_{S2} = H_1 - h_{S2} = 2683 - 440 = 2243$ kJ/kg

(3) $H_3 = H_{S4} + 1.884(2.45) = 2595 + 1.884(2.45) = 2600$ kJ/kg

$\lambda_{S3} = H_2 - h_{S3} = 2655 - 362 = 2293$ kJ/kg

Al escribir un balance de calor para cada efecto,

(1) $22680(3.955)(26.7 - 0) + S(2200) = L_1(3.877)(104.33 - 0) + (22680 - L_1)(2683)$

(2) $L_1(3.877)(104.33 - 0) + (22680 - L_1)(2243) = L_2(3.708)(87.11 - 0) + (L_1 \quad L_2)(2655)$

(3) $L_2(3.708)(87.11 - 0) + (L_1 - L_2)(2293) = 4536(3.015)(54.12 - 0) + (L_2 \quad 4536)(2600)$

Después de resolver,

$$L_1 = 17005 \text{ kg/h} \quad L_2 = 10952 \quad L_3 = 4536 \quad S = 8960 \text{ (vapor utilizado)}$$
$$V_1 = 5675 \quad V_2 = 6053 \quad V_3 = 6416$$

Nótese que estos valores provenientes del intento 2 difieren muy poco de los resultados del intento 1. Si se sigue el paso 5, y se despeja q y A en cada efecto,

$$q_1 = S\lambda_{S1} = \frac{8960}{3600}(2200 \times 1000) = 5.476 \times 10^6 \text{ W}$$

$$q_2 = V_1\lambda_{S2} = \frac{5675}{3600}(2243 \times 1000) = 3.539 \times 10^6 \text{ W}$$

$$q_3 = V_2\lambda_{S3} = \frac{6053}{3600}(2293 \times 1000) = 3.855 \times 10^6 \text{ W}$$

$$A_1 = \frac{q_1}{U_2 \Delta T_1'} = \frac{5.476 \times 10^6}{3123(16.77)} = 104.6 \text{ m}^2$$

$$A_2 = \frac{q_2}{U_2 \Delta T_2'} = \frac{3.539 \times 10^6}{1987(16.87)} = 105.6 \text{ m}^2$$

$$A_3 = \frac{q_3}{U_3 \Delta T_3'} = \frac{3.855 \times 10^6}{1136(32.36)} = 104.9 \text{ m}^2$$

El área promedio $A_m = 105.0 \text{ m}^2$ para usarla en cada efecto. Obsérvese que este valor de 105.0 m^2 es bastante cercano al valor promedio de 104.4 m^2 que proviene del primer intento.

$$\text{economía de vapor} = \frac{V_1 + V_2 + V_3}{S} = \frac{5675 + 6053 + 6416}{8960} = 2\,025$$

8.6 CONDENSADORES PARA EVAPORADORES

8.6A Introducción

Por regla general, los vapores del último efecto de los evaporadores de efecto múltiple salen al vacío, esto es, a presiones inferiores a la atmosférica. Estos vapores deben condensarse y descargarse como líquido a presión atmosférica. Esto se logra al condensar los vapores usando agua de enfriamiento. El condensador puede ser de superficie, donde el vapor por condensar y el líquido de enfriamiento están separados por una pared metálica, o de contacto directo, donde el vapor y el líquido de enfriamiento se mezclan directamente.

8.6B Condensadores de superficie

LOS *condensadores de superficie se* emplean cuando no se desea que se mezclen el condensado y el agua de enfriamiento. En general, son condensadores de tubos y coraza con vapor en la coraza y agua de enfiiamiento en los tubos con flujo de pasos múltiples. La corriente de vapor casi siempre

contiene gases no condensables. Éstos pueden ser aire, CO_2, N_2 y otros gases, incorporados como gases disueltos en la corriente de alimentación, o bien que provienen de descomposiciones en la solución. Estos gases no condensables se desfogan en un tubo de ventilación en cualquier punto bien frío del condensador. Si el vapor que se condensa está por debajo de la presión atmosférica, el líquido condensado que sale del condensador de superficie puede extraerse bombeando y los gases no condensables con una bomba de vacío. Los condensadores de superficie son mucho más costosos y utilizan mayor cantidad de agua de enfriamiento, por lo que no se emplean cuando un condensador de contacto directo resulta adecuado.

8.6C Condensadores de contacto directo

En los ***condensadores de contacto directo*** el agua de enfriamiento se pone en contacto directo con el vapor para condensarlo. Uno de los tipos más comunes de condensadores de contacto directo es el barométrico a contracorriente que se muestra en la figura 8.6-l. El vapor entra al condensador y se condensa al elevarse contra una cortina de gotas de agua de enfriamiento. El condensador se sitúa en la parte superior de un tubo largo de descarga. El condensador está a una altura suficiente por encima del punto de descarga del tubo como para que la columna de agua en el interior de éste compense de manera sobrada la diferencia de presión entre la presión absoluta baja en el condensador y la atmósfera. De esta manera, el agua se descarga por gravedad a través de un recipiente de sellado en el extremo inferior. Se usa una altura aproximada de 10.4 m (34 pies).

El condensador barométrico es barato y ahorrador en cuanto al consumo de agua. Puede mantener un vacío correspondiente a la temperatura del vapor saturado con una diferencia de más o menos 2.8 K (5 “F) con respecto a la temperatura del agua que sale del condensador. Por ejemplo, si el agua de descarga está a 316.5 K (110 “F), lapresióncorrespondiente a 316.5 + 2.8 o 319.3 Kes 10.1 kPa (1.47 psia).

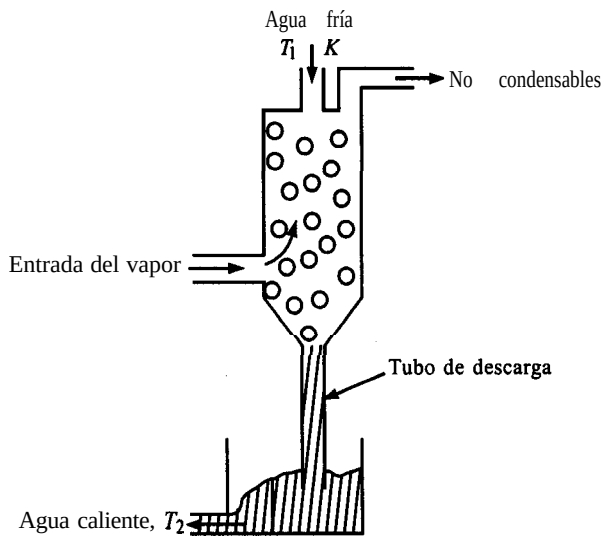


FIGURA 8.6-l. *Diagrama esquemático del condensador barométrico.*

El consumo de agua se estima por medio de un simple balance de calor del condensador barométrico. Si el flujo de vapor al condensador es V kg/h a temperatura T_S y el flujo de agua es W kg/h con temperatura de entrada de T_1 y una temperatura de salida de T_2, la deducción es la siguiente:

$$VH_S + Wc_p(T_1 - 273.2) = (V + W)c_p(T_2 - 273.2) \qquad \textbf{(8.6-l)}$$

donde H_S es la entalpía obtenida de las tablas de vapor a T_S K y la presión de la corriente de vapor. Resolviendo,

$$\frac{W}{V} = \frac{\text{kg agua}}{\text{kg vapor}} = \frac{H_S - c_p(T_2 - 273.2)}{c_p(T_2 - T_1)} \qquad (8.6\text{-}2)$$

Los gases no condensables pueden eliminarse del condensador con una bomba de vacío mecánica o un eyector de chorro de vapor de agua. El vapor de agua a alta presión que se alimenta al eyector entra a gran velocidad por una tobera y arrastra los gases no condensables del espacio sometido al vacío.

Otro tipo de condensador.de contacto directo es el barométrico de chorro. Varios chorros de agua a alta velocidad actúan no sólo como condensadores del vapor, sino también como medio de arrastre de los gases no condensables a través del tubo de descarga. Los condensadores de chorro requieren más agua que los de tipo barométrico común y son más difíciles de regular a velocidades de vapor bajas.

8.7 EVAPORACIÓN DE MATERIALES BIOLÓGICOS

8.7A Introducción y propiedades de los materiales biológicos

La evaporación de varios materiales biológicos suele diferir de la de materiales inorgánicos como NaCl y NaOH, así como de los materiales orgánicos como el etanol y el ácido acético. Los materiales biológicos como los productos farmacéuticos, la leche, los jugos cítricos y los extractos vegetales, suelen ser muy sensibles al calor y con frecuencia contienen partículas muy finas suspendidas en solución. Además, y debido a los problemas de crecimiento bacteriano, el equipo debe diseñarse de tal manera que pueda limpiarse con facilidad. Muchos materiales biológicos en disolución presentan elevación del punto de ebullición muy baja al concentrarse. Esto se debe a que los sólidos suspendidos en forma de partículas muy finas y los solutos disueltos de alto peso molecular, contribuyen muy poco a esta elevación.

El grado de degradación de los materiales biológicos durante la evaporación esta en función de la temperatura y del tiempo de procesamiento. Para mantener la temperatura baja, la evaporación debe hacerse al vacío, lo que reduce el punto de ebullición de la disolución. Para que el tiempo de contacto sea corto, el equipo debe tener un tiempo bajo de retención (tiempo de contacto) del material que se está evaporando. A continuación se señalan los tipos de equipo usados y algunos de los materiales que se procesan en ellos. (En la sección 8.2 se describen los detalles de estas unidades.)

1. Evaporador vertical de tubos largos. Leche condensada.
2. Evaporador de caída de película. Jugos de frutas.
3. Evaporador de película agitada (película con raspador). Látex de caucho, gelatina, antibióticos, jugos de frutas.
4. Evaporador de ciclo con bomba de calor. Jugos de frutas, leche, productos farmacéuticos.

8.7B Jugos de frutas

En la evaporación de jugos de frutas como el zumo de naranja, los problemas son muy diferentes a los de la evaporación de una sal típica, como el NaCl. Los jugos de frutas son sensibles al calor y su viscosidad aumenta notablemente al concentrar la solución. Además, la materia sólida en suspensión en los jugos de frutas tiende a adherirse a la superficie de calentamiento, causando sobrecalentamientos que conducen a carbonizaciones y deterioro del material (B2).

Para reducir esta tendencia a la adhesión y disminuir el tiempo de residencia, se necesitan velocidades de circulación altas en la superficie de transferencia de calor. Como el material es sensible al calor, también se requiere una temperatura de operación baja. Por tanto, una planta de jugos de frutas concentrados casi siempre usa un evaporador de efecto simple en lugar de unidades múltiples. También se emplea vacío para reducir la temperatura de evaporación.

Las referencias (P 1, C 1) describen un sistema típico para la evaporación de jugos de frutas, basado en el ciclo de una bomba de calor, con amoníaco como fluido de calentamiento. Charm (Cl) describe un proceso de jugos cítricos concentrados y congelados. El proceso utiliza un evaporador múltiple de caída de película. Uno de los principales defectos que puede tener el jugo de naranja es la pérdida de sabor debido a la eliminación de constituyentes volátiles durante la evaporación. Para evitar esto, una porción del jugo de fruta no se introduce al ciclo de evaporación y se mezcla con el concentrado evaporado al final del proceso.

8.7C Soluciones de azúcar

El azúcar (sacarosa) se obtiene principalmente de la cai'ia de azúcar y de la remolacha. El azúcar tiende a formar caramelo cuando se mantiene a temperaturas altas durante largos periodos (B2). La tendencia general consiste en usar evaporadores de circulación natural de tubos cortos. En el proceso de evaporación de soluciones de azúcar, la solución transparente a concentración de 10 – 13% Brix (10 – 13% en peso) se evapora hasta 40 – 60" Brix (K1, Sl).

La alimentación se precalienta con el vapor de agua sobrante del evaporador y en el sistema más típico, se introduce a uno de seis efectos con alimentación hacia adelante. El primer efecto opera a una presión en el espacio del vapor del evaporador de unos 207 kPa (30 psia) [(121.1 °C (250 "F) de temperatura de saturación] y el último efecto opera al vacío a unos 24 kPa (63.9 °C de temperatura de saturación.) En el ejemplo 8.5-l se ilustra la baja elevación del punto de ebullición de las soluciones de azúcar y sus capacidades caloríficas.

8.7D Licores de desperdicio de la pulpa del papel

En la fabricación de pulpa de papel con el proceso de sulfato, los trozos de madera se digieren o cocinan y después de lavar la pulpa, queda un licor negro. Esta solución que, contiene principalmente carbonato de sodio y compuestos orgánicos de azufre, se concentra en un sistema de seis efectos (K1, Sl).

8.8. EVAPORACIÓN MEDIANTE RECOMPRESIÓN DE VAPOR

8.8A Introducción

En el evaporador de un solo efecto, el vapor que proviene de la unidad generalmente se condensa y se descarta. En el evaporador de efecto múltiple, la presión de cada efecto sucesivo va disminuyen-

do, de modo que el punto de ebullición del líquido desciende en cada efecto. Por consiguiente, existe una diferencia de temperatura creada para que el vapor de un efecto se condense en el efecto siguiente y haga hervir el líquido para formar vapor.

En el evaporador de recompresión de vapor de un solo efecto (recompresión llamada a veces compresión de vapor) el vapor se comprime hasta que aumenta su temperatura de condensación o de saturación. Este vapor comprimido se devuelve al calentador de la caja de vapor y se condensa, de modo que el vapor se forma en el evaporador (B5, W 1, Zl). De esta manera, el calor latente del vapor se utiliza y no se desperdicia. Los dos tipos de unidades de recompresión de vapor son la de tipo mecánico y la de tipo térmico.

8.8B Evaporador mecánico de recompresión de vapor

En un evaporador mecánico de recompresión de vapor se utiliza un evaporador convencional de un solo efecto, semejante al de la figura 8.2-2 y que se muestra en la figura 8.8-l. La alimentación fría se precalienta por intercambio con el producto líquido caliente de la salida y luego fluye hacia la unidad. El vapor que se eleva no va hacia un condensador, sino que se envía a un compresor centrífugo o de desplazamiento positivo impulsado por un motor eléctrico o por vapor. Este vapor comprimido se envía de nuevo al intercambiador de calor o caja de vapor. El vapor comprimido se condensa a una mayor temperatura que el punto de ebullición del líquido caliente en el efecto, y se establece una diferencia de temperatura. De nuevo se genera vapor y el ciclo se repite.

En ocasiones es necesario agregar una pequeña cantidad de vapor de apoyo a la línea de vapor antes del compresor (B5, K2). Además, puede añadirse una pequeña cantidad, de condensado al vapor comprimido para eliminar cualquier sobrecalentamiento que pudiera haber.

Las unidades de recompresión de vapor generalmente operan con diferencias de temperaturas óptimas bajas de 5 a 10 “C, por lo que se necesitan grandes áreas de transferencia de calor. Estas unidades suelen ser más costosas que las unidades de efecto múltiple debido a la gran área y al costo del compresor y la unidad impulsora, que son relativamente caros. La ventaja principal de las unidades de recompresión de vapor son los menores costos de energía. Usando el equivalente de vapor de la potencia para impulsar el compresor, la economía de vapor equivale a un evaporador de efectos múltiples de hasta 10 o mas unidades (Z1).

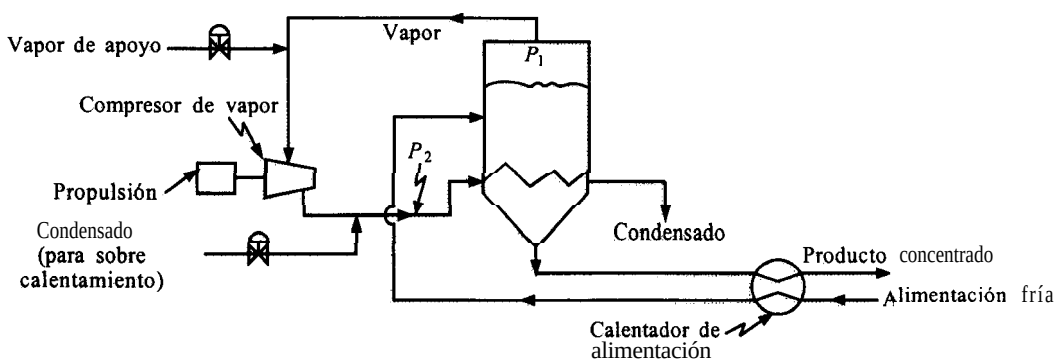


FIGURA 8.8-1. ***Flujo de proceso simplificado para un evaporador mecánico de recompresión de vapor.***

Algunas aplicaciones comunes de las unidades mecánicas de recompresión de vapor son la evaporación del agua de mar para obtener agua destilada, la evaporación del licor negro kraft en la industria del papel (L2), la evaporación de materiales sensibles al calor, como los jugos de frutas y la cristalización de sales que tienen curvas de solubilidad inversas, en las que la solubilidad disminuye al aumentar la temperatura (K2, M3).

Los evaporadores de película descendente son muy adecuados para los sistemas de recompresión de vapor (W1), dado que operan con valores bajos de diferencia de temperatura y tienen muy poco líquido del arrastre que pueda causar problemas en el compresor. La recompresión de vapor se ha utilizado en torres de destilación donde el vapor que asciende se recomprime y se usa en el recalentador como medio para calentar (M2).

8.8C Evaporador térmico de recompresión de vapor

Un chorro de vapor también se puede usar para comprimir el vapor en una unidad térmica de recompresión de vapor. Las desventajas principales son la baja eficiencia del chorro de vapor, que hace necesaria la eliminación de este exceso de calor, y la poca flexibilidad a los cambios en las variables de proceso (M3). Los chorros de vapor son más económicos y más durables que los compresores mecánicos y manejan con más facilidad grandes volúmenes de vapor a baja presión.

PROBLEMAS

8.4-1. ***Coeficiente de transferencia de calor en un evaporador de efecto simple.*** Una alimentación de 4535 kg/h de solución de sal al 2.0% en peso a 3 ll K, entra continuamente a un evaporador de efecto simple para concentrarse a 3.0%. La evaporación se lleva a cabo a presión atmosférica y el área del evaporador es 69.7 m^2. El calentamiento se logra con vapor de agua saturado a 383.2 K. Puesto que la solución es diluida, se puede suponer que tiene el mismo punto de ebullición del agua. Se estima que la capacidad calorífica de la alimentación es c_p = 4.10 kJ/kg · K. Calcule las cantidades de vapor y de líquido producidas y el coeficiente total de transferencia de calor U.

Respuesta: U = **1823** W/m^2 · K

8.4-2. Efectos de una alimentación más rápida en el evaporador. Con los mismos valores del área, U, presión del vapor de agua, presión del evaporador y temperatura de la alimentación del problema 8.4- 1, calcule las cantidades de líquido y de vapor que salen y la concentración del líquido de salida cuando la velocidad de alimentación se aumenta a 6804 kg/h.

Respuesta: V = 1256 kg/h, L = *5548* kg/h, x_L = 2.45%

8.4-3. Efecto de la presión del evaporador sobre la capacidad y la composición del producto. Repita el cálculo del ejemplo 8.4-1, esta vez con una presión del evaporador de 41.4 kPa en lugar de 101.32 kPa abs. Use los mismos valores de presión del vapor de agua, área A y coeficiente de transferencia de calor U.

a) Determine la nueva capacidad o velocidad de alimentación en estas condiciones. La composición del producto líquido es la misma de antes.

b) Determine la nueva composición del producto al aumentar la velocidad de alimentación a 18144 kg/h.

8.4-4. Producción de agua destilada. Se emplea un evaporador con área de 83.6 m^2 y U = 2270 W/m^2 · K para obtener agua destilada que se alimenta a una caldera. Al evaporador se introduce agua municipal que tiene 400 ppm de sólidos disueltos a 15.6 °C y la unidad opera

a 1 atm abs de presión. Se dispone de vapor de agua saturado a 115.6 °C (25 lb/pulg² abs). Calcule la cantidad de agua destilada que se produce por hora si el líquido de salida contiene 800 ppm de sólidos.

8.4-5. EPE de soluciones de NaOH. Determine el punto de ebullición de la solución y la EPE en los siguientes casos:

a) Una solución de NaOH al 30% que hierve en un evaporador a presión de 172.4 kPa (25 psia).

b) Una solución de NaOH al 60% que hierve en un evaporador a presión de 3.45 kPa (0.50 psia).

Respuesta: a) Punto de ebullición = 130.6 °C, EPE = 15 °C

8.4-6. EPE de solutos biológicos en ***disolución.*** Determine el EPE de las siguientes soluciones de solutos biológicos en agua. Use la figura de (P1) de las páginas ll a 3 1.

a) Una solución al 30% en peso de ácido cítrico en agua, que hierve a 220 °F (104.4 °C).

b) Una solución al 40% en peso de sacarosa en agua, que hierve a 220 °F (104.4 "C).

Respuesta: a) EPE = 2.2 °F (1.22 "C)

8.4-7. Efecto de la temperatura de alimentación en la evaporación de una solución de NaOH. Un evaporador de efecto simple concentra una alimentación de 9072 kg/h de una solución de NaOH al 10% en peso en agua para obtener un producto con 50% de sólidos. La presión del vapor de agua saturado es 42 kPa (manométricas) y la presión en el evaporador es 20 kPa (abs). El coeficiente total de transferencia de calor es 1988 W/m² · K. Calcule la cantidad de vapor de agua que se usa, la economía de vapor en kg vaporizados/kg vapor de agua y el área para las siguientes condiciones de alimentación:

a) Temperatura de alimentación a 288.8 K (15.6 "C).

b) Temperatura de alimentación a 322.1 K (48.9 °C).

Respuesta: a) S = 8959 kg/h de vapor de agua, A = 295.4 m²

8.4-8. Coeficiente de transferencia de calor para evaporar NaOH. Para concentrar 4536 kg/h de una solución de NaOH al 10% en peso hasta el 20% en peso, se usa un evaporador de efecto simple con área de 37.6 m². La alimentación entra a 21.1 °C (294.3 K). Se usa vapor de agua saturado a 110 °C (383.2 K) como medio de calentamiento y la presión en el evaporador es de 5 1.7 kPa. Calcule los kg/h de vapor de agua utilizado y el coeficiente total de transferencia de calor.

8.4-9. Producción en un evaporador de efecto simple. Un evaporador concentra F kg/h a 3 ll K de una disolución de NaOH al 20% en peso hasta 50% en peso. El vapor de agua saturado para el calentamiento está a 399.3 K. La presión en el evaporador es de 13.3 kPa abs. El coeficiente total es 1420 W/m² · K y el área es 86.4 m². Calcule la velocidad de alimentación F del evaporador.

Respuesta: F = 9072 kg/h

8.440. ***Área superficial y consumo de vapor de agua en un evaporador.*** Un evaporador de efecto simple concentra una alimentación de solución de coloides orgánicos desde 5 hasta 50% en peso. La solución tiene una elevación del punto de ebullición despreciable. La capacidad calorífica de la alimentación es c_p = 4.06 kJ/kg · K (0.97 btu/lb$_m$. "F) y ésta entra a 15.6 °C (60 °F). Se dispone de vapor de agua saturado a 101.32 kPa y la presión en el evaporador es de 15.3 kPa. Se desea evaporar un total de 4536 kg/h (10000 lb$_m$/h) de agua. El coeficiente total de transferencia de calor es 1988 W/m² · K (350 btu/h · pie² · "F). ¿Qué área superficial en metros cuadrados y que consumo de vapor de agua se requieren?

8.441. ***Evaporación de jugo de tomate al vacío.*** Se concentra del jugo de tomate con 12% de sólidos en peso hasta 25% de sólidos en un evaporador de tipo película. La temperatura máxima permisible para el jugo de tomate es 135 °F, que será la temperatura del producto. (La alimentación entra a 100 °F.) Se usa vapor de agua saturado a 25 lb/pulg² abs como medio

de calentamiento. El coeficiente total de transferencia de calor U es 600 btu/h . pie* . °F y el área A es 50 pies^2. Se estima que la capacidad calorífica de la alimentación c_p es 0.95 btu/ lb_m . "F. Desprecie cualquier elevación del punto de ebullición que exista. Calcule la velocidad de alimentación del jugo de tomate al evaporador.

8.4-12. ***Concentración de una solución de azúcar de cuba.*** Se emplea un evaporador de efecto simple para concentrar. una alimentación de 10000 lb_m/h de una solución de azúcar de caña a 80 °F que tiene 15 °Brix (grado Brix equivale a porcentaje de azúcar en peso) hasta 30" Brix para usarla en un producto alimenticio. Se dispone de vapor saturado a 240 °F para el calentamiento. El evaporador esta a 1 atm abs de presión. El valor total de U es 350 btu/h . pie^2 . °F y la capacidad calorífica de la alimentación es c_P = 0.91 btu/lb_m · "F. La elevación del punto de ebullición puede estimarse con base en el ejemplo 8.5-1. Considere que el calor de disolución es despreciable. Calcule el área de evaporador requerida y el consumo de vapor de agua por hora.

Respuesta: EPE = 2.0 °F (1.1 °C), A = 667 pies^2 (62.0 m^2)

8.5-l. ***Puntos de ebullición en un evaporador de efecto triple.*** Una solución con EPE despreciable se evapora en una unidad de efecto triple mediante vapor de agua saturado a 12 1.1 °C (394.3 K). La presión del vapor en el último efecto es 25.6 kPa abs. Los coeficientes de transferencia de calor son U_1 = 2840, U_2 = 1988 y U_3 = 1420 W/m^2 · K, mientras las áreas son iguales. Estime el punto de ebullición en cada efecto.

Respuesta.: T_1 = 108.6 °C (381.8 K)

8.5-2. Evaporación de una solución de azúcar en un evuporador de efecto múltiple. Un evaporador de efecto tiple con alimentación hacia adelante esta evaporando una solución de azúcar con EPE despreciable {menos de 1 .O K, que no se tomará en cuenta) desde 5% de sólidos en peso hasta 25% de sólidos. Se usa vapor de agua saturado a 205 kPa. La presión en el espacio de vapor del tercer efecto es 13.65 kPa. La velocidad de alimentación es 22680 kg/h y la temperatura, 299.9 K. La capacidad calorífica del líquido es c_p = 4.19 – 2.35 x, y c_P esta en kJ/kg · K y x es fracción en peso (K1). Los coeficientes de transferencia de calor son U_1 = 3123, U_2 = 1987 y U_3 = ll 36 W/m^2 · K. Calcule el área superficial de cada efecto cuando todos ellos tienen la misma área, así como la velocidad de suministro de vapor de agua.

Respuesta: Área A = 99.1 m^2, suministro de vapor de agua S = 8972 kg/h

8.5-3. Evaporación en evaporadores de efecto doble con alimentación en retroceso. Una alimentación que contiene 2% en peso de solidos orgánicos disueltos en agua se introduce a un evaporador de efecto doble con alimentación en retroceso. La alimentación entra a 100 °F y se concentra hasta 25% de sólidos. Tanto la elevación del punto de ebullición como el calor de disolución pueden despreciarse. Cada evaporador tiene un área de 1000 pies^2 y los coeficientes de transferencia de calor son U_1 = 500 y U_2 = 700 btu/h . pie^2 · °F. La alimentación se introduce al efecto 2 y en el efecto 1 se alimenta vapor de agua a 100 lb/pulg^2 abs. La presión en el espacio del vapor del efecto 2 es 0.98 lb/pulg^2 abs. Suponga que la capacidad calorífica de todos los líquidos es igual a la del agua líquida. Calcule la velocidad de alimentación F y la velocidad del producto L_1 de una solución que contiene 25% de sólidos. (Sugerencia: Suponga una velocidad de alimentación de, por ejemplo, F = 1000 lb_m/h. Calcule el área. Después calcule la alimentación real multiplicando 1000 por 1000/área calculada.)

Respuesta: F = 133800 lb_m/h (60 691 kg/h), L_1 = 10700 lb_m/h (4853 kg/h).

8.5-4. ***Concentración de una solución de NaOH en un evaporador de efecto triple.*** Se está usando un evaporador de efecto triple con circulación forzada y alimentación hacia adelante para concentrar una solución de NaOH al 10% en peso y 37.8 °C hasta 50%. El vapor de agua

empleado entra a 58.6 kPa man. La presión absoluta en el espacio de vapor del tercer efecto es 6.76 kPa. La velocidad de alimentación es 13608 kg/h. Los coeficientes de transferencia de calor son $U_1 = 6246$, $U_2 = 3407$ y $U_3 = 2271$ W/m^2 · K. Todos los efectos tienen la misma área. Calcule el área superficial y el consumo de vapor de agua.

Respuesta: $A = 97.3$ m^2, $S = 5284$ kg vapork

8.5-5. Evaporador de efecto triple con alimentación inversa. Una alimentación de 20410 kg/h de una solución de NaOH al 10% en peso a 48.9 °C se concentra en un evaporador de alimentación inversa de efecto triple para producir una solución al 50%. Se alimenta vapor saturado a 178.3 °C al primer evaporador y la presión en el tercer efecto es 10.34 kPa absolutos. El coeficiente de transferencia de calor para cada efecto se considera de 2840 W/m^2 . K. Calcule el área de transferencia de calor y la cantidad de consumo de vapor.

8.5-6. Evaporación de una solución de azúcar en un evaporador de doble efecto. Un evaporador de doble efecto con alimentación inversa se utiliza para concentrar 4536 kg/h de una solución de azúcar al 10% en peso al 50%. La alimentación entra al segundo efecto a 37.8 “C. En el primer efecto entra vapor saturado a 115.6 °C y el vapor de este efecto se usa para calentar el segundo efecto. La presión absoluta en el segundo efecto es de 13.65 kPa absolutos. Los coeficientes globales son $U_1 = 2270$ y $U_2 = 1705$ W/m^2 . K. Las áreas de calentamiento para ambos efectos son iguales. Utilice los datos de elevación del punto de ebullición y de la capacidad calorífica del ejemplo 8.5-1. Calcule el área y el consumo de vapor.

8.6-l. ***Consumo de agua y presión en un condensador barométrico.*** La concentración de la solución de NaOH que sale del tercer efecto de un evaporador de efecto triple es de 50% en peso. El gasto de vapor que sale es de 5670 kg/h y este vapor va hacia un condensador barométrico. El agua de descarga del condensador sale a 40.5 “C. Suponiendo que el condensador mantiene un vacío en el tercer efecto, que corresponde a una presión de vapor saturado de 2.78 °C por encima de 40.5 °C, calcule la presión en el tercer efecto y el flujo de agua de enfriamiento hacia el condensador. El agua de enfriamiento entra a 29.5 “C. (Nota. El vapor que sale del evaporador debe estar sobrecalentado debido a la elevación del punto de ebullición.)

Respuesta: Presión = 8.80 kPa abs, absolutos, $W = 306200$ kg agua/h

REFERENCIAS

(B1) BADGER, W. L. y BANCHERO, J. T. *Introduction to Chemical Engineering,* Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1955

(B2) BLAKEBROUGH, *N. Biochemical and Biological Engineering Science,* Vol. 2, Nueva York: Academic Press, Inc., 1968.

(B3) BADGER, W. L. y MCCABE, W. L. *Elements of Chemical Engineering,* 2a. ed., Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1936.

(B4) BROWN, *G. G.,* et al. *Unit Operations,* Nueva York: John Wiley & Sons, Inc., 1950.

(B5) BEESLEY, A. H. y RHINESMITH, R. D. *Chem. Eng. Progr.,* **76(8),** *37* (1980).

(Cl) CHARM, *S.* E. *The Fundamentals of Food Engineering,* 2a. ed., Westport, Conn.: Avi Publishing Co., Inc., 1971

(K1) KERN, D. *Q. Process Heat Transfer,* Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1950.

(K2) KING, R. J. *Chem. Eng. Progr.,* **80(7),** *63 (1984).*

(Ll) LINDSEY, E. *Chem. Eng.,* **60(4),** *227* (1953).

(L2) LOGSDON, J. D. *Chem. Eng. Progr.,* **79(9),** *36* (1983).

(M1) MCCABE, W. L. *Trans. A.I.Ch.E.,* **31,** 129 (1935).

(M2) MEILI, A. y STUECHELI, A. *Chem. Eng.,* **94(Feb. 16),** 133 (1987).

(M3) MEHRA, D. K. *Chem. Eng.,* **93(Feb. 3),** 56 (1986).
(P1) PERRY, R. H. y CHILTON, *C.* H. *Chemical Engineers' Handbook,* 5a. ed., Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1973.
(P2) PERRY, R. H. y GREEN, D. *Perry's Chemical Engineers' Handbook,* 6a. ed., Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1984.
(S1) SHREVE, R. N. y BRINK, J. A., Jr. *Chemical Process Industries,* 4a. ed., Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1977.
(W1) WEIMER, L. D., DOLF, H. R. y AUSTIN, D. A. *Chem. Eng. Progr.,* **76(** 1 **1),** 70 (1980).
(Z1) ZIMMER, A. *Chem. Eng. Progr.,* **76(9),** *37* (1980).

CAPÍTULO 9

Secado de materiales de proceso

9.1 INTRODUCCIÓN Y MÉTODOS DE SECADO

9.1A Objetivos del secado

El estudio del secado que se incluye en este capítulo se refiere a la eliminación de agua de los materiales de proceso y de otras sustancias. El término secado se usa también con referencia a la eliminación de otros líquidos orgánicos, como benceno o disolventes orgánicos, de los materiales sólidos. Muchos de los equipos y métodos de cálculo que se estudiaran para la eliminación de agua, también pueden aplicarse para la eliminación de los líquidos orgánicos.

En general, el secado significa la remoción de cantidades de agua relativamente pequeñas de cierto material. La evaporación se refiere a la eliminación de cantidades de agua bastante grandes; además, ahí el agua se elimina en forma de vapor a su punto de ebullición. En el secado, el agua casi siempre se elimina en forma de vapor con aire.

En algunos casos, el agua se puede eliminar de los materiales sólidos por medios mecánicos, utilizando prensas, centrífugas y otros métodos. Esto resulta más económico que el secado por medios térmicos para la eliminación de agua, que es el tema que se estudiara en este capítulo. El contenido de humedad del producto seco final varia, ya que depende del tipo del producto. La sal seca contiene 0.5% de agua, el carbón un 4% y muchos productos alimenticios, aproximadamente 5%. El secado suele ser la etapa final de los procesos antes del empaque y permite que muchos materiales, como los jabones en polvo y los colorantes, sean más adecuados para su manejo.

El secado o deshidratación de materiales biológicos (en especial los alimentos), se usa también como técnica de preservación. Los microorganismos que provocan la descomposición de los alimentos no pueden crecer y multiplicarse en ausencia de agua. Además, muchas de las enzimas que causan los cambios químicos en alimentos y otros materiales biológicos no pueden funcionar sin agua. Los microorganismos dejan de ser activos cuando el contenido de agua se reduce por debajo del 10% en peso. Sin embargo, generalmente es necesario reducir este contenido de humedad por debajo del 5% en peso en los alimentos, para preservar su sabor y su valor nutritivo. Los alimentos secos pueden almacenarse durante periodos bastante largos.

Algunos materiales biológicos y productos farmacéuticos que no pueden calentarse para secarse de la manera ordinaria, pueden secarse en frío como se analiza en la sección 9.11. Además, en la sección 9.12 se estudia la esterilización de los alimentos y de otros materiales biológicos, que es otro método muy empleado para preservar dichos materiales.

9.1B Métodos generales de secado

Los métodos y procesos de secado se clasifican de diferentes maneras; se dividen en procesos de *lotes,* cuando el material se introduce en el equipo de secado y el proceso se verifica por un periodo; *o continuos,* si el material se añade sin interrupción al equipo de secado y se obtiene material seco con régimen continuo.

Los procesos de secado se clasifican también de acuerdo con las condiciones físicas usadas para adicionar calor y extraer vapor de agua: (1) en la primera categoría, el calor se añade por contacto directo con aire caliente a presión atmosférica, y el vapor de agua formado se elimina por medio del mismo aire; (2) en el secado al vacío, la evaporación del agua se verifica con más rapidez a presiones bajas, y el calor se añade indirectamente por contacto con una pared metálica o por radiación (también pueden usarse bajas temperaturas con vacío para ciertos materiales que se decoloran o se descomponen a temperaturas altas); (3) en la liofilización, el agua se sublima directamente del material congelado.

9.2 EQUIPO PARA SECADO

9.2A Secado en bandejas

En el *secador de bandejas,* que también se llama secador de anaqueles, de gabinete, o de compartimientos, el material, que puede ser un sólido en forma de terrones o una pasta, se esparce uniformemente sobre una bandeja de metal de 10 a 100 mm de profundidad. Un secador de bandejas típico, tal como el que se muestra en la figura 9.2-1, tiene bandejas que se cargan y se descargan de un gabinete.

Un ventilador recircula aire calentado con vapor paralelamente sobre la superficie de las bandejas. También se usa calor eléctrico, en especial cuando el calentamiento es bajo. Más o menos del 10 al 20% del aire que pasa sobre las bandejas es nuevo, y el resto es aire recirculado.

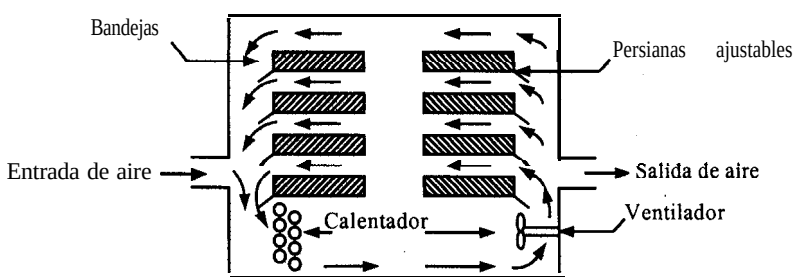


FIGURA 9.2-l. ***Secador de bandejas o anaqueles.***

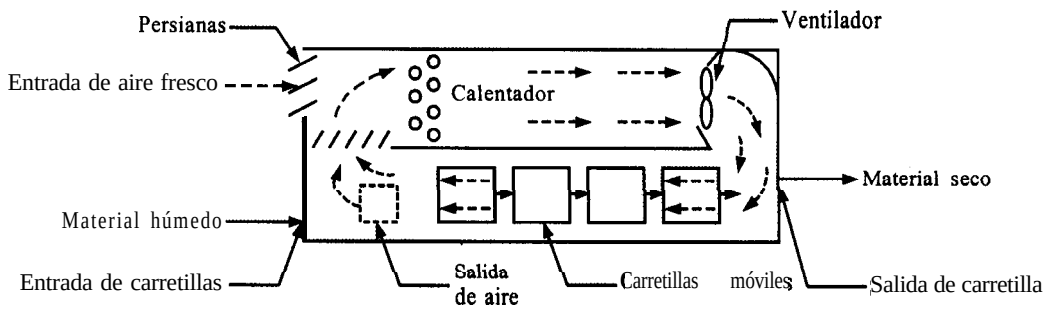
Después del secado, se abre el gabinete y las bandejas se remplazan por otras con más material para secado. Una de las modificaciones de este tipo de secadores es el de las bandejas con carretillas, donde las bandejas se colocan en carretillas rodantes que se introducen al secador. Esto significa un considerable ahorro de tiempo, puesto que las carretillas pueden cargarse y descargarse fuera del secador.

En el caso de materiales granulares, el material se puede colocar sobre bandejas cuyo fondo es un tamiz. Entonces, con este secador de circulación cruzada, el aire pasa por un lecho permeable y se obtienen tiempos de secado más cortos, debido a la mayor área superficial expuesta al aire.

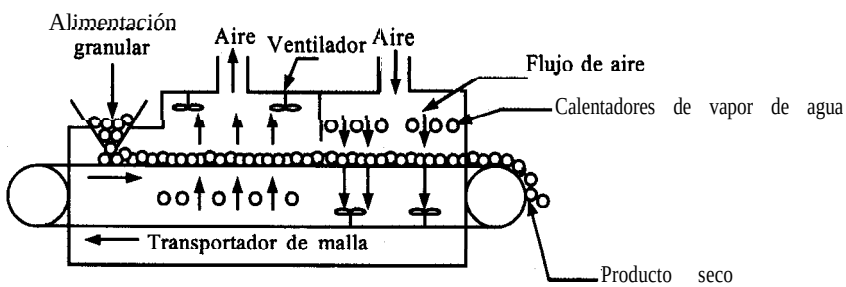
9.2B Secadores indirectos al vacío con anaqueles

Los *secadores al vacío con anaqueles* se calientan indirectamente y son del tipo de lotes, similares a los de las bandejas. Esta clase de secador consta de un gabinete construido de hierro colado o plancha de acero con puertas herméticas, de tal manera que se pueda operar al vacio. Los anaqueles huecos de acero se montan dentro de las cámaras y se conectan en paralelo, con los colectores de vapor de entrada y de salida. Las bandejas que contienen los sólidos mojados se colocan sobre los anaqueles huecos. El calor se conduce a través de las paredes metálicas y por radiación entre los anaqueles. Para operaciones a temperaturas más bajas, se usa circulación de agua caliente en lugar de vapor para suministrar el calor que vaporiza la humedad. Los vapores se colectan en un condensador.

Estos secadores se usan para secar materiales costosos o sensibles a la temperatura, o bien que se oxiden fácilmente. Son muy útiles para manejar materiales con disolventes tóxicos o valiosos.



(a)



(b)

FIGURA 9.2-2. *Secadores continuos de túnel: a) secador de carretillas con flujo de aire a contracorriente, b) secador de banda transportadora con circulación cruzada.*

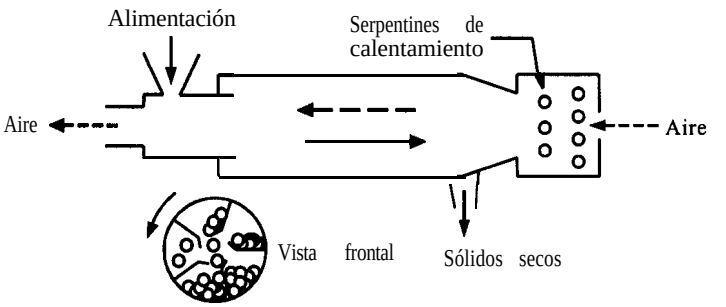


FIGURA 9.2-3. *Diagrama esquemático de un secador rotatorio con calentamiento directo.*

9.2C Secadores continuos de túnel

Los ***secadores*** continuos ***de túnel*** suelen ser compartimentos de bandejas o de carretillas que operan en serie, tal como se muestra en la figura 9.2-2a. Los sólidos se colocan sobre bandejas o en carretillas que se desplazan continuamente por un túnel con gases calientes que pasan sobre la superficie de cada bandeja. El flujo de aire caliente puede ser a contracorriente, en paralelo, o una combinación de ambos. Muchos alimentos se secan por este procedimiento.

Cuando se desea secar partículas sólidas granulares, pueden utilizarse transportadores perforados o de fondo de tamiz, como el de la figura 9.2-2b. Los sólidos granulares húmedos se transportan en forma de una capa que tiene entre 25 y 150 mm de profundidad, sobre una superficie de tamiz o perforada a través de la cual se fuerza el paso de aire caliente, ya sea hacia arriba o hacia abajo. El secador consta de diversas secciones en serie, cada una con un ventilador y serpentines de calentamiento. Un ventilador adicional extrae cierta cantidad de aire hacia la atmósfera. En algunos casos, los materiales en forma de pasta pueden preformarse en cilindros y colocarse sobre el transportador para secarse.

9.2D Secadores rotatorios

Un ***secador rotatorio*** consta de un cilindro hueco que gira por lo general, sobre su eje, con una ligera inclinación hacia la salida. Los sólidos granulares húmedos se alimentan por la parte superior, tal como se muestra en la figura 9.2-3 y se desplazan por el cilindro a medida que éste gira. El calentamiento se lleva a cabo por contacto directo con gases calientes mediante un flujo a contracorriente. En algunos casos, el calentamiento es por contacto indirecto a través de la pared calentada del cilindro.

Las partículas granulares se desplazan hacia adelante con lentitud y una distancia corta antes de caer a través de los gases calientes, como se muestra. Existen muchas otras variaciones del secador rotatorio, que se describen con detalle en la literatura (P1).

9.2E Secadores de tambor

Un ***secador de tambor*** consta de un tambor de metal calentado, como se indica en la figura 9.2-4, en cuyo exterior se evapora una capa delgada de un líquido o una suspensión hasta que se seca. El sólido seco final se le raspa al tambor, que gira lentamente.

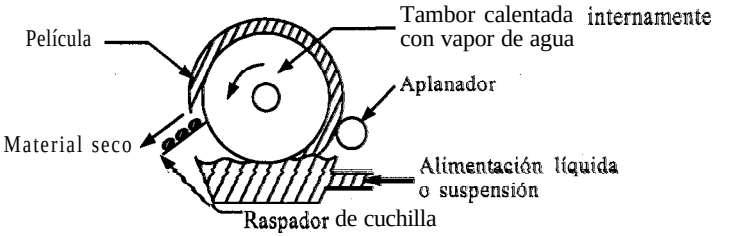


FIGURA 9.2-4. Secador de tambor *rotatorio*

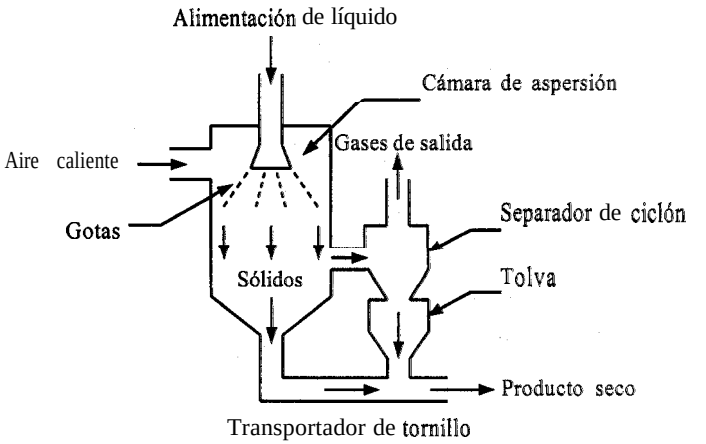


FIGURA 9.2-5. *Diagrama de flujo para una unidad de secado por aspersión.*

Los secadores de tambor son adecuados para procesar suspensiones o pastas de sólidos tinos, así como soluciones verdaderas. El tambor funciona en parte como evaporador y en parte como secador. Otras variaciones del secador de tambor son los tambores roêatorios dobles con alimentación por inmersión, o bien con alimentación superior en el espacio entre los dos tambores. El puré de papa se procesa en secadores de tambor para obtener el material en forma de escamas.

9.2F Secadores por aspersión

En un *secador por aspersión,* un líquido o una suspensión se atomiza o se roela en una corriente de gas caliente para obtener una lluvia de gotas tinas. El agua se evapora de dichas gotas con rapidez, y se obtienen partículas secas de sólido que se separan de la corriente de gas. El flujo de gas y de líquido de la cámara de aspersión puede ser a contracorriente, en paralelo, o una combinación de ambos.

Las gotas tinas se forman al introducir el Liquido en toberas de atomización o discos giratorios de rociado de alta velocidad en el interior de una cámara cilíndrica (Fig. 9.2-5). Es necesario asegurarse de que las gotas o partículas húmedas del sólido no choquen ni se adhieran a las superficies solidas antes de que hayan secado. Por consiguiente, se emplean cámaras bastante grandes. Los solidos secos salen por el fondo de la cámara a través de un transportador de tornillo. Los gases de escape fluyen hacia

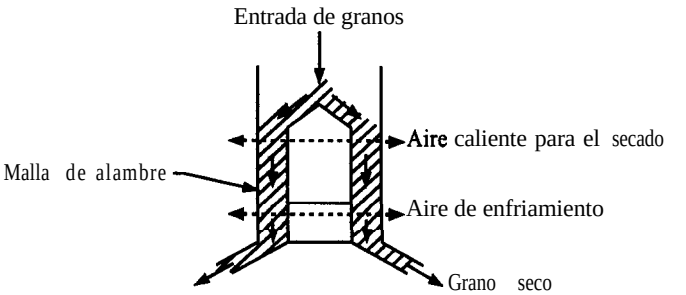


FIGURA 9.2-6. *Secado vertical de flujo continuo para granos.*

un separador de ciclón para filtrar las partículas muy finas. Las partículas que se obtienen son muy ligeras y bastante porosas. La leche en polvo se obtiene mediante. este proceso.

9.2G Secado de cosechas y granos

Los granos de una cosecha contienen aproximadamente de 30 a 35% de humedad y para poder almacenarlos sin problemas durante un año deben secarse hasta un 13% de humedad en peso (H1). En la figura 9.2-6 se muestra un secador de flujo continuo típico. En la tolva de secado, el espesor de la capa de granos, a través de la cual pasa el aire caliente, es 0.5 m o menos. Una corriente de aire (sin calentar) en la sección del fondo, enfría los granos secos antes de la salida. Hall (H1) describe otros tipos de secadores de cosechas y de tolvas de depósitos.

9.3 PRESIÓN DE VAPOR DEL AGUA Y HUMEDAD

9.3A Presión de vapor del agua

1. Introducción. En diversas operaciones unitarias, así como en los procesos de transporte, es necesario efectuar cálculos que se basan en las propiedades de mezclas de vapor de agua y aire. Para estos cálculos se requiere conocer la concentración del vapor del agua en el aire en diversas condiciones de temperatura y presión, las propiedades térmicas de estas mezclas y los cambios que se verifican cuando la mezcla se pone en contacto con agua o con sólidos húmedos para secarla.

La *humidificación* implica la transferencia de agua de una fase líquida a una mezcla gaseosa de aire y vapor de agua. La *deshumidificación* implica una transferencia inversa, esto es, el vapor de agua se transfiere del estado gaseoso al estado líquido. La humidificación y la deshumidificación pueden referirse a mezclas de vapor de otros materiales, como el benceno, pero la gran mayoría de las aplicaciones prácticas se refieren al agua. Para comprender mejor el concepto de humedad, es necesario estudiar primero la presión de vapor del agua.

2. Presión de vapor del agua y estados físicos. El agua tiene tres diferentes estados físicos: hielo sólido, líquido y vapor. Su estado físico depende de la presión y de la temperatura.

La figura 9.3-1 ilustra los diferentes estados físicos del agua y las relaciones presión-temperatura en equilibrio. En la figura aparecen las regiones de los estados sólido, líquido y vapor. A lo largo de la

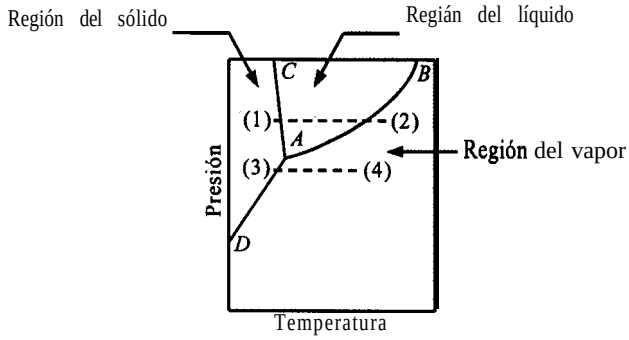


FIGURA 9.3-1 ***Diagrama de fases del agua.***

línea *AB,* coexisten la fase líquida y el vapor. En la línea ***AC,*** las fases que lo hacen son el hielo y la líquida. A lo largo de la línea *AD,* coexisten el hielo y el vapor. Si el hielo en el punto (1) se calienta a presión constante, la temperatura se eleva y la condición física se desplaza horizontalmente. En cuanto la línea cruza ***AC,*** el sólido se funde, y al cruzar *AB,* el líquido se evapora. Al desplazarse del punto (3) al **(4),** el hielo se sublima (se evapora) para formar vapor sin pasar por el estado líquido.

El líquido y el vapor coexisten en equilibrio a lo largo de la línea *AB,* que es la línea de presión de vapor del agua. La ebullición se presenta cuando la presión de vapor del agua es igual a la presión total por encima de su superficie. Por ejemplo, a 100 °C (212 °F) , la presión de vapor del agua es 10 1.3 kPa (1 .O atm) y por tanto, hervirá a 1 atm de presión. A 65.6 °C (150 "F), las tablas de vapor del apéndice A.2 indican que la presión de vapor del agua es 25.7 kPa (3.72 lb/pulg^2 abs). Por consiguiente, el agua también hierve a 25.7 kPa y 65.6 "C.

Si un balde de agua se mantiene a 65.6 °C en una habitación a 101.3 kPa de presión absoluta, la presión de vapor del agua también será 25.7 kPa. Esto ilustra una propiedad muy importante de la presión de vapor del agua, en cuanto a que no la afecta la presencia de un gas inerte como el aire, esto es, la presión de vapor del agua es esencialmente independiente de la presión total del sistema.

9.3B Humedad y diagrama8 o gráfica8 de humedad

1. Definición de humedad. La humedad *H* de una mezcla aire-vapor de agua se define como los kilogramos de vapor de agua por kilogramo de aire seco. Esta definición de la humedad sólo depende de la presión parcial p_A del vapor de agua en el aire y de la presión total *P* (en este capítulo se supondrá siempre igual a 101.325 kPa, 1.0 atm abs o 760 mm de Hg). Si el peso molecular del agua *(A) es* de 18.02 y el del aire es de 28.97, la humedad *H* en kg H_2O/kg aire seco, o en unidades del sistema inglés como lb H_2O/lb aire seco, se obtiene con la siguiente fórmula:

$$H \frac{\text{kg } H_2O}{\text{kg aire seco}} = \frac{p_A \text{ kg mol } H_2O}{P - p_A \text{ kg mol aire}} \times \frac{18.02 \text{ kg } H_2O}{\text{kg mol } H_2O} \times \frac{1}{28.97 \text{ kg aire/kg mol aire}} \tag{9.3-1}$$

$$H = \frac{18.02}{28.97} \frac{p_A}{P - p_A}$$

El aire saturado es aquel en el cual el vapor de agua está en equilibrio con el agua líquida en las condiciones dadas de presión y temperatura. En esta mezcla, la presión parcial del vapor del agua en

la mezcla aire-agua es igual a la presión de vapor p_{AS} del agua pura a la temperatura establecida. Por consiguiente, la humedad de saturación H_S es

$$H_S = \frac{18.02}{28.97}\frac{p_{AS}}{P - p_{AS}} \qquad (9.3\text{-}2)$$

2. Porcentaje de humedad. El porcentaje de humedad H_P se define como 100 multiplicado por la humedad real H del aire, dividida entre la humedad H_S que tendría el aire si estuviera saturado a esa misma temperatura y presión.

$$H_P = 100\,\frac{H}{H_S} \qquad (9.3\text{-}3)$$

3. Porcentaje de humedad relativa. La cantidad de saturación de una mezcla de aire-vapor de agua también puede expresarse como porcentaje de humedad relativa H_R usando presiones parciales.

$$H_R = 100\,\frac{p_A}{p_{AS}} \qquad (9.3\text{-}4)$$

Adviértase que $H_R \neq H_P$, puesto que H_P se expresa en presiones parciales al combinar las ecuaciones (9.3-1), (9.3-2) y (9.3-3) obteniendo

$$H_P = 100\frac{H}{H_S} = (100)\frac{18.02}{28.97}\frac{p_A}{P - p_A}\Big/\frac{18.02}{28.97}\frac{p_{AS}}{P - p_{AS}} = \frac{p_A}{p_{AS}}\frac{P - p_{AS}}{P - p_A}(100) \qquad (9.3\text{-}5)$$

Por supuesto, esto no es igual a la ecuación (9.3-4).

EJEMPLO 9.3-l. Humedad a partir de datos de presión de vapor

El aire de una habitación está a 26.7 °C (80 "F) y la presión es de 101.325 kPa y contiene vapor de agua con una presión parcial p_A = 2.76 kPa. Calcule lo siguiente:

a) Humedad, *H.*
b) Humedad de saturación, H_S, y porcentaje de humedad, H_P.
c) Porcentaje de humedad relativa, H_R.

Solución: Con base en las tablas de vapor a 26.7 °C, la presión de vapor del agua es p_{AS} = 3.50 kPa (0.507 lb/pulg^2 abs). Además, p_A = 2.76 kPa y P = 101.3 kPa (14.7 lb/pulg^2 abs). Para el inciso a), con la ecuación (9.3-1),

$$H = \frac{18.02}{28.97}\frac{p_A}{P - p_A} = \frac{18.02(2.76)}{28.97(101.3 - 2.76)} = 0.01742 \text{ kg } H_2O/\text{kg aire}$$

Para el inciso b), usando la ecuación (9.3-2), la humedad saturada es

$$H_S = \frac{18.02}{28.97}\frac{p_{AS}}{P - p_{AS}} = \frac{18.02(3.50)}{28.97(101.3 - 3.50)} = 0.02226 \text{ kg } H_2O/\text{kg aire}$$

El porcentaje de humedad, a partir de la ecuación (9.3-3) es

$$H_P = 100\,\frac{H}{H_S} = \frac{100(0.01742)}{0.02226} = 78.3\%$$

Para el inciso c), a partir de la ecuación (9.3-4), el porcentaje de humedad relativa es

$$H_R = 100\,\frac{p_A}{p_{AS}}\,\frac{100(2.76)}{3.50} = 78.9\%$$

4. Punto de rocío de una mezcla de aire y vapor de agua. La temperatura a la cual cierta mezcla de aire y vapor de agua esta saturada se llama *temperatura de punto de rocío,* o simplemente *punto de rocío.* Por ejemplo, a 26.7 °C (80 °F), la presión de vapor de saturación del agua es p_{AS} = 3.50 kPa (0.507 lb/pulg² abs). Por consiguiente, el punto de rocío de una mezcla que contiene vapor de agua con una presión parcial de 3.50 kPa es 26.7 "C. Si una mezcla de aire y vapor de agua está a 37.8 °C (a la cual se le suele llamar temperatura de bulbo seco, puesto que se trata de la temperatura que indicaría para esta mezcla el bulbo seco de un termómetro) y contiene vapor de agua de p_A = 3.50 kPa, la mezcla no estaría saturada. Al enfriar a 26.7 "C, el aire estaría saturado, esto es, alcanzaría su punto de rocío. Al seguir enfriando, parte del vapor de agua se condensaría, puesto que la presión parcial no puede ser mayor que la presión de vapor de saturación.

5. *Calor húmedo en una mezcla de aire y vapor de agua.* El calor húmedo c_S es la cantidad de calor en J (o kJ) requerido para elevar la temperatura de un kilogramo de aire seco más el vapor de agua presente en 1 K o 1 "C. Las capacidades caloríficas del aire y el vapor de agua se puede suponer constantes en el intervalo normal de temperaturas e iguales a 1.005 kJ/kg aire seco · K y 1.88 kJ/kg de vapor de agua . K, respectivamente. Por consiguiente, para unidades SI y del sistema inglés.

$$\begin{cases} c_S \text{ kJ/kg aire seco} \cdot \text{K} = 1.005 + 1.88\,H & \text{(SI)} \\ c_S \text{ btu/lb}_m \text{ aire seco} \cdot {}^\circ\text{F} = 0.24 + 0.45\,H & \text{(Unidades del sistema inglés)} \end{cases} \qquad (9.3\text{-}6)$$

[En algunos casos, c_S se expresa como $(1.005 + 1.88\,H)\,10^3$ J/kg . K.]

6. *Volumen húmedo de una mezcla de aire y vapor de agua.* El volumen húmedo v_H es el volumen total en metros cúbicos de 1 kg de aire seco más el vapor que contiene a 101.325 kPa (1.0 atm) abs de presión y a la temperatura del gas. Usando la ley de los gases ideales,

$$\begin{cases} v_H \text{ m}^3\text{/kg aire seco} = \dfrac{22.41}{273}\,T\,\text{K}\left(\dfrac{1}{28.97} + \dfrac{1}{18.02}\,H\right) \\ \qquad = (2.83 \times 10^{-3} + 4.56 \times 10^{-3}\,H)\,T\,\text{K} \end{cases} \qquad (9.3\text{-}7)$$

$$\begin{cases} v_H \text{ pies}^3\text{/lb}_m \text{ aire seco} = \dfrac{359}{492}\,T\,{}^\circ\text{R}\left(\dfrac{1}{28.97} + \dfrac{1}{18.02}\,H\right) \\ \qquad = (0.0252 + 0.0405\,H)\,T\,{}^\circ\text{R} \end{cases}$$

Para una mezcla saturada de aire y vapor de agua, $H = H_S$, y v_H es el volumen saturado.

7. Entalpía total de una mezcla de aire y vapor de agua, La entalpía total de 1 kg de aire más su vapor de agua es H_y J/kg o kJ/kg de aire seco. Si T_0 es la temperatura base seleccionada para ambos componentes, la entalpía total es el calor sensible de la mezcla aire-vapor de agua más el calor latente λ_0 en J/kg o kJ/kg de vapor de agua, del vapor de agua a T_0. [Obsérvese que $(T - T_0)$ °C = $(T - T_0)$ K y que estas entalpías se refieren al agua líquida.]

$$\begin{cases} H_y \text{ kJ/kg aire seco} = c_S(T - T_0) + H\lambda_0 = (1.005 + 1.88H)(T \quad T_0\ ^\circ\text{C}) + H\lambda_0 \\ H_y \text{ btu/lb}_\text{m} \text{ aire seco} = (0.24 + 0.45H)(T - T_0\ ^\circ\text{F}) + H\lambda_0 \end{cases} \tag{9.3-8}$$

Si la entalpía total se refiere a una temperatura base T_0 de 0 °C (32 °F), la ecuación para H_y se convierte en

$$\begin{cases} H_y \text{ kJ/kg aire seco} = (1.005 + 1.88\ H)\ (T\ ^\circ\text{C} - 0) + 2501.4\ H & \text{(SI)} \\ H_y \text{ btu/lb}_\text{m} \text{ aire seco} = (0.24 + 0.45\ H)\ (T\ ^\circ\text{F} - 32) + 1075.4\ H & \text{(Unidades del sistema inglés)} \end{cases} \tag{9.3-9}$$

8. Gráfica de humedad para mezclas de aire-vapor de agua. La gráfica de humedad de la figura 9.3-2 representa una gráfica muy conveniente de las propiedades de las mezclas de aire y vapor de agua a 1.0 atm abs de presión. En esta figura se grafica la humedad H en función de la temperatura real de la mezcla de aire y vapor de agua (temperatura de bulbo seco).

La curva señalada como 100% y que corre hacia arriba y a la derecha, proporciona la humedad de saturación H_S en función de la temperatura. En el ejemplo 9.3-l se calculó, para 26.7 °C una humedad de H_S = 0.02226 kg H_2O/kg. Graficando este punto de 26.7 °C (80 °F) y H_S = 0.02226 en la figura 9.3-2, queda localizado en la línea saturada de 100%.

Cualquier punto por debajo de la línea de saturación representa una mezcla no saturada de aire y vapor de agua. Las líneas curvas por debajo de la línea de saturación de 100% que corren hacia arriba y a la derecha, representan a las mezclas no saturadas con un porcentaje definido de humedad H_P. Al ir hacia abajo verticalmente desde la línea de saturación a cierta temperatura, la línea entre la de saturación 100% y la humedad H cero (la horizontal de la parte inferior) se divide de manera uniforme en 10 incrementos de 10% cada uno.

Todas las líneas de humedad H_P en porcentaje que se han mencionado, así como la línea de humedad de saturación H_S, se pueden calcular con base en los datos de presión de vapor de agua.

EJEMPLO 9.3-2. Uso de la gráfica de humedad

El aire de entrada a un secador tiene una temperatura (temperatura de bulbo seco) de 60 °C (140 "F) y un punto de rocío de 26.7 °C (80 "F). Usando la gráfica de humedad determine la humedad real H, el porcentaje de humedad H_p, el calor húmedo c_S y el volumen húmedo v_H en unidades SI e inglesas.

Solución: El punto de rocío de 26.7 °C es la temperatura cuando la mezcla considerada tiene un 100% de saturación. Empezando en 26.7 °C (Fig. 9.3-2) y trazando una vertical que corte a la línea de 100% de humedad, puede leerse una humedad H = *0.0225* kg H_2O/ kg de aire seco. Esta es la humedad real del airea 60 "C. Expresado de otra forma, si se enfria aire de 60 °C con una humedad H = 0.0225, su punto de rocío será 26.7 "C. En unidades del sistema inglés, H = 0.0225 lb H_2O/lb de aire seco.

Localizando en la gráfica este punto de H = 0.0225 y t = 60 °C, el porcentaje de humedad H_P resulta ser 14%, procediendo con una interpolación vertical entre las líneas de 10 y 20%.

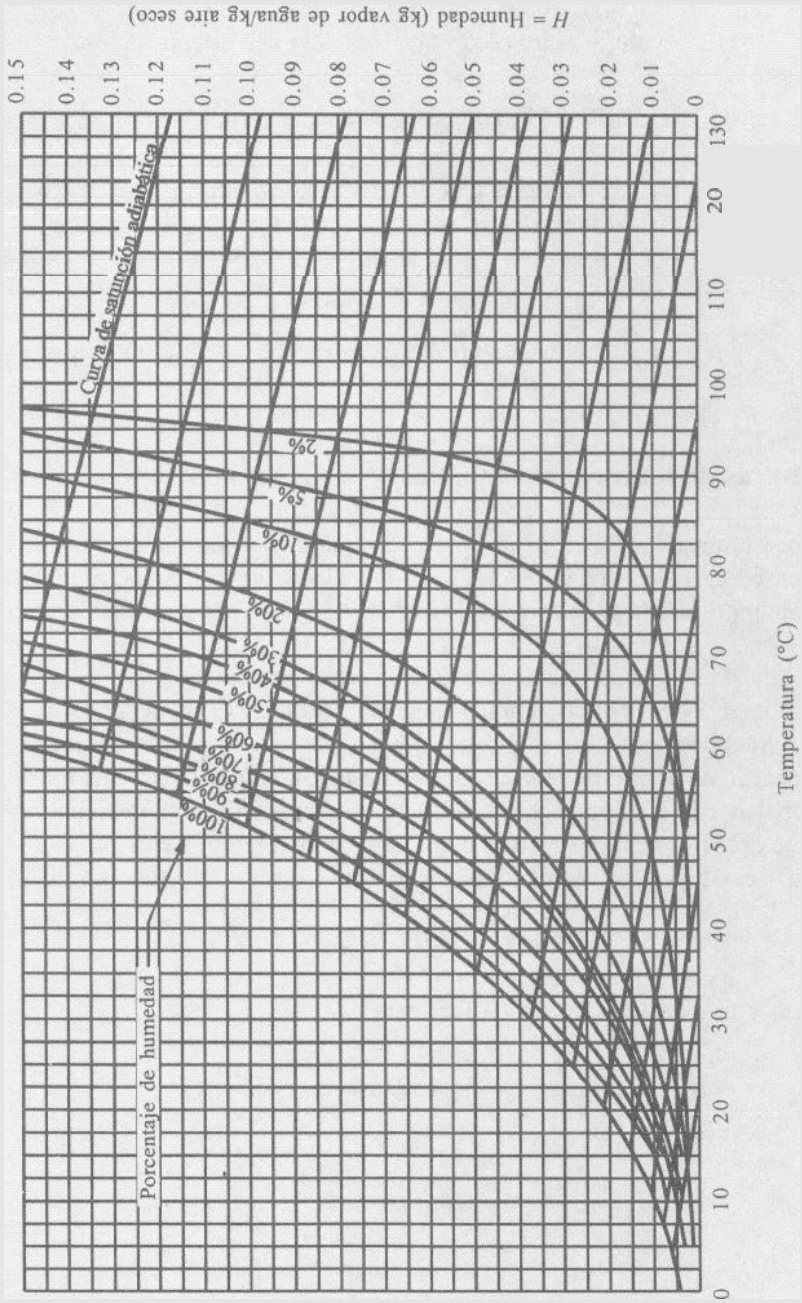


FIGURA 9.3-2. *Gráfica de humedad para* **mezclas** *de aire y vapor de agua a una presión total de 101.325 kPa (760 mm de Hg). (Tomado de R.E. Treybal, Mass-Transfer Operations, 3a. ed., Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1980. Reproducida con autorización.)*

El calor húmedo para $H = 0.0225$, calculado con la ecuación (9.3-6) es,

$$c_S = 1.005 + 1.88(0.0225)$$
$$= 1.047 \text{ kJ/kg aire seco . K o } 1.047 \times 10^3 \text{ J/kg . K}$$
$$c_S = 0.24 + 0.45\ (0.0225)$$
$$= 0.250 \text{ btu/lb}_m \text{ aire seco . °F (Unidades del sistema inglés)}$$

El volumen húmedo a 60 °C (140 °F) con base en la ecuación (9.3-7) es

$$v_H = (2.83 \times 10^{-3} + 4.56 \times 10^{-3} \times 0.0225)(60 + 273)$$
$$= 0.977 \text{ m}^3\text{/kg aire seco}$$

En unidades del sistema inglés,

$$v_H = (0.0252 + 0.0405 \times 0.\ 0225)(460 + 140) = 15.67 \text{ pie}^3\text{/lb}_m \text{ aire seco}$$

9.3C Temperaturas de saturación adiabática

Considérese el proceso que se muestra en la figura 9.3-3, donde la mezcla gaseosa de aire y vapor de agua se pone en contacto con una pulverización o rocío de agua líquida. El gas sale con una humedad y temperatura diferentes y el proceso es adiabático. El agua se recircula, añadiendo algo de agua de reposición.

El agua de recirculación alcanza una temperatura en estado estacionario que se llama temperatura de *saturación adiabática,* T_S. Si el gas de entrada a una temperatura T y humedad H no está saturado, T_S será inferior a T. Si el contacto entre el gas de entrada y el rocío de gotas es suficiente para que el gas y el líquido alcancen un equilibrio, el aire de salida esta saturado a T_S con una humedad H_S.

Al escribir un balance de entalpía (balance de calor) para el proceso, se usa como valor básico T_S. Entonces la entalpía del H_2O de reposición es cero. Esto significa que la entalpía total de la mezcla gaseosa de entrada = entalpía de la mezcla gaseosa de salida, o según la ecuación (9.3-8),

$$c_S(T - T_S) + H\lambda_S = c_S(T_S - T_S) + H_S\lambda_S \qquad \textbf{(9.3-10)}$$

Ahora, reordenando y usando la ecuación (9.3-6) para c_S,

$$\frac{H - Hs}{T - T,} = \frac{c_S}{\lambda_S} = \frac{1.005 + 1.88H}{\lambda_S} \qquad \text{(SI)}$$

(9.3-l 1)

$$\frac{H - H,}{T - Ts} = \frac{0.24 + 0.45H}{\lambda_S} \qquad \text{(Unidades del sistema inglés)}$$

La ecuación (9.3-l 1) es la expresión de la curva de humidificación adiabática graficada en la figura 9.3-2, que pasa a través de los puntos H_S y T_S en la curva de 100% de saturación y por otros puntos de H y T. Esta serie de líneas, que corren hacia arriba y hacia la izquierda, se llaman *líneas de humidificación adiabática o líneas de saturación adiabática.* Puesto que c_S contiene el término H, las líneas adiabáticas no son totalmente rectas cuando se trazan en la gráfica de humedad.

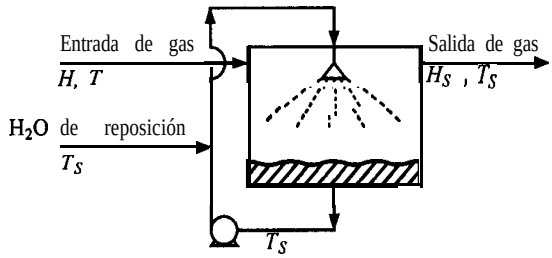


FIGURA *9.3-3.* ***Saturador adiabático*** *de aire y vapor de agua.*

Si una mezcla gaseosa a T_1 y H_1 se pone en contacto durante un tiempo bastante largo en un saturador adiabático, saldrá saturada a H_{S1} y T_{S1}. Los valores de H_{S1} y T_{S1} se determinan siguiendo la línea de saturación adiabática que pasa a través del punto T_1, H_1 hasta que interseque a la línea del 100% de saturación. Si el contacto no es suficiente, la mezcla de salida tendrá un porcentaje de saturación inferior al 100% pero en la misma línea.

EJEMPLO 9.3-3. Saturación adiabática del aire

Una corriente de aire a 87.8 °C con una humedad H= 0.030 kg H_2O/kg de aire seco se pone en contacto con agua en un saturador adiabático. Se enfría y se humidifica hasta un 90% de saturación.

a) ¿Cuáles son los valores fínales de H y T?

b) ¿Cuáles serían los valores de H y T para un 100% de saturación?

Solución: Para el inciso a), en la gráfica de humedad se localiza el punto $H = 0.030$ y T = 87.8 "C. Se recorre entonces la curva de saturación adiabática que pasa por este punto hacia arriba y hacia la izquierda hasta llegar a la línea de 90% a 42.5 °C y $H = 0.0500$ kg H_2O/kg de aire seco.

Para el inciso b), se recorre la misma línea hasta llegar a 100% de saturación, donde T = 40.5 °C y H = 0.0505 kg H_2O/kg de aire seco.

9.3D Temperatura de bulbo húmedo

La temperatura de saturación adiabática es aquella que se logra en estado estacionario cuando se pone en contacto una *gran* cantidad de agua con el gas de entrada. La *temperatura de bulbo húmedo es* la temperatura de entrada en estado estacionario y no de equilibrio que se alcanza cuando se pone en contacto una pequeña cantidad de agua con una corriente continua de gas en condiciones adiabáticas. Puesto que la cantidad de líquido es pequeña, la temperatura y la humedad del gas no cambian, contrario a lo que sucede en el caso de saturación adiabática, donde la temperatura y la humedad del gas sí varían.

En la figura 9.3-4 se ilustra el método usado para medir la temperatura de bulbo húmedo mediante un termómetro que se recubre con una mecha retorcida o un trozo de tela. La mecha se mantiene húmeda con agua y se introduce en el flujo de una corriente de aire y vapor de agua, cuya temperatura es T (temperatura de bulbo seco) y con una humedad H. En estado estacionario, el agua se evapora incorporándose a la corriente del gas; la mecha y el agua se enfrían a T_W y se mantienen a esa temperatura constante. El calor latente de vaporización queda exactamente balanceado por el calor convectivo que fluye de la corriente gaseosa Ta la mecha a una temperatura T_W, que es inferior.

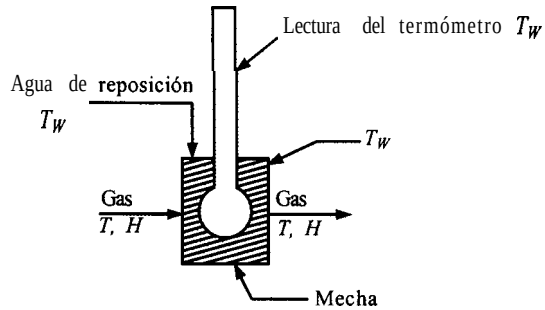


FIGURA 9.3-4. *Medición de la temperatura de bulbo húmedo.*

Es posible calcular un balance de calor para la mecha. La temperatura base se toma como T_W. La cantidad de calorperdidapor evaporación, despreciando el pequeño cambio de calor sensible de líquido vaporizado y la radiación es,

$$q = M_A N_A \lambda_W A \tag{9.3-12}$$

donde q está en kW (kJ/s), M_A es el peso molecular del agua, N_A son los kg mol H_2O evaporada/s · m^2, A es el área superficial en m^2 y λ_W es el calor latente de vaporización a T_W en kJ/kg H_2O. En unidades del sistema inglés, q se da en btu/h, N_A en lb mol/h · pie^2, A en pie^2 y λ_W en btu/lb_m H_2O. El flujo específico N_A es

$$N_A = \frac{k'_v}{x_{BM}}(y_W - y) = k_y(y_W - y) \tag{9.3-13}$$

donde k'_y es el coeficiente de transferencia de masa en kg mol/s · m^2 · frac mol, x_{BM} es la media logarítmica de la fracción mol inertes del aire, y_W es la fracción mol del vapor de agua en el gas en la superficie y y es la fracción mol en el gas. Para una mezcla diluida, $x_{BM} \cong 1$ .O y $k'_y \cong$ ky. La relación entre H y y es

$$y = \frac{H/M_A}{1/M_B + H/M_A} \tag{9.3-14}$$

donde M_B es el peso molecular del aire y M_A es del H_2O. Puesto que H es pequeña, se puede establecer como aproximación que

$$y \cong \frac{HM_B}{M_A} \tag{9.3-15}$$

Al sustituir la ecuación (9.3-15) en la (9.3-13) y después el resultado en la ecuación (9.3-12),

$$q = M_B k_y \lambda_W (H_W - H)A \tag{9.3-16}$$

La transferencia convectiva de calor de la corriente de gas a T la mecha a T_W es

$$q = h(T - T_W)A \tag{9.3-17}$$

donde h es el coeficiente de transferencia de calor en kW/m^2 · K(btu/h . pie^2 · "F).

Al igualar la ecuación (9.3-16) con la (9.3-17) y reordenar,

$$\frac{H - H_W}{T - T_W} = -\frac{h/M_B k_y}{\lambda_W} \tag{9.3-18}$$

Los datos experimentales del valor de $h/M_B\ k_y$, llamada *relación psicrométrica*, muestran que para mezclas de vapor de agua y aire, el valor es aproximadamente de 0.96 a 1.005. Puesto que este valor es cercano al de c_S en la ecuación (9.3-l 1), esto es, mas o menos, 1.005, las ecuaciones (9.3-â 8) y (9.3-l 1) son casi iguales, lo que significa que las líneas de saturación adiabática también pueden usarse como líneas de bulbo húmedo con precisión bastante razonable. (Obsérvese que esto sólo es cierto para vapor de agua y no para otros líquidos, como el benceno.) Por consiguiente, la determinación del bulbo húmedo se usa con mucha frecuencia para obtener la humedad de mezclas de aire y vapor de agua.

EJEMPLO 9.3-4. Temperatura de bulbo húmedo y humedad

Una mezcla de vapor de agua y aire con temperatura de bulbo seco de T = 60 °C (140 °F) se hace pasar sobre un bulbo húmedo tal como se muestra en la figura 9.3-4, y la temperatura de bulbo húmedo que se obtiene es T_W = 29.5 "C. ¿Cuál es la humedad de la mezcla?

Solución: Se puede suponer que la temperatura de bulbo húmedo de 29.5 °C es la misma que la temperatura de saturación adiabática T_S, tal como se analizó antes. Recorriendo la curva de saturación adiabática de 29.5 °C (85.1 °F) hasta llegar a temperatura de bulbo seco de 60 °C, la humedad resulta ser H = 0.0135 kg H_2O/kg de aire seco.

9.4 CONTENIDO DE HUMEDAD DE EQUILIBRIO DE LOS MATERIALES

9.4A Introducción

Al igual que en otros procesos de transferencia, como la transferencia de masa, el proceso de secado de materiales se debe considerar desde el punto de vista de las relaciones de equihbrio y, ademas, de lasde rapidez. En la mayoría de los equipos de secado estudiados en la sección 9.2, el material se seca al entrar en contacto con una mezcla de aire y vapor de agua. En esta sección se analizan las relaciones de equilibrio entre aire y vapor de agua y el material sólido.

Una variable importante en el secado de materiales es Ba humedad del aire en contacto con un sólido de determinada humedad. Supóngase que un sólido húmedo se pone en contacto con una corriente de aire con humedad H y temperatura constantes. Se usa un gran exceso de aire, por lo que las condiciones permanecen invariables. Después de haber expuesto el sólido un tiempo suficiente para alcanzar el! equilibrio, llega un momento en que dicho sólido tiene un contenido de humedad definido. Este valor se conoce como contenido de humedad de equilibrio del material en las condiciones especificadas de humedad y temperatura del aire. En general, el contenido de humedad se expresa en base seca como kilogramo de agua por kilogramo de sólido sin humedad (completamente seco) o kg H_2O/100 kg de sólido seco; en unidades del sistema inglés se expresa como lb H_2O/100 lb de sólido seco.

Para algunos sólidos, el valor del contenido de humedad de equilibrio depende de la dirección en la que se alcance el equilibrio. Los valores de contenido de humedad de equihbrio varian de acuerdo con que una muestra húmeda se seque por desorción o bien una muestra seca adsorba humedad por adsorción. En los cálculos de secado, se usa el valor de equilibrio por desorción, puesto que tiene el mayor valor y tiene un interés particular.

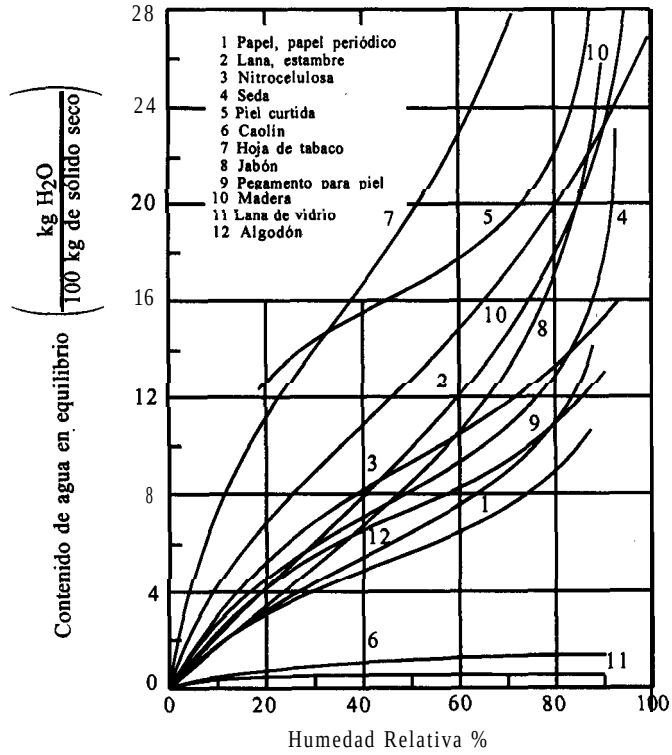


FIGURA 9.4-1 *Contenidos típicos de humedad en equilibrio para algunos sdlidos a 298 K (25 °C). [Tomado del National Research Council, International Critica1 Tables, Vol. II, New York: McGraw-Hill Book Company, 1929. Reproducido con autorización de la National Academy Sciences.]*

9.4B Datos experimentales para el contenido de humedad de equilibrio de materiales inorgánicos y biológicos

1. Datos típicos para diversos materiales. Si el material contiene más humedad que su valor de equilibrio en contacto con un gas a determinada humedad y temperatura, se secará hasta alcanzar su valor de equilibrio. Si el material contiene menos humedad que su valor de equilibrio, adsorberá agua hasta alcanzar dicho valor de equilibrio. Cuando el aire tiene 0% de humedad, el valor de la humedad de equilibrio de todos los materiales es cero.

El contenido de humedad de equilibrio varía notablemente con el tipo de material para cualquier porcentaje de humedad relativa, tal como se muestra en la figura 9.4-l para diversos materiales típicos a temperatura ambiente. Los sólidos insolubles no porosos suelen tener contenidos de humedad de equilibrio bastante bajos, tal como lo ilustran los casos de la lana de vidrio y el caolín. Ciertos materiales esponjosos de tipo celular y de origen orgánico y biológico suelen presentar valores altos del contenido de humedad de equilibrio. Entre los ejemplos que se muestran en la figura 9.4- 1 están la lana, el cuero y la madera.

2. Materiales alimenticios típicos. En la figura 9.4-2 se han graficado los contenidos de humedad de equilibrio de algunos materiales alimenticios típicos en función del porcentaje de humedad relativa. Estos materiales biológicos también muestran valores altos del contenido de humedad en equilibrio. Los datos de esta figura y los de la figura 9.4-l para materiales biológicos indican que con

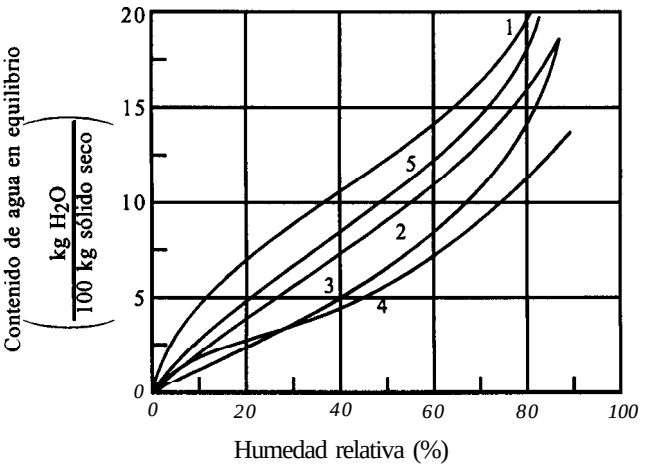


FIGURA *9.4-2. Contenidos típicos de humedad de equilibrio para algunos materiales alimenticios a 298 K (25 °C) aproximadamente: 1) macarrones, 2) harina, 3) pan, 4) galletas. 5) albúmina de huevo.. [Curva 5 de la referencia (El), Curvas (1) a (4) del National Research Council, International Critica1 Tables. Vol. II. New York: McGraw-Hill Book Company, 1929. Reproducida con autorización de la National Academy of Sciences].*

valores altos de porcentaje de humedad relativa de aproximadamente 60 a 80%, el contenido de humedad de equilibrio aumenta con gran rapidez al elevarse la humedad relativa.

En general, cuando las humedades relativas son bajas, el contenido de humedad de equilibrio es mayor para materiales alimenticios con alto porcentaje de proteínas, almidones, u otros polímeros de alto peso molecular, y mas bajo para los materiales alimenticios con gran cantidad de sólidos solubles. Las sales cristalinas y los azúcares, así como las grasas, generalmente adsorben cantidades pequeñas de agua.

3. Efecto de la temperatura. El contenido de humedad de equilibrio de un sólido disminuye al aumentar la temperatura. Por ejemplo, para algodón crudo con humedad relativa de 50%, el contenido de humedad de equilibrio disminuye desde 7.3 kg $H_2O/100$ kg de sólido seco a 37.8 °C (3 ll K) hasta aproximadamente 5.3 a 93.3 °C (366.5 K), esto es, una disminución de casi el 25%. Con frecuencia, para intervalos de temperatura moderados, se supone que el contenido de humedad de equilibrio es constante cuando no se dispone de datos experimentales a diferentes temperaturas.

En la actualidad, las teorías de la estructura de sólidos y de los fenómenos superficiales no permiten predecir la variación del contenido de humedad de equilibrio de diversos materiales con base en principios fundamentales. Sin embargo, se ha intentado correlacionar datos experimentales mediante modelos como los de isotermas de adsorción de multicapas de moléculas, y otros modelos. Henderson (H2) proporciona una relación empírica entre el contenido de humedad de equilibrio y el porcentaje de humedad relativa para algunos materiales agrícolas. En general, no hay relaciones empíricas para la mayoría de los materiales, y los contenidos de humedad de equilibrio se deben determinar experimentalmente. Además, las relaciones de humedad de equilibrio pueden variar de muestra a muestra en un mismo tipo de material.

9.4C Agua combinada y no combinada en los sólidos

Si el contenido de humedad de equilibrio de un material de la figura 9.4-l se prolonga hasta intersecar la línea de humedad de 1 OO%, se obtiene la humedad llamada *agua combinada.* Esta agua en el sólido desarrolla una presión inferior a la del agua líquida a la misma temperatura. Si dicho material contiene más agua que la que indica la intersección con la línea de humedad de 100%, sólo podrá desarrollar

una presión de vapor tan alta como la del agua común a la misma temperatura. Este exceso de humedad se llama ***agua no combinada,*** y dicha agua existe principalmente en los espacios vacíos en el sólido. Las sustancias que contienen agua combinada se llaman ***materiales higroscópicos.***

Considérese por ejemplo la curva 10 para madera de la figura 9.4- 1. Esta línea interseca a la curva de 100% de humedad a aproximadamente 30 kg $H_2O/100$ kg de sólido seco. Cualquier muestra de madera que contenga menos de 30 kg $H_2O/100$ kg de sólido seco tendrá sólo agua combinada. Si la muestra de madera tuviera 34 kg $H_2O/100$ kg de sólido seco, 4 kg H_2O sería agua no combinada y 30 kg H_2O sería agua combinada por cada 100 kg de sólido seco.

El agua combinada de una sustancia puede existir bajo diversas y diferentes condiciones. La humedad en un poro o en las paredes de fibras puede tener sólidos disueltos y desarrollar, por tanto, presión de vapor más baja. El agua líquida en los capilares de diámetro muy pequeño puede desarrollar una presión de vapor más baja debido a la curvatura cóncava de la superficie. El agua en los materiales orgánicos naturales generalmente está en combinación química y fisicoquímica.

9.4D Humedad libre y en equilibrio en una sustancia

El contenido de humedad libre de una muestra es la humedad por encima del contenido de humedad de equilibrio. Esta humedad libre se puede eliminar por secado con las condiciones dadas de porcentajes de humedad relativa. Por ejemplo, en la figura 9.4-1, la seda tiene un contenido de humedad de equilibrio de 8.5 kg $H_2O/100$ kg de material seco en contacto con aire de 50% de humedad relativa a 25 "C. Si una muestra contiene 10 kg $H_2O/100$ kg de material seco, sólo se podrá eliminar por secado de 10.0 a 8.5, o 1.5 kg $H_2O/100$ kg de material seco, y éste es el contenido de humedad libre de la muestra bajo estas condiciones de secado.

En muchos textos y referencias, el contenido de humedad se expresa como porcentaje de humedad en base seca. Es exactamente igual al valor de kg $H_2O/100$ kg de material seco multiplicado por 100.

9.5 CURVAS DE VELOCIDAD DE SECADO

9.5A Introducción y métodos experimentales

*1. **Introducción.*** Para reducir el contenido de humedad en el secado de diversos materiales de proceso, por lo general se estima el tamaño del secador necesario, las diferentes condiciones de operación de humedad y la temperatura del aire empleado, y el tiempo necesario para lograr el grado de secado. Tal como se analizó en la sección 9.4, no es posible predecir el contenido de humedad de equilibrio de diversos materiales, por lo que es necesario determinarlo por vías experimentales. De la misma manera, puesto que el conocimiento de los mecanismos básicos de las velocidades de secado es bastante incompleto, en muchos casos es indispensable obtener algunas mediciones experimentales de las velocidades de secado.

2. Determinación experimental de la velocidad de secado. Para determinar experimentalmente la velocidad de secado de un material, se procede a colocar una muestra en una bandeja. Si se trata de material sólido se debe llenar por completo la base de la bandeja, de manera que sólo quede expuesta a la corriente de aire de secado la superficie de dicho sólido. La pérdida en peso de humedad durante el secado puede determinarse a diferentes intervalos sin interrumpir la operación, colgando la bandeja de una balanza adaptada a un gabinete o a un ducto a través del cual fluye el aire de secado.

Al realizar experimentos de secado por lotes, deben tomarse ciertas precauciones para obtener datos útiles en condiciones que se semejen lo más posible a las que imperaran en operaciones a gran

escala. La muestra no debe ser demasiado pequeña y se debe introducir en una bandeja similar a la que se usará en producción. La relación entre superficie de secado y superficie de no secado (superficie aislada) así como la profundidad del lecho del sólido deben ser idénticas. La velocidad, la humedad, la temperatura y la dirección del aire deben ser las mismas y constantes para simular un secado en condiciones constantes.

9.5B Curvas de velocidad de secado para condiciones de secado constante

1. Conversión de los datos a curva de velocidad de secado. Los datos que se obtienen de un experimento de secado por lotes, generalmente se expresan como peso total W del sólido húmedo (sólido seco más humedad) a diferentes tiempos de t horas en el periodo de secado. Estos valores se pueden convertir a datos de velocidad de secado por los siguientes procedimientos. Primero se recalculan los datos. Si Wes el peso del sólido húmedo en kilogramos totales de agua más sólido seco y W_S es el peso del sólido seco en kilogramos,

$$X_t = \frac{W - W_S \text{ kg totales de agua}}{W_S \quad \text{kg sólido seco}} \left(\frac{\text{lb totales de agua}}{\text{lb sólido seco}} \right) \tag{9.5-l}$$

Después de haber establecido las condiciones de secado constante, se determina el contenido de humedad de equilibrio, X^* kg de humedad de equilibrioikg de sólido seco. Con el se procede a calcular el valor del contenido de humedad libre X en kg de agua libre/kg de sólido seco para cada valor de X_t.

$$X = X_t - X^* \tag{9.5-2}$$

Al sustituir los datos calculados en la ecuación (9.5-2), se traza una gráfica del contenido de humedad libre Xen función del tiempo ten h, como se muestra en la figura 9.5-la. Para obtener una curva de velocidad de secado a partir de esta gráfica, se miden las pendientes de las tangentes a la curva, lo cual proporciona valores de dX/dt para ciertos valores de t. Se calcula entonces la velocidad R para cada punto con la expresión

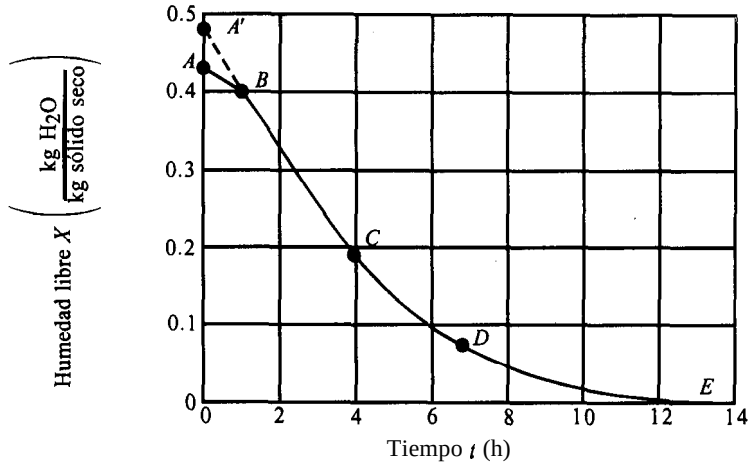
$$R = -\frac{L_S}{A}\frac{dX}{dt} \tag{9.5-3}$$

donde R es la velocidad de secado en kg H_2O/h . m^2, L_S *es* kg de sólido seco usado y A *es* el área superficial expuesta al secado en m^2. En unidades del sistema inglés, R *es* lb_m H_2O/h . pie*, L_S *es* lb_m de sólido seco y A *se* da en pie*. Para obtener R en la figura 9.5-la, se usó un valor de L_S/A de 21.5 kg/m^2. Entonces, la curva de velocidad de secado se obtiene graficando R en función del contenido de humedad, tal como se muestra en la figura 9.5-1b.

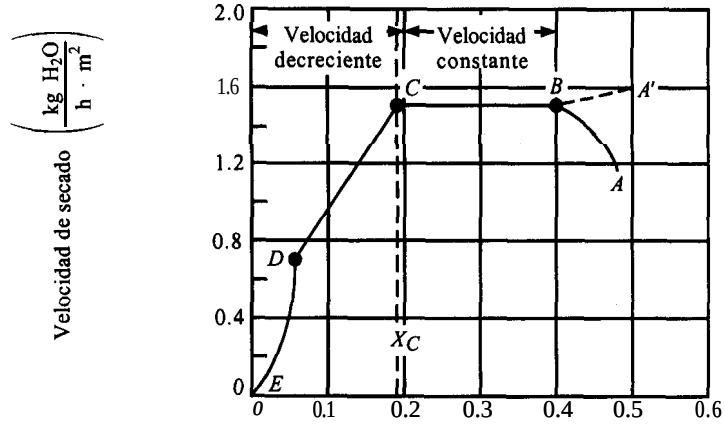
Otro método para obtener la curva de velocidad de secado consiste en calcular primero la pérdida de peso ΔX para un tiempo At. Por ejemplo, si X_1 = 0.350 al tiempo t_1 = 1.68 h y x_2 = 0.325 en el tiempo t_2 = 2.04 h, $\Delta X/\Delta t$ = (0.350 − 0.325)/(2.04 − 1.68). Entonces, usando la ecuación (9.5-4) y el valor de L_S/A = 21.5,

$$R = -\frac{L_S}{A}\frac{\Delta X}{\Delta t} = 21.5\left(\frac{0.350 - 0.325}{2.04 - 1.68}\right) = 1.493$$

Esta velocidad R *es* el promedio en el periodo de 1.68 a 2.04 h y debe graficarse a la concentración promedio X = (0.350 + 0.325)/2 = 0.338.



(a)



(b)

FIGURA 9.5-1. *Curva típica de velocidad de secado constante: a) gráfica de los datos de humedad libre en función del tiempo. b) curva de velocidad de secado en función del contenido de humedad libre.*

2. *Gráfica de la curva de velocidad de secado.* En la figura 9.5-1b se muestra la curva de velocidad de secado para condiciones de secado constante. Empezando en el tiempo cero, el contenido inicial de humedad libre corresponde al punto *A* . Al principio, el sólido suele estar a una temperatura inferior de la que tendrá al final, y la velocidad de evaporación va en aumento. Al llegar al punto *B*, la temperatura de la superficie alcanza su valor de equilibrio. Por otra parte, si el sólido está bastante caliente al principiar la operación, la velocidad de secado puede iniciarse en un punto A'. Este periodo inicial de ajuste en estado no estacionario suele ser bastante corto y por lo general se pasa por alto en el análisis de los tiempos de secado.

La curva de la figura 9.5-la es recta entre los puntos *B* y *C*, por lo que la pendiente y la velocidad son constantes durante este periodo. Este *periodo de velocidad constante de secado* corresponde a la línea *BC* en la figura 9.5-lb.

En el punto C de ambas gráficas, la velocidad de secado comienza a disminuir en el *periodo de velocidad decreciente,* hasta llegar al punto *D*. En este primer periodo de velocidad decreciente, la velocidad corresponde a la línea CD en la figura 9.5-1b, y por lo general es lineal.

En el punto *D* la velocidad de secado disminuye con más rapidez aún, hasta que llega al punto *E,* donde el contenido de humedad de equilibrio es X^*, y $X = X^* - X^* = 0$. En el secado de algunos materiales, la región CD no existe, o bien, constituye la totalidad del periodo de velocidad decreciente.

9.5C Secado durante el periodo de velocidad constante

El secado de diversos sólidos bajo diferentes condiciones constantes de secado casi siempre produce curvas de forma variable en el periodo de velocidad decreciente, pero en general siempre están presentes las dos zonas principales de la curva de velocidad de secado: el periodo de velocidad constante y el periodo de velocidad decreciente.

Durante el primer periodo, la superficie del sólido esta muy mojada al principio y sobre ella hay una película de agua continua. Esta capa de agua es **agua no** combinada y actúa como si el sólido no estuviera presente. La velocidad de evaporación con las condiciones establecidas para el proceso, es independiente del sólido y esencialmente igual a la velocidad que tendría una superficie líquida pura. Sin embargo, las ondulaciones y hendiduras en la superficie del sólido ayudan a obtener una velocidad más alta de la que tendría una superficie completamente plana.

Si el sólido es poroso, la mayor parte del agua que se evapora durante el periodo de velocidad constante proviene de su interior. Este periodo continua mientras el agua siga llegando a la superficie con la misma rapidez con la que se evapora. La evaporación durante este periodo es similar a la que existe cuando se determina la temperatura de bulbo húmedo, y en ausencia de transferencia de calor por radiación o conducción, la temperatura de la superficie equivale en forma aproximada a la temperatura de bulbo húmedo.

9.5D Secado durante el periodo de velocidad decreciente

El punto C de la figura 9.5-1b corresponde al *contenido critico de humedad libre* X_C. En este punto no hay suficiente agua en la superficie para mantener una película continua. La superficie ya no esta totalmente mojada, y la porción mojada comienza a disminuir durante el periodo de velocidad decreciente hasta que la superficie queda seca en su totalidad en el punto *D* de la figura 9.5-lb.

El segundo periodo de velocidad decreciente empieza en el punto *D,* cuando la superficie esta seca en su totalidad. El plano de evaporación comienza a desplazarse con lentitud por debajo de la superficie. El calor de evaporación se transfíere a través del sólido hasta la zona de vaporización. El agua evaporada atraviesa el sólido para llegar hasta la corriente de aire.

En algunos casos no hay discontinuidad definida en el punto *D,* y el cambio de condiciones de secado de una superficie con humedad parcial a una superficie completamente seca, es tan gradual que no se detecta un punto de inflexión.

Es posible que la cantidad de humedad que se elimina durante el periodo de velocidad decreciente seabastante pequeña; no obstante, el tiempo requerido puede ser largo. En la figura 9.5-l se ilustra este efecto. El periodo *BC* para un secado de velocidad constante dura unas 3.0 h y hace que Xdisminuya de 0.40 a 0.19, esto es, una reducción de 0.21 kg H_2O/kg sólido seco. El periodo de velocidad decreciente *CE* continúa durante unas 9.0 h y Xdisminuye solamente de 0.19 a 0.

9.5E Movimientos de humedad en los sólidos durante el secado en el periodo de velocidad decreciente

Cuando el secado se verifica por evaporación de la humedad del área expuesta del sólido, la humedad se desplaza desde el interior del sólido hasta la superficie. Los mecanismos de este movimiento afectan al secado durante los periodos de velocidad constante y de velocidad decreciente. A continuación se analizan brevemente algunas teorías para explicar los diversos tipos de curvas de velocidad decreciente.

1. Teoría de la difusión del líquido. De acuerdo con esta teoría, la difusión de la humedad líquida se verifica cuando existe una diferencia de concentración entre el interior del sólido y la superficie. Este método de transporte de humedad casi siempre se presenta con sólidos no porosos, en los que se forman soluciones de una sola fase con la humedad, como en una pasta, un jabón, una gelatina y pegamento. También es el caso del secado de las últimas porciones de humedad en arcillas, harinas, madera, cuero, papel, almidones y textiles. En el secado de muchos materiales alimenticios, el movimiento del agua durante el periodo de velocidad decreciente se verifica por difusión.

Las formas de las curvas de distribución de la humedad en el sólido a diferentes tiempos concuerdan cualitativamente con las ecuaciones de difusión en estado estacionario que se estudiaron en el capítulo 7. La difusividad de la humedad D_{AB} casi siempre disminuye al reducirse el contenido de ésta, por lo que las difusividades suelen ser valores promedio en el intervalo de concentraciones considerado. Se dice entonces, que los materiales se secan de esta manera por difusión, aunque los mecanismos reales pueden ser bastante complicados. Puesto que la velocidad de evaporación de la superficie es bastante rápida, esto es, la resistencia es muy baja en comparación con la velocidad de difusión a través del sólido en el periodo de velocidad decreciente, el contenido de humedad en la superficie tiene un valor de equilibrio.

La forma de una curva controlada por difusión durante el periodo de velocidad decreciente, es similar a la de la figura 9.5-2a. Si el secado inicial de velocidad constante es considerable, es posible que no exista el primer periodo de velocidad decreciente con evaporación de una superficie no saturada. Si el secado a velocidad constante es bajo, el periodo de evaporación superficial no saturada suele presentarse en la región CD de la figura 9.5-1b, y la curva controlada por difusión corresponde a la región *DE.* En la sección 9.9 se analizan las ecuaciones para calcular el secado en este periodo, donde el factor que controla es la difusión. Además, en la sección de problemas del capítulo 7 se incluyen el problema 7.1-4 para el secado de arcilla y el problema 7.1-6 para el secado de madera, aplicándose en ambos la teoría de la difusión.

2. Movimiento capilar en los sólidos porosos. Cuando se están secando sólidos granulares y porosos como arcillas, arena, tierra, pigmentos para pinturas y minerales, la humedad libre o sin combinar se desplaza a través de capilares y espacios vacíos de los sólidos por acción capilar, y no por difusión. Este mecanismo, en el cual interviene la tensión superficial, es similar al desplazamiento del combustible en la mecha de un quinqué portátil.

Un sólido poroso contiene poros y canales interconectados de diversos tamaños. A medida que se evapora el agua, se forma un menisco de líquido en cada poro en el interior del sólido. Esto origina las fuerzas capilares por la tensión interfacial entre el aguay el sólido. Estas fuerzas constituyen el impulso para desplazar el agua a través de los poros hasta la superficie. Los poros pequeños desarrollan fuerzas mayores que los poros más grandes.

Al principio del periodo de velocidad decreciente en el punto C de la figura 9.5- 1 b, el agua es llevada hasta la superficie por acción capilar, pero la capa superficial de agua comienza a hundirse en el sólido. Al suceder esto, penetra aire para llenar los espacios vacíos. A eliminarse agua de manera continua, se llega a un punto donde no hay suficiente agua para mantener una película continua en todos los poros, y la velocidad de secado disminuye repentinamente al principio del segundo periodo de velocidad decreciente en el punto *D.* Entonces, la velocidad de difusión del vapor de agua en los poros y la velocidad de conducción de calor en el sólido, pueden llegar a ser los factores principales en el secado.

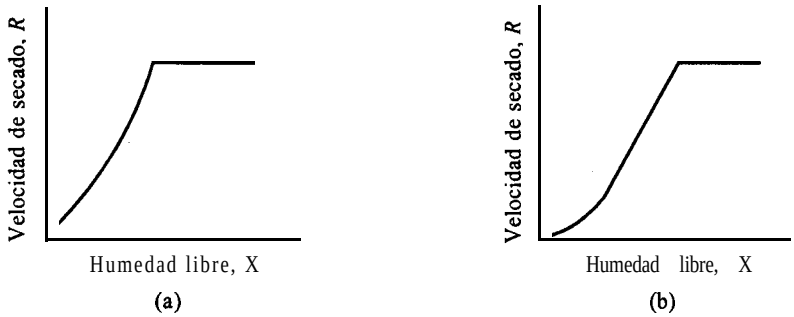


FIGURA *9.5-2. Curvas típicas de velocidad de secado: a) periodo de velocidad decreciente controlado por difusión. b) periodo de velocidad decreciente controlado por capilaridad en un sólido de poros finos.*

En los poros finos de los sólidos, la curva de velocidad de secado en el segundo periodo de velocidad decreciente puede seguir la ley de difusión y la curva resulta cóncava hacia arriba, tal como lo muestra la figura 9.5-2b. En sólidos muy porosos, tales como un lecho de arena, donde los poros son grandes, la curva de velocidad de secado en el segundo periodo de velocidad decreciente suele ser recta y, por tanto, las ecuaciones de difusión no son aplicables.

3. Efecto de la contracción. Un factor que afecta con frecuencia a la velocidad de secado es la contracción del sólido al eliminarse la humedad. Los sólidos rígidos no se contraen de manera apreciable, pero los materiales coloidales y fibrosos, como vegetales y otros productos alimenticios, sí se contraen. El efecto más notable es que se puede desarrollar una capa dura en la superficie del sólido, que resulta impermeable al flujo de líquido o de vapor y disminuye la velocidad de secado; algunos ejemplos son la arcilla y el jabón. En muchos alimentos, si el secado se realiza a temperaturas muy altas, se forma en la superfice una capa de células contraídas que se adhieren unas a otras formando un sello. Esto representa una barrera a la migración de la humedad, y se llama *endurecimiento superficial*. Otro efecto de la contracción ocasiona que el material se deforme y cambie su estructura. Esto sucede, por ejemplo, en el secado de madera.

Algunas veces, para disminuir estos efectos del secado, es aconsejable emplear aire húmedo. Así se disminuye la velocidad de secado y los efectos de la contracción, que ocasionan deformación o endurecimiento de la superficie, se reducen notablemente.

9.6 MÉTODOS PARA CALCULAR EL PERIODO DE SECADO DE VELOCIDAD CONSTANTE

9.6A Método de curvas experimentales de secado

1. Introducción. El factor más importante en los cálculos del secado es probablemente el tiempo requerido para secar un material a partir de un contenido inicial de humedad libre X_1 hasta un contenido de humedad X_2. Para el secado en el periodo de velocidad constante, es posible estimar el tiempo necesario mediante curvas de secado obtenidas con lotes experimentales, o por predicciones de coeficientes de transferencia de masa y de transferencia de calor.

2. *Método de curva de secado.* Para estimar el tiempo de secado de determinado lote de material, el mejor método consiste en obtener datos experimentales reales bajo condiciones de alimentación, área superficial relativa expuesta, velocidad del gas, temperatura y humedad, que sean, en esencia, las mismas que tendrá el secador que se usará en la práctica. De esta manera, el tiempo requerido para el periodo de velocidad constante se determina directamente con la curva de secado de contenido de humedad libre en función del tiempo.

EJEMPLO 9.6-l. Tiempo de secado a partir de la curva de secado
Se desea secar un sólido cuya curva de secado está representada por la figura 9.5-la, desde un contenido de humedad libre X_1 = 0.38 kg H_2O/kg sólido seco hasta X_2 = 0.25 kg H_2O/kg sólido seco. Estime el tiempo necesario.

Solución: Con base en la figura 9.5-1a, para X_1 = 0.38, la lectura de t_1 es 1.28 h. Para X_2 = 0.25, t_2 = 3.08 h. Por consiguiente, el tiempo necesario es

$$t = t_2 - t_1 = 3.08 - 1.28 = 1.80 \text{ h}$$

3. Método de curva de velocidad de secado para el periodo de velocidad constante. En lugar de la curva de secado, es posible emplear la curva de velocidad de secado. La velocidad de secado ***R*** se define en la ecuación (9.5-3) de la siguiente manera:

$$R = -\frac{L_S}{A}\frac{dX}{dt} \tag{9.5-3}$$

Esta expresión se reordena e integra con respecto al intervalo para secar desde X_1 a $t_1 = 0$ hasta X_2 a $t_2 = t$.

$$t = \int_{t1=0}^{t2=t} dt = \frac{L_S}{A}\int_{X2}^{X1}\frac{dX}{R} \tag{9.6-l}$$

Si el secado se verifica dentro del periodo de velocidad constante, de manera que tanto X_1 como X_2 sean mayores que el contenido de humedad crítica X_C, entonces ***R*** = constante = R_C. Al integrar la ecuación (9.6-l) para el periodo de velocidad constante,

$$t = \frac{L_S}{AR_C}(X_1 - X_2) \tag{9.6-2}$$

EJEMPLO 9.6-2. Tiempo de secado a partir de la curva de velocidad de secado
Repita el ejemplo 9.6-l con la ecuación (9.6-2) y la figura 9.5-1b.

Solución: Como se estudió antes, la figura 9.5-lb se preparó con base en la figura 9.5-la usando un valor de 21.5 para L_S/A. A partir de la figura 9.5-lb, R_C = 1.51 kg $H_2O/h \cdot m^2$. Sustituyendo en la ecuación (9.6-2),

$$t = \frac{L_S}{AR_C}(X_1 - X_2) = \frac{21.5}{1.51}(0.38 - 0.25) = 1.85 \text{ h}$$

Este valor es bastante cercano al de 1.80 h del ejemplo 9.6-1.

9.6B Método que emplea predicciones de coeficientes de transferencia para el periodo de velocidad constante

1. Introducción. En el periodo de secado de velocidad constante, las superficies de los granos del sólido en contacto con el flujo de aire de secado permanecen completamente húmedas. Como se dijo antes, la velocidad de evaporación de la humedad bajo ciertas condiciones del aire, es independiente del tipo de sólido, y de hecho, casi igual a la velocidad de evaporación de una superficie de líquido puro bajo idénticas condiciones. Sin embargo, las irregularidades de la superficie pueden aumentar la velocidad de evaporación.

Durante este periodo de velocidad constante el sólido está tan mojado, que el agua actúa como si el sólido no existiera. El agua que se evapora de la superficie proviene del interior del sólido. La velocidad de evaporación en un material poroso se verifica por medio del mismo mecanismo que en un termómetro de bulbo húmedo, el cual opera esencialmente con secado de velocidad constante.

2. Ecuaciones para predecir el secado de velocidad constante. El secado de un material se verifica por transferencia de masa del vapor de agua de la superficie saturada del material a través de una película de aire hasta la fase gaseosa general del ambiente circundante. La velocidad de desplazamiento de humedad dentro del sólido es suficiente para mantener la superficie saturada. La velocidad de eliminación del vapor de agua (secado) esta controlada por la velocidad de transferencia de calor hasta la superficie de evaporación, que suministra el calor latente de evaporación para el líquido. Cuando se opera en estado estacionario, la velocidad de transferencia de masa equivale a la velocidad de transferencia de calor.

Para deducir la ecuación de secado, se desprecia la transferencia de calor por radiación hacia la superficie sólida, y se supone además, que no hay transferencia de calor por conducción en las bandejas o superficies metálicas. En la sección 9.8 también se consideraran la convección y la radiación. Suponiendo que la transferencia de calor sólo se verifica del gas caliente a la superficie del sólido por convección y de la superficie al gas caliente por transferencia de masa (Fig. 9.6-1), es posible escribir ecuaciones iguales a las que se obtuvieron para la temperatura de bulbo húmedo T_W en la ecuación (9.3-l 8).

La velocidad de transferencia convectiva de calor q en W (J/s, btu/h) desde el gas a T °C (°F) a la superficie del sólido a T_W °C, donde $(T - T_W)$ °C = $(T - T_W)$ K, es

$$q = h(T - T_W)A \tag{9.6-3}$$

donde h es el coeficiente de transferencia de calor en W/m^2 · K (btu/h · pie ^{2} · °F) y A es el área de secado expuesta en m^2 (pie^2). La ecuación del flujo específico del vapor de agua desde la superficie es igual que en la ecuación (9.3-13) y corresponde a

$$N_A = k_y(y_w - y) \tag{9.6-4}$$

Al usar la aproximación de la ecuación (9.3-15) y sustituir en la ecuación (9.6-4),

$$N_A = k_y \frac{M_B}{M_A}(H_W - H) \tag{9.6-5}$$

La cantidad de calor necesario para vaporizar N_A kg mol/s · m^2 (lb mol/h · pie ^{2}) de agua, despreciando los pequeños cambios de calor sensible, es igual que en la ecuación (9.3-12).

$$q = M_A N_A \lambda_W A \tag{9.6-6}$$

donde λ_W es el calor latente a T_W en J/kg (btu/lb$_m$).

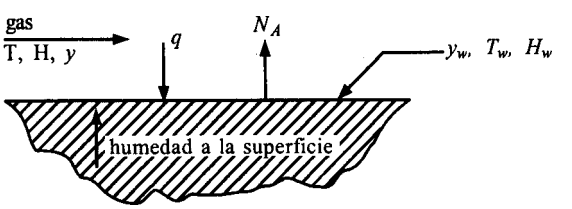


FIGURA 9.6-l. *Transferencia de masa y calor durante el periodo de velocidad de secado constante.*

Al igualar las ecuaciones (9.6-3) y (9.6-6) y sustituyendo N_A por la ecuación (9.6-5),

$$R_C = \frac{q}{A\lambda_W} = \frac{h(T - T_W)}{\lambda_W} = k_y M_B (H_W - H) \tag{9.6-7}$$

La ecuación (9.6-7) es idéntica a la ecuación (9.3-18) para la temperatura de bulbo húmedo. Por tanto, en ausencia de transferencia de calor por conducción y radiación, la temperatura del sólido está a la temperatura de bulbo húmedo del aire durante el periodo de secado de velocidad constante. De acuerdo con esto, es posible calcular la velocidad de secado R_C mediante la ecuación de transferencia de calor $h\,(T - T_W)/\lambda_W$ o la ecuación de transferencia de masa $k_y M_B (H_W - H)$. Sin embargo, se ha determinado que es mas confiable usar la ecuación de transferencia de calor (9.6-8), puesto que cualquier error en la determinación de la temperatura interfacial T_W en la superficie, afecta a la fuerza impulsora $(T - T_W)$ mucho menos que el efecto que produce sobre $(H_W - H)$.

$$R_C \text{ kg } H_2O/\text{h} \cdot \text{m}^2 = \frac{h}{\lambda_W}(T - T_W\ ^\circ\text{C})(3600) \qquad \text{(SI)}$$

$$R_C \text{ lb}_\text{m}\ H_2O/\text{h} \cdot \text{pie}^2 = \frac{h}{\lambda_W}(T - T_W \qquad ^\circ\text{F}) \qquad \text{(Unidades del sistema inglés)} \tag{9.6-8}$$

Para predecir el valor de R_C en la ecuación (9.6-8), se debe conocer el coeficiente de transferencia de calor. Si el aire fluye paralelo ala superficie de secado, se puede aplicar la ecuación (4.6-3) para aire. Sin embargo, y como la forma del borde de entrada de la superficie de secado causa más turbulencia, es posible usar la siguiente expresión para una temperatura del aire de 45 a 150 °C y una velocidad de masa G de 2450 – 29300 kg/h · m² (500 – 6000 lb_m/h · pie²) o una velocidad de 0.61 a 7.6 m/s (2 a 25 pie/s).

$$h = 0.0204\,G^{0.8} \qquad \text{(SI)}$$

$$h = 0.0128\,G^{0.8} \qquad \text{(Unidades del sistema inglés)} \tag{9.6-9}$$

donde en unidades SI, G es $v\rho$ kg/h · m² y *h está* en W/m² · K. En unidades del sistema inglés, G , se da en lb_m/h . pie² y *h* en btu/h · °F. Cuando el aire fluye perpendicularmente a la superficie para un valor de G de 3900 – 19500 kg/h · m² o a una velocidad de 0.9-4.6 m/s (3 a 15 pie/s),

$$h = 1.17\,G^{0.37} \qquad \text{(SI)}$$

$$h = 0.37\,G^{0.37} \qquad \text{(Unidades del sistema inglés)} \tag{9.6-10}$$

Las ecuaciones (9.6-8) a (9.6-10) son útiles para estimar la velocidad de secado en el periodo de velocidad constante. No obstante, siempre que sea posible, es preferible llevar a cabo mediciones experimentales de la velocidad de secado.

Para estimar el tiempo de secado en el periodo de velocidad constante, al sustituir la ecuación (9.6-7) en la (9.6-2) se obtiene la siguiente expresión:

$$t = \frac{L_S \lambda_W (X_1 - X_2)}{Ah(T - T_W)} = \frac{L_S (X_1 - X_2)}{Ak_y M_B (H_W - H)} \tag{9.6-11}$$

EJEMPLO 9.6-3. Predicción del secado a velocidad constante

Un material granular insoluble se va a secar en una bandeja de 0.457 × 0.457 m (1.5 × 1.5 pies) y 25.4 mm de profundidad, y se puede considerar que los lados y el fondo están aislados. El calor se transfiere por convección de una corriente de aire, que fluye paralela a la superficie a velocidad de 6.1 m/s (20 pies/s). El aire está a 65.6 °C (150 "F) y tiene una humedad de 0.010 kg H_2O/kg de aire seco. Estime la velocidad del secado para el periodo de velocidad constante, en unidades SI y del sistema inglés.

Solución: Para una humedad H = 0.010 y temperatura de bulbo seco de 65.6 "C, la gráfica de humedad (Fig. 9.3-2) permite determinarla temperatura de bulbo húmedo T_W que es 28.9 °C (84 "F) y al recorrer la línea de saturación adiabática (que es la misma línea de bulbo húmedo) hasta llegar a la humedad saturada, se obtiene H_W = 0.026. Usando la ecuación (9.3-7) para calcular el volumen húmedo,

$$v_H = (2.83 \times 10^{-3} + 4.56 \times 10^{-3}H)T$$
$$= (2.83 \times 10^{-3} + 4.56 \times 10^{-3} \times 0.01)(273 + 65.6)$$
$$= 0.974 \text{ m}^3\text{/kg aire seco}$$

La densidad de 1 .O kg de aire seco + 0.010 kg H_2O es

$$\rho = \frac{1.0 + 0.010}{0.974} = 1.037 \text{ kg/m}^3 \ (0.0647 \text{ lb}_m\text{/pie}^3)$$

La velocidad de masa G es

$$G = vp = 6.1(3600)(1.037) = 22770 \text{ kg/h} \cdot \text{m}^2$$
$$G = vp = 20(3600)(0.0647) = 4660 \text{ lb}_m\text{/h . pie}^2$$

Usando la ecuación (9.6-9),

$$h = 0.0204 \ G^{0.8} = 0.0204(22770)^{0.8} = 62.45 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$$
$$h = 0.0128 \ G^{0.8} = 0.0128(4660)^{0.8} = 11.01 \text{ btuk . pie}^2 \text{ . °F}$$

Las tablas de vapor indican que a T_W = 28.9 °C (84 °F), λ_W = 2433 kJ/kg (1046 btu/lb_m). Al sustituir en la ecuación (9.6-8) y observar que (65.6 − 28.9) °C = (65.6 − 28.9) K,

$$R_C = \frac{h}{\lambda_W}(T - T_W)(3600) = \frac{62.45}{2433 \times 1000}(65.6 - 28.9)(3600)$$
$$= 3.39 \text{ kg/h} \cdot \text{m}^2$$
$$R_C = \frac{11.01}{1046}(150 - 84) = 0.695 \text{ lb}_m\text{/h} \cdot \text{pie}^2$$

La velocidad total de evaporación para una superficie de 0.457 × 0.457 m^2 es

$$\text{velocidad total} = R_C A = 3.39(0.457 \times 0.457) = 0.708 \text{ kg } H_2O\text{/h}$$
$$= 0.695(1.5 \times 1.5) = 1.564 \text{ lb}_m \ H_2O\text{/h}$$

9.6C Efecto de las variables del proceso sobre el periodo de velocidad constante

Como ya se dijo, antes, es preferible emplear mediciones experimentales de la velocidad de secado en vez de las ecuaciones de predicción. Sin embargo, estas ecuaciones son bastante útiles para predecir el efecto de los cambios de las variables del proceso de secado cuando se dispone de datos experimentales limitados.

1. Efecto de la velocidad del aire. Cuando no hay transferencia de calor por conducción y radiación, la velocidad R_C de secado en la región de velocidad constante es proporcional a h, y por tanto, a $G^{0.8}$, tal como lo expresa la ecuación (9.6-9). El efecto de la velocidad del gas es menos importante cuando sí hay conducción y radiación.

2. Efecto de la humedad del gas. Si la humedad del gas H disminuye para determinado valor *Ten* el gas, la temperatura de bulbo húmedo T_W, tal como se obtiene de la gráfica de humedad, también disminuye. Entonces, al aplicar la ecuación (9.6-7) se ve que R_C aumenta. Por ejemplo, si las condiciones originales son R_{C1}, T_1, T_{W1}, H_1 y H_{W1}, si H_1 cambia a H_2 y H_{W1} varía a H_{W2}, R_{C2} será

$$R_{C2} = R_{C1} \frac{T - T_{W2}}{T - T_{W1}} \frac{\lambda_{W1}}{\lambda_{W2}} = R_{C1} \frac{H_{W2} - H_2}{H_{W1} - H_1} \qquad \textbf{(9.6-l 2)}$$

Sin embargo, puesto que $\lambda_{W1} \cong \lambda_{W2}$,

$$R_{C2} = R_{C1} \frac{T - T_{W2}}{T - T_{W1}} = R_{C1} \frac{H_{W2} - H_2}{H_{W1} - H_1} \qquad \textbf{(9.6-13)}$$

3. Efecto de la temperatura del gas. Si se eleva la temperatura del gas T, T_W también aumenta algo, pero no tanto como el aumento de T. Por consiguiente, R_C aumenta como sigue:

$$R_{C2} = R_{C1} \frac{T_2 - T_{W2}}{T_1 - T_{W1}} = R_{C1} \frac{H_{W2} - H_2}{H_{W1} - H_1} \qquad \textbf{(9.6-14)}$$

4. Efecto del espesor del lecho sólido que se está secando. Cuando sólo hay transferencia de calor por convección, la velocidad R_C es independiente del espesor x_1 del sólido. Sin embargo, el tiempo t necesario para secar entre los contenidos de humedad fijos X_1 y X_2 será directamente proporcional a este espesor x_1. La ecuación (9.6-2) muestra esta proporcionalidad, pues al aumentar el espesor por un valor constante de A, se elevará directamente la cantidad L_S kg de sólido seco.

5. Efecto experimental de las variables de proceso. Los resultados experimentales tienden a confirmar las conclusiones señaladas para los efectos de espesor de material, humedad, velocidad del aire y $T - T_W$.

9.7 MÉTODOS PARA CALCULAR EL PERIODO DE SECADO DE VELOCIDAD DECRECIENTE

9.7A Método de integración gráfica

En el periodo de secado de velocidad decreciente que se muestra en la figura 9.5-lb, la velocidad de secado R no es constante, sino que disminuye cuando el secado pasa por la zona de contenido crítico de humedad libre X_C. Cuando el contenido de humedad libre Xes cero, la velocidad también lo es.

El tiempo de secado para cualquier región entre X_1 y X_2 se obtiene mediante la ecuación (9.6-l):

$$t = \frac{L_S}{A}\int_{X_2}^{X_1} \frac{dX}{R} \qquad (9.6\text{-l})$$

Cuando la velocidad es constante, la ecuación (9.6-l) se puede integrar para obtener la ecuación (9.6-2). Sin embargo, durante el periodo de velocidad decreciente R varía. La ecuación (9.6-l) se puede integrar gráficamente para cualquier forma de la curva de secado de velocidad decreciente, trazando $1/R$ en función de Xy determinando el área bajo la curva.

EJEMPLO 9.7-1. Integración gráfica en elperiodo de secado de velocidad decreciente
Se desea secar un lote de sólido húmedo cuya curva de velocidad de secado está representada por la figura 9.5-lb, desde un contenido de humedad libre de X_1 = 0.38 kg H_2O/kg sólido seco hasta X_2 = 0.04 kg H_2O/kg sólido seco. El peso del sólido seco es L_S = 399 kg sólido seco y A = 18.58 m^2 de superficie libre de secado. Calcule el tiempo de secado. Observe que L_S/A = 399118.58 = 21.5 kg/m^2.

Solución: Con base en la figura 9.5-lb, el contenido crítico de humedad libre es X_C = 0.195 kg H_2O/kg sólido seco. Por consiguiente, el secado se verifica en los periodos de velocidad constante y de velocidad decreciente.
Para el periodo de velocidad constante, X_1 = 0.38 y $X_2 = X_C$ = 0.195. Con base en la figura 9.5-lb, R_C = 1.51 kg $H_2O/h \cdot m^2$. Sustituyendo en la ecuación (9.6-2),

$$t = \frac{L_S}{AR_C}(X_1 - X_2) = \frac{399(0.38 - 0.195)}{(18.58)(1.51)} = 2.63 \text{ h}$$

Para el periodo de velocidad decreciente se prepara la siguiente tabla, leyendo los valores de R para diversos valores de Xen la figura 9.5-1b:

X	R	1/R	X	R	1/R
0.195	1.51	0.663	0.065	0.71	1.41
0.150	1.21	0.826	0.050	0.37	2.70
0.100	0.90	1.11	0.040	0.27	3.70

En la figura 9.7-l se traza una gráfica de $1/R$ en función de Xy se determina el área bajo la curva desde X_1 = 0.195 (punto C) hasta X_2 = 0.040:

$$\text{área} = A_1 + A_2 + A_3 = (2.5 \times 0.024) + (1.18 \times 0.056) + (0.84 + 0.075)$$
$$= 0.189$$

Al sustituir en la ecuación (9.6-l),

$$t = \frac{L_S}{A}\int_{X_2}^{X_1} \frac{dX}{R} = \frac{399}{18.58}(0.189) = 4.06 \text{ h}$$

El tiempo total es 2.63 + 4.06 = 6.69 h.

9.7B Métodos de cálculo para casos especiales en la región de velocidad decreciente

En algunos casos especiales que se presentan en la región de velocidad decreciente, la ecuación de tiempo de secado (9.6-l) puede integrarse analíticamente.

1. La velocidad está en función lineal de X. Si tanto X_1 como X_2 son inferiores a X_C y la velocidad R es lineal con respecto a X en esta región,

$$R = a\,X + b \tag{9.7-l}$$

donde a es la pendiente de la línea y b es una constante. Al diferenciar la ecuación (9.7-l) se obtiene $dR = a\,dX$, y sustituyendo en la ecuación (9.6-1),

$$t = \frac{L_S}{aA}\int_{R_2}^{R_1}\frac{dR}{R} = \frac{L_S}{aA}\ln\frac{R_1}{R_2} \tag{9.7-2}$$

Puesto que $R_1 = aX_1 + b$ y $R_2 = aX_2 + b$,

$$a = \frac{R_1 - R_2}{X_1 - X_2} \tag{9.7-3}$$

Al sustituir la ecuación (9.7-3) en (9.7-2),

$$t = \frac{L_S(X_1 - X_2)}{A(R_1 - R_2)}\ln\frac{R_1}{R_2} \tag{9.7-4}$$

2. La velocidad es una función lineal que pasa a través del origen. En algunos casos, una recta proyectada desde el contenido crítico de humedad que pasa a través del origen representa de manera adecuada a la totalidad del periodo de velocidad decreciente. En la figura 9.5-1b, esto correspondería a una recta desde C hasta *E* en el origen. La suposición anterior se establece con bastante frecuencia cuando se carece de datos más detallados. Entonces, para una recta a través del origen, donde la velocidad de secado es directamente proporcional al contenido de humedad libre,

$$R = aX \tag{9.7-5}$$

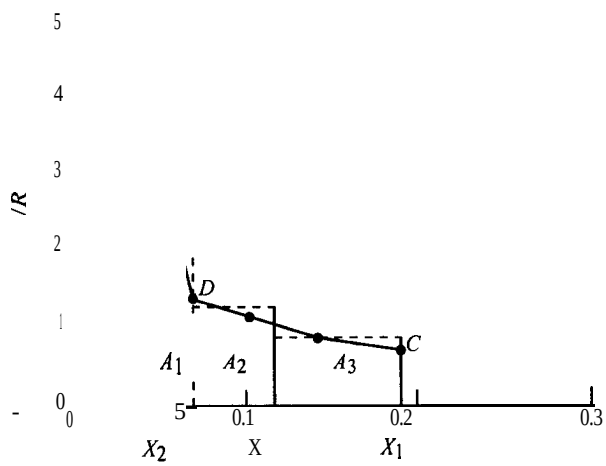


FIGURA 9.7-1. *Integración gráfica para un periodo de velocidad decreciente en el ejemplo 9.7-I*

Al diferenciar, $dX = dR/a$. Sustituyendo en la ecuación (9.6-1),

$$t = \frac{L_S}{aA}\int_{R_2}^{R_1} \frac{dR}{R} = \frac{L_S}{aA} \ln \frac{R_1}{R_2} \qquad (9.7\text{-}6)$$

La pendiente a de la línea es R_C/X_C, y para $X_1 = X_C$ cuando $R_1 = R_C$,

$$t = \frac{L_S X_C}{AR_C} \ln \frac{R_C}{R_2} \qquad (9.7\text{-}7)$$

Al observar también que $R_C/R_2 = X_C/X_2$,

$$t = \frac{L_S X_C}{AR_C} \ln \frac{X_C}{X_2} \qquad (9.7\text{-}8)$$

o

$$R = R_C \frac{X}{X_C} \qquad (9.7\text{-}9)$$

EJEMPLO 9.7-2. Aproximación de la recta para el periodo de velocidad decreciente Repita el ejemplo 9.7-l pero suponga como aproximación una recta de la velocidad R en función de X a través del origen, desde el punto X_C hasta $X = 0$ para el periodo de velocidad decreciente.

Solución: R_C = 1.5 1 kg $H_2O/h \cdot m^2$ y X_C = 0.195. El secado en el periodo de velocidad decreciente va de X_C hasta X_2 = 0.040. Sustituyendo en la ecuación (7.7-8),

$$t = \frac{L_S X_C}{AR_C} \ln \frac{X_C}{X_2} = \frac{399(0.195)}{18.58(1.51)} \ln \frac{0.195}{0.040}$$

$$= 4.39 \text{ h}$$

Este valor de 4.39 hes comparable al de 4.06 h obtenido en el ejemplo 9.7-1 por integración gráfica.

9.8 TRANSFERENCIA' DE CALOR POR COMBINACIÓN DE CONVECCIÓN, RADIACIÓN Y CONDUCCIÓN DURANTE EL PERIODO DE VELOCIDAD CONSTANTE

9.8A Introducción

En la sección 9.6B se dedujo una ecuación para predecir la velocidad de secado en el periodo de velocidad constante. La ecuación (9.6-7) se obtuvo suponiendo que el calor sólo se transfiere al sólido por convección desde el aire que lo rodea hasta la superficie de secado. Con frecuencia, el secado se lleva a cabo en un gabinete cerrado, donde las paredes irradian calor al sólido que se esta secando. Ademas, en algunos casos, el solido puede estar depositado en una bandeja metálica, y también existe una transferencia de calor por conducción a través del metal hacia el fondo del lecho sólido.

9.8B Deducción de la ecuación para convección, conducción y radiación

En la figura 9.8-l se muestra un material sólido que se está secando por medio de una corriente de aire. La velocidad total de transferencia de calor hasta la superficie de secado es

$$q = q_C + q_R + q_K \tag{9.8-l}$$

donde q_C es la transferencia convectiva de calor desde el gas a T °C hasta la superficie sólida a T_S °C en W (J/s), q_R es la transferencia de calor por radiación desde la superficie a T_R hasta T_S en W (J/s) y q_K es la velocidad de transferencia de calor por conducción desde el fondo en W. La velocidad de transferencia de calor convectiva es similar a la ecuación (9.6-3), expresada como sigue, donde $(T - T_S)$ °C = $(T - T_S)$ K,

$$q_C = h_C (T - T_S)A \tag{9.8-2}$$

donde A es el área de la superficie expuesta en m^2. La transferencia de calor por radiación es

$$q_R = h_R (T_R - T_S)A \tag{9.8-3}$$

donde h_R es el coeficiente de transferencia de calor por radiación, definido por la ecuación (4.9-10).

$$h_R = \varepsilon(5.676)\frac{\left(\frac{T_R}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_S}{100}\right)}{T_R - T_S} \tag{4.9-10}$$

Nótese que en la ecuación (4.9-10), T_R y T_S se dan en K. En la transferencia de calor por conducción desde el fondo, dicha transferencia de calor se verifica primero por convección desde el gas al metal, después por conducción a través del metal y, finalmente, por conducción a través del sólido. La radiación hacia el fondo de la bandeja suele ser bastante pequeña, sobre todo cuando dicha bandeja está encima de otra, por lo que despreciaremos este efecto en nuestras consideraciones. Además,

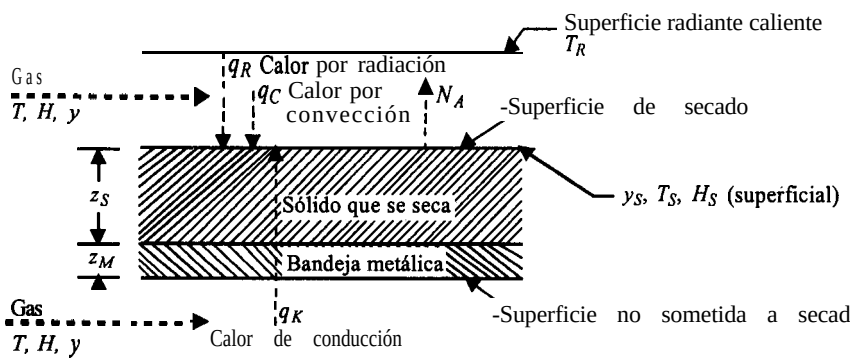


FIGURA 9.8-I. *Transferencia de calor y de masa en el secado de un sólido en la superficie superior*

si las temperaturas del gas no son muy altas, la radiación desde la superficie superior a la bandeja será pequeña. Por consiguiente, no es necesario poner mucho énfasis en el calor por radiación. El calor por conducción es

$$q_K = U_K(T - T_S)A \tag{9.8-4}$$

$$U_K = \frac{1}{1/h_C + z_M/k_M + z_S/k_S} \tag{9.8-5}$$

donde z_M es el espesor del metal en m, k_M es la conductividad térmica del metal en W/m · K, z_S es el espesor del sólido en m, y k_S es la conductividad térmica del sólido. Se supone que el valor de h_C en la ecuación (9.8-4) es el mismo que el de la (9.8-2).

La ecuación para la velocidad de transferencia de masa es similar a la ecuación (9.6-5) y es

$$N_A = k_y \frac{M_B}{M_A}(H_S - H) \tag{9.8-6}$$

Además, reescribiendo la ecuación (9.6-6),

$$q = M_A N_A \lambda_S A \tag{9.8-7}$$

Al combinar las ecuaciones (9.8-1), (9.8-2), (9.8-3), (9.8-4), (9.8-6) y (9.8-7),

$$R_C = \frac{q}{A} = \frac{(h_C - U_K)(T - T_S) + h_R(T_R - T_S)}{\lambda_S} = k_y M_B(H_S - H) \tag{9.8-8}$$

Esta ecuación se puede comparar con la (9.6-7) que proporciona la temperatura de bulbo húmedo T_W cuando no hay radiación y conducción. La ecuación (9.8-8) da temperaturas de superficie T_S mayores que las de bulbo húmedo T_W. Además, dicha ecuación también interseca a la línea de humedad saturada en T_S y H_S, y $T_S > T_W$ y $H_S > H_W$. La ecuación se debe resolver por aproximaciones sucesivas.

Para facilitar la resolución de la ecuación (9.8-8), se puede reordenar (Tl) como sigue:

$$\frac{(H_S - H)\lambda_S}{h_C/k_y M_B} = \left(1 + \frac{U_K}{h_C}\right)(T - T_S) + \frac{h_R}{h_C}(T_R - T_S) \tag{9.8-9}$$

En la deducción de la temperatura de bulbo húmedo de la ecuación (9.3-18) se demostró que la relación $h_C/k_y M_B$ se aproxima a c_S en la ecuación (9.3-6).

$$c_S = (1.005 + 1.88\ H)10^3\ \text{J/kg} \cdot \text{K} \tag{9.3-6}$$

EJEMPLO 9.8-l. Secado a velocidad constante con radiación y convección

Un material granular insoluble humedecido con agua se seca en un crisol de 0.457 × 0.457 m y de 25.4 mm de profundidad. El material tiene 25.4 mm de profundidad en el crisol de metal, que tiene un fondo de metal cuyo grosor es z_M = 0.610 mm y cuya conductividad térmica es k_M = 43.3 W/m · K. La conductividad térmica del sólido puede considerarse como k_S = 0.865 W/m · K. La transferencia de calor es por convección desde

una corriente de aire que fluye de manera paralela a la superficie secante superior y a la superficie de metal del fondo con una velocidad de 6.1 m/s, y a temperatura de 65.6 °C y humedad H = 0.010 kg H_2O/kg aire seco. La superficie superior también recibe la radiación directa de unas tuberías calentadas por vapor cuya temperatura superficial T_R = 93.3 °C. La emisividad del sólido es ε = 0.92. Estime la tasa de secado para el periodo de velocidad constante.

Solución: Algunos datos son los siguientes:

$$T = 65.6\ ^\circ\text{C}, \qquad z_S = 0.0254\ \text{m}, \qquad k_M = 43.3, \qquad k_S = 0.865$$
$$z_M = 0.00061\ \text{m} \qquad \varepsilon = 0.92, \qquad H = 0.010$$

La velocidad, temperatura y humedad del aire son iguales que en el ejemplo 9.6-3 y el coeficiente convectivo se predijo como $h_C = 62.45\ \text{W/m}^2 \cdot \text{K}$.
La solución de la ecuación (9.8-9) se realiza por prueba y error. La temperatura T_S sera superior a la temperatura del bulbo húmedo T_W = 28.9 °C y se calcula como T_S = 32.2 °C. Entonces, λ_S = 2424 kJ/kg según las tablas de vapor. Para predecir h_R a partir de la ecuación (4.9- 10) para $\varepsilon = 0.92$, $T_1 = 93.3 + 273.2 = 366.5$ K y $T_2 = 32.2 + 273.2 = 305.4$ K,

$$h_R = (0.92)(5.676)\frac{(366.5/100)^4 - (305.4/100)^4}{366.5 - 305.4} = 7.96\ \text{W/m}^2 \cdot \text{K}$$

Al usar la ecuación (9.8-5),

$$U_K = \frac{1}{1/h_C + z_M/k_M + z_S/k_S} = \frac{1}{1162.45 + 0.00061/43.3 + 0.0254/0.865}$$
$$= 22.04\ \text{W/m}^2 \cdot \text{K}$$

A partir de la ecuación (9.3-6),

$$c_S = (1.005 + 1.88\,H)10^3 = (1.005 + 1.88 \times 0.010)10^3$$
$$= 1.024 \times 10^3\ \text{J/kg} \cdot \text{K}$$

Esto puede sustituir a $(h_C/k_y M_B)$ en la ecuación (9.8-9). Además, si se sustituyen otros datos conocidos,

$$\frac{(H_S - 0.01)\lambda_S}{1.024 \times 10^3} = (1 + 22.04/62.45)(65.6 - T_S) + (7.96/62.45)(93.3 - T_S)$$
$$= 1.353(65.6 - T_S) + 0.1275(93.3 - T_S) \qquad \textbf{(9.8-10)}$$

Si se supone que T_S es 32.2 °C , $\lambda_S = 2424 \times 10^3$ J/kg. A partir de la gráfica de humedad para T_S = 32.2 °C, la humedad de saturación H_S = 0.03 1. Si se sustituye en la ecuación (9.8-10) y se despeja T_S,

$$\frac{(0.031 - 0.010)(2424 \times 10^3)}{1.024 \times 10^3} = 1.353(65.6 - T_S) + 0.1275\,(93.3 - T_S)$$
$$T_S = 34.4\ ^\circ\text{C}$$

Para el segundo intento, suponiendo que T_S = 32.5 °C, λ_S = 2423 × 10^3 y H_S de la gráfica de humedad en saturación es 0.032. Al sustituir en la ecuación (9.8-10), suponiendo que h_R no cambia apreciablemente, se obtiene un valor de T_S = 32.8 °C. En consecuencia, el valor final es de 32.8 "C. Éste es 3.9 °C mayor que la temperatura del bulbo húmedo de 28.9 °C en el ejemplo 9.6-3, donde no había radiación ni conducción.

Si se utiliza la ecuación (9.8-Q

$$R_C = \frac{(h_C + U_K)(T - T_S) + h_R(T_R - T_S)}{\lambda_S}(3600)$$

$$= \frac{(62.45 + 22.04)(65.6 - 32.8) + 7.96(93.3 - 32.8)}{2423 \times 10'}(3600)$$

$$= 4.83 \text{ kg/h} \cdot \text{m}^2$$

Esto es comparable con 3.39 kg/h ·m^2 para el ejemplo 9.6-3 cuando no hay radiación ni conducción.

9.9 SECADO POR DIFUSIÓN Y FLUJO CAPILAR DURANTE EL PERIODO DE VELOCIDAD DECRECIENTE

9.9A Introducción

Durante el periodo de velocidad decreciente, la superficie del sólido que se está secando ya no está completamente húmeda, y la velocidad de secado disminuye de manera uniforme con el tiempo (En la sección 9.7 se usaron métodos empíricos para predecir el tiempo de secado.) En otro de los métodos, se integró gráficamente la curva real de velocidad de secado para determinar el tiempo de secado.

En otro método se supuso una línea recta aproximada desde el contenido critico de humedad libre hasta el origen de humedad libre cero. Aquí se supuso que la velocidad de secado estaba en función lineal del contenido de humedad libre. Mediante la ecuación (9.5-3) se define la velocidad de secado R.

$$R = -\frac{L_S}{A}\frac{dX}{dt} \tag{9.5-3}$$

Cuando R es una función lineal de X en el periodo de velocidad decreciente,

$$R = aX \tag{9.7-5}$$

donde a es una constante. Igualando la ecuación (9.7-5) con la (9.5-3),

$$R = -\frac{L_S}{A}\frac{dX}{dt} = aX \tag{9.9-1}$$

Al reordenar,

$$\frac{dX}{dt} = -\frac{aA}{L_S}X \tag{9.9-2}$$

Sin embargo, como se mencionó brevemente en la sección 9.5E, hay muehos casos en los que la

velocidad de desplazamiento de la humedad está dictada durante el periodo de velocidad decreciente por la velocidad de movimiento interno del liquido por difusión líquida, o por movimiento capilar. Estudiaremos con más detalle estos dos métodos de movimiento de la humedad así como las teorías relacionadas con los datos experimentales en la región de velocidad decreciente

9.9B Difusión líquida de la humedad en el secado

Cuando la difusión líquida de la humedad controla la velocidad de secado en el periodo de velocidad decreciente, pueden aplicarse las ecuaciones de difusión descritas en el capítulo 7. Usando las concentraciones como Xkg humedad libre/kg sólido seco, en lugar de las concentraciones en kg mol humedad/m^3, la segunda ley de Fick para difusión en estado no estacionario de la ecuación (7.10-10), puede escribirse como

$$\frac{\partial X}{\partial t} = D \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \tag{9.9-3}$$

donde D_L es el coeficiente de difusión liquida en m^2/h y x es la distancia en el sólido en m.

Este tipo de difusión suele ser característico de los secados relativamente lentos de materiales no granulares como jabón, gelatina y pegamentos, así como en las últimas etapas del secado de agua combinada en arcillas, madera, textiles, cuero, papel, alimentos, almidones y otros sólidos hidrófilos.

Una de las principales dificultades para analizar los datos de secado por difusión consiste en que la distribución inicial de la humedad no es uniforme en todo el sólido al principio, si este periodo de velocidad decreciente va precedido por otro de secado a velocidad constante. Durante el secado por difusión, la resistencia a la transferencia de masa del vapor de agua desde la superficie suele ser bastante pequeña y la difusión en el sólido controla la velocidad de secado. Entonces, el contenido de humedad en la superficie está en equilibrio a un valor de X*. Esto significa que el contenido de humedad libre X en la superficie es esencialmente cero.

Si se supone que la distribución inicial de humedad es uniforme en el tiempo $t = 0$, la ecuación (9.9-3) puede integrarse según los métodos del capitulo 7 para obtener la siguiente expresión:

$$\frac{X_t - X^*}{X_{t1} - X^*} = \frac{X}{X_1} = \frac{8}{\pi^2}\left[e^{-D_L t(\pi/2x_1)^2} + \frac{1}{9}e^{-9D_L t(\pi/2x_1)^2} + \frac{1}{25}e^{-25D_L t(\pi/2x_1)^2} + \cdots\right] \tag{9.9-4}$$

donde X = contenido promedio de humedad libre al tiempo t h, X_1 = contenido inicial de humedad libre en el tiempo $t = 0$, X^* = contenido de humedad libre de equihbrio, $x_1 = \frac{1}{2}$ de espesor de la placa cuando el secado se verifica desde las caras paralelas superior e inferior, y x_1 = espesor total de la placa cuando el secado sólo se verifica desde la cara superior.

La ecuación (9.9-4) supone que D_L es constante, pero rara vez es constante, y varía con el contenido de agua, la temperatura y la humedad. Para tiempos de secado largos, el único término de la ecuación (9.9-4) que tiene importancia es el primero; por tanto la expresión se transforma en

$$\frac{X}{X_1} = \frac{8}{\pi^2}e^{-D_L t(\pi/2x_1)^2} \tag{9.9-5}$$

Al despejar el tiempo de secado,

$$t = \frac{4x_1^2}{\pi^2 D_L} \ln \frac{8X_1}{\pi^2 X} \tag{9.9-6}$$

En esta ecuación, si el mecanismo de difusión empieza en X = X_C , entonces $X_1 = X_C$. Diferenciando la ecuación (9.9-6) con respecto al tiempo y reordenando,

$$\frac{dX}{dt} = -\frac{\pi^2 D_L X}{4x_1^2} \tag{9.9-7}$$

Multiplicando ambos lados por $-L_S/A$,

$$R = -\frac{L_S}{A}\frac{dX}{dt} = \frac{\pi^2 L_S D_L}{4x_1^2 A} X \tag{9.9-8}$$

Por consiguiente, las ecuaciones (9.9-7) y (9.9-8) indican que, cuando la difusión interna es el efecto que controla durante tiempos prolongados, la velocidad de secado es directamente proporcional a la humedad libre Xy a la difusividad líquida, y que la velocidad de secado es inversamente proporcional al cuadrado del espesor. En otras palabras, expresado como el tiempo de secado entre límites de humedad fijos, dicho tiempo varía directamente con el cuadrado del espesor. La velocidad de secado debe ser independiente de la velocidad del gas y de la humedad.

EJEMPLO 9.9-l. Secado de placas de madera cuando la difusión controla la humedad

El coeficiente promedio de difusión experimental de la humedad en determinado tipo de madera es 2.97 $\times 10^{-6}$ m^2/h (3.20 $\times 10^{-5}$ pie^2/h). Se secan grandes placas de madera de 25.4 mm de espesor por ambos lados con aire que tiene una humedad tal que el contenido de humedad de equilibrio en la madera es X^* = 0.04 kg H_2O/kg de madera seca. Se desea secar la madera desde un contenido promedio de humedad total de X_{t1} = 0.29 hasta X_t = 0.09. Calcule el tiempo requerido.

Solución: El contenido de humedad libre $X_1 = X_{t1} - X^* = 0.29 - 0.04 = 0.25$, $X = X_t - X^* = 0.09 - 0.04 = 0.05$. El espesor de la mitad de la placa $x_1 = 25.4/(2 \times 1000) = 0.0127$ m. Sustituyendo en la ecuación (9.9-6),

$$t = \frac{4x_1^2}{\pi^2 D_L} \ln \frac{8X_1}{\pi^2 X} = \frac{4(0.0127)^2}{\pi^2 (2.97 \times 10^{-6})} \ln \frac{8 \times 0.25}{\pi^2 \times 0.05}$$

$$= 30.8 \text{ h}$$

En otro procedimiento se emplea la figura 5.3-l 3 para la concentración promedio en la placa. La ordenada $E_a = X/X_1 = 0.05/0.25 = 0.20$. Tomando la lectura de la gráfica de $0.56 = D_L t/x_1^2$, sustituyendo y despejando t,

$$t = \frac{x_1^2 (0.56)}{D_L} = \frac{(0.0127)^2 (0.56)}{2.97 \times 10^{-6}} = 30.4 \text{ h}$$

9.9C Movimiento capilar de la humedad durante el secado

El agua puede fluir desde regiones de concentración eleva& hasta las de baja concentración como resultado de una acción capilar en lugar de difusión, cuando el tamaño de los poros de los materiales granulares es adecuado para ello.

La teoría capilar (P1) supone que un lecho empacado de esferas no porosas contiene espacios vacíos entre dichas esferas que se llaman poros. A medida que se evapora el agua, las fuerzas capilares actúan debido a la tensión interfacial entre el agua y el sólido. Estas fuerzas dan lugar a la fuerza impulsora para desplazar el agua a través de los poros hasta la superficie de secado.

Para deducir una ecuación de la velocidad de secado cuando el flujo se efectúa por movimiento capilar, se puede usar una fuerza modificada de la ecuación de Poiseuille para flujo laminar en combinación con la ecuación de fuerza capilar. Si el movimiento de la humedad obedece las ecuaciones del flujo capilar, la velocidad de secado R variará en forma lineal con X. Puesto que el mecanismo de evaporación durante este periodo es igual al que prevalece durante el periodo de velocidad constante, los efectos de las variables del gas de secado, tales como la velocidad del gas, la temperatura del gas, la humedad del gas, etc., serán los mismos que para el periodo de secado de velocidad constante.

La ecuación de definición para la velocidad de secado es

$$R = \frac{L_S}{A}\frac{dX}{dt} \tag{9.5-3}$$

Cuando la velocidad R varía linealmente con X, como se estableció con anterioridad,

$$R = R_C \frac{X}{X_C} \tag{9.7-9}$$

$$t = \frac{L_S X_C}{A R_C} \ln \frac{X_C}{X_2} \tag{9.7-8}$$

Se define t como el tiempo entre X = X_2 y

$$L_S = x_1 A \rho_S \tag{9.9-9}$$

donde ρ_S = densidad del sólido en kg sólido seco/m^3. Sustituyendo la ecuación (9.9-9) y X = X_2 en la ecuación (9.7-8),

$$t = \frac{x_1 \rho_S X_C}{R_C} \ln \frac{X_C}{X} \tag{9.9-10}$$

Al sustituir la ecuación (9.6-7) en lugar de R_C,

$$t = \frac{x_1 \rho_S \lambda_W X_C}{h(T - T_W)} \ln \frac{X_C}{X} \tag{9.9-11}$$

Por consiguiente, las ecuaciones (9.9-10) y (9.9-l 1) indican que cuando el flujo capilar es el factor que controla durante el periodo de velocidad decreciente, la velocidad de secado es inversamente proporcional al espesor. El tiempo de secado entre límites fijos de humedad varía directamente con el espesor y depende de la velocidad, la temperatura y la humedad del gas.

9.9D Comparación entre difusión de líquido y flujo capilar

Para determinar el mecanismo de secado en el periodo de velocidad decreciente, los datos experimentales obtenidos por el contenido de humedad en diversos tiempos, usando condiciones de secado

constante, se suelen analizar de la siguiente manera. Primero, se procede a graficar en papel semilogarítmico el *cambio de humedad* no *logrado,* que se define como la relación de humedad libre presente en el sólido después de secar durante t horas, y el total del contenido de humedad libre presente al principio del periodo de velocidad decreciente, X/X_C. Si se obtiene una recta, tal como la curva B de la figura 9.9-l usando la escala superior para las abscisas, entonces son aplicables las ecuaciones (9.9-4) a (9.9-6) para difusión, o las ecuaciones (9.9-10) y (9.9-l 1) para flujo capilar.

Si la ecuación aplicable es la de flujo capilar, la pendiente de la línea B de secado con velocidad decreciente en la figura 9.9-l se relaciona con la ecuación (9.9-10), que contiene la velocidad constante del secado R_C. El valor de R_C se calcula con base en la pendiente medida de la línea, que es $-R_C/x_1 \rho_S X_C$, y si concuerda con el valor experimental de R_C en el periodo de velocidad constante o con la predicción del valor de R_C, el movimiento de humedad es por flujo capilar.

Si los valores de R_C no concuerdan, el desplazamiento de la humedad es por difusión y la pendiente de la línea B de la figura 9.9-1, correspondiente a la ecuación (9.9-6) debe ser igual a $-\pi^2 D_L/4x_1^2$. Sin embargo, en la práctica, la difusividad D_L suele ser menor con contenidos de humedad pequeños que con contenidos de humedad altos, en cuyo caso se determina experimentalmente un valor promedio de D_L en el intervalo de humedades considerado. La línea A corresponde a la ecuación (9.9-4), donde se grafica $\ln (X/X_1)$ o $\ln (X/X_C)$ en función de $D_L t/x_1^2$. Esta gráfica es igual a la de la figura 5.3-13 para una placa, y muestra una curvatura en la línea para valores de X/X_C entre 1 .O y 0.6, y una línea recta para $X/X_C < 0.6$.

Cuando los datos experimentales muestran que el movimiento de la humedad sigue la ley de difusión, las difusividades experimentales promedio se pueden calcular como sigue para diferentes intervalos de concentración. Se selecciona un valor de X/X_C de, por ejemplo, 0.4. Con base en una gráfica experimental similar a la de la curva B de la figura 9.9-1, se obtiene el valor experimental de t. Con la curva A a un valor de $X/X_C = 0.4$, se lee el valor teórico de $(D_L t/x_1^2)_{\text{teór}}$. Entonces, sustituyendo los valores conocidos de t y x_1 en la ecuación (9.9-12) se obtiene el valor promedio experimental de D_L en el intervalo de $X/X_C = 1.0–0.4$.

$$D_L = \left(\frac{D_L t}{x_1^2}\right)_{\text{teór}} \frac{x_1^2}{t} \tag{9.9-12}$$

Este proceso se repite para diversos valores de X/X_C. Los valores de D_L obtenidos para $X/X_C > 0.6$ son erróneos debido a la curvatura de la línea A.

EJEMPLO 9.9-2. Coeficiente de difusión en la raíz de la tapioca

La harina de tapioca se obtiene por procesos de secado y molienda de la raíz de tapioca. A continuación, se tabulan los datos experimentales del secado de cortes delgados de la raíz de tapioca de 3 mm de espesor, secados por ambos lados durante el periodo de velocidad decreciente y en condiciones de secado constante. El tiempo $t = 0$ es el inicio del periodo de velocidad decreciente.

X/X_C	t(h)	X/X_C	t(h)	X/X_C	t(h)
1.0	*0*	*0.55*	0.40	0.23	0.94
0.80	0.15	0.40	0.60	0.18	1.07
0.63	0.27	0.30	0.80		

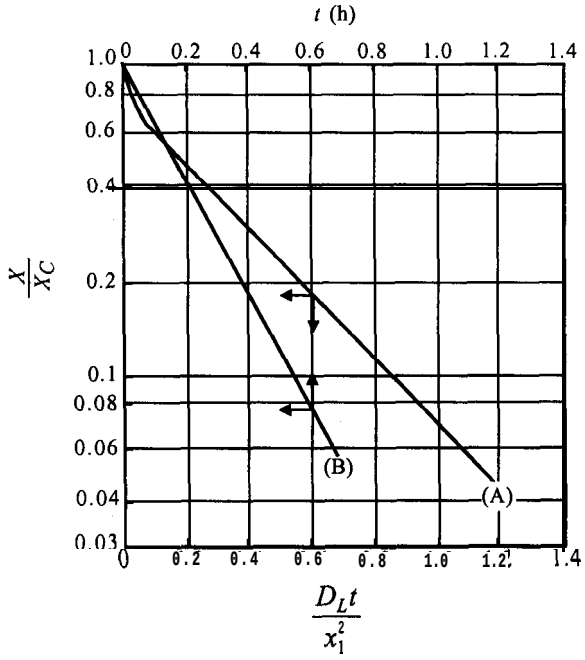


FIGURA 9.9-1. *Gráfica de las ecuaciones del periodo de velocidad decreciente: A) ecuación (9.9-4) para el desplazamiento de humedad por difusión, B) ecuación (9.9-10) para el desplazamiento de humedad por flujo capilar. (Tomado de R. H. Perry y C. H. Chilton, Chemical Engineers. Handbook, 5a. ed.. Nueva York: Mc-Graw Hill Book Company. 1973. Reproducida con autorización.)*

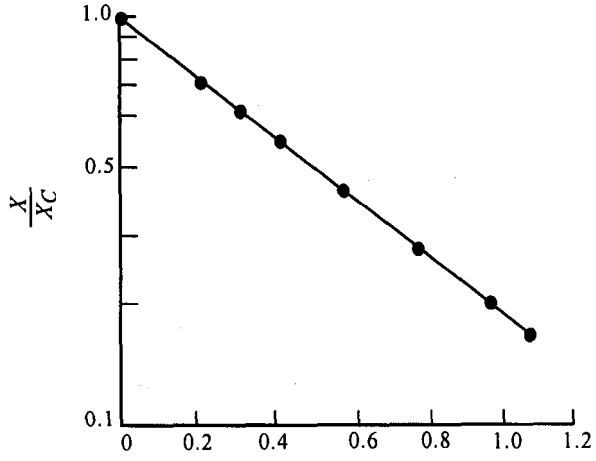


FIGURA 9.9-2. *Gráfica de los datos de secado del ejemplo 9.9-2*

Se ha determinado que los datos no obedecen la ecuación del flujo capilar, sino que parecen concordar con la ecuación de difusión. Grafique los datos como X/X_C en función de t en coordenadas semilogarítmicas y determine la difusividad promedio de la humedad hasta un valor de $X/X_C = 0.20$.

Solución: En la figura 9.9-2 se grafican los datos como X/X_C en la escala logarítmica en función de t en una escala lineal, y se traza una curva uniforme a través de los puntos. A un valor de X/X_C = 0.20, se lee en la gráfica un valor de t = 1.02 h. Para un secado por ambos lados, el valor de x_1 = 3 mm/2 = 1.5 mm. Con base en la figura 9.9-1, línea A, para X/X_C = 0.20, $(D_L t/x_1^2)_{teór}$ = 0.56. Entonces, sustituyendo en la ecuación (9.9-12),

$$D_L = (D_L t/x_1^2)_{teór} \frac{x_1^2}{t} = \frac{0.56(1.5/1000)^2}{1.02 \times 3600} = 3.44 \times 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$$

9.10 ECUACIONES PARA DIVERSOS TIPOS DE SECADORES

9.10A Secado por circulación cruzada en lechos empacados

Para un secado por circulación cruzada, en el que el gas de secado pasa hacia arriba o hacia abajo a través de un lecho de sólido granular húmedo, puede haber tanto un periodo de velocidad constante 'como uno de velocidad decreciente durante el proceso. Con frecuencia, los sólidos granulares se colocan sobre un tamiz, de manera que el gas pase a través del mismo y de los espacios o poros abiertos entre las partículas sólidas.

1. Deducción de las ecuaciones. Para deducir las ecuaciones de este caso se supone que no hay pérdidas de calor, por lo que el sistema es adiabático. El secado será de humedad sin combinar en los sólidos granulares húmedos. Se considera un lecho de área de sección transversal uniforme A m^2, por el cual penetra un flujo de gas G kg gas seco/h . m^2 sección transversal, con la humedad de H_1. Con un balance de material del gas en cualquier momento, dicho gas sale del lecho con humedad H_2. La cantidad de agua que se elimina del lecho con el gas es igual a la velocidad de secado en ese tiempo.

$$R = G(H_2 - H_1) \tag{9.10-1}$$

donde R = kg H_2O/h . m^2 de sección transversal y G = kg aire seco/h . m^2 de sección transversal.

En la figura 9.1 O-l, el gas entra a T_1 y H_1 y sale a T_2 y H_2. Por consiguiente, tanto la temperatura T como la humedad H varían a través del lecho. Llevando acabo un balance de calor sobre una sección corta del lecho de dz m,

$$dq = -Gc_S A \, dT \tag{9.10-2}$$

donde A = m^2 de área de sección transversal, q es la velocidad de transferencia de calor en W (J/s) y c_S es el calor húmedo de la mezcla aire-vapor de agua en la ecuación (9.3-6). Nótese que G en esta ecuación está en kg/s . m^2. La ecuación de transferencia de calor indica que

$$dq = haA \, dz \, (T - T_W) \tag{9.10-3}$$

donde T_W = temperatura de bulbo húmedo del sólido,' h es el coeficiente de transferencia de calor en W/m^2 . K y a es m^2 de área superficial de sólidos /m^3 de volumen del lecho. Igualando la ecuación (9.10-2) con la (9.10-3), reordenando e integrando,

$$\frac{ha}{Gc_S} \int_0^z dz = -\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T - T_W} \tag{9.10-4}$$

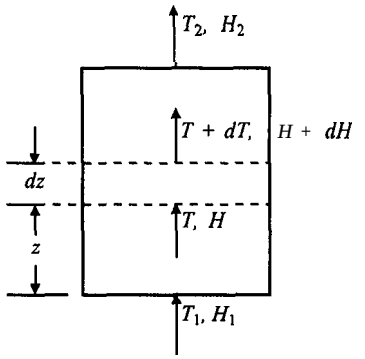


FIGURA *9.1* **O-l.** *Balances de calor y de material en un secador de circulación cruzada en un lecho empacado.*

$$\frac{haz}{Gc,} = \ln \frac{T_1 - T_W}{T_2 - T_W} \tag{9.10-5}$$

donde z = espesor del lecho = x_1 m.

La ecuación (9.6-11) se dedujo para el periodo de velocidad constante de un secado con aire que fluye paralelo a la superficie,

$$t = \frac{L_S \lambda_W (X_1 - X_2)}{Ah(T - T_W)} = \frac{L_S (X_1 - X_2)}{Ak_y M_B (H_W - H)} \tag{9.6-l 1}$$

Al usar la ecuación (9.9-9) y la definición de a, se obtiene

$$\frac{L_S}{A} = \frac{\rho_S}{a} \tag{9.10-6}$$

Al sustituir la ecuación (9.10-6) en la (9.6-l 1) y establecer que $X_2 = X_C$ para el secado hasta X_C, se obtiene la ecuación para el secado de circulación cruzada en el periodo de velocidad constante.

$$t = \frac{\rho_S \lambda_W (X_1 - X_C)}{ah(T - T_W)} = \frac{\rho_S (X_1 - X_C)}{ak_y M_B (H_W - H)} \tag{9.10-7}$$

De manera similar, la ecuación (9.7-8) para el periodo de velocidad decreciente, que supone que *R es* proporcional a X, se convierte en la siguiente expresión para el secado con circulación cruzada:

$$t = \frac{\rho_S \lambda_W X_C \ln(X_C/X)}{ah(T - T_W)} = \frac{\rho_S X_C \ln(X_C/X)}{ak_y M_B (H_W - H)} \tag{9.10-8}$$

Sin embargo, tanto la ecuacion (9.10-7) como la (9.10-8) sólo son válidas para un punto en el lecho de la figura 9.10-1, puesto que la temperatura *T* del gas varía en toda la extensión del lecho. Debido a esto, y procediendo de manera similar a la deducción de la transferencia de calor, puede usarse la media

logarítmica de la diferencia de temperaturas como una aproximación para la totalidad del lecho, en lugar de $T - T_W$ en las ecuaciones (9.10-7) y (9.10-8):

$$(T - T_W)_{LM} = \frac{(T_1 - T_W) - (T_2 - T_W)}{\ln\left[(T_1 - T_W)/(T_2 - T_W)\right]} = \frac{T_1 - T_2}{\ln\left[(T_1 - T_W)/(T_2 - T_W)\right]} \qquad \textbf{(9.10-9)}$$

Al sustituir el denominador de la ecuación (9.10-9) por la ecuación (9.10-5) y sustituyendo también el valor de T_2 de la ecuación (9.10-5) en la (9.10-9),

$$(T - T_W)_{LM} = \frac{(T_1 - T_W)\left(1 - e^{-haz/Gc_S}\right)}{haz/Gc_S} \qquad \textbf{(9.10-10)}$$

Al sustituir la ecuación (9.10-10) en la (9.10-7) para el periodo de velocidad constante y estableciendo que $x_1 = z$,

$$t = \frac{\rho_S \lambda_W x_1 (X_1 - X_C)}{Gc_S (T_1 - T_W)\left(1 - e^{-hax_1/Gc_S}\right)} \qquad \textbf{(9.10-11)}$$

La ecuación aproximada para el periodo de velocidad decreciente se obtiene de manera similar:

$$t = \frac{\rho_S \lambda_W x_1 X_C \, In \, (X_C/X)}{Gc_S (T_1 - T_W)\left(1 - e^{-hax_1/Gc_S}\right)} \qquad \textbf{(9.10-12)}$$

Una de las principales dificultades para el uso de la ecuación (9.10-12) consiste en que el contenido critico de humedad no se puede estimar con facilidad. Pueden obtenerse también diferentes formas de las ecuaciones (9.10-l 1) y (9.10-12), al usar humedad en lugar de temperatura (T1).

2. Coeficientes de transferencia de calor. En el secado por circulación cruzada, en el que los gases pasan a través del lecho de sólidos granulares húmedos, se pueden emplear las siguientes ecuaciones a fin de estimar h para la evaporación adiabática de agua (G1, Wl).

$$\left.\begin{aligned} h &= 0.151 \frac{G_t^{0.59}}{D_p^{0.41}} \quad \text{(SI)} \\ h &= 0.11 \frac{G_t^{0.59}}{D_p^{0.41}} \quad \text{(Unidades del sistema inglés)} \end{aligned}\right\} \frac{D_p G_t}{\mu} > 350 \qquad \textbf{(9.10-13)}$$

$$\left.\begin{aligned} h &= 0.2147 \frac{G_t^{0.49}}{} \quad \text{(SI)} \\ h &= 0.15 \frac{G_t^{0.49}}{D_p^{0.51}} \quad \text{(Unidades del sistema inglés)} \end{aligned}\right\} \frac{D_p G_t}{\mu} < 350 \qquad \textbf{(9.10-14)}$$

donde h está en $W/m^2 \cdot K$, D_p es el diámetro en metros de una esfera que tiene la misma área superficial de la partícula en el lecho, G_t es la velocidad de masa total que entra al lecho en

kg/h · m^2 y μ es la viscosidad en kg/m . h. En unidades del sistema inglés, h se da en btu/h . pie^2 · °F, D_p en pies, G_t en lb_m/h . pie^2 y μ en lb_m/pie · h.

3. Factores geométricos en un lecho. Para determinar el valor de *a,* esto es, m^2 de área superficial/ m^3 del lecho, en un lecho empacado con partículas esféricas con un diámetro D_p m,

$$a = \frac{6(1-\varepsilon)}{D_p} \qquad (9\ 10\text{-}15)$$

donde ε es la fracción de espacios vacíos en el lecho. Para partículas cilíndricas,

$$a = \frac{4(1-\varepsilon)(h + 0.5D_c)}{D_c h} \qquad (9.10\text{-}16)$$

donde D_C es el diámetro del cilindro en metros y *h* es la longitud del cilindro en metros. El valor de D_p que debe aparecer en las ecuaciones (9.10-l 3) y (9.10-14) para un cilindro es el diámetro de una esfera que tenga la misma área superficial del cilindro, como sigue:

$$D_p = (D_C h + 0.5 D_c^2)^{1/2} \qquad (9.10\text{-}17)$$

4. *Ecuaciones para partículas muy pequeñas.* Las ecuaciones deducidas para periodos de velocidad constante y velocidad decreciente en lechos empacados son válidas para partículas de aproximadamente 3 a 19 mm de diámetro en lechos poco profundos de más o menos 10 a 65 mm de espesor (Tl, M1). Para partículas muy finas de malla 10 a 200 (1.66 a 0.079 mm) y profundidades del lecho mayores que ll mm, el área interfacial *a* varía con el contenido de humedad. Existen expresiones empíricas para estimar *a,* así como el coeficiente de transferencia de masa (Tl, Al).

EJEMPLO 9.10-l. Secado por circulación cruzada en un lecho

Una pasta granular se extruye para formar cilindros con diámetro de 6.35 mm y longitud de 25.4 mm. El contenido inicial total de humedad es X_{t1} = 1 .O kg H_2O/kg de sólido seco y la humedad de equilibrio es X^* = 0.01. La densidad del sólido seco es 1602 kg/m^3 (100 lb_m/pie^3). Los cilindros se empacan sobre un tamiz con profundidad de x_1 = 50.8 mm. La densidad de empaque del sólido seco en el lecho es ρ_S = 641 kg/m^3. El aire de entrada tiene humedad H_1 = 0.04 kg H_2O/kg de aire seco y temperatura T_1 = 121.1 "C. La velocidad superficial del gas es 0.811 m/s y atraviesa la totalidad del lecho. El contenido crítico de humedad total es X_{tC} = 0.50. Calcule el tiempo total para secar los sólidos hasta X_t = 0.10 kg H_2O/kg de sólido seco.

Solución: Para el sólido,

$$X_1 = X_{t1} - X^* = 1.00 - 0.01 = 0.99 \text{ kg } H_2O/\text{kg de sólido seco}$$
$$X_C = X_{tC} - X^* = 0.50 - 0.01 - 0.49$$
$$x = X_t - X^* = O.1O\text{-}0.01 = 0.09$$

Para el gas, T_1 = 12 1.1 °C y H_1 = 0.04 kg H_2O/kg de aire seco. La temperatura de bulbo húmedo (extrapolando en la gráfica de humedad hasta 121.1 "C) es T_W = 47.2 °C y H_W =

0.074. La temperatura del sólido corresponde a T_W cuando se desprecian la radiación y la conducción. La densidad del aire de entrada a 12 1.1 °C y 1 atm es

$$v_H = (2.83 \times 10^{-3} + 4.56 \times 10^{-3} \times 0.04)(273 + 121.1) \qquad (9.3\text{-}7)$$

$$= 1.187 \text{ m}^3/\text{kg de aire seco}$$

$$\rho = \frac{1.00 + 0.04}{1.187} = 0.876 \text{ kg de aire seco} + \text{H}_2\text{O/m}^3$$

La velocidad de masa del aire seco es

$$G = v\rho\left(\frac{1.0}{1.0+0.04}\right) = 0.811(3600)(0.876)\left(\frac{1}{1.04}\right) = 2459 \text{ kg de aire seco/h . m}^2$$

Puesto que el valor de entrada H_1 = 0.040 y el valor de salida será inferior a 0.074, puede emplearse un valor promedio aproximado de H de 0.05 para calcular la velocidad de masa promedio total. El valor promedio aproximado de G_t es

$$G_t = 2459 + 2459(0.05) = 2582 \text{ kg de aire} + \text{H}_2\text{O/h} \cdot \text{m}^2$$

En el lecho empacado, la fracción de espacios vacíos ε se calcula como sigue para 1 m^3 del lecho que contiene sólidos más espacios vacíos. Hay un total de 641 kg de sólido seco presente. La densidad del sólido seco es 1602 kg sólido seco/m^3 de sólido. El volumen de los sólidos en 1 m^3 del lecho es entonces 641/1602, o 0.40 m^3 de sólido. Por consiguiente, $\varepsilon = 1 - 0.40 = 0.60$. La longitud del cilindro de sólido es h = 0.0254 m. El diámetro es D_c = 0.00635 m. Sustituyendo en la ecuación (9.10-16),

$$a = \frac{4(1-\varepsilon)(h + 0.50,)}{D_c h} = \frac{4(1-0.6)[0.0254 + 0.5(0.00635)]}{0.00635(0.0254)}$$

$$= 283.5 \text{ m}^2 \text{ área superficial/m}^3 \text{ volumen de lecho}$$

Para calcular1 diámetro D_p de una esfera con la misma área del cilindro, usando la ecuación (9.10-17),

$$D_p = (D, h - 0.5 D,)^{1/2} = [0.00635 \times 0.0254 + 0.5(0.00635)^2]^{1/2}$$

$$= 0.0135 \text{ m}$$

El espesor del lecho es x_1 = 50.8 mm = 0.0508 m.

Para calcular el coeficiente de transferencia de calor es necesario calcular primero el número de Reynolds. Suponiendo un valor aproximado de temperatura promedio del aire de 93.3 °C, la viscosidad del aire es $\mu = 2.15 \times 10^{-5}$ kg/m · s = 2.15×10^{-5} (3600) = 7.74×10^{-2} kg/m · h. El número de Reynolds es

$$N_{\text{Re}} = \frac{D_p G_t}{\text{P}} = \frac{0.0135(2582)}{7.74 \text{ x } 10^{-2}} = 450$$

Aplicando la ecuación (9.10-l 3),

$$h = 0.151 \frac{G_t^{0.59}}{D_p^{0.41}} = \frac{0.151(2582)^{0.51}}{(0.0135)^{0.41}} = 90.9 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$$

Al usar las tablas de vapor para $T_W = 47.2$ °C, $\lambda_W = 2389$ kJ/kg, o 2.389×10^6 J/kg (1027 btu/lb_m). Con base en la ecuación (9.3-6), el calor húmedo promedio es

$$c_S = 1.005 + 1.88H = 1.005 + 1.88(0.05) = 1.099 \text{ kJ/kg de aire seco . K}$$
$$= 1.099 \times 10^3 \text{ J/kg . K}$$

Para calcular el tiempo de secado durante el periodo de velocidad constante, usando la ecuación (9.10-l 1) y un valor de G = 2459/3600 = 0.6831 kg/s . m^2,

$$t = \frac{\rho_S \lambda_W x_1 (X_1 - X_C)}{G c_S (T_1 - T_W)\left(1 - e^{-hax_1/Gc_S}\right)}$$

$$= \frac{641(2.389 \times 10^6)(0.0508)(0.99 - 0.49)}{(0.683)(1.099 \times 10^3)(121.1 - 47.2)\left[1 - e^{-(90.9 \times 283.5 \times 0.0508)/(0.683 \times 1.099 \times 10^3)}\right]_1}$$

$$= 850 \text{ s} = 0.236 \text{ h}$$

Aplicando la ecuación (9.10-12) para el tiempo de secado durante el periodo de velocidad decreciente,

$$t = \frac{\rho_S \lambda_W x_1 X_C \ln(X_C/X)}{G c_S (T_1 - T_W)\left(1 - e^{-hax_1/Gc_S}\right)}$$

$$= \frac{641(2.389 \times 10^6)(0.0508)(0.49)\ln(0.49/0.09)}{(0.6831)(1.099 \times 10^3)(121.1 - 47.2)\left[1 - e^{-(90.9 \times 283.5 \times 0.0508)/(0.683 \times 1.099 \times 10^3)}\right]}$$

$$= 1412 \text{ s} = 0.392 \text{ h}$$

tiempo total $t = 0.236 + 0.392 = 0.628$ h

9.10B Secado en bandejas con condiciones variables de aire

Para el secado en un secador de compartimientos o de bandejas, donde el aire pasa en flujo paralelo sobre la superficie de la bandeja, las condiciones de aire no permanecen constantes. Deben llevarse

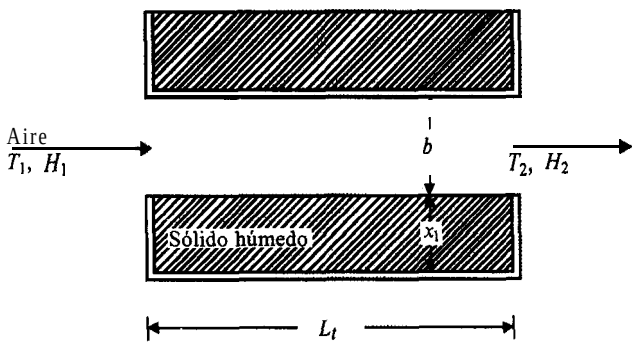


FIGURA 9.10-2. *Balances de material y de calor en un secador de bandejas.*

a cabo balances de calor y de materia similares a los de la circulación cruzada, para determinar la temperatura y la humedad del gas de salida.

En la figura 9.10-2 se muestra el paso de aire sobre una bandeja. El gas entra a temperatura T_1 y humedad H_1 y sale a T_2 y H_2. La separación entre las bandejas es *b* m y el flujo de aire seco es G kg de aire seco/s · m^2 de corte de sección transversal. Si se escribe un balance de calor con respecto a la longitud dL_t de bandeja para una sección de 1 m de ancho,

$$dq = Gc_S(1 \times b)dT \tag{9.10-18}$$

La ecuación de transferencia de calor es

$$dq = h(1 \times dL_t)(T - T_W) \tag{9.10-19}$$

Al reordenar e integrar,

$$\frac{hL_t}{Gc_S b} = \ln \frac{T_1 - T_W}{T_2 - T_W} \tag{9.10-20}$$

Al definir una media logarítmica de la diferencia de temperatura similar a la ecuación (9.10-10) y sustituyendo en las ecuaciones (9.6-l 1) y (9.7-8), se obtiene lo siguiente. Para el periodo de velocidad constante,

$$t = \frac{x_1 \rho_S L_t \lambda_W (X_1 - X_C)}{Gc_S b(T_1 - T_W)\left(1 - e^{-hL_t/Gc_S b}\right)} \tag{9.10-21}$$

Para el periodo de velocidad decreciente, se obtiene una ecuación aproximada,

$$t = \frac{x_1 \rho_S L_t \lambda_W X_C \ln (X_C/X)}{Gc_S b(T_1 - T_W)\left(1 - e^{-hL_t/Gc_S b}\right)} \tag{9.10-22}$$

9.10C Balances de materia y de calor para secadores continuos

1. Balances simples de calor y materia. En la figura 9.10-3 se muestra el diagrama de flujo para un secador de tipo continuo, en el que el gas de secado fluye a contracorriente al flujo de sólidos. El sólido entra a velocidad L_S kg de solido seco/h, con un contenido de humedad libre de X_1 y temperatura T_{S1} y sale a X_2 y T_{S2}. El gas entra a velocidad G kg de aire seco/h, con humedad H_2 kg H_2O/kg de aire seco y temperatura T_{G2}. El gas sale a T_{G1} y H_1.

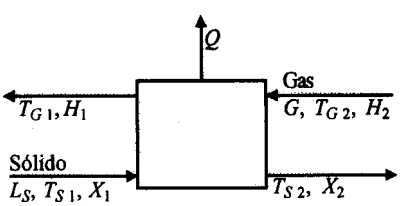


FIGURA 9.1 O-3 *Proceso de flujo para un secador continuo a contracorriente.*

El balance de materia con respecto a la humedad,

$$GH_2 + L_S X_1 = GH_1 + L_S X_2 \qquad \textbf{(9.10-23)}$$

Se selecciona un valor básico de T_0 °C para el balance de calor. Una temperatura conveniente es 0 °C (32 °F). La entalpía del sólido húmedo está constituida por la entalpía del sólido seco más la del líquido como humedad libre, En general, se suele despreciar el calor de hurnidificación. La entalpía del *gas* H'_G en kJ/kg de aire seco es

$$H'_G = c_S(T_G - T_0) + H\lambda_0 \qquad \textbf{(9.10-24)}$$

donde λ_0 es el calor latente del agua a T_0 "C, 2501 kJ/kg (1075.4 btu/lb$_m$) a 0 °C, y c_S es el calor húmedo, que se expresa en kJ/kg de aire seco · K.

$$c_S = 1.005 + 188H \qquad (9.3\text{-}6)$$

La entalpía del sólido húmedo H'_S en kJ/kg de sólido seco, donde $(T_S - T_0)$ °C = $(T_S - T_0)$ K es

$$H'_S = c_{pS}(T_S - T_0) + Xc_{pA}(T_S - T_0) \qquad \textbf{(9.10-25)}$$

donde c_{pS} es la capacidad calorífica del sólido seco en kJ/kg de sólido seco · K y c_{pA} es la capacidad calorífica de la humedad líquida en kJ/kg H_2O · K. Se desprecia el calor de humidificación o adsorción.

El balance de calor para un secador es

$$GH'_{G2} + L_S H'_{S1} = GH'_{G1} + L_S H'_{S2} + Q \qquad \textbf{(9.10-26)}$$

donde Q es la pérdida de calor en el secado en kJ/h. Para un proceso adiabático, Q = 0, y si se añade calor, Q es negativa.

EJEMPLO 9.10-2. Balance de calor en un secador

Se usa un secador continuo a contracorriente para secar 453.6 kg de sólido seco/h que contienen 0.04 kg de humedad total/kg de sólido seco, hasta un valor de 0.002 kg de humedad total/kg de sólido seco. El sólido granular entra a 26.7 °C (80 °F) y se desea descargarlo a 62.8 °C (145 °F). El sólido seco tiene capacidad calorífica de 1.465 kJ/kg . K, que se supone constante. El aire de calentamiento entra a 93.3 °C (200 °F) y con humedad de 0.010 kg H_2O/kg de aire seco, y debe salir a 37.8 °C (100 °F). Calcule la velocidad de flujo de aire y la humedad de salida, suponiendo que no hay pérdidas de calor en el secador.

Solución: En la figura 9.10-3 se muestra el diagrama de flujo. Para el sólido, L_S = 453.6 kg/h de sólido seco, c_{pS} = 1.465 kJ/kg de sólido seco · K, X_1 = 0.040 kg H_2O/kg de sólido seco, c_{pA} = 4.187 kJ/kg H_2O · K, T_{S1} = *26.7* °C, T_{S2} = *62.8* °C *y* X_2 = *0.002*. (Note que los valores de X que se usan son valores de X_t). Para el gas, T_{G2} = *93.3* °C, H_2 = 0.010 kg H_2O/kg de aire seco y T_{G1} = *37.8* °C.

Al llevar a cabo un balance de materia con respecto a la humedad y usando la ecuación (9.10-23),

$$GH_2 + L_S X_1 = GH_1 + L_S X_2$$

$$G(0.010) + 453.6(0.040) = GH_1 + 453.6(0.002) \qquad \textbf{(9.10-27)}$$

Para el balance de calor, la entalpía del gas de entrada a 93.3 °C se calcula usando 0 °C como temperatura base en la ecuación (9.10-24), para la cual, AT °C = AT K y por medio de las tablas de vapor, λ_0 = 2501 kJ/kg,

$$H'_{G2} = c_S(T_{G2} - T_0) + H_2\lambda_0$$
$$= [1.005 + 1.88(0.010)](93.3 \quad 0) + 0.010(2501)$$
$$= 120.5 \text{ kJ/kg de aire seco}$$

Para el gas de salida,

$$H'_{G1} = c_S(T_{G1} - T_0) + H_1\lambda_0$$
$$= (1.005 + 1.88\,H_1)(37.8 - 0) + H_1(2501) = 37.99 + 2572\,H_1$$

Al usar la ecuación (9.10-25) para el sólido de entrada,

$$H'_{S1} = c_{pS}(T_{S1} - T_0) + X_1c_{pA}(T_{S1} - T_0)$$
$$= 1.465(26.7 - 0) + 0.040(4.187)(26.7 - 0) = 43.59 \text{ kJ/kg de sólido seco}$$
$$H'_{S2} = c_{pS}(T_{S2} - T_0) + X_2c_{pA}(T_{S2} - T_0)$$
$$= 1.465(62.8 - 0) + 0.002(4.187)(62.8 - 0) = 92.53 \text{ kJ/kg}$$

Al sustituir la ecuación (9.10-26) en el balance de calor con Q = 0, pues no hay pérdida de calor,

$$G(120.5) + 453.6(43.59) = G(37.99 + 2572\,H_1) + 453.6(92.53) + 0 \qquad (9.10\text{-}28)$$

Al resolver simultáneamente las ecuaciones (9.10-27) y (9.10-28),

$$G = 1166 \text{ kg de aire seco/h} \qquad H_1 = 0.0248 \text{ kg } H_2O/\text{kg de aire seco}$$

2. Recirculación de aire en los secadores. En muchos casos se desea controlar la temperatura del bulbo húmedo a la cual ocurre el secado del sólido. Además, como los costos del vapor suelen ser importantes al calentar el aire secante, se recircula el aire de secado para reducir los costos y controlar la humedad. Parte del aire caliente húmedo de salida se combina con aire nuevo y se recircula el secador. Esto se muestra en la figura 9.10-4. El aire fresco con temperatura T_{G1} y humedad H_1 se mezcla con aire recirculado a T_{G2} y H_2 para producir aire a T_{G3} y H_3. Esta mezcla se calienta hasta T_{G4} con $H_4 = H_3$. Después del secado, el aire sale a una temperatura menor T_{G2} y una humedad mayor H_2.

Se pueden efectuar los siguientes balances de materia en el agua. Para un balance de agua sobre el calentador, si se observa que $H_6 = H_5 = H_2$,

$$G_1H_1 + G_6H_2 = (G_1 + G_6)H_4 \qquad (9.10\text{-}29)$$

Al efectuar un balance de agua sobre el secador,

$$(G_1 + G_6)H_4 + L_SX_1 = (G_1 + G_6)H_2 + L_SC_2 \qquad (9.10\text{-}30)$$

De la misma manera, se pueden hacer balances de calor sobre el calentador y el secador y sobre el sistema global.

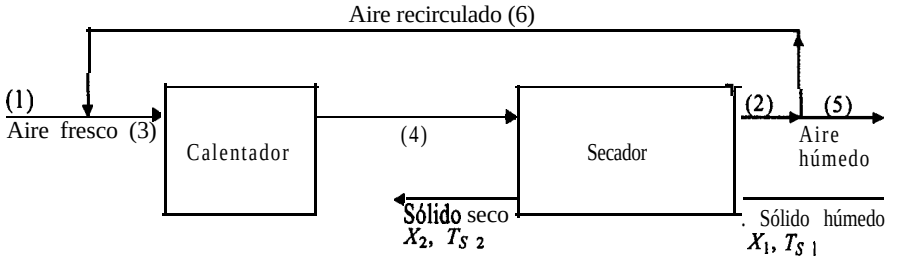


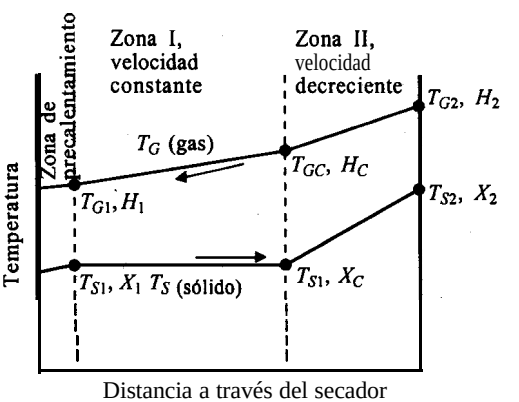
FIGURA 9.10-4. *Proceso de flujo para la recirculación de aire en un secador.*

9.10D Secador continuo a contracorriente

1. Introducción y perfiles de temperatura. El secado continuo representa ciertas ventajas sobre el secado por lotes. Casi siempre es posible usar equipos de tamaño más pequeño y el producto tiene un contenido de humedad más uniforme. En un secado continuo, el sólido se desplaza por el secador en contacto con una corriente de gas paralela o a contracorriente del sólido. En la operación adiabática a contracorriente, el gas caliente de entrada tiene contacto con el sólido que sale ya seco. En la operación adiabática en paralelo, el gas caliente de entrada se pone en contacto con el sólido húmedo.

En la figura 9.1 O-5 se muestran los perfiles típicos de temperatura para el gas T_G y el solido T_S en un secador continuo a contracorriente. En la zona de precalentamiento, el sólido se calienta hasta la temperatura de bulbo húmedo o de saturación adiabática. En esta zona se produce poca evaporación y casi siempre se pasa por alto cuando se trata de un secado a temperaturas bajas. En la zona de velocidad constante 1 se evaporan la humedad sin combinar y la superficial, mientras la temperatura del sólido permanece esencialmente invariable y equivale a la temperatura de saturación adiabática, cuando el calor se transfiere por convección. La velocidad de secado seria constante en este caso, pero la temperatura del gas varía y también la humedad. El contenido de humedad llega hasta el valor crítico X_C, al final de este periodo.

En la zona II se evaporan la humedad superficial no saturada y la saturada, y la humedad combinada, mientras el sólido se seca hasta el valor final X_2. La humedad del gas de entrada a la zona II es H_2 y



sale con humedad H_C. Puede emplearse la expresión de balance de materia, ecuación (9.1 O-23) para calcular H_C como sigue:

$$L_S(X_C - X_2) = G(H_C - H_2) \tag{9.10-31}$$

donde L_S esta en kg de sólido seco/h y G esta en kg sólido seco/h.

2. Ecuación para el periodo de velocidad constante. La velocidad de secado en la región de velocidad constante de la zona I sería invariable si no existieran condiciones cambiantes del gas. La velocidad de secado de esta sección se obtiene mediante una ecuación similar a la (9.6-7),

$$R = k_y M_B (H_W - H) = \frac{h}{\lambda_W}(T_G - T_W) \tag{9.10-32}$$

El tiempo de secado esta dado por la ecuación (9.6-l) usando X_1 y X_C como límites.

$$t = \left(\frac{L_S}{A}\right)\int_{X_c}^{X_1} \frac{dX}{R} \tag{9.10-33}$$

donde A/L_S *es* la superficie expuesta al secado en m^2/kg de sólido seco. Sustituyendo la ecuación (9.10-32) en la (9.10-33) y dX por $(G/L_S)\,dH$,

$$t = \frac{G}{L_S}\left(\frac{L_S}{A}\right)\frac{1}{k_y M_B}\int_{H_C}^{H_1} \frac{dH}{H_W - H} \tag{9.10-34}$$

donde G = kg de aire seco/h, L_S = kg de sólido seco/h y A/L_S = m^2/kg de sólido seco. Esta expresión se puede integrar por métodos gráficos.

Para el caso de T_W o H_W es constante para un secado adiabático, se puede integrar la ecuación (9.10-34).

$$t = \frac{G}{L_S}\left(\frac{L_S}{A}\right)\frac{1}{k_y M_B} \ln \frac{H_W - H_C}{H_W - H_1} \tag{9.10-35}$$

Esta expresión se puede modificar para usar la medida logarítmica de la diferencia de humedad.

$$\Delta H_{LM} = \frac{(H_W - H_C) - (H_W - H_1)}{\ln[(H_W - H_C)/(H_W - H_1)]} = \frac{H_1 - H_C}{\ln[(H_W - H_C)/(H_W - H_1)]} \tag{9.10-36}$$

Al sustituir la ecuación (9.10-36) en la (9.10-35), se obtiene otra posible-ecuación para la resolución:

$$t = \frac{G}{L_S}\left(\frac{L_S}{A}\right)\frac{1}{k_y M_B}\frac{H_1 - H_C}{\Delta H_{LM}} \tag{9.10-37}$$

H_C se calcula como sigue con base en la ecuación (9.10-31)

$$H_C = H_2 + \frac{L_S}{G}(X_C - X_2) \tag{9.10-38}$$

3. Ecuación para el periodo de velocidad decreciente. Si el secado de la superficie no saturada, H_W es constante para el secado adiabático, la velocidad de secado depende directamente de X, como en el caso de la ecuación (9.7-9) y se puede aplicar la (9.10-32):

$$R = R_C\frac{X}{X_C} = k_y M_B(H_W - H)\frac{X}{X_C} \qquad \textbf{(9.10-39)}$$

Al sustituir la ecuación (9.10-39) en la (9.6-1),

$$t = \left(\frac{L_S}{A}\right)\frac{X_C}{k_y M_B}\int_{x_2}^{x_c}\frac{dX}{(H_W - H)X} \qquad (9.10\text{-}40)$$

Al sustituir dX por $G\,dH/L_S$ y X por $(H - H_2)G/L_S + X_2$,

$$t = \frac{G}{L_S}\left(\frac{L_S}{A}\right)\frac{X_C}{k_y M_B}\int_{H_2}^{HC}\frac{dH}{(H_W - H)\left[(H - H_2)G/L_S + X_2\right]} \qquad (9.10\text{-}41)$$

$$t = \frac{G}{L_S}\left(\frac{L_S}{A}\right)\frac{X_C}{k_y M_B}\frac{1}{(H_W - H_2)G/L_S + X_2}\ln\frac{X_C(H_W - H_2)}{X_2(H_W - H_C)} \qquad (9.10\text{-}42)$$

De nueva cuenta, se puede utilizar la ecuación (9.10-38) para calcular H_C.

Estas ecuaciones para ambos periodos también se pueden deducir usando la última parte de la ecuación (9.10-32) y temperaturas en lugar de humedades.

9.11 LIOFILIZACION DE MATERIALES BIOLÓGICOS POR CONGELACIÓN

9.11A Introducción

Algunos productos alimenticios, farmacéuticos y biológicos, que no deben calentarse ni siquiera a temperaturas moderadas para un secado común, se secan por liofilización. Por lo general, la sustancia que va a secarse se congela exponiéndola a aire muy frío. En la liofilización por congelación, el agua se elimina como vapor por sublimación del material congelado en una cámara al vacío. Después de que la humedad se sublima como vapor, éste se extrae con bombas de vacío mecánicas o eyectores de chorro de vapor.

Por regla general, la liofilización da lugar a productos alimenticios de más alta calidad que con cualquier método de secado. El factor principal es la rigidez estructural que se preserva en la sustancia congelada cuando se verifica la sublimación. Esto evita el colapso de la estructura porosa después del secado. Al añadir agua posteriormente, el producto rehidratado retiene la mayor parte de su estructura original. La liofilización de materiales biológicos y alimenticios también tiene la ventaja de que conserva su sabor o aroma. Las temperaturas bajas que se emplean reducen al mínimo las reacciones de degradación que casi siempre ocurren en los procesos comunes de secado. Sin embargo, el secado por congelación es una forma de deshidratación de alimentos bastante costosa, debido a la velocidad lenta de secado y a la necesidad de usar vacío.

Puesto que la presión de vapor del hielo es bastante pequeña, la liofilización exige presiones muy bajas o un alto vacío. Si el agua estuviera en estado puro, podría llevarse a cabo un secado por congelación a temperaturas iguales o cercanas a 0 °C (273 K) con presión de 4580 μm (4.58 mm Hg abs). (Véanse las propiedades del hielo ene1 apéndice A.2). Sin embargo, puesto que el agua casi siempre

está en solución o en estado combinado, el material tiene que enfriarse por debajo de 0 °C para mantenerla en fase sólida. La mayoría de los procesos de liofilizado se efectúan a temperaturas de −10 °C (263 K) o inferiores, con presiones de aproximadamente 2000 μm o menos.

9.11B Deduccciones de las ecuaciones para Ba liofilización

En el proceso de liofilización el material original está construido por un núcleo central de material congelado. A medida que el hielo se sublima, el plano de sublimación, que se inicia en la superficie exterior, penetra al interior dejando atrás una corteza porosa de material ya seco. EE calor para el calor latente de sublimación del hielo, equivalente a 2838 kJ/kg (1220 btu/lb$_m$), procede por conducción a través de la corteza de material seco. En algunos casos, también se conduce a través de la capa congelada desde la parte posterior. El vapor de agua que se forma se transfiere a través de la capa de material seco. Por consiguiente, las transferencias de calor y de masa se verifican simultáneamente.

En la figura 9.11- 1 se ilustra la liofilización de un material. El calor transferido desde la fase gaseosa por conducción, convección o radiación, llega a Ea superficie seca y se transfiere por conducción hasta la capa congelada. En algunos casos, el calor también pasa a través del material congelado para llegar al plano de sublimación. El tiempo total de secado debe ser Po suficientemente largo como para que el contenido final de humedad sea inferior al 5% en peso, y evitar así la degradación del producto final durante su almacenamiento. Las temperaturas máximas que se alcanzan en alimentos secos y productos congelados deben ser bastante bajas para mantener la degradación a un mínimo.

El proceso más común de liofilización se basa en que Bos gases que rodean al material suministran a la superficie del sólido el calor de sublimación necesario. Después, el calor se transfiere por conducción a través del material seco hasta la superficie congelada. En la figura 9.1 1-2 se muestra el modelo simplificado de Sandall y colaboradores (S1).

En la figura 9.1 l-2 el flujo específico de calor a la superficie del material se verificaporconvección, y una vez en el sólido seco, por conducción hasta Ba superficie de sublimación. El flujo de calor a la superficie es igual al que pasa por el sólido seco, suponiendo un estado seudoestacionario.

$$q = h(T_e - T_S) = \frac{k}{\Delta L}(T_S - T_f) \qquad \textbf{(9.11-1)}$$

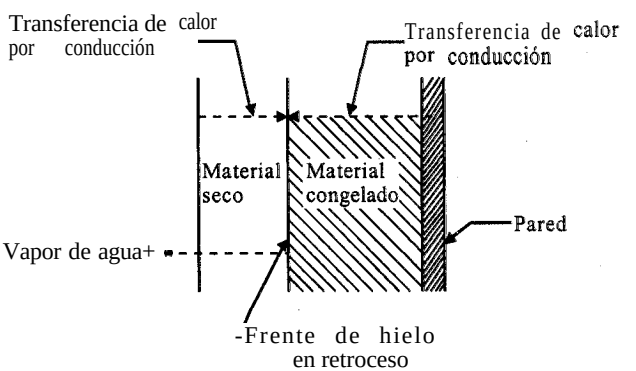


FIGURA 9.11-I. *Transferencia de calor y de masa en el secado por congelación.*

donde q es el flujo específico de calor en W (J/s), h es el coeficiente externo de transferencia de calor en W/m² · K, T_e es la temperatura externa del gas en °C, T_s es la temperatura de la superficie del sólido seco en °C, T_f es la temperatura del plano de sublimación o capa congelada en °C, k es la conductividad térmica del sólido seco en W/m · K y ΔL es el espesor de la capa seca en m. Nótese que $(T_s - T_f)°C = (T_s - T_f)K$.

De manera semejante, el flujo específico de masa del vapor de agua que proviene del plano de sublimación es

$$N_A = \frac{D'}{RT\,\Delta L}(p_{fw} - p_{sw}) = k_g(p_{sw} - p_{ew}) \tag{9.11-2}$$

donde N_A es el flujo específico del vapor de agua en kg mol/s · m², k_g es el coeficiente externo de transferencia de masa en kg mol/s · m² · atm, p_{sw} es la presión parcial del vapor de agua en la superficie en atm, p_{ew} es la presión parcial del vapor de agua en la fase total externa del gas en atm, T es la temperatura promedio en la capa seca, D' es una difusividad promedio efectiva en la capa seca en m²/s, y p_{fw} es la presión parcial del vapor de agua en equilibrio con el plano congelado de sublimación en atm.

La ecuación (9.1 l-l) puede reordenarse como sigue:

$$q = \frac{1}{1/h + \Delta L/k}\left(T_e - T_f\right) \tag{9.11-3}$$

Además, la ecuación (9.1 l-2) puede expresarse como

$$N_A = \frac{1}{1/k_g + RT\,\Delta L/D'}\left(p_{fw} - Pew\right) \tag{9.11-4}$$

Los coeficientes h y k_g están determinados por las velocidades del gas y las características del secador y, por tanto, son constantes. Las condiciones externas de operación dictan los valores de T_e y p_{ew}. La naturaleza del material procesado determina los valores de k y D'.

Los flujos específicos de calor y de masa en estado seudoestacionario se relacionan por medio de la expresión,

$$q = \Delta H_s\, N_A \tag{9.11-5}$$

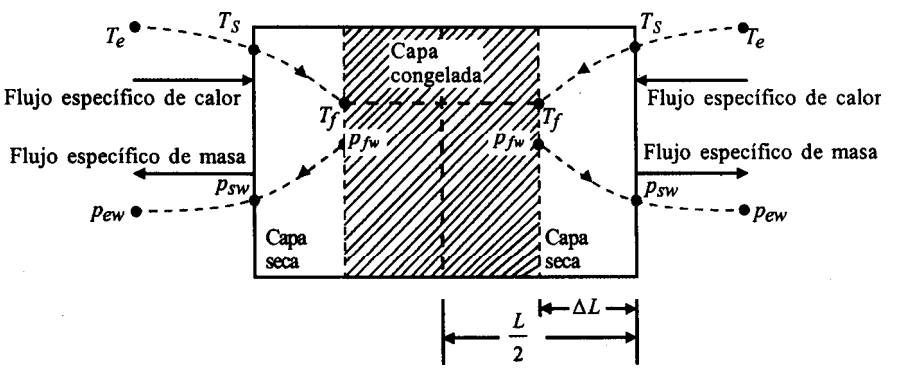


FIGURA 9.11-2. ***Modelo para el frente de hielo en retroceso en el secado por congelación.***

donde AH, es el calor latente de sublimación del hielo en J/kg mol. Además, p_{fw} sólo depende de T_f, puesto que se trata de la presión de vapor de equilibrio del hielo a dicha temperatura; es decir,

$$p_{fw} = f(T_f) \tag{9.11-6}$$

Al sustituir las ecuaciones (9.11-3) y (9.11-4) en la (9.11-5),

$$\frac{1}{1/h + \Delta L/k}\left(T_e - T_f\right) = \Delta H_s \frac{1}{1/k_g + RT\ \Delta L/D'}\left(p_{fw} - p_{ew}\right) \tag{9.11-7}$$

Además, sustituyendo las ecuaciones (9.11-1) y (9.11-4) en la (9.11-5),

$$\frac{1}{\Delta L/k}\left(T_s - T_f\right) = \Delta H_s \frac{1}{1/k_g + RT\ \Delta L/D'}\left(p_{fw} - p_{ew}\right) \tag{9.11-8}$$

A medida que aumenta T_e y, por tanto, T_s, con objeto de incrementar la velocidad de secado, se pueden alcanzar dos límites. Primero, la temperatura de la superficie exterior T_s no puede llegar avalores muy altos, debido a la posibilidad de deterioro térmico. En segundo lugar, la temperatura T_f se debe mantener bastante por debajo del punto de fusión. Cuando $k/\Delta L$ es pequeño en comparación con k_g y D'/RT AL, al aumentar el valor de T_s, el primer límite es la temperatura de la superficie externa. Para incrementar la velocidad de secado, es necesario aumentar *k*. Por consiguiente, se considera que el proceso esta controlado por la transferencia de calor. La mayor parte de los procesos de liofilización que se usan en la práctica están controlados por la transferencia de calor (K1).

Para resolver las ecuaciones, ΔL se relaciona con x, esto es, la fracción mol de la humedad libre original remanente.

$$\Delta L = (1 - x)\frac{L}{2} \tag{9.11-9}$$

La velocidad de secado por congelación se relaciona con N_A por medio de

$$N_A = \frac{L}{2}\frac{1}{M_A V_S}\left(-\frac{dx}{dt}\right) \tag{9.11-10}$$

donde M_A es el peso molecular del agua, V_S es el volumen del material sólido ocupado inicialmente por una unidad kg de agua ($V_S = 1/X_0\rho_S$), X_0 es el contenido inicial de humedad libre en kg H_2O/ kg de sólido seco, y ρ_S es la densidad de empaque del sólido seco en kg/m^3.

Al combinar las ecuaciones (9.11-3), (9.11-5), (9.11-9) y (9.11-10), se obtiene la siguiente expresión para la transferencia de calor.

$$\frac{L}{2}\frac{\Delta H_s}{M_A V_S}\left(-\frac{dx}{dt}\right) = \frac{1}{1/h + (1-x)L/2k}\left(T_e - T_f\right) \tag{9.11-11}$$

De manera análoga, para la transferencia de masa,

$$\frac{L}{2}\frac{1}{M_A V_S}\left(-\frac{dx}{dt}\right) = \frac{1}{1/k_g + RT(1-x)L/2D'}\left(p_{fw} - p_{ew}\right) \tag{9.11-12}$$

Al integrar la ecuación (9.1 l-l 1) entre los límites de $t = 0$ cuando $x_1 = 1.0$, y $t = t$ cuando $x_2 = x_2$, la ecuación para el tiempo de secado hasta x_2 es la siguiente, cuando h es muy grande (resistencia externa despreciable):

$$t = \frac{L^2}{4kV_S}\frac{\Delta H_s}{M_A}\frac{1}{T_e - T_f}\left(x_1 - x_2 - 2 + ? - \right) \qquad (9.11\text{-}13)$$

donde $\Delta H_s/M_A$ es el calor de sublimación en J/kg H_2O. Cuando $x_2 = 0$, el material está completamente seco.

Suponiendo que se conozcan las propiedades físicas y los coeficientes de transferencia de masa y de calor, puede usarse la ecuación (9.1 l-8) para calcular la temperatura de sublimación del hielo T_f cuando se conocen la temperatura circundante T_e y la presión parcial del ambiente p_{ew}. Puesto que h es muy grande, $T_e \cong T_s$. Entonces, la ecuación (9.11-S) se puede resolver en términos de T_f, puesto que T_f y p_{fw} están relacionadas por la expresión de la presión de vapor en equilibrio, ecuación (9.11-6). El valor de Tque se debe sustituir en la ecuación (9.11-8) se puede aproximarpormedio de la relación $(T_f + T_s)/2$.

Sandall y colaboradores (S1) han ensayado el modelo del frente de hielo en retroceso en comparación con datos reales de secado por congelación. El modelo logra predecir satisfactoriamente los tiempos de secado para la eliminación del 65 a 90% del agua total inicial (S 1, K1). La temperatura T_f de la interfase de sublimación permanece casi constante, tal como se supuso en la deducción. Sin embargo, durante la eliminación del restante 10 a 3 5% de aguarestante la velocidad de secado disminuyó notablemente y el tiempo real fue bastante mayor al que se predijo teóricamente para este periodo.

Se ha determinado que la conductividad térmica efectiva k del material seco varía de manera apreciable con la presión total y con el tipo de gas presente. Ademas, el tipo de material afecta al valor de k (S1, K1). La difusividad efectiva D' del material seco está en función de la estructura del material, de la difusividad de Knudsen y de la difusividad molecular (K1)

9.12 PROCESAMIENTO TÉRMICO EN ESTADO NO ESTACIONARIO Y ESTERILIZACIÓN DE MATERIALES BIOLÓGICOS

9.12A Introducción

Los materiales de origen biológico por lo general no son tan estables como la mayor parte de los materiales inorgánicos y algunos de los orgánicos. Por consiguiente, es necesario utilizar ciertos métodos de procesamiento para preservar los materiales biológicos, especialmente los alimentos. Se pueden emplear métodos de procesamiento físicos y químicos para la preservación, como secado, ahumado, salado, refrigerado, congelado y calentado. El congelamiento y la refrigeración de los alimentos se analizaron en la sección 5.5 como métodos para reducir la velocidad de descomposición de los materiales biológicos. Además, en la sección 9.11 se estudió el secado por congelamiento de los materiales biológicos.

Un método importante es el procesamiento por calor o térmico, que destruye los microorganismos contaminantes que aparecen en primer lugar en la superficie externa de los alimentos y causan la descomposición de éstos y problemas de salud. Gracias a esto se pueden lograr mayores tiempos de almacenamiento de los alimentos y otros materiales biológicos. Un método común para la preservación es sellar con calor las latas de alimento. El procesamiento térmico también se utiliza para esterilizar los medios de fermentación acuosos que se usaran en procesos de fermentación, de manera que los organismos que no sobreviven, obviamente no compiten con el organismo que se cultiva.

La esterilización de los materiales alimenticios mediante calentamiento destruye bacterias, levaduras, mohos y otros organismos que provocan la descomposición, y también destruye organismos patógenos (causantes de enfermedades) que producen toxinas letales si no se destruyen. La tasa de destrucción de microorganismos varía con la cantidad de calentamiento y el tipo de los organismos. Algunas bacterias pueden tener crecimiento vegetativo y en forma latente, o de espora. Las esporas son mucho más resistentes al calor, aunque este mecanismo de resistencia al calor no está claro.

Respecto a los alimentos, se desea eliminar principalmente todas las esporas de *Clostridium botulinum,* el cual produce una toxina que es un veneno mortal. El propósito del procesamiento térmico es lograr la completa esterilidad con respecto a esta espora. Dado que *Cl. botulinum* es tan peligroso y a menudo difícil de usar, a veces se emplean otras esporas, como *Bacillus stearothermophilus,* que es un organismo inocuo y de resistencia semejante al calor, para probar los procesos relacionados con el calor (A2, Cl).

La temperatura tiene un efecto considerable en la tasa de crecimiento de los microorganismos que carecen de mecanismo para regular su temperatura. Cada organismo se desarrolla mejor en determinado intervalo de temperatura óptimo. Si el microorganismo se calienta hasta una temperatura bastante elevada el tiempo suficiente, se vuelve estéril o muere.

El mecanismo exacto de la muerte térmica de las bacterias y esporas vegetativas todavía es un tanto incierto, pero se sabe que se debe al rompimiento de las enzimas, que son esenciales para el funcionamiento de la célula viva (B1).

9.12B Cinética de la tasa de muerte térmica de los microorganismos

La destrucción de los microorganismos mediante métodos de calentamiento significa una pérdida de viabilidad y no una destrucción en el sentido físico. Si se supone que inactivar una sola enzima en una célula produce la inactivación de la célula, entonces, en una suspensión de organismos de una sola especie a temperatura constante, la tasa de muerte se puede expresar como una ecuación cinética de primer orden (A2). La tasa de destrucción (número de muertes por unidad de tiempo) es proporcional al número de organismos.

$$\frac{dN}{dt} = -kN \tag{9.12-1}$$

donde N es el número de organismos viables en un tiempo dado, t es el tiempo en min y k es una constante de velocidad de reacción en min^{-1}. La constante de velocidad de reacción está en función de la temperatura y del tipo de microorganismo.

Después de reordenar, la ecuación (9.12-l), puede integrarse como sigue:

$$\int_{N_0}^{N} \frac{dN}{N} = -\int_{t=0}^{t} k\, dt \tag{9.12-2}$$

$$\ln \frac{N_0}{N} = kt \tag{9.12-3}$$

donde N_0 es el numero original en $t = 0$ y N es el numero en el tiempo t. Con frecuencia N_0 se denomina *nivel de contaminación* (número original de microbios contaminantes antes de la esterilización) y N se conoce como nivel de esterilidad. Además, la ecuación (9.12-3) se puede escribir como

$$N = N_0 e^{-kt} \tag{9.12-4}$$

En ocasiones, los microbiólogos utilizan el término *tiempo de reducción decimal D,* que es el tiempo en minutos durante el cual el numero original de microbios viables se reducen 1/10. Si se sustituye en la ecuación (9.12-4),

$$\frac{N}{NO} = \frac{1}{10} = e^{-kD} \tag{9.12-5}$$

Al tomar el $\log_{10}$ de ambos lados y despejar *D,*

$$D = \frac{2.303}{k} \tag{9.12-6}$$

Si se combinan las ecuaciones (9.12-3) y (9.12-6),

$$t = D \log_{10} \frac{N_0}{N} \tag{9.12-7}$$

Al grafícar el $\log_{10} (N/N_0)$ en función de t, de la ecuación (9.12-3) se obtiene una línea recta. Los datos experimentales confirman esto para las células vegetativas y de manera aproximada para las esporas. Los datos para la célula vegetativa E. *coli* (Al) a temperatura constante siguen esta curva de tasa de muerte logarítmica. Las gráficas de las esporas bacterianas a veces se desvían un tanto de la tasa de muerte logarítmica, en particular durante un corto periodo inmediato a la exposición al calor. Sin embargo, en el procesamiento térmico que se usa para esporas como Cl. *botulinum,* se sigue una curva de tipo logarítmico.

Para medir experimentalmente la tasa de muerte microbiana, la suspensión de células o esporas en una solución normalmente se sella en un capilar o tubo de ensaye. Luego, varios de esos tubos se sumergen repentinamente en un baño caliente por un tiempo determinado, y después se sacan y se refrigeran de inmediato. El numero de organismos viables antes y después de la exposición a la alta temperatura se determina más tarde biológicamente por un conteo de placa.

El efecto de la temperatura sobre la constante de la velocidad de reacción *k* puede expresarse mediante una ecuación tipo Arrhenius.

$$k = ae^{-E/RT} \tag{9.12-8}$$

donde *a* = una constante empírica, *R* es la constante de los gases en kJ/g mol . K (cal/g · mol . K), *T* es la temperatura absoluta en K y *E* es la energía de activación en kJ/g mol (cal/g mol). El valor de *E* está en el intervalo de 2 10 a cerca de 4 18 kJ/g mol (50 a 1 OO kcal/g mol) para células y esporas vegetativas (A2) y mucho menos para enzimas y vitaminas.

Al sustituir la ecuación (9.12-8) en la (9.12-2), e integrar,

$$\ln \frac{N_0}{N} = a \int_{t=0}^{t} e^{-E/RT}\, dt \tag{9.12-9}$$

A una temperatura constante T, la ecuación (9.12-9) se convierte en la (9.12-3). Puesto que *k* está en función de la temperatura, el tiempo de reducción decimal *D,* que se relaciona con *k* mediante la ecuación (9.12-6), también está en función de la temperatura. Por lo tanto, con frecuencia *D se* escribe como D_T, para indicar que depende de la temperatura.

9.12C Determinación del tiempo de proceso térmico para la esterilización

Respecto a los alimentos enlatados, Cl. *botulinum* es el principal organismo cuyo número se debe reducir (S2). Se ha establecido que el proceso de calentamiento mínimo debe reducir el número de esporas por un factor de 10^{-12}. Esto significa que, puesto que D es el tiempo para reducir el número original en 10^{-1}, al sustituir $N/N_0 = 10^{-12}$ en la ecuación (9.12-4) y al despejar t,

$$t = 12\,\frac{2.303}{k} = 12D \qquad \textbf{(9.12-10)}$$

Esto quiere decir que el tiempo t es igual a $12D$ (a menudo llamado concepto 120). Este tiempo de la ecuación (9.12-10) necesario para reducir el número en 10^{-12} se llama *tiempo de muerte térmica.* Por lo general, el nivel de esterilidad N es un número mucho menor que un organismo. Estos tiempos no representan una esterilización completa, sino un concepto matemático que, según se ha encontrado empíricamente, produce una esterilización efectiva.

Los datos experimentales de las tasas de muerte térmica de Cl. *botulinum,* cuando se **grafican** como el tiempo de reducción decimal D_T a una T dada en función de la temperatura *Ten* °F en una gráfica semilogarítmica, producen esencialmente líneas rectas a lo largo del intervalo de temperaturas utilizadas en la esterilización de alimentos (S2). En la figura 9.12-1 se muestra una curva típica de destrucción térmica. En realidad, si se combinan las ecuaciones (9.12-6) y (9.12-8), se puede demostrar que la gráfica del $\log_{10} D_T$ en función de $1/T$ (T en grados absolutos) es una línea recta, pero sobre intervalos pequeños de temperatura se obtiene una linea recta cuando $\log_{10} D_T$ *se* **grafica** en función de T °F o "C.

En la figura 9.12-1, el término z representa el intervalo de temperaturas en °F para un cambio de 10: 1 en D_T. Como la gráfica es una línea recta, la ecuación se puede representar así:

$$\log_{10} D_{T2} - \log_{10} D_{T1} = \frac{1}{z}\,(T_1 - T_2) \qquad \textbf{(9.12-11)}$$

Si se hace $T_1 = 250$ °F (121.1 "C), que es la temperatura estándar contra la cual se comparan los procesos térmicos, y si se hace $T_2 = T$, la ecuación (9.12-11) se transforma en

$$D_T = D_{250} \cdot 10^{(250 - T)/z} \qquad \textbf{(9.12-12)}$$

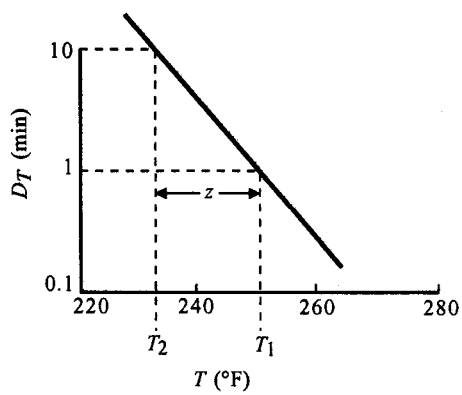


FIGURA **9.12-1.** *Curva de destrucción térmica:* ***gráfica*** *del tiempo de reducción decimal contra temperatura.*

Para el organismo Cl. *botulinum se* tiene el valor experimental de z = 18 "F. Esto significa que cada aumento de 18 °F (10 "C) en la temperatura hará aumentar a la tasa de muerte en un factor de 10. Esto se compara con el factor de 2 para muchas reacciones químicas para un aumento de 1 8 °F en la temperatura.

Cuando se utiliza la ecuación (9.12-7),

$$t = D_T \log_{10} \frac{N_0}{N} \tag{9.12-7}$$

Al sustituir $T = 250$ °F (121.1 "C) como la temperatura estándar en esta ecuación y al sustituir F_0 por t,

$$F_0 = D_{250} \log_{10} \frac{N_0}{N} \tag{9.12-13}$$

donde el valor F_0 de un proceso es el tiempo t en min a 250 °F que producirá el mismo grado de esterilización que el proceso dado a la temperatura T. Al combinar las ecuaciones (9.12-7), (9.12-12) y (9.12-13), la F_0 del proceso dado a la temperatura T es

$$F_0 = t \cdot 10^{(T\,°C - 121.1)/(z\,°C)} \qquad \text{(SI)}$$

$$F_0 = t \cdot 10^{(T\,°F - 250)/(z\,"F)} \qquad \text{(Unidades del sistema inglés)} \tag{9.12-14}$$

Éste es el valor F_0 en min para el proceso térmico dado a una temperatura constante T°F y un tiempo dado t en min. Los valores de F_0 y z para la esterilización adecuada de *Cl. botulinum* varian un poco con el tipo de alimento. Stumbo (S2) y Charm (C2) tabularon los datos para diversos alimentos y microorganismos.

Los efectos de procesos de esterilización diferentes pero sucesivos en un material dado, son aditivos. Por lo tanto, si hay varias etapas de temperaturas diferentes T_1, T_2, etc,, cada una con diferentes tiempos ti, t_2, ... los valores F_0 para cada etapa se suman para dar el F_0 total.

$$F_0 = t_1 \cdot 10^{(T_1 - 250)/z} + t_2 \cdot 10^{(T_2 - 250)/z} + \ldots \qquad \text{(Unidades del sistema inglés)} \tag{9.12-15}$$

EJEMPLO 9.12-1. Esterilización de latas de alimento

Las latas de alimento se calientan en una retortapara esterilización. El F_0 para *Cl. botulinum* en este tipo de comida es de 2.50 min y z = 18 "F. Las temperaturas en el centro de una lata (la región de menor calentamiento) se miden y aproximan como sigue, donde se enumera la temperatura promedio durante cada periodo: t_1 (0 a 20 min), T_1 = 160 "F; t_2 (20 a 40 min), T_2 = 210 °F; t_3 (40 a 73 min), T_3 = 230 "F. Determine si este proceso de esterilización es adecuado. Emplee unidades SI y del sistema inglés.

Solución: Los datos para los tres periodos, son los siguientes:

$t_1 = 20 \quad 0 = 20$ min, $\quad T_1 = 160$ °F (71.1 °C), $\quad z = 18$ °F (10 °C)

$t_2 = 40 - 20 = 20$ min, $\quad T_2 = 210$ °F (98.9 "C)

$t_3 = 73 - 40 = 33$ min, $\quad T_3 = 230$ °F (110 "C)

Al sustituir y resolver en la ecuación (9.12- 15), empleando unidades SI y del sistema ingles.

$$F_0 = t_1 \cdot 10^{(T_1 - 250)/z} + t_2 \cdot 10^{(T_2 - 250)/z} + t_3 \cdot 10^{(T_3 - 250)/z} \tag{9.12-15}$$

$$= (20)10^{(160-250)/18} + (20)10^{(210-250)/18} + (33)10^{(230-250)/18}$$

$$= 0.0020 + 0.1199 + 2.555 = 2.68 \text{ min} \qquad \text{(Unidades del sistema inglés)}$$

$$= (20)10^{(71.1-121.1)/10} + (20)10^{(98.9-121.1)/10} + (33)10^{(110-121.1)/10}$$

$$= 2.68 \text{ min} \qquad \text{(SI)}$$

Por consiguiente, este procesamiento térmico es adecuado, ya que solo se necesitan 2.50 min para la esterilización completa. Nótese que el periodo a 1 60 °F (7 1. 1°C) sólo aporta una cantidad insignificante al F_0 final. La mayor contrtbucion se hace a 230 °F (1 10 °C), que es la temperatura más alta.

En la mayor parte de los casos, cuando se esterihzan en latas de cornada con una retorta, Ea temperatura no es constante para un periodo dado, sino que varía continuamente con el tiempo. Así, la ecuación (9.12-15) se puede modificar y escribir para una temperatura T que varía continuamente tomando pequeños incrementos de tiempo de dt para cada valor de T y sumándolos. La ecuación final es

$$F_0 = \int_{t=0}^{t=t} 10^{(T\,^\circ\text{F} - 250)/(z\,^\circ\text{F})}\, dt \qquad \text{(Unidades del sistema inglés)}$$

$$F_0 = \int_{t=0}^{t=t} 10^{(T\,^\circ\text{C} - 121.1)/(z\,^\circ\text{C})}\, dt \qquad \text{(SI)} \qquad \textbf{(9.12-16)}$$

Esta ecuación se puede aplicar como sigue. Supóngase que la temperatura de un proceso varía continuamente y que la gráfica o la tabla de valores de T en función de t se conoce o se calcula mediante los métodos en estado no estacionaria del capitulo 5. La ecuación (9.12-16) se puede integrar gráficamente con los valores de $10^{(T-250)/z}$ en función de t y tomando el área bajo la curva.

En muchos casos, la temperatura de un proceso que varía continuamente con el tiempo se determina de manera experimental midiendo la temperatura en la región de menor calentamiento. En las latas, dicha región está en el centro de la lata. Los métodos dados en el capítulo 5 para el calentamiento por conducción, en estado no estacionario de cilindros cortos y anchos, pueden emplear para predecir la temperatura central de la lata como una función del tiempo. Sin embargo, estas predicciones suelen ser un tanto inexactas, puesto que las propiedades físicas y térmicas de los alimentos son difíciles de medir con precisión y muchas veces varían. Además, el aire atrapado en el recipiente y los efectos de convección desconocidos alteran la exactitud de las predicciones.

EJEMPLO 9.12-2. Evaluación de los procesos térmicos mediante integración gráfica

En la esterilización de un puré enlatado, se midió la temperatura en la región de menor calentamiento de la lata (el centro) y se obtuvieron los siguientes datos de tiempo y temperatura para el tiempo de calentamiento y el de retención. Los datos del tiempo de enfriamiento se desprecian como factor de seguridad.

t (min)	*T(°F)*	*t (min)*	*T (°F)*
0	80 (26.7 °C)	40	225 (107.2 °C)
15	165 (73.9)	50	230.5 (110.3)
25	201 (93.9)	64	235 (112.8)
30	212.5 (100.3)		

El valor F_0 del *Cl. botulinum* es de 2.45 min y z es 18 °F. Calcule el valor F_0 del proceso anterior y determine si la esterilización es adecuada.

Solución: Si se desea la ecuación (9.12- 16), los valores de 1 $0^{(T-250)/z}$ se deben calcular para cada tiempo. Para t = 0 min, T = *80* °F, y z = 18 °F,

$$10^{(T-250)/z} = 10^{(80-250)/18} = 3.6 \times 10^{-10}$$

Para t = 15 min, T = 165 °F

$$10^{(165-250)/18} = 0.0000189$$

Para t = 25 min, T = 201 °F

$$10^{(201-250)/18} = 0.00189$$

Para t = 30 min,

$$10^{(212.5-250)/18} = 0.00825$$

Para t = 40 min,

$$10^{(225-250)/18} = 0\ 0408$$

Para t = 50 min,

$$10^{(230.5-250)/18} = 0.0825$$

Para t = 64 min,

$$10^{(235-250)/18} = 0.1465$$

Estos valores se grafican en función de t en la figura 9.12-2. Las áreas de los diferentes rectángulos que se muestran son:

$$F_0 = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

$$= 10\ (0.0026) + 10\ (0.0233) + 10\ (0.0620) + 140\ (0.1160)$$

$$= 0.026 + 0.233 + 0.620 + 1.621 = 2.50 \text{ min}$$

El valor del proceso de 2.50 min es mayor que el necesario de 2.45 min, y la esterilización es adecuada.

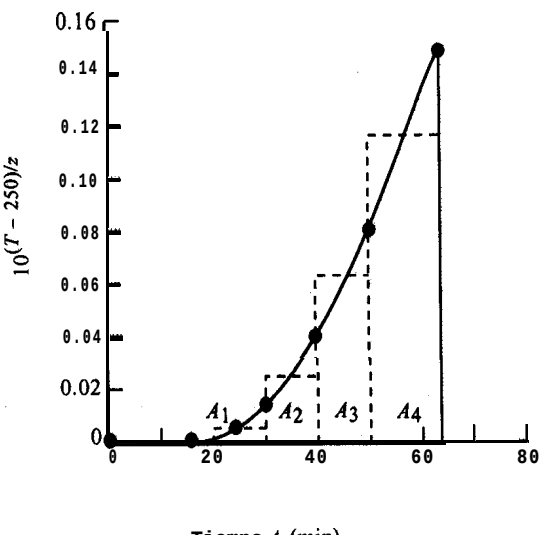


FIGURA **9.12-2.** *Integración gráfica para el ejemplo 9.12-2.*

9.12D Métodos de esterilización con otros criterios de diseño

En los procesamientos térmicos en que no participa necesariamente la esterilización de alimentos, se usan otros por criterios de diseño. En los alimentos, el proceso de calor mínimo debe reducir el número de esporas en un factor de 10^{-12}, es decir, $N/N_0 = 10^{-12}$. Sin embargo, en otros procesos de esterilización por lotes, como la esterilización de medios de fermentación, se suelen usar otros criterios. Muchas veces esta disponible la ecuación para *k*, la constante de velocidad de reacción para el organismo específico que se use.

$$k = ae^{-E/RT} \tag{9.12-8}$$

Entonces la ecuación (9.12-9) se escribe como

$$V = \ln\frac{N_0}{N} = a\int_{t=0}^{t} e^{-E/RT}\,dt = \int_{t=0}^{t} k\,dt \tag{9.12-17}$$

donde V es el criterio de diseño. En general, está disponible el nivel de contaminación N_0 y la incógnita puede ser el nivel de esterilidad No el tiempo de esterilización a una temperatura dada. En cualquier caso, se suele hacer una integración gráfica, donde $ae^{-E/RT}$ se grafica en función de t y se obtiene el área bajo la curva.

En la esterilización de alimentos en un recipiente, el tiempo necesario para volver seguro el material se calcula en la región de menor calentamiento del recipiente (normalmente el centro). Otras regiones del recipiente a menudo se calientan a mayores temperaturas y sufren un sobretratamiento. Por lo tanto, otro método utilizado se basa en la probabilidad de supervivencia en el recipiente entero. Estos detalles los dan otros autores (C2, S2). En otro método de procesamiento se usa un proceso rápido de flujo continuo en lugar del proceso por lotes de recipientes (B2).

9.12E Pasteurización

El término *pasteurización se* usa actualmente para referirse a un tratamiento de calor suave de los alimentos menos drástico que la esterilización. Se emplea para matar organismos que presentan relativamente menor resistencia térmica comparados con aquellos para los cuales se utilizan los procesos de esterilización más drásticos. Por lo general, la pasteurización se emplea para destruir microorganismos vegetativos y no esporas resistentes al calor.

El proceso más común es la pasteurización de la leche para eliminar la *Mycobacterium tuberculosis,* que es una bacteria que no forma esporas. La pasteurización no esteriliza la leche; sólo mata a la *M. tuberculosis* y reduce el numero de las otras bacterias para que la leche pueda almacenarse en refrigeración.

Para pasteurizar alimentos tales como leche, jugos de frutas y cerveza, se utilizan los mismos procedimientos matemáticos y gráficos que para los procesos de esterilización mencionados en esta sección, a fin de alcanzar el grado de esterilización deseado en la pasteurización (B 1, S2). Los tiempos que se necesitan son mucho menores y las temperaturas de pasteurización son mucho mas bajas. Generalmente, el valor F_0 se da a 150 °F (65.6 "C) o a una temperatura similar en lugar de los 250 °F de la esterilización. Además, se emplea el concepto de valor z, según el cual un aumento de temperatura de z °F aumenta, la tasa de muerte en un factor de 10. Un valor F_0 escrito como F_{150}^{9} significa un valor *F* a 150 °F con un valor z de 9 °F (S2).

En la pasteurización de la leche se usan procesos en lotes y continuos. Las normas sanitarias de Estados Unidos especifican dos conjuntos equivalentes de condiciones, uno de los cuales, mantiene la leche a 145 °F (62.8 "C) por 30 min y, el otro, a 161 °F (71.7 "C) durante 15 s.

Las ecuaciones'generales para la pasteurización son semejantes alas de la esterilización y se pueden escribir como sigue. Si se reescribe la ecuación (9.12-13),

$$F_{T_1}^{z} = D_{T1} \log_{10} \frac{N_0}{N} \qquad \textbf{(9.12-18)}$$

Si se reescribe la ecuación (9.12-14),

$$F_{T_1}^{z} = t \cdot 10^{(T - T_1)/z} \qquad (9.12\text{-}19)$$

donde T_1 es la temperatura estándar de 150 °F, z es el valor de z en °F para un incremento de 10 veces en la tasa de muerte y T es la temperatura del proceso real.

EJEMPLO 9.12-3. Pasteurización de la leche

Un valor F típico para el procesamiento térmico de la leche en un intercambiador de calor tubular es $F_{150}^{9} = 9.0 \text{ min y } D_{150} = 0.6 \text{ min}$. Calculelareducciónde lnúmerode células viables en esas condiciones.

Solución: El valor z es de 9 °F (5 "C) y la temperatura del proceso es de 150 °F (65.6 "C). Al sustituir en la ecuación (9.12-18) y resolver,

$$F_{150}^{9} = 9.0 = 0.6 \log_{10} \frac{N_0}{N}$$

$$\frac{N_0}{N} = 10^{1.5}$$

Esto da una reducción en el número de células viables de 10^{15}.

9.12F Efectos del procesamiento térmico y sobre los constituyentes de los alimentos

El procesamiento térmico se usa para provocar la muerte de varios microorganismos patógenos, pero también ocasiona efectos indeseables, como la reducción de ciertos valores nutricionales. El ácido ascórbico (vitamina C) y la tiamina y riboflavina (vitamina B_1 y B_2) se destruyen parcialmente en el procesamiento térmico. La reducción de estos constituyentes deseables también puede constituir parámetros cinéticos dados, como los valores F_0 y z, de la misma manera que para la esterilización y la pasteurización. Charm (C2) presenta ejemplos y datos.

Estos mismos métodos cinéticos de tasas de muerte térmica se pueden aplicar para predecir el tiempo necesario para detectar el cambio de sabor en un producto alimenticio. Dietrich, et al, (D1) determinaron una curva del número de días necesarios para detectar un cambio de sabor en las espinacas congeladas en función de la temperatura de almacenamiento. Los datos concordaron con la ecuación (9.12-8) y con la relación cinética de primer orden.

PROBLEMAS

9.3-I. Humedad a partir de la presión de vapor. El aire de una habitación esta a 37.8 °C (100 °F) y a presión total de 101.3 kPa abs, contiene vapor de agua presión total p_A = 3.59 kPa. Calcule:
a) La humedad.
b) La humedad de saturación y el porcentaje de humedad.
c) Porcentaje de humedad relativa.

9.3-2. Porcentaje de humedad relativa. El aire de una habitación tiene humedad H de 0.02 1 kg H_2O/ kg de aire seco a 32.2 °C (90 °F) y a 101.3 kPa abs de presión. Calcule:
a) El porcentaje de humedad H_P.
b) El porcentaje de humedad relativa H_R.

Respuesta: a) $H_P = 67.5\%$; b) $H_R = 68.6\%$

9.3-3. Uso de Za gráfica de humedad. El aire entra a un secador a temperatura de 65.6 °C (150 "F) y punto de rocío de 15.6 °C (60 "F). Usando la gráfica de humedad, determine la humedad real, el porcentaje de humedad y el volumen húmedo de esta mezcla. Además, calcule también c_S usando unidades SI y del sistema inglés.

Respuesta: H = 0.0113 kg H_2O/kg de aire seco, H_P = 5.3%,
c_S = 1.026 kJ/kg · K (0.245 btu/lb$_m$ · °F),
v_H = 0.976 m^3 de aire + vapor de agua/kg de aire seco

9.3-4. Propiedades del aire que entra a un secador. Una mezcla de aire y vapor de agua que se alimenta a un proceso de secado, tiene una temperatura de bulbo seco de 57.2 °C (135 "F) y humedad de 0.030 kg H_2O/kg de aire seco. Usando la gráfica de humedad y las ecuaciones apropiadas, determine el porcentaje de humedad, la humedad de saturación a 57.2 °C del punto de rocío, de calor húmedo y de volumen húmedo.

9.3-5. Temperatura de saturación adiabática. Una corriente de aire a 82.2 °C (180 "F) con humedad H = 0.0655 kg H_2O/kg de aire seco, se pone en contacto con agua en un saturador adiabático. Sale del proceso con 80% de saturación.
a) ¿Cuáles son los valores finales de H y T "C?
b) ¿Cuáles serían los valores de H y T para el 100% de saturación?

Respuesta: a) H = 0.079 kg H_2O/kg de aire seco, T = 52.8 °C (127°F)

9.3-6. Saturación adiabática del aire. Una corriente de aire entra a un saturador adiabático con una temperatura de 76.7 °C y una temperatura de punto de rocío de 40.6 "C. Sale del saturador con 90% de saturación. ¿Cuáles son los valores finales de H y T °C?

9.3-7. Humedad a partir de temperaturas de bulbo húmedo y bulbo seco. Una mezcla de aire y vapor de agua tiene una temperatura de bulbo seco de 65.6 °C y una temperatura de bulbo húmedo de 32.2 "C. ¿Cuál es la humedad de la mezcla?

Respuesta: H = 0.0175 kg H_2O/kg de aire seco

9.3-8. Humedad y temperatura de bulbo húmedo. La humedad de una mezcla de aire y vapor de agua es H = 0.030 kg H_2O/kg de aire seco. La temperatura de bulbo seco de la mezcla es 60 "C. ¿Cuál es la temperatura de bulbo húmedo?

9.3-9. Deshumidificación de aire. Se desea secar aire con temperatura de bulbo seco de 37.8 °C y temperatura de bulbo húmedo de 26.7 "C, enfriándolo primero a 15.6 °C para condensar el vapor de agua y después calentándolo a 23.9 °C.
a) Calcule la humedad y el porcentaje de humedad iniciales.
b) Calcule la humedad y el porcentaje de humedad fínales. [Sugerencia: Localice el punto inicial en la gráfica de humedad. Después, desplácese horizontalmente (enfriamiento) hasta la línea de 100% de saturación. Siga la línea hasta 15.6 "C. Después, desplácese horizontalmente hacia la derecha hasta 23.9 "C.]

Respuesta: b) H = 0.0115 kg H_2O/kg de aire seco, H_P = 60%

9310. *Enfriamiento y **deshumidificación** de aire.* El aire entra a una cámara de enfriamiento adiabático a temperatura de 32.2 °C y porcentaje de humedad de 65%. Se enfría por medio de un rocío de agua fría y se satura con vapor de agua en la cámara. Después de salir de ésta, se calienta a 23.9 "C. El aire final tiene un porcentaje de humedad de 40%.

a) ¿Cual es la humedad inicial del aire?

b) ¿Cuál es la humedad final después del calentamiento?

9.6-l. *Tiempo de secado durante elperiodo de velocidad constante.* Un lote de sólido húmedo se procesa en un secador de bandejas usando condiciones de secado constante y un espesor de material en la bandeja de 25.4 mm. Sólo se expone al secado la superficie superior. La velocidad de secado durante el periodo de velocidad constante es $R = 2.05$ kg $H_2O/h \cdot m^2$ (0.42 lb_m $H_2O/h \cdot$ pie*). La relación L_S/A usada es 24.4 kg sólido seco/m^2 superficie expuesta (5.0 lb_m sólido seco/pie^2). La humedad libre inicial es X_1 = 0.55 y el contenido crítico de humedad X_C = 0.22 kg de humedad libre/kg de sólido seco.

Calcule el tiempo para secar un lote de este material desde X_1 = 0.45 hasta X_2 = 0.30, usando las mismas condiciones de secado, pero un espesor de 50.8 mm con secado para las superficies superior e inferior. (Sugerencia: Calcule primero L_S/A para estas nuevas condiciones.)

Respuesta: t = **1.785** h

*9.6-2. Predicción del efecto de **las** variables de proceso sobre la velocidad de secado.* Al usar las condiciones del ejemplo 9.6-3 para el periodo de secado de velocidad constante, proceda a lo siguiente:

a) Pronostique el efecto sobre R_C cuando la velocidad del aire es de sólo 3.05 m/s.

b) Pronostique el efecto de la elevación de la temperatura del gas a 76.7 °C, cuando H permanece constante.

c) Pronostique el efecto sobre el tiempo t de secado entre los contenidos de humedad X_1 y X_2, cuando el espesor de material seco es de 38.1 mm en lugar de 25.4 mm, y el secado se verifica todavía en el periodo de velocidad constante.

Respuesta: a) R_C = 1.947 kg $H_2O/h \cdot m^2$ (0.399) lb_m $H_2O/h \cdot pie^2$)

b) R_C = 4.21 kg $H_2O/h \cdot m^2$

*9.6-3. Predicciones en la **región** de secado de velocidad constante.* Un material sólido insoluble y granular con humedad, se está **secando** en el periodo de velocidad constante en una bandeja de 0.61 m × 0.61 m, con una profundidad del lecho de 25.4 mm. Los lados y el fondo de la bandeja están aislados. El aire fluye en paralelo por la superficie superior a una velocidad de 3.05 m/s, y tiene temperatura de bulbo seco de 60 °C y temperatura de bulbo húmedo de 29.4 °C (85 °F). Labandeja contiene 11.34 kg de sólido seco con un contenido de humedad libre de 0.35 kg H_2O/kg de sólido seco, y se desea secar el material en el periodo de velocidad constante hasta lograr 0.22 kg H_2O/kg de sólido seco.

a) Pronostique la velocidad de secado y el tiempo necesario en horas.

b) Pronostique el tiempo necesario cuando la profundidad del lecho de material se aumenta a 44.5 mm.

*9.6-4. Secado de una torta **de filtración** en la región de velocidad constante.* Una torta de filtración se coloca en una bandeja de 1 pie × 1 pie y con una profundidad de 1 pulg se seca por la superficie superior con aire a temperatura de bulbo húmedo de 80 °F y temperatura de bulbo seco de 120 °F, que fluye en paralelo a la superficie a una velocidad de 2.5 pies/s. La densidad de la torta seca es de 120 lb_m/pie^3 y elcontenido crítico de humedad libre es de 0.09 lb H_2O/lb de sólido seco. ¿Cuánto tiempo se necesitará para secar el material desde un contenido de humedad libre de 0.20 lb H_2O/lb de material seco, hasta el contenido crítico de humedad?

Respuesta: t = **13.3** h

9.7-1. ***Integración gráfica para el secado en la región de velocidad decreciente.*** *Se* desea secar un sólido húmedo en un secador de bandeja en condiciones de estado estacionario, desde un contenido de humedad libre de X_1 = 0.40 kg H_2O/kg de sólido seco, hasta X_2 = 0.02 kg H_2O/ kg de sólido seco. El peso del sólido seco es de 99.8 kg y el área de la superficie superior para el secado es de 4.645 m^2. La curva de velocidad de secado se puede representar por medio de la figura 9.5-lb.

a) Calcule el tiempo de secado durante el periodo de velocidad decreciente mediante un método de integración gráfica.

b) Repita, pero ahora emplee una recta a través del origen para la velocidad de secado en el periodo de velocidad decreciente.

Respuesta: a) t (velocidad constante) = 2.91 h,
t (velocidad decreciente) = 6.36 h, t (total) = 9.27 h

9.7-2. ***Ensayos de secado de un producto alimenticio.*** Para determinar la factibilidad de secar cierto producto alimenticio, se obtuvieron datos de secado con un secador de bandejas y flujo de aire sobre la superficie superior expuesta, con área de 0.186 m^2. El peso de la muestra totalmente seca fue de 3.765 kg de sólido seco. La muestra húmeda en equilibrio pesó 3.955 kg H_2O + sólido. Por consiguiente, contenía 3.955 − 3.765, o 0.190, kg de humedad de equilibrio. En el ensayo de secado se obtuvieron los siguientes pesos de las muestras en función del tiempo.

Tiempo (h)	*Peso (kg)*	*Tiempo (h)*	*Peso (kg)*	*Tiempo (h)*	*Peso (kg)*
0	*4.944*	2.2	4.554	7.0	4.019
0.4	4.885	3.0	4.404	9.0	3.978
0.8	4.808	4.2	4.241	12.0	3.955
1.4	4.699	5.0	4.150		

a) Calcule el contenido de humedad libre X kg H_2O/kg de sólido seco para cada punto y construye la curva de Xen función del tiempo. (Sugerencia:. Para 0 h, hay 4.944 − 0.190 − 3.765 = 0.989 kg de humedad libre en 3.765 kg de sólido seco. Por consiguiente, X = 0.989/3.765.)

b) Mida las pendientes, calcule las velocidades de secado R en kg $H_2O/h \cdot m^2$, y grafique R en función de X.

c) Empleando esta curva de velocidad de secado, pronostique el tiempo total necesario para secar la muestra desde X = 0.20 hasta X = 0.04. Use un método de integración gráfica para el periodo de velocidad decreciente. ¿Cuál es la velocidad de secado R_C en el periodo de velocidad constante y el valor de X_C?

Respuesta: c) R_C = *0.996* kg $H_2O/h \cdot m^2$
X_C = 0.12, t = 4.1 h (total)

9.7-3. Predicción de tiempo de secado. Un material se procesa en un secador de bandejas de tipo lote en condiciones de secado constante. Cuando el contenido inicial de humedad libre era 0.28 kg de humedad libre/kg de sólido seco, se requirieron 6.0 h para secar el material hasta un contenido de humedad libre de 0.08 kg humedad libreikg de sólido seco. El contenido crítico de 'humedad libre es de 0.14. Suponiendo una velocidad de secado en la región de velocidad decreciente, donde la velocidad es una línea recta desde el punto crítico hasta el origen, pronostique el tiempo necesario para secar una muestra desde un contenido de humedad libre de 0.33 hasta 0.04 kg de humedad libre/kg de sólido seco. *(Sugerencia:* Use primero las ecuaciones analíticas para los periodos de velocidad constante y de velocidad decreciente lineal con el tiempo total conocido de 6.0 h. Después emplee las mismas ecuaciones para las nuevas condiciones.)

9.8-1. ***Secado de materiales biológicos en un secador de bandejas.*** Un material biológico granular que contiene agua, se seca en una bandeja de 0.350 × 0.305 m y 38.1 mm de profundidad. El material ocupa 38.1 mm de profundidad en la bandeja, la cual está aislada en los laterales y en el fondo. La transferencia de calor se verifica por convección desde una corriente de aire que fluye paralela a la superficie superior, a velocidad de 3.05 m/s, con temperatura da 65.6 °C y humedad H = 0.010 kg H_2O/kg de aire seco. La superficie recibe radiación que proviene de tuberías calentadas con vapor cuya temperatura superficial es T_R = *93.3 "C.* La emisividad del sólido es ε = 0.95. Se desea mantener la temperatura de la superficie del sólido por debajo de 32.2 "C, de tal manera que haya un mínimo de descomposición. Calcule la temperatura de la superficie y la velocidad de secado para el periodo de velocidad constante.

Respuesta: T_S = 31.3 "C, R_C = *2.583* kg $H_2O/h \cdot m^2$

9.8-2. Secado por radiación, conducción y convección. Un material granular con humedad se seca en una capa de 25.4 mm de profundidad en un secador de bandejas de tipo lote. La bandeja tiene un fondo metálico cuya conductividad térmica es k_M = 43.3 W/m · K y un espesor de 1.59 mm. La conductividad térmica del sólido es k_S = 1.125 W/m · K. El aire fluye paralelamente a la superficie expuesta y al fondo metálico a velocidad de 3.05 m/s, temperatura de 60 °C y humedad de H = 0.010 kg H_2O/kg de sólido seco. La superficie superior del sólido, cuya emisividad es 0.94, recibe también calor por radiación directa desde tuberías de vapor que tienen temperatura superficial de 104.4 °C. Estime la temperatura de la superficie y la velocidad de secado para el periodo de velocidad constante.

9.9-l. ***Secado de madera por difusión.*** Repita el ejemplo 9.9-l usando las propiedades físicas que se suministran, pero con los siguientes cambios:

a) Calcule el tiempo necesario para secar la madera desde una humedad total de 0.22 hasta 0.13. (Use la Fig. 5.3-13.)

b) Calcule el tiempo necesario para secar placas de madera de 12.7 mm de espesor desde X_{t1} = 0.29 hasta X_t = 0.09. Compare con el tiempo necesario para el espesor de 25.4 mm.

Respuesta: b) t = 7.60 h (12.7 mm de espesor)

9.9-2. Difusividad en el secado de raíz de tapioca. Con los datos del ejemplo 9.9-2, determine la difusividad promedio de la humedad hasta un valor de X/X_C = 0.50.

9.9-3. Coeficiente de difusión. A continuación se tabulan los datos del secado experimental de un material biológico no poroso típico, en condiciones de secado constante en la región de velocidad decreciente.

X/X_C	t(h)	X/X_C	t(h)
1.00	0	0.17	11.4
0.65	2.50	0.10	14.0
0.32	7.00	0.06	16.0

El secado se lleva a cabo por un solo lado de la superficie del material, que tiene un espesor de 10.1 mm. Los datos siguen la ecuación de difusión. Determine la difusividad promedio en el intervalo de X/X_C = 1.0-0.10.

9.10-l. ***Secado de un lecho de sólidos por circulación cruzada.*** Repita el ejemplo 9.10-l para el secado de un lecho empacado con cilindros húmedos, usando circulación cruzada del aire de secado. Use las mismas condiciones excepto que la velocidad del aire ahora es de 0.381 m/s.

9.10-2. ***Deducción de la ecuación para el secado por circulación cruzada. Se*** pueden deducir diferentes formas de las ecuaciones (9.10-l 1) y (9.10-12), basadas en las expresiones de humedad y de transferencia de masa, en lugar de temperatura y de transferencia de calor. Esto

se puede llevar a cabo escribiendo una ecuación de balance de masa similar a la ecuación (9.10-2), en lugar del balance de calor, y una ecuación de transferencia de masa similar a la (9.10-3).

a) Deduzca la ecuación final para el tiempo de secado en el periodo de velocidad constante, usando las ecuaciones de humedad y de transferencia de masa.

b) Repita para el periodo de velocidad decreciente.

Respuesta: a) $t = \dfrac{\rho_X x_1 (X_1 - X_C)}{G(H_W - H_1)\left(1 - e^{-k_y M_B a x_1 / G}\right)}$

9.10-3. ***Secado por circulación cruzada en el periodo de velocidad constante. Se*** están secando esferas cilíndricas de un catalizador húmedo cuyo diámetro es de 12.7 mm, en un secador de circulación cruzada. Las esferas están empacadas en un lecho de 63.5 mm de espesor colocado sobre un tamiz. El sólido se seca por medio de aire que entra a velocidad superficial de 0.914 m/s a 82.2 °C y con humedad H = 0.01 kg H_2O/kg de aire seco. La densidad del sólido seco resulta ser 1522 kg/m^3 y la fracción de espacios vacíos en el lecho es 0.35. El contenido inicial de humedad libre es 0.90 kg H_2O/kg de sólido, y el material debe secarse hasta un contenido de humedad libre de 0.45, superior al contenido crítico de humedad libre. Calcule el tiempo de secado en este periodo de velocidad constante.

9.104 ***Balances de materia y de calor en un secador continuo.*** Repita el ejemplo 9.10-2, calculando los balances de calor y de materia, pero con los siguientes cambios: el sólido entra a 15.6 °C y sale a 60 "C; el gas entra a 87.8 °C y sale a 32.2 °C. Se estima que las pérdidas de calor en el secador son de 2931 W.

9.10-5. ***Proceso en un secador continuo de túnel. Se*** desea secar un material que se alimenta a velocidad de 700 lb$_m$ de sólido seco/h desde un contenido de humedad libre de X_1 = 0.4133 lb H_2O/lb de sólido seco hasta X_2 = 0.0374 lb H_2O/lb de sólido seco, en un secador de túnel operando con un régimen continuo a contracorriente. El flujo de aire entra a 13280 lb$_m$ aire seco/h y 203 °F con H_2 = 0.0562 lb H_2O/lb de aire seco. El material entra a una temperatura de bulbo húmedo de 119 °F que permanece esencialmente constante en el secador. La humedad de saturación a 119 °F, con base en la gráfica de humedad, es H_W = *0.0786* lb H_2O/lb de aire seco. El área superficial disponible para el secado es (A/L_S) = 0.30 pie^2/lb$_m$ de sólido seco.

Se efectúa un experimento con un lote pequeño usando condiciones de secado y velocidad del aire constantes, y una temperatura del sólido aproximadamente igual a la del secador continuo. El contenido crítico de humedad de equilibrio resulta X_C = 0.0959 lb H_2O/lb de sólido seco, y el valor experimental de $k_y M_B$ es 30.15 lb$_m$ de aire seco/h · pie*. La velocidad de secado es directamente proporcional a X durante el periodo de velocidad decreciente.

Calcule los tiempos de secado en la zona de velocidad constante y en la zona de velocidad decreciente para el secador continuo.

Respuesta: H_C = 0.0593 lb H_2O/lb de aire seco, H_1 = 0.0760 lb H_2O/lb de aire seco,
t = 4.24 h en la zona de velocidad constante,
t = 0.47 h en la zona de velocidad decreciente.

9.10-6. ***Recirculación de aire en un secador continuo.*** El material húmedo con que se alimenta un secador continuo contiene 50% en peso "de agua y se seca hasta el 27% en peso mediante un flujo de aire a contracorriente. El producto seco sale a un flujo de 907.2 kg/h. El aire fresco que entra al sistema esta a 25.6 °C y tiene una humedad de H = 0.007 kg H_2O/kg aire seco. El aire húmedo sale del secador a 37.8 °C y H = 0.020 y parte de él se recircula y se mezcla con el aire fresco antes de entrar al calentador. El aire mezclado y calentado entra al secador a 65.6 °C y H = 0.010. El sólido entra a 26.7 °C y sale a la misma temperatura. Calcule el

flujo de aire fresco, el porcentaje de aire que sale del secador y que se recicla, el calor agregado en el calentador y la pérdida de calor del secador.

Respuesta: 32 094kg de aire seco/h, 23.08% reciclado, 440.6 kW en el calentador

9.124. ***Esterilización*** de ***alimentos enlatados.*** En una retorta de esterilización se calentaron las latas de un alimento determinado y la temperatura promedio en el centro de una lata es aproximadamente de 98.9 °C en los primeros 30 minutos. La temperatura promedio en el siguiente periodo es 110 °C. Si el F_0 para la espora es de 2.50 min y z = 10 "C, calcule el tiempo de calentamiento a 110 °C para que el proceso sea seguro.

Respuesta: 29.9 min

9.122. ***Efecto de la temperatura sobre el tiempo de reducción decimal.*** Combine las ecuaciones (9.12-6) y (9.12-8) para demostrar que le gráfica de $\log^{10} D_T$ en función de $1/T$ (T en grados absolutos) es una línea recta.

9.123. ***Tiempo de proceso térmico para un puré de chícharos.*** Para las latas de puré de chícharos, F_0 = 2.45 min y z = 9.94 °C (C2). Despreciando el tiempo de calentamiento, determine el tiempo de proceso para una esterilización adecuada a 112.8 °C en el centro de la lata.

Respuesta: t = 16.76 min

9.124. ***Tiempo de proceso para la esterilización adecuada.*** El valor F_0 para determinado alimento enlatado es de 2.80 min y z es de 18 °F (10 °C). Las temperaturas en el centro de una lata de este alimento, cuando se calentó en una retorta, fueron las siguientes en los periodos de tiempo dados: t_1 (O-10 min), T_1 = 140 °F; t_2 (10-30 min), T_2 = 185 °F; t_3 (30-50 min), T_3 = 220 "F; t_4 (50-80 min), T_4 = 230 "F; t_5 (80-100 min), T_5 = 190 °F. Determine si se realizó una esterilización adecuada.

9.125. ***Tiempo de proceso e integración gráfica.*** Los siguientes datos de tiempo y temperatura se obtuvieron para el calentamiento, retención y enfriamiento en una retorta, de un producto alimenticio enlatado; la temperatura se midió en el centro de la lata.

t (min)	*T (°F)*	*t (min)*	*T (°F)*
0	110 (43.3 °C)	80	232 (111.1)
20	165 (73.9)	90	225 (107.2)
40	205 (96.1)	100	160 (71.1)
60	228 (108.9)		

El valor F_0 usado es de 2.60 min y z es de 18 °F (10 °C). Calcule el valor F_0 para este proceso y determine si el procesamiento térmico es adecuado. Utilice unidades SI y del sistema inglés.

9.124. ***Nivel de esterilidad de un medio de fermentación. Se*** está esterilizando un medio acuoso en un fermentador y los datos de tiempo y temperatura obtenidos son los siguientes:

Tiempo (min)	*0*	10	*20*	*25*	*30*	*35*
Temperatura (°C)	*100*	110	120	120	110	100

La constante de velocidad de reacción k en min^{-1} para las esporas bacterianas contaminantes se puede representar como (Al)

$$k = {}^{7}\ 94 \times 10^{38} e^{-(68.7 \times 10^3)/1.987\ T}$$

donde $T = K$. El nivel de contaminación $N_0 = 1 \times 10^{12}$ esporas. Calcule el nivel de esterilidad N al final v V.

9.12-7. ***Tiempo para la pasteurización de la leche!*** Calcule el tiempo en minutos a 62.8 °C para 'la pasteurización de la leche. El valor de F_0 a 65.6 °C es 9.0 min. El valor de z es a 5 "C.

Respuesta: $t = 32.7$ min

9.124. ***Reducción del número de células viables en la pasteurización.*** En determinado proceso de pasteurización, la reducción del número de células viables es 10^{15} y el valor de F_0 utilizado es de 9.0 min. Si la reducción se aumenta hasta 10^{16} debido a una mayor contaminación, ¿cuál debe ser el nuevo valor de F_0?

REFERENCIAS

(A1) ALLERTON, J., BROWNELL, L. E. y KATZ, D. L., *Chem. Eng. Progr., 45,* 619 (1949).

(A2) AIBA, S., HUMPHREY, A. E. y MILLIS, *N.* F. *Biochemical Engineering,* 2a. ed., Nueva York: Academic Press, Inc., 1973.

(B1) BLAKEBROUGH, *N. Biochemical and Biological Engineering Science,* Vol. 2, Nueva York: Academic Press, Inc., 1968.

(B2) BATESON, R. N. *Chem. Eng. Progr. Symp. Ser., 67* (108), 44 (197 1).

(C1) CRUESS, W. V. *Commercial Fruit and Vegetable Products,* 4a. ed., Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1958.

(C2) CHARM, *S.* E. *The Fundamentals of Food Engineering,* 2a. ed., Westport, COM.: Avi Publishing Co., Inc., 1971.

(D1) DIETRICH, W. C., BOGGS, M. M., NUTTING, M. D. y WEINSTEIN, *N.* E. *Food Technol.,* **14,** 522 (1960).

(E1) EARLE, R. L., *Unit Operations in Food Processing,* Oxford Pergamon Press, Inc., 1966.

(G1) GAMSON, B. W., THODOS, G. y HOUGEN, *0. A. Trans. A.I.Ch.E., 39,* 1 (1943).

(H1) HALL, *C.* W., *Processing Equipment for Agricultura1 Products,* Westport, Conn. Avi Publishing Co., Inc. 1972.

(H2) HENDERSON, S. M. *Agr. Eng, 33* (1), 29 (1952).

(K1) KING, C. J. *Freeze Drying of Foods,* Boca Raton, Fla. Chemical Rubber Co., Inc., 1971.

(M1) MARSHALL, W. R., Jr. y HOUGEN, *0.* A., *Trans. A.I. Ch.E. 38,* 91 (1942).

(P1) PERRY, R. H. y GREEN, D. *Perry's Chemical Engineers' Handbook,* 6a. ed., Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1984.

(S1) SANDALL, 0. C., KING, C. J. y WILKE, C. R. *A.I. Ch.E.J.,* **13, 428 (1967);** *Chem. Eng. Progr., 64* (86), *43* (1968).

(S2) STUMBO, *C.* R. *Thermobacteriology in Food Processing,* 2a. ed., Nueva York Academic Press, Inc., 1973.

(T1) TREYBAL, R. E. *Mass Transfer Operations,* 3a. ed., Nueva York McGraw-Hill Book Company, 1980.

(W1) WILKE, C. R. y HOUGEN, *0.* A. *Trans. A.I.Ch.E.,* **41,** 441 (1945).

CAPÍTULO 10

Procesos de separación gas-líquido por etapas y continuos

10.1 TIPOS DE PROCESOS Y MÉTODOS DE SEPARACIÓN

10.1 A Introducción

Muchos materiales de procesos químicos, así como sustancias biológicas, se presentan como mezclas de diferentes componentes en fase gaseosa, líquida o sólida. Para separar o extraer uno o más de los componentes de la mezcla original, dicho componente se debe poner en contacto con otra fase. Las dos fases se llevan a un contacto más o menos íntimo, de manera que el soluto o los solutos puedan difundirse unos en otros. Por lo general, las dos fases consideradas son parcialmente miscibles entre sí. El par de fases puede ser gas-líquido, gas-sólido, líquido-líquido, o líquido-sólido. Durante el contacto los componentes de la mezcla original se redistribuyen entre ambas fases. Después de esto, las fases se separan por cualquier método físico simple. Seleccionando las condiciones y fases apropiadas, una fase se enriquece mientras que la otra se empobrece en uno o más componentes.

10.1 .B Tipos de procesos de separación

1. Absorción. Cuando las dos fases en contacto son un gas y un líquido, la operación unitaria se llama *absorción.* Un soluto *A,* o varios solutos, se absorben de la fase gaseosa y pasan a la líquida. Este proceso implica una difusión molecular turbulenta o una transferencia de masa del soluto *A* a través del gas *B,* que no se difunde y está en reposo, hacia un líquido C, también en reposo. Un ejemplo es la absorción de amoniaco *A* del aire *B* por medio de agua líquida C. En general, la solución amoniaco-agua que sale se destila para obtener amoniaco relativamente puro.

Otro ejemplo es la absorción de SO_2 de gases de combustión en soluciones alcalinas. En la hidrogenación de aceites comestibles en la industria alimenticia, se hace burbujear hidrógeno gaseoso en el aceite para absorberlo en el mismo; entonces, el hidrógeno en solución reacciona con el aceite en presencia de un catalizador. Al proceso inverso de la absorción se le llama *empobrecimiento o desorción,*

ya él se aplican las mismas teorías y principios básicos. Un ejemplo es la desorción con vapor de aceites no volátiles, en la cual el vapor se pone en contacto con el aceite y pequeñas cantidades de componentes volátiles del mismo pasan a la corriente 'de vapor.

Cuando el gas es aire puro y el líquido es agua pura, el proceso se llama *humidificación.* La *deshumidificación* significa extracción de vapor de agua del aire.

2. Destilación. En el proceso de *destilación* aparecen una fase de vapor volátil y una fase líquida que se vaporiza. Un ejemplo es la destilación de una solución etanol-agua, donde el vapor contiene una concentración de etanol mayor que el líquido. Otro ejemplo es la destilación de una solución amoniaco-agua, para producir vapor más rico en amoníaco. En la destilación de petróleo crudo se separan varias fracciones, como gasolina, kerosina y aceites para calefacción.

3. Extracción líquido-líquido. Cuando las dos fases son líquidas, y se extrae un soluto o solutos de una fase a otra, el proceso se llama *extracción líquido-líquido. Un* ejemplo es la extracción de ácido acético de una solución acuosa por medio de éter isopropíhco. En la industria farmacéutica es muy común extraer antibióticos de una solución acuosa de fermentación usando un disolvente orgánico.

4. Lixiviación. Si se usa un fluido para extraer un soluto de un solido, el proceso recibe el nombre de *lixiviación.* Algunas veces este proceso también se llama *extracción.* Algunos ejemplos son Ba lixiviación de cobre en minerales sólidos por medio de ácido sulfúrico y Ba lixiviación de aceites vegetales de harina de soya por medio de disolventes orgánicos como el hexano. Los aceites vegetales también se lixivian de otros productos biológicos, como cacahuate, semillas de algodón y semillas de girasol. La sacarosa soluble se lixivia con agua a partir de azúcar de caña y de remolacha.

5. Procesamiento con membranas. La separación de moléculas *por* medio de membranas es una operación unitaria relativamente nueva que está adquiriendo cada vez más importancia. La membrana sólida, relativamente fina, controla la tasa de movimiento de moléculas entre Bas dos fases. Se utiliza para eliminar la sal del agua, purificar gases, en el procesamiento de alimentos, etcétera.

6. Cristalización. Los solutos solubles componentes de una solución pueden extraerse de ésta ajustando las condiciones como temperatura o concentración, de manera que se exceda la solubilidad de uno o más solutos *y* éstos *cristalicen* como fase sólida. Entre los ejemplos del proceso de separación está la cristalización del azúcar a partir de soluciones y la de sales metálicas en el procesamiento de soluciones de minerales metálicos.

7. Adsorción. En un proceso de adsorción se adsorben uno o mas componentes de una corriente de líquido o de gas sobre la superficie o en los poros de un adsorbente sólido, y se logra Pa separación. Entre los ejemplos se tienen la eliminación de compuestos orgánicos del agua contaminada, la separación de parafinas de los compuestos aromáticos, y la eliminación de disolventes del aire.

10.1C Métodos de proceso

En las separaciones que se acaban de mencionar se utikizan diversos métodos de proceso. Las dos fases, como,gas y líquido, o líquido y líquido, se mezclan entre si en un recipiente para después separarlas. Este *es* un *proceso de una sola etapa.* Con mucha frecuencia, las fases se mezclan en una etapa, se separan y después se ponen otra vez en contacto en un *proceso* de *etapas múltiples.* Ambos métodos se llevan a cabo ya sea por lotes o con régimen continuo. En otro método más, las dos fases se ponen en contacto en forma continua en una torre empacada.

En este capítulo se consideran la humidificación y la absorción; en el capítulo ll, la destilación; en el capítulo 12 la adsorción, la extracción líquido-líquido, lixiviación y cristalización, y en el capítulo 13, los procesos con membranas. En todos estos procesos es preciso conocer las relaciones de equilibrio entre las dos fases que participan. Esto se estudia para sistemas gas-líquido en la sección 10.2 y para otros sistemas en los capítulos 11, 12 y 13.

10.2 RELACIONES DE EQUILIBRIO ENTRE FASES

10.2A Regla de las fases y equilibrio .

Para predecir la concentración de un soluto en dos fases en equilibrio, se requieren datos de equilibrio experimentales. Además, si las dos fases no están en equilibrio, la velocidad de transferencia de masa es proporcional a la fuerza impulsora, que es la desviación con respecto al equilibrio. En todos los casos de equilibrio hay dos fases presentes, tales como gas-líquido o líquido-líquido. Las variables importantes que afectan al equilibrio de un soluto son temperatura, presión y concentración.

El equilibrio entre dos fases en cualquier caso, está restringido por la regla de las fases:

$$F = C - P + 2 \qquad (10.2\text{-l})$$

donde P es el número de fases en equilibrio, C es el número de componentes totales en las dos fases (cuando no se verifican reacciones químicas), y F es el numero de variantes o grados de libertad del sistema. Por ejemplo, en el sistema gas-líquido de CO_2–aire-agua, hay dos fases y tres componentes (considerando al aire como un componente inerte). Entonces, por medio de la ecuación (10.2-l),

$$F = C - P + 2 = 3 - 2 + 2 = 3$$

Esto significa que hay tres grados de libertad. Si la presión total y la temperatura están fijas, sólo queda una variable que puede ser cambiada a voluntad. Si la composición de fracción molar x_A del CO_2 (A) en la fase líquida es constante, la composición de la fracción molar y_A o la presión p_A en la fase gaseosa, quedan determinadas automáticamente.

La regla de las fases no indica la presión parcial p_A en equilibrio con el valor de seleccionado x_A. El valor de p_A se debe obtener por métodos experimentales. Claro está que las dos fases pueden ser gas-líquido, líquido-sólido, etc. Por ejemplo, la distribución de equilibrio del ácido acético entre una fase de agua y una de éter isopropílico se puede determinar experimentalmente para diversas condiciones.

10.2B Equilibrio gas-líquido

1. Datos de equilibrio gas-líquido. Para ilustrar la obtención de datos de equilibrio experimentales de un sistema gas-líquido, consideraremos el sistema Sol-aire-agua. Una cierta cantidad de SO_2, aire y agua, se introduce en un recipiente cerrado y se agita varias veces a una temperatura dada hasta lograr el equilibrio. Se analizan entonces muestras del gas y del líquido para obtener la presión parcial p_A en atm del SO_2 (A) en el gas y la fracción mol x_A en el líquido. La figura 10.2-1 muestra una gráfica de los datos del Apéndice A.3 de la presión parcial p_A del SO_2 en el vapor en equilibrio con la fracción mol x_A del SO_2 en el líquido, a 293 K (20 “C).

2. Ley de Henry. Con frecuencia la relación de equilibrio entre p_A en la fase gaseosa y x_A se puede expresar por medio de la ecuación de la ley de Henry, que es una recta a concentraciones bajas:

$$p_A = Hx_A \qquad (10.2\text{-2})$$

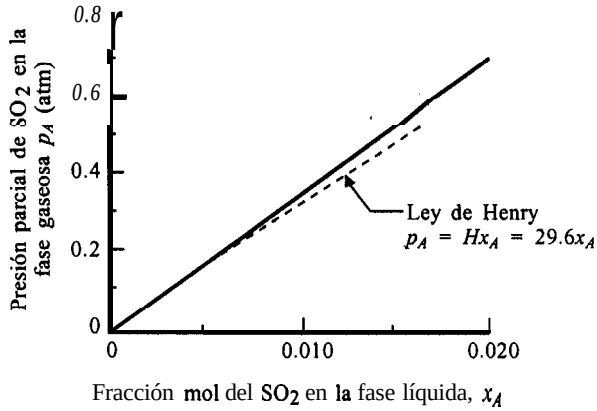


FIGURA 10.2-1. *Gráfica de equilibrio para el sistema SO_2-agua a 293 K (20 "C).*

donde *Hes* la constante de la ley de Henry en atm/fracción mol para el sistema dado. Si se dividen los dos lados de la ecuación (10.2-2) entre la presión total *P* en atm,

$$y_A = H'x_A \tag{10.2-3}$$

donde *H'* es la constante de la ley de Henry en fracción mol de gas/fracción mol de líquido y es igual a H/P. Nótese que *H'* depende de la presión total, mientras que *H* no.

En la figura 10.2-l los valores siguen la ley de Henry hasta llegar a una concentración x_A de aproximadamente 0.005, donde *H*= 29.6 atm/fracción mol. En general y hasta llegara una presión total de unos 5×10^5 Pa (5 atm), el valor de *Hes* independiente de *P*. En el apéndice A.3 se incluyen datos de algunos gases comunes con el agua.

EJEMPLO 10.2-l. ***Concentración de oxígeno disuelto en agua***

¿Cuál será la concentración de oxígeno disuelto en agua a 298 K cuando la solución está en equilibrio con aire a 1 atm de presión total? La constante de la ley de Henry es 4.38×10^4 atm/fracción mol.

Solución: La presión parcial p_A de oxígeno (A) en aire es 0.21 atm. Usando la ecuación (10.2-2),

$$0.21 = Hx_A = 4.38 \times 10^4 x_A$$

Resolviendo, $x_A = 4.80 \times 10^{-6}$ fracción mol. Esto significa que 4.80×10^{-6} mol de O_2 están disueltas en 1.0 mol de agua más oxígeno, o 0.000853 partes de O_2/100 partes de agua.

10.3 CONTACTO DE EQUILIBRIO EN UNA Y EN MÚLTIPLES ETAPAS

10.3A Contacto de equilibrio de una sola etapa

En muchas operaciones de la industria química y de otros procesos, la transferencia de masa de una fase a otra, por lo general, se verifica acompañada de una separación de componentes de la mezcla, puesto que un componente 'se transfiere en mayor grado que otro.

Un proceso de una sola etapa se puede definir como aquel en el cual dos diferentes fases se llevan a un contacto íntimo y después se separan. Durante el tiempo de contacto se verifica un mezclado bastante íntimo y los diversos componentes se difunden y se redistribuyen entre las dos fases. Si el tiempo de mezclado es bastante largo, los componentes quedan esencialmente en equilibrio en las dos fases después de la separación y el proceso se considera como de equilibrio en una sola etapa.

En la figura 10.3-l se representa el equilibrio de una sola etapa. Las dos fases de entrada, L_0 y V_2, de cantidades y composiciones conocidas, entran a la etapa, se mezclan y alcanzan el equilibrio, y las dos corrientes de salida, L_1 y V_1, salen en equilibrio entre sí. Efectuando un balance total de masa,

$$L_0 + V_2 = L_1 + V_1 = M \tag{10.3-l}$$

donde L se da en kilogramos (Ib,), V en kilogramos, y M en kilogramos totales.

Suponiendo que los tres componentes, A, B y C estén presentes en las corrientes y efectuando un balance para A y C,

$$L_0 x_{A0} + V_2 y_{A2} = L_1 x_{A1} + V_1 y_{A1} = M x_{AM} \tag{10.3-2}$$

$$L_0 x_{C0} + V_2 y_{C2} = L_1 x_{C1} + V_1 y_{C1} = M x_{CM} \tag{10.3-3}$$

No es necesario contar con una ecuación para B puesto que $x_A + x_B + x_C = 1.0$. La fracción de masa de A en la corriente L es x_A y es y_A en la corriente V. La fracción de masa de A en la corriente M es x_{AM}.

Para resolver las tres ecuaciones se debe conocer las relaciones de equilibrio entre los componentes. Esto se hará para un sistema gas-líquido en la sección 10.3B, y para un sistema vapor-líquido en el capítulo ll. Obsérvese que las ecuaciones (10.3-l) a la (10.3-3) también se pueden escribir usando unidades molares, con L y V en moles y x_A y y_A en fracción mol.

10.3B Contacto en equilibrio de una sola etapa para un sistema gas-liquido

En los sistemas usuales gas-líquido, el soluto A está en la fase gaseosa V, junto con el aire B inerte, y la fase líquida L junto con el agua C inerte. Supóngase que el aire es esencialmente insoluble en la fase acuosa y que el agua no se vaporiza para incorporarse a la fase gaseosa (la fase gaseosa es un sistema binario A-B, y la fase líquida es un sistema binario A-C. Usando unidades de moles y fracciones mol, la ecuación (10.3-l) resulta válida en un proceso de una sola etapa para el balance total de materiales. Puesto que el componente A es el único que se redistribuye entre ambas fases, el balance de A se puede escribir así:

$$L'\left(\frac{x_{A0}}{1-x_{A0}}\right)+V'\left(\frac{y_{A2}}{1-y_{A2}}\right)=L'\left(\frac{x_{A1}}{1-x_{A1}}\right)+V'\left(\frac{y_{A1}}{1-y_{A1}}\right) \tag{10.3-4}$$

donde L' son moles de agua inerte C y V' son moles de aire inerte B. Tanto L' como V' son constantes y casi siempre se conocen sus valores.

Para resolver la ecuación (10.3-4) la relación entre y_{A1} y x_{A1} en equilibrio está dada por la ley de Henry:

$$y_{A1} = H' x_{A1} \tag{10.3-5}$$

Si la solución no está diluida, se debe contar con datos de equilibrio en forma de una gráfica de p_A o y_A en función de x_A, como se muestra en la figura 10.2-l.

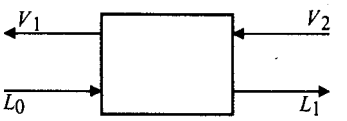


FIGURA 10.3-l. *Proceso de equilibrio de una sola etapa.*

EJEMPLO 10.3-L Contacto de etapa en equilibrio para CO_2–aire–agua

Una mezcla gaseosa a 1.0 atm de presión absoluta que contiene aire y CO_2 se pone en contacto en un mezclador continuo de una sola etapa con aire puro a 293 K. Las dos corrientes de salida de gas y líquido alcanzan el equilibrio. El gasto del gas de entrada es 100 kg mol/h, con una fracción mol de CO_2 de y_{A2} = 0.20. El gasto del líquido de entrada es de 300 kg mol de agua/h. Calcule las cantidades y composiciones de las dos fases de salida. Suponga que el agua no se vaporiza a la fase gaseosa.

Solución: El diagrama de flujo es la figura 10.3-l. El flujo de agua inerte es $L' = L_0$ = 300 kg mol/h. El flujo de aire inerte V' se obtiene de la ecuación (10.3-6),

$$V' = V(1 - y_A) \tag{10.3-6}$$

Por tanto, el flujo de aire inerte es $V' = V_2\,(1 - y_{A2}) = 100(1 - 0.20) = 80$ kg mol/h. Si se sustituye en la ecuación (10.3-4) para un balance de CO_2 (A),

$$300\left(\frac{0}{1-0}\right) + 80\left(\frac{0.20}{1-0.20}\right) = 300\left(\frac{x_{A1}}{1-x_{A1}}\right) + 80\left(\frac{y_{A1}}{1-y_{A1}}\right) \tag{10.3-7}$$

A 293 K, la constante de la ley de Henry del Apéndice A.3 es H = 0.142 × 1 0^4 atm/fracción mol. Entonces, $H' = H/P$ = 0.142 × 1 0^4/1 .O = 0.142 × 10^4/fracción mol de gas/fracción mol de líquido. Sustituyendo en la ecuación (10.3-5),

$$y_{A1} = 0.142 \times 10^4 x_{A1} \tag{10.3-8}$$

Al sustituir la ecuación (10.3-8) en la (10.3-7) y despejar x_{A1} = 1.41 × 10^{-4} y y_{A1} = 0.20. Para calcular el gasto total de salida,

$$L_1 = \frac{L'}{1 - x_{A1}} = \frac{300}{1 - 1.41 \times 10^{-4}} = 300 \text{ kg mol/h}$$

$$_1 = \frac{V'}{1 - y_{A1}} = \frac{80}{1 - 0.20} = 1\,\text{OO kg mol/h}$$

En este caso, puesto que la solución líquida está muy diluida, $L_0 \cong L_1$.

10.3C Etapas de contacto múltiple a contracorriente

1. Deducción de la ecuación general. En la sección 10.3A se describió el contacto de una sola etapa para transferir el soluto A entre las fases V y L. Para transferir más soluto desde, por ejemplo,

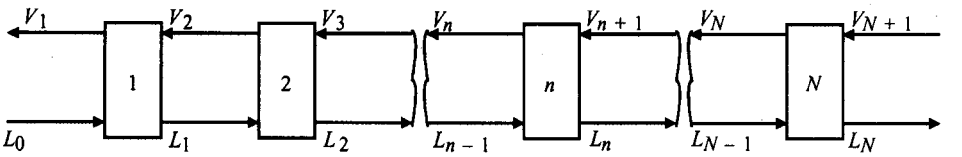


FIGURA 10.3-2. *Proceso de etapas múltiples a contracorriente*

la corriente V_1, el contacto de una sola etapa se puede repetir volviendo a poner en contacto la corriente V_1, que sale de la primera etapa con L_0 nuevo. Esto se puede repetir usando etapas múltiples; sin embargo, representa un desperdicio en la corriente L_0 y da un producto diluido en las corrientes de salida L_1. Para conservar el uso de la corriente L_0 y obtener un producto más concentrado, generalmente se emplea un contacto de etapas múltiples a contracorriente. Esto es similar a la transferencia de calor a contracorriente en un **intercambiador** de calor, en donde la corriente de salida que ha sido calentada se aproxima en temperatura a la corriente caliente de entrada.

En la figura 10.3-2 se muestra el diagrama del flujo de proceso por etapas a contracorriente. La corriente de entrada L es L_0 y la corriente de entrada Ves V_{N+1} en lugar de V_2, como en la etapa simple de la figura 10.3-l. Las corrientes de producto de salida son V_1 y L_N, y el número total de etapas es N. El componente A se intercambia entre las corrientes V y L. La corriente V está compuesta principalmente del componente B, y la corriente L, del componente C. Los componentes B y C pueden o no ser miscibles entre ellos. El sistema de dos fases puede ser gas-líquido, vapor-líquido, líquido-líquido u otros.

Efectuando un balance general de todas las etapas,

$$L_0 + V_{N+1} = L_N + V_1 = M \tag{10.3-9}$$

donde V_{N+1} es mol/h de entrada, L_N es mol/h de salida del proceso, y M es el flujo total. Adviértase en la figura 10.3-2 que cualesquiera que sean las corrientes que salen de una etapa, están en equilibrio entre sí. Por ejemplo, en la etapa n, V_n y L_n están en equilibrio. Para un balance general de componentes de A, B o C,

$$L_0 x_0 + V_{N+1} y_{N+1} = L_N x_N + V_1 y_1 = M x_M \tag{10.3-10}$$

donde x y y son tracciones mol. En estas ecuaciones también se pueden usar flujos en kg/h (lb_m/h) y fracciones de masa.

Efectuando un balance total de estas primeras n etapas,

$$L_0 + V_{N+1} = L_n + V_1 \tag{10.3-11}$$

Llevando a cabo un balance de componentes de las primeras n etapas,

$$L_0 x_0 + V_{n+1} y_{n+1} = L_n x_n + V_1 y_1 \tag{10.3-12}$$

Despejando y_{n+1} en la ecuación (10.3-12),

$$y_{n+1} = \frac{L_n}{V_{n+1}} x_n + \frac{V_1 y_1 - L_0 x_0}{V_{n+1}} \tag{10.3-13}$$

Ésta es una ecuación de balance de materiales muy valiosa, que generalmente se llama *línea de operación.* Relaciona la concentración y_{n+1} en la corriente V con x_n en la corriente L que pasa a

través de la misma. Los términos V_1, y_1, L_0 y X_0 son constantes y generalmente se conocen o se pueden determinar por medio de las ecuaciones (10.3-g) a (10.3-12).

2. Contacto a contracorriente con corrientes inmiscibles. Un caso importante en el que se transfiere el soluto A, es aquel en el que la corriente de disolvente V contiene los componentes A y B sin contener C, y la corriente de disolvente L contiene A y C pero sin B. Las dos corrientes L y V son inmiscibles entre sí y sólo se transfiere A. Cuando se grafica la ecuación (10.3-l 3) en coordenadas xy (x_A y y_A del componente A) como en la figura 10.3-3, generalmente se obtiene una curva, puesto que la pendiente L_n/V_{n+1} de la línea de operación varia si las corrientes L y V cambian de una etapa a otra.

En la figura 10.3-3 se tiene la gráfica de la línea de equilibrio que relaciona las composiciones de dos corrientes que salen en equilibrio de una etapa. Para determinar el número de etapas ideales requeridas para lograr cierta separación o reducción de la concentración de A a partir de y_{N+1} a y_1, el cálculo suele realizarse por métodos gráficos. Empezando en la etapa 1, y_1 y x_0 están en la línea de operación, ecuación (10.3-13), graficada en la figura. El vapor y_1 sale en equilibrio con la salida x_1 y ambas composiciones están en la misma línea de equilibrio. Entonces, y_2 y x_1 están en la línea de operación y y_2 está en equilibrio con x_2, y así sucesivamente. Cada etapa se representa en la figura 10.3-3 por medio de un escalón, Los escalones continúan en la gráfica hasta llegar a y_{N+1}. Por otra parte, puede empezarse en y_{N+1} y trazar los escalones hasta y_1.

Si las corrientes L y Vson diluidas en cuanto al componente A, las corrientes son aproximadamente constantes y la pendiente L_n/V_{n+1} de la ecuación (10.3-13) casi constante. Por consiguiente, la línea de operación. es casi una recta en una gráfica xy. En la destilación, donde sólo están presentes los componentes A y B, la ecuación (10.3-l 3) también es válida para línea de operación, como se estudiará en el capítulo ll. Los casos donde A, B y C son apreciablemente solubles entre ellos son muy comunes en las extracciones líquido-líquido y se estudian en el capítulo 12.

EJEMPLO 10.3.2. Absorción de acetona en una torre con etapas a contracorriente

Se desea absorber 90% de la acetona de un gas que contiene 1.0% mol de acetona en aire en una torre de etapas a contracorriente. El flujo gaseoso total de entrada a la torre es

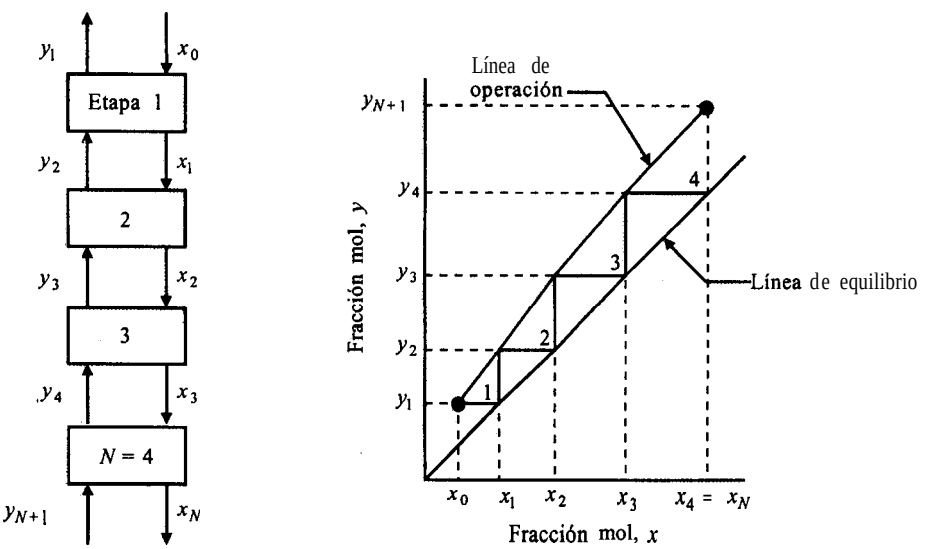


FIGURA 10.3-3. *Número de etapas en un proceso de contacto con etapas múltiples a contracorriente.*

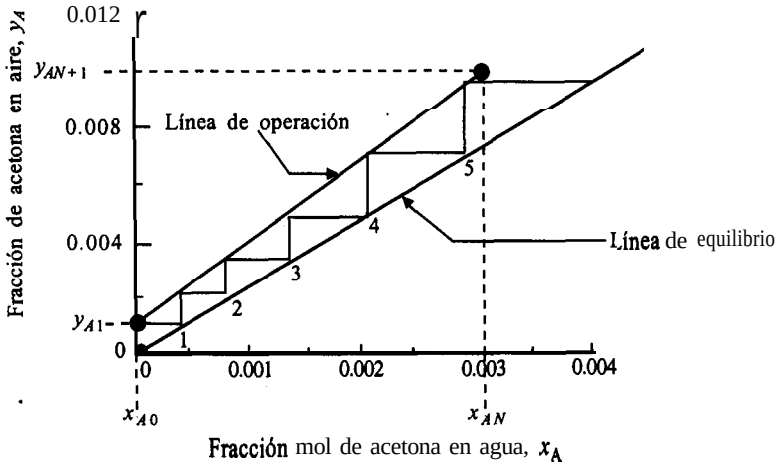


FIGURA 10.3-4. *Etapas teóricas para la absorción a contracorriente del ejemplo 10.3-2.*

30.0 kg mol/h, y la entrada total de flujo de agua pura que se usará para absorber la acetona es 90 kg mol H_2O/h. El proceso operará isotérmicamente a 300 K (80 °F) y a presión total de 101.3 kPa. La relación de equilibrio para la acetona (*A*) en el gas-líquido es $y_A = 2.53x_A$. Determine el número de etapas teóricas requeridas para esta separación.

Solución: El diagrama de flujo del proceso es similar al de la figura 10.3-3. Los valores conocidos son $y_{AN+1} = 0.01, x_{A0} = 0$, $V_{N+1} = 30.0$ kg mol/h, y $L_0 = 90.0$ kg mol/h. Efectuando un balance de materia para la acetona,

cantidad de entrada de acetona $= y_{AN+1}V_{N+1} = 0.01(30.0) = 0.30$ kg molk

$$\text{aire de entrada} = (1 - y_{AN+1})V_{N+1} = (1 - 0.01)(30.0)$$

$$= 29.7 \text{ kg mol aire/h}$$

salida de acetona en $V_1 = 0.10(0.30) = 0.030$ kg mol/h

salida de acetona en $L_N = 0.90(0.30) = 0.27$ kg mol/h

$$V_1 = 29.7 + 0.03 = 29.73 \text{ kg mol aire + acetona/h}$$

$$y_{A1} = \frac{0.030}{29.73} = 0.00101$$

$$L_N = 90.0 + 0.27 = 90.27 \text{ kg mol agua + acetona/h}$$

$$x_{AN} = \frac{0.27}{90.27} = 0.00300$$

Puestoque el flujo de líquidovaríahgeramentedesde $L_0 = 90.0$ en la entrada hasta $L_N = 90.27$ en la salida, y V varía de 30.0 a 29.73, la pendiente L_n/V_n + , de la línea de operación en la

ecuación (10.3-13) es esencialmente constante. En la figura 10.3-4 se muestra la gráfica de esta línea incluyendo también la curva de la relación de equilibrio, $y_A = 2.53x_A$. Empezando en el punto $y_{A\,1}$, x_{A0}, las etapas corresponden a las que se muestran en la figura. Se necesitan alrededor de 5.2 etapas teóricas.

10.3D Ecuaciones analíticas para el contacto a contracorriente por etapas

Cuando las velocidades de flujo V y L en un proceso a contracorriente son prácticamente constantes, la ecuación de la línea de operación (10.3-13) es una recta. Si la línea de equilibrio también es una recta en el intervalo de la concentración considerado se pueden obtener expresiones analíticas simplificadas para el número de etapas de equilibrio en un proceso a contracorriente por etapas.

Con referencia a la figura 10.3-2, la ecuación (10.3- 14) es un balance general de componentes para el componente A :

$$L_0 x_0 + V_{N+1} y_{N+1} = L_N x_N + V_1 y_1 \tag{10.3-14}$$

Reordenando,

$$L_N x_N + V_{N+1} y_{N+1} = L_0 x_0 - V_1 y_1 \tag{10.3-15}$$

Efectuando un balance para A en las primeras n etapas,

$$L_0 x_0 + V_{n+1} y_{n+1} = L_n x_n + V_1 y_1 \tag{10.3-16}$$

Reordenando,

$$L_0 x_0 - V_1 y_1 = L_n x_n - V_{n+1} y_{n+1} \tag{10.3-17}$$

Igualando la ecuación (10.3-15) con (10.3-17),

$$L_n x_n - V_{n+1} y_{n+1} = L_N x_N - V_{N+1} y_{N+1} \tag{10.3-M}$$

Puesto que los flujos molares son constantes, $L_n = L_N$ = constante = L y $V_{n+1} = V_{N+1}$ = constante = V. Entonces, la ecuación (10.3-18) se transforma en

$$L(x_n - x_N) = V(y_{n+1} - y_{N+1}) \tag{10.3-19}$$

Como y_{n+1} y x_{n+1} están en equilibrio, y la línea de equilibrio es recta, $y_{n+1} = mx_{n+1}$. Además, $y_{N+1} = mx_{N+1}$. Sustituyendo y_{n+1} por mx_{n+1} y haciendo que $A = L/mV$, la ecuación (10.3-19) se transforma en

$$x_{n+1} - Ax_n = \frac{y_{N+1}}{m} - Ax_N \tag{10.3-20}$$

donde A es un factor de absorción constante.

Todos los factores del lado derecho de la ecuación (10.3-20) son constantes. Ésta es una ecuación diferencial lineal de primer orden y puede resolverse por métodos de cálculo de diferencias finitas (G1, M1). Las ecuaciones fínales obtenidas son las siguientes:

Para la transferencia del soluto A de la fase L a V (empobrecimiento o desorción),

$$\frac{x_0 - x_N}{x_0 - (y_{N+1}/m)} = \frac{(1/A)^{N+1} - (1/A)}{(1/A)^{N+1} - 1} \qquad (10.3\text{-}21)$$

$$N = \frac{\log\left[\dfrac{x_0 - (y_{N+1}/m)}{x_N - (y_{N+1}/m)}(1-A) + A\right]}{\log(1/A)} \qquad (10.3\text{-}22)$$

Cuando $A = 1$,

$$N = \frac{x_0 - x_N}{x_N - (y_{N+1}/m)} \qquad (10.3\text{-}23)$$

Para la transferencia del soluto A de la fase V a L (absorción),

$$\frac{y_{N+1} - y_1}{y_{N+1} - mx_0} = \frac{A^{N+1} - A}{A^{N+1} - 1} \qquad (10.3\text{-}24)$$

$$N = \frac{\log\left[\dfrac{y_{N+1} - mx_0}{y_1 - mx_0}\left(1 - \dfrac{1}{A}\right) + \dfrac{1}{A}\right]}{\log A} \qquad (10.3\text{-}25)$$

Cuando $A \neq 1$,

$$N = \frac{y_{N+1} - y_1}{y_1 - mx_0} \qquad (10.3\text{-}26)$$

Con frecuencia, el término A se llama *factor de absorción* y el S, *factor de desorción*, donde $S = 1/A$. Estas ecuaciones se pueden usar con cualquier sistema coherente de unidades, tales como flujo de masa y fracción de masa, o flujo molar y fracción mol. Esta serie de ecuaciones se llama también *ecuaciones de Kremser* y resulta muy conveniente para estos problemas. Si A varía ligeramente de la entrada a la salida, se puede manejar el promedio geométrico de los dos valores, utilizando el valor de m en el extremo diluido para ambos valores de A.

EJEMPLO 10.3-3. Número de etapas mediante una ecuación analítica

Repita el ejemplo 10.3-2 pero utilice las ecuaciones analíticas de Kremserpara los procesos de etapas a contracorriente.

Solución: En un extremo del proceso en la etapa 1, V_1 = 29.73 kg mol/h, y_{A1} = 0.00101, L_0 = 90.0 y x_{A0} = 0. Además, la relación del equilibrio es $y_A = 2.53x_A$ donde $m = 2.53$. Entonces,

$$A_1 = \frac{L}{mV} = \frac{L_0}{mV_1} = \frac{90.0}{2.53 \text{ x } 29.73} = 1.20$$

En la etapa $N, V_{N+1} = 30.0$, $y_{AN+1} = 0.01$, $L_N = 90.27$ y $x_{AN} = 0.00300$.

$$A_N = \frac{L_N}{mV_{N+1}} = \frac{90.27}{2.53 \text{ x } 30.0} = 1.19$$

El promedio geométrico $A = \sqrt{A_1 A_N} = \sqrt{1.20 \times 1.19} = 1.195$.
El soluto acetona se transfiere de la fase V a la L (absorción). Si se sustituye en la ecuación (10.-3-25),

$$N = \frac{\log\left[\frac{0.01 - 2.53(0)}{0.00101 - 2.53(0)}\left(1 - \frac{1}{1.195}\right) + \frac{1}{1.195}\right]}{\log(1.195)} = 5.04 \text{ etapas}$$

Esto es muy semejante a las 5.2 etapas que se obtuvieron utilizando el método gráfico.

10.4 TRANSFERENCIA DE MASA ENTRE FASES

10.4A Introducción y relaciones de equilibrio

1. Introducción a la transferencia de masa en la interfaz. En el capítulo 7 se consideró la transferencia de masa de una fase fluida a otra fase, que era principalmente sólida. Por lo general, el soluto A se transfiere de la fase fluida por transferencia convectiva de masa y a través del solido por difusión. En esta sección se estudia la transferencia de masa del soluto A de una fase fluida por convección y después, a través de una segunda fase fluida, también por convección. Por ejemplo, el soluto se puede difundir a través de una fase gaseosa para después difundirse a través de una fase líquida adyacente o inrniscible y ser absorbido por ella. Esto es frecuente en la absorción de amoniaco del aire por medio de agua.

Las dos fases están en contacto directo, en una torre empacada, de platos, o de rocío, y el área entre las fases suele estar poco definida. En la transferencia de masa de dos fases hay un gradiente de concentración en ca& fase, lo cual ocasiona que se verifique la transferencia de masa. En la interfaz entre ambas fases fluidas, en muchos casos existe un equilibrio.

2. Relaciones de equilibrio. Aun cuando se esté verificando una transferencia de masa, las relaciones de equilibrio son importantes para determinar los perfiles de concentración para predecir las velocidades de transferencia de masa. En la sección 10.2 se estudió la relación de equilibrio en un sistema gas-líquido y la ley de Henry. En la sección 7.1C se analizaron los coeficientes de distribución de equilibrio entre dos fases. Estas relaciones de equilibrio se usaran en los estudios de transferencia de masa entre dos fases que se incluyen en esta sección.

10.4B Perfiles de concentración para la transferencia de masa en la interfaz

En la mayor parte de los sistemas de transferencia de masa están presentes dos fases esencialmente inrniscibles, y también una interfaz entre ambas. Suponiendo que el soluto A se está difundiendo de la fase gaseosa G a la fase líquida L, debe pasar a través de la fase G, de la interfaz y después a la fase L, en forma consecutiva. Se requiere un gradiente de concentración que permita esta transferencia de masa a través de las resistencias que ponen cada una de las fases, como se ve en la figura

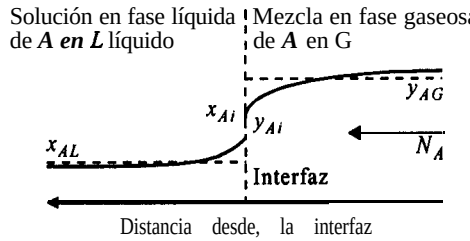


FIGURA 10.4- 1. ***Perfil de concentración del soluto A difundiéndose a través de dos fases.***

10.4-l. La concentración promedio o general de A en la fase gaseosa en unidades de fracción mol es y_{AG}, donde $y_{AG} = p_A/P$, y x_{AL} en la fase líquida, en unidades de fracción mol.

La concentración en la fase gaseosa general y_{AG} disminuye hasta y_{Ai} en la interfaz. La concentración líquida empieza en x_{Ai} en la interfaz y disminuye hasta x_{AL}. En la interfaz, y puesto que no hay resistencia a la transferencia a través de la misma, y_{Ai} y x_{Ai} están en equilibrio y se encuentran relacionadas por la relación de distribución de equilibrio,

$$y_{Ai} = f(x_{Ai}) \tag{10.4-l}$$

donde y_{Ai} es una función de x_{Ai}. La relación es una gráfica de equilibrio como la de la figura 10.1-l. Si el sistema obedece la ley de Henry, $y_A P$ o p_A y x_A están relacionadas por la ecuación (10.2-2) en la interfaz.

Se ha demostrado experimentalmente que la resistencia en la interfaz es despreciable en la mayoría de los casos de transferencia de masa en los que no se verifica una reacción química, como la absorción de gases comunes del aire en aguay la extracción de solutos orgánicos de una fase a otra. Sin embargo, hay algunas excepciones. Algunos compuestos tensoactivos se pueden concentrar en la interfaz y le causa a ésta una resistencia que disminuye la difusión de las moléculas de soluto. Las teorías relativas a cuándo se presenta la resistencia en la interfaz son poco confiables y confusas.

10.4C Transferencia de masa usando coeficientes de transferencia de masa en película y concentraciones en la interfaz

1. Contradifusión equimolar. Para una contradifusión equimolar las concentraciones de la figura 10.4-l se pueden graficar en un diagrama xy como el de la figura 10.4-2. El punto P representa las composiciones de la fase general x_{AG} y x_{AL} de las dos fases y el punto M, las concentraciones interfaciales y_{Ai} y x_{Ai}. Para una difusión de A del gas a líquido y una contradifusión equimolar de B de líquido a gas,

$$N_A = k'_y(y_{AG} - y_{Ai}) = k'_x(x_{Ai} \quad x_{AL}) \tag{10.4-2}$$

donde k'_y es el coeficiente de transferencia de masa de la fase gaseosa en kg mol/s · m² · (fracción mol · g mol/s · cm² · fracción mol, lb mol/h · pie² . fracción mol) y k'_x el coeficiente de transferencia de masa en la fase líquida está en kg mol/s · m² . fracción mol (g mol/s · cm² . fracción mol, lb mol/h · pie² · fracción mol). Reordenando la ecuación (10.4-2),

$$-\frac{k'_x}{k'_y} = \frac{y_{AG} - y_{Ai}}{x_{AL} - x_{Ai}} \tag{10.4-3}$$

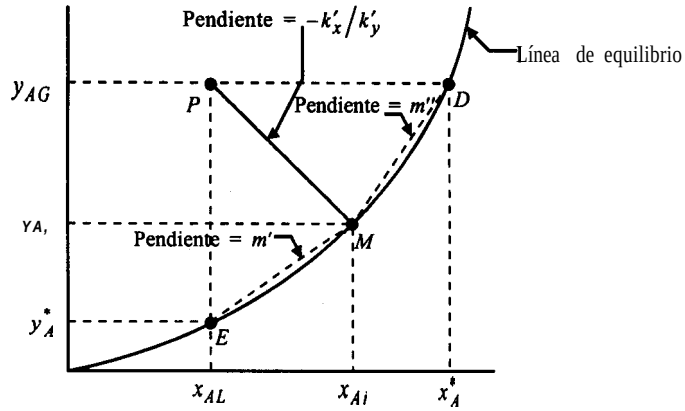


FIGURA 10.4-2. ***Fuerzas impulsoras de concentración y concentraciones para la interfaz en la transferencia de masa (contradifusión equimolar).***

La fuerza impulsora en la fase gaseosa es $(y_{AG} - y_{Ai})$ y en la fase líquida es $(x_{Ai} - x_{AL})$. La pendiente de la línea PM es $-k'_x/k'_y$. Esto significa que si los dos coeficientes de película k'_x y k'_y tienen valores conocidos, las composiciones en las interfaces se pueden determinar trazando la línea $PA4$ con pendiente $-k'_x/k'_y$ que interseca la línea de equilibrio.

Las concentraciones generales de las fases y_{AG} y x_{AL} se determinan simplemente tomando muestras de la fase gaseosa mezclada y la fase líquida también mezclada. Las concentraciones en la interfaz se determinan por medio de la ecuación (10.4-3).

2. Difusión de A a través de B, que está en reposo y no se difunde. Para el caso común de *A* que se difunde a través de una fase gaseosa en reposo y después a través de una fase líquida en reposo, las concentraciones se dibujaron en la figura 10.4-3, donde *P* representa nuevamente las composiciones de masa de las fases y *M* las composiciones en la interfaz. Las ecuaciones de *A* que se difunde a través del gas en reposo y después a través del líquido en reposo, son

$$N_A = k_y(y_{AG} - y_{Ai}) = k_x(x_{Ai} - x_{AL}) \qquad (10.4\text{-}4)$$

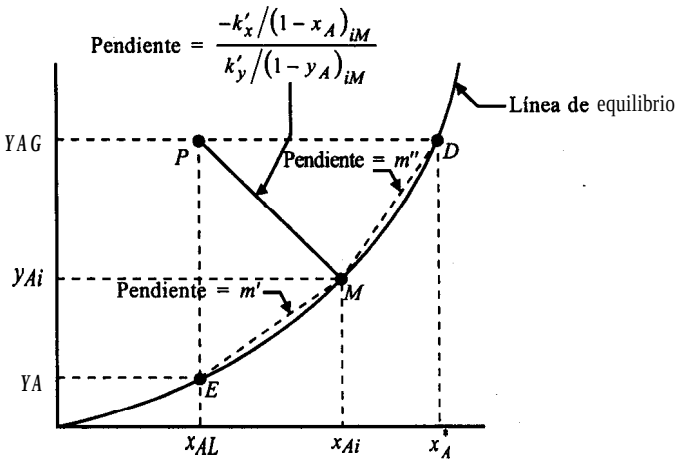


FIGURA 10.4-3. ***Fuerzas impulsoras de concentración y concentraciones en la interfase para la transferencia de masa (A difundiéndose a través de B en reposo).***

Ahora bien,

$$k_y = \frac{k'_y}{(1-y_A)_{iM}} \qquad k_x = \frac{k'_x}{(1-x_A)_{iM}} \tag{10.4-5}$$

donde

$$(1-y_A)_{iM} = \frac{(1-y_{Ai})-(1-y_{AG})}{\ln[(1-y_{Ai})/(1-y_{AG})]} \tag{10.4-6}$$

$$(1-x_A)_{iM} = \frac{(1-x_{AL})-(1-x_{Ai})}{\ln[(1-x_{AL})/(1-x_{Ai})]} \tag{10.4-7}$$

Entonces,

$$N_A = \frac{k'_y}{(1-y_A)_{iM}}(\mathrm{YA},-y_{Ai}) = \frac{k'_x}{(1-x_A)_{iM}}(x_{Ai}-x_{AL}) \tag{10.4-8}$$

Nótese que $(1-y_A)_{iM}$ es igual a y_{BM} de la ecuación (7.2-l 1) pero escrito para la interfaz, y $(1-x_A)_{iM}$ es igual a x_{BM} de la ecuación (7.2-l 1). Usando la ecuación (10.4-Q y reordenando,

$$\frac{-k'_x/(1-x_A)_{iM}}{k'_y/(1-y_A)_{iM}} = \frac{\mathrm{YAC}-y_{Ai}}{x_{AL}-x_{Ai}} \tag{10.4-9}$$

La pendiente de la línea PM en la figura 10.4-3 para obtener las composiciones de la interfaz, tiene que trazarse por la parte izquierda de la ecuación (10.4-g). Esto difiere de la pendiente de la ecuación (10.4-3) para contradifusión equimolar en los términos $(1-y_A)_{iM}$ y $(1-x_A)_{iM}$. Cuando A se difunde a través de B en reposo y las soluciones son diluidas, $(1-y_A)_{iM}$ y $(1-x_A)_{iM}$ son cercanos a 1.

Para obtener la pendiente con la ecuación (10.4-g) se requiere un método de aproximaciones sucesivas, puesto que la parte izquierda contiene y_{Ai} y x_{Ai} que son las incógnitas. Para la primera aproximación se supone que $(1-y_A)_{iM}$ y $(1-x_A)_{iM}$ son 1 .O y se usa la ecuación (10.4-g) para obtener la pendiente y los valores de y_{Ai} y x_{Ai}. En la segunda aproximación, se usan estos valores de y_{Ai} y x_{Ai} para calcular la nueva pendiente y obtener los nuevos valores de y_{Ai} y x_{Ai}. Este proceso se repite hasta que las composiciones en la interfaz no cambien de una aproximación a la siguiente. Por lo general, se requieren tres aproximaciones.

EJEMPLO 10.4-l. Composiciones de interfaz en la transferencia de masa entre fases

El soluto A se absorbe de una mezcla gaseosa de A y B en una torre de paredes mojadas por el líquido que fluye hacia abajo por la pared como película. En un punto de la torre la concentración general del gas es $y_{AG} = 0.380$ fracción mol y la concentración general de líquido es $x_{AL} = 0.100$. La torre opera a 298 K y 1.013 $\times 10^5$ Pa y los datos de equilibrio son:

x_A	y_A	x_A	YA
0	0	0.20	0.131
0.05	0.022	0.25	0.187
0.10	0.052	0.30	0.265
0.15	0.087	0.35	0.385

El soluto *A* se **difunde** a través de *B* en reposo en la fase gaseosa y después, a través de un líquido que no se difunde.

Mediante correlaciones para soluciones diluidas en torres de paredes mojadas, se predice que el coeficiente de película de transferencia de masa para *A* en la fase gaseosa es k_y = 1.465 $\times 10^{-3}$ mol kg **A/s · m² · fracción mol (1.08** lb **mol/h · pie² · fracción** mol) y para la fase líquida es k_x = 1.967 $\times$ 1 0^{-3} kg mol **A/s · m² · fracción** mol(1.45 mol **lb/h · pie² · fracción** mol). Calcule las concentraciones en la interfaz y_{Ai} y x_{Ai} y el flujo específico N_A.

Solución: Puesto que las correlaciones son para soluciones diluidas, $(1 - y_A)_{iM}$ y $(1 - x_A)_{iM}$ son aproximadamente 1 .O y los coeficientes son iguales a k'_y y k'_x . Los datos de equilibrio se **grafican** en la figura 10.4-4. El punto P está situado en las coordenadas $y_{AG} = 0.380$ y $x_{AL} = 0.100$. En1a primera aproximación $(1 - y_A)_{iM}$ y $(1 - x_A)_{iM}$ se suponen iguales a 1 .O y la pendiente de la línea *PM* **obtenida** de la ecuación (10.4-g) es

$$-\frac{k'_x/(1-x_A)_{iM}}{k'_y/(1-y,)_{,}} = -\frac{1.967 \times 10^{-3}/1.0}{1.465 \times 10^{-3}/1.0} = -1,342$$

En la figura 10.4-4 se **grafica** una línea a través del punto *P* con una pendiente de -1.342 que interseca a la línea de equilibrio en M_1, donde y_{Ai} = 0.183 y x_{Ai} = 0.247.

Para la segunda aproximación se usan los valores de y_{Ai} y x_{Ai} de la primera aproximación para calcular la nueva pendiente. Sustituyendo en las ecuaciones (10.4-6) y **(10.4-7),**

$$(1-y_A)_{iM} = \frac{(1-y_{Ai})-(1-y_{AG})}{\ln[(1-y_{Ai})/(1-y_{AG})]}$$

$$= \frac{(1\text{-}0.183)\text{-}(1\text{-}0.380)}{\ln[(1\text{-}\ 0.183)/(1 - 0.380)]} = 0.715$$

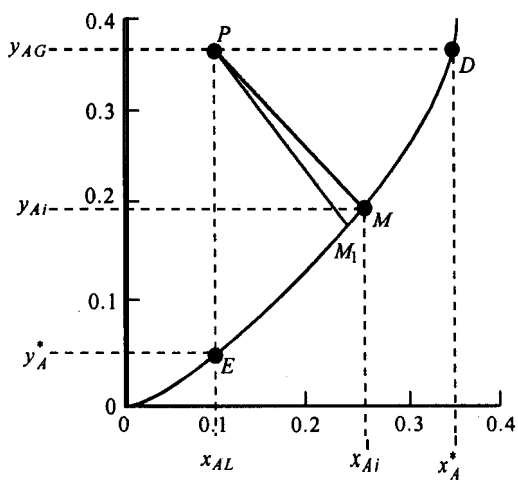


FIGURA *10.4-4. Localización de las concentraciones en la interfaz del ejemplo 10.4-I.*

$$(1-x_A)_{iM} = \frac{(1-x_{AL})-(1-x_{Ai})}{\ln[(1-x_{AL})/(1-x_{Ai})]}$$

$$= \frac{(1\text{-}0.100)\text{-}(1\text{-}0.247)}{\ln[(1-0.100)/(1-0.247)]} = 0.825$$

Al sustituir en la ecuación (10.4-g) para obtener la nueva pendiente,

$$-\frac{k'_y/(1-y_A)_{iM}}{} = -\frac{1.967 \times 10^{-3}/0.715}{} = -1.163$$

Se traza una línea a través del punto **P** con una pendiente de -1.163 que interseca a la línea de equilibrio en M, donde $y_{Ai} = 0.197$ y $x_{Ai} = 0.257$.

Con estos nuevos valores para la tercera aproximación se calculan los siguientes datos:

$$(1-y_A)_{iM} = \frac{(1\text{-}0.197)\text{-}(1\text{-}0.380)}{\ln[(1-0.197)/(1-0.380)]} = 0.709$$

$$(1-x_A)_{iM} = \frac{(1-0.100)-(1-0.257)}{\ln[(1-0.100)/(1-0.257)]} = 0.820$$

$$-\frac{k'_x/(1-x_A)_{iM}}{k'_y/(1-y_A)_{iM}} = -\frac{1.967 \times 10^{-3}/0.820}{1.465 \times 10^{-3}/0.709} = -1.160$$

Esta pendiente de -1.160 es esencialmente igual a la de -1.163 de la segunda aproximación. Por tanto, los valores finales son $y_{Ai} = 0.197$ y $x_{Ai} = 0.257$, tal como se muestra en el punto M.

Para calcular el flujo específico se usa la ecuación (10.4-8),

$$N_A = \frac{k'_y}{(1-y_A)_{iM}}(y_{AG} - y_{Ai}) = \frac{1.465 \times 10^{-3}}{0.709}(0.380 - 0.197)$$

$$= 3.78 \times 10^{-4} \text{ kg mol/s} \cdot \text{m}^2$$

$$N_A = \frac{1.08}{0.709}(0.380 - 0.197) = 0.2785 \text{ lb mol/h} \cdot \text{pie}^2$$

$$N_A = \frac{k'_x}{(1-x_A)_{iM}}(x_{Ai} - x_{AL}) = \frac{1.967 \times 10^{-3}}{0.820}(0.257 - 0.100)$$

$$= 3.78 \times 10^{-4} \text{ kg mol/s} \cdot \text{m}^2$$

Nótese que el flujo específico N_A a través de cada fase es igual al de la otra, tal como debe ser el caso en un estado estacionaro.

10.4D Coeficientes generales de transferencia de masa y fuerzas impulsoras

1. Introducción. Los coeficientes de película o de una sola fase para transferencia de masa, k'_y y k'_x o k_y y k_x, suelen ser difíciles de determinar experinientalmente, excepto en ciertos experimentos diseñados de tal manera que la diferencia de concentración a través de una fase sea pequeña y se pueda despreciar. Como resultado, se miden los coeficientes generales de transferencia de masa K'_y y K'_x con base en la fase gaseosa o líquida. Este método se usa en la transferencia de calor, donde los coeficientes generales de transferencia de calor se miden con base en las áreas internas o externas en vez de coeficientes de película.

El coeficiente general de transferencia de masa K'_y se define como

$$N_A = K'_y(y_{AG} - y^*_A) \tag{10.4-10}$$

donde K'_y está basado en la fuerza impulsora general de la fase gaseosa en kg $\text{mol/s} \cdot \text{m}^2 \cdot$ fracción mol, y y^*_A es el valor que estaría en equilibrio con x_{AL}, tal como se muestra en la figura 10.4-2. Además, K'_x *se* define como

$$N_A = K'_x\left(x^*_A - x_{AL}\right) \tag{10.4-11}$$

donde K'_x se basa en la fuerza impulsora general de la fase líquida en kg $\text{mol/s} \cdot \text{m}^2 \cdot$ fracción mol, y x^*_A es el valor que estaría en equilibrio con y_{AG}.

2. Contradifusión equimolar o difusión de soluciones diluidas. La ecuación (10.4-2) es válida para la contradifusión equimolar, o cuando las soluciones son. diluidas, las ecuaciones (10.4-8) y (10.4-2) son idénticas:

$$N_A = k'_y(y_{AG} - y_{Ai}) = k'_x(x_{Ai} - x_{AL}) \tag{10.4-2}$$

Con base en la figura 10.4-2,

$$y_{AG} - y^*_A = (y_{AG} - y_{Ai}) + (y_{Ai} - y^*_A) \tag{10.4-12}$$

La pendiente m' entre los puntos E y M se puede expresar como

$$m' = \frac{y_{Ai} - y^*_A}{x_{Ai} - x_{AL}} \tag{10.4-13}$$

Resolviendo la ecuación (10.4-13) para $(y_{Ai} - y^*_A)$ y sustituyendo en la ecuación (10.4-12),

$$y_{AG} - y^*_A = (y_{AG} - y_{Ai}) + m'(x_{Ai} - x_{AL}) \tag{10.4-14}$$

Entonces, al sustituir las ecuaciones (10.4-10) y (10.4-2) en la (10.4-14) y cancelar N_A,

$$\frac{1}{K'_y} = \frac{1}{k'_y} + \frac{m'}{k'_x} \tag{10.4-E}$$

El lado izquierdo de la ecuación (10.4-15) es la resistencia total basada en la fuerza impulsora general del gas y es igual a la resistencia de película del gas $1/k'_y$ más la resistencia de película del líquido m'/k'_x.

De una manera similar, y con base en la figura 10.4-2,

$$x_A^* - x_{AL} = (x_A^* - x_{Ai}) + (x_{Ai} - x_{AL}) \tag{10.4-16}$$

$$m'' = \frac{y_{AG} - y_{Ai}}{x_A^* - x_{Ai}} \tag{10.4-17}$$

Procediendo como antes,

$$\frac{1}{K_x'} = \frac{1}{m'' k_y'} + \frac{1}{k_x'} \tag{10.4-18}$$

Se analizaran ahora varios casos especiales de las ecuaciones (10.4-l 5) y (10.4- 18). Los valores numéricos de k_x' y k_y' son parecidos. Los valores de las pendientes m' o m'' son muy importantes. Si m' es muy pequeña, de tal manera que la curva de equilibrio en la figura 10.4-2 sea casi horizontal, un valor pequeño de y_A en el gas dará un valor grande de x_A en el equilibrio en el líquido. El soluto gaseoso A es entonces, muy soluble en la fase líquida, por lo que el término m'/k_y' de la ecuación (10.4- 15) es muy pequeño. Entonces,

$$\frac{1}{K_y'} \cong \frac{1}{k_y'} \tag{10.4-19}$$

y la resistencia principal está en la fase gaseosa, o bien, "la fase gaseosa controla". El punto M se ha desplazado hacia abajo quedando muy cerca de E, por lo que

$$y_{AG} - y_A^* \cong y_{AG} - y_{Ai} \tag{10.4-20}$$

De manera similar, cuando m'' es muy grande, el soluto,4 es muy insoluble en el líquido, $1/(m'' k_y')$ es muy pequeño, y

$$\frac{1}{K_x'} \cong \frac{1}{k_x'} \tag{10.4-21}$$

La "fase líquida controla" y $x_{Ai} \cong x_A^*$. Los sistemas para absorber oxígeno o CO_2 del aire por medio de agua son semejantes a la ecuación (10.4-21).

3. Difusión de A a través de B, en reposo y sin dzjündirse. Para el caso de A que se difunde a través de B, que no se difunde, las ecuaciones (10.4-8) y (10.4-14) resultan válidas y se usa entonces la figura (10.4-3),

$$N_A = \frac{k_y'}{(1-y_A)_{iM}}(y_{AG} - y_{Ai}) = \frac{k_x'}{(1-x_A)_{iM}}(x_{Ai} - x_{AL}) \tag{10.4-8}$$

$$y_{AG} - y_A^* = (y_{AG} - y_{Ai}) + m'(x_{Ai} - x_{AL}) \tag{10.4-14}$$

Sin embargo, es necesario definir las ecuaciones para el flujo usando los coeficientes generales como sigue:

$$N_A = \left[\frac{K_y'}{(1-y_A)_{*M}}\right](y_{AG} - y_A^*) = \left[\frac{K_x'}{(1-x_A)_{*M}}\right](x_A^* - x_{AL}) \tag{10.4-22}$$

Muchas veces los términos entre corchetes se escriben como sigue:

$$K_y = \frac{K'_y}{(1-y_A)_{*M}} \qquad K_x = \frac{K'_x}{(1-x_A)_{*M}} \tag{10.4-23}$$

donde K_y es el coeficiente general de transferencia de masa en el gas para A que se difunde a través de B, que está en reposo, y K_x es el coeficiente general de transferencia de masa para el líquido. Ambos coeficientes dependen de la concentración. Sustituyendo las ecuaciones (10.4-8) y (10.4-22) en la (10.4-14), se obtiene

$$\frac{1}{K'_y/(1-y_A)_{*M}} = \frac{1}{k'_y/(1-y_A)_{iM}} + \frac{m'}{k'_x/(1-x_A)_{iM}} \tag{10.4-24}$$

donde

$$(1-y_A)_{*M} = \frac{(1-y^*_A)-(1-y_{AG})}{\ln\left[(1-y^*_A)/(1-y_{AG})\right]} \tag{10.4-25}$$

De manera similar, para K'_x,

$$\frac{1}{K'_x/(1-x_A)_{*M}} = \frac{1}{m'' k'_y/(1-y_A)_{iM}} + \frac{1}{k'_x/(1-x_A)_{iM}} \tag{10.4-26}$$

donde

$$(1-x_A)_{*M} = \frac{(1-x_{AL})-(1-x^*_A)}{\ln\left[(1-x_{AL})/(1-x^*_A)\right]} \tag{10.4-27}$$

Recuerde que las relaciones deducidas también pueden aplicarse a cualquier sistema de dos fases donde y represente una fase y x, la otra. Por ejemplo, para la extracción del soluto ácido acético (A) de agua (fase y) por medio de éter isopropílico (fase x), se pueden utilizar las mismas relaciones.

EJEMPLO 10.4-2. Coeficientes generales de transferencia de masa a partir de coefcien tes de película

Usando los mismos datos del ejemplo 10.4-1, calcule el coeficiente general de transferencia de masa K'_y, el flujo específico y el porcentaje de resistencia en las películas de gas y de líquido. Hága lo mismo para el caso A difundiéndose a través de B en reposo.

Solución: Con base en la figura 10.4-4, y y^*_A = 0.052, que está en equilibrio con el líquido total x_{AL} = 0.10. Además, y_{AG} = 0.380. La pendiente del segmento *m'* entre *E y Mes,* con base en la ecuación (10.4-13), para y_{Ai} = 0.197 y x_{Ai} = 0.257,

$$m' = \frac{y_{Ai} - y;}{x_{Ai} - x_{AL}} = \frac{0.197 - 0.052}{0.257 - 0.100} = 0.923$$

Con base en el ejemplo 10.4-l.

$$\frac{k'_y}{(1-\mathrm{YA})_{iM}} = \frac{1.465 \times 10^{-3}}{0.709} \qquad \frac{k'_x}{(1-x_A)_{iM}} = \frac{1.967 \times 10^{-3}}{0.820}$$

Usando la ecuación (10.4-25),

$$(1-y_A)_{*M} = \frac{(1-y_A^*)-(1-y_{AG})}{\ln\left[(1-y_A^*)/(1-y_{AG})\right]}$$

$$= \frac{(1-0.052)-(1-0.380)}{\ln\left[(1-0.052)/(1-0.380)\right]} = 0.773$$

Entonces, usando la ecuación (10.4-24),

$$\frac{1}{K'_y/0.773} = \frac{1}{1.465 \times 10^{-3}/0.709 + 1.967 \times 10^{-3}/0.820} = \frac{0.923}{}$$

$$= 484.0 + 384.8 = 868.8$$

Resolviendo, $K'_y = 8.90 \times 10^{-4}$. El porcentaje de resistencia en la película de gas es (484.0/868.8) 100 = 55.7% y 44.3% en la película de líquido. Con la ecuación (10.4-22), el flujo específico es:

$$N_A = \frac{K'_y}{(1-y_A)_{*M}}(y_{AG}-y_A^*) = \frac{8.90 \times 10^{-4}}{0.773}(0.380-0.052)$$

$$= 3.78 \times 10^{-4} \text{ mol kg/s} \cdot \text{m}^2$$

Éste es, por supuesto, el mismo valor del flujo específico que se calculó en el ejemplo 10.4- 1 mediante las ecuaciones de película.

4. Comentario de los coeficientes generales. Si el sistema de dos fases es tal que la resistencia principal está en la fase gaseosa, como en la ecuación (10.4-19), entonces para aumentar la velocidad general de transferencia de masa, los esfuerzos se deben concentrar en aumentar la turbulencia de la fase gaseosa y no la de la fase líquida. En un sistema de dos fases, donde la resistencia de película del líquido sea la que controle, se debe aumentar la turbulencia en esta fase para aumentar las velocidades de transferencia de masa.

Para diseñar equipos de transferencia de masa, el coeficiente general de ésta se calcula con base en los coeficientes de película individuales, como se usó en esta sección.

10.5 PROCESOS CONTINUOS DE HUMIDIFICACIÓN

10.5A Introducción y tipos de equipos para humidificación

1. *Introducción a los contactores gas-líquido.* Cuando un líquido relativamente caliente se pone en contacto directo con un gas que no está saturado, parte del líquido se vaporiza. La temperatura

del líquido disminuye debido principalmente al calor latente de evaporación. Este contacto directo de un gas con un líquido puro es muy frecuente en los casos de contacto de aire con agua para los siguientes propósitos: humidificación de aire para controlar el contenido de humedad del mismo en operaciones de secado o de acondicionamiento de aire; deshumidificación de aire, en el que el agua fría condensa algo del vapor de agua del aire caliente; y enfriamiento de agua donde la evaporación del agua en el aire enfría el agua caliente.

En el capítulo 9 se estudiaron los fundamentos de la humedad y de la humidificación adiabática. Ahora, en esta sección se considerarán el funcionamiento y el diseño de los contactores continuos de aire-agua. Se pondrá mayor énfasis en el enfriamiento de agua, puesto que este sistema es el caso más importante en las industrias de proceso. Hay muchos casos en la industria en los que se descarga agua caliente de intercambiadores de calor y de condensadores en los cuales es mucho más económico enfriarla y volver a usarla que simplemente desecharla.

2. Torres para enfriamiento de agua. En una torre típica para enfriamiento de agua, el agua caliente fluye a contracorriente del aire. Por lo general, el agua caliente entra por la parte superior de una torre empacada y cae en cascada a través del material de empaque, y sale por el fondo. El aire entra por la parte inferior de la torre y fluye hacia arriba, a través del agua que desciende. El empaque de la torre casi siempre es de tablillas de madera y el agua se distribuye por medio de acanaladuras y rebosaderos para que caiga en cascada por el enrejado de tablillas, lo cual suministra un área extensa interfacial de contacto entre el agua y el aire en forma de gotas y película de agua. El flujo de aire ascedente a través de la torre se puede inducir por medio de la tendencia natural del aire caliente a subir (tiro natural) o bien por la acción de un ventilador. En otros textos (B1, Tl) se encuentran descripciones detalladas de las torres.

El agua no puede enfriarse por debajo de su temperatura de bulbo húmedo. La fuerza impulsora de la evaporación del agua es, aproximadamente, la presión de vapor de agua menos la presión de vapor que tendría a su temperatura de bulbo húmedo. El agua sólo se puede enfriar hasta la temperatura de bulbo húmedo, y en la práctica se enfría a unos 3 K o un poco más por encima de dicha temperatura. La evaporación en la torre de enfriamiento sólo provoca pequeñas pérdidas de agua. Como el calor latente de vaporización del agua es de aproximadamente 2300 kJ/kg, un cambio típico de unos 8 K en la temperatura del agua corresponde auna pérdida de evaporación de más o menos 1.5%. Por lo general, se supone que el flujo total de agua es constante al efectuar los cálculos del tamaño de la torre.

En la humidifícación y deshumidificación se necesita un contacto íntimo entre la fase gaseosa y la líquida para velocidades grandes de transferencia de masa y de calor. La resistencia de la fase gaseosa controla la velocidad de transferencia. Se usan torres empacadas o torres con rociadores para obtener áreas interfaciales extensas y promover la turbulencia de la fase gaseosa.

10.5B Teoría y cálculo de las torres de enfriamiento con agua

1. Per-les de temperatura y concentración en la interfaz. La figura 10.5-l es un diagrama de perfiles de temperatura y concentración en términos de la humedad en la interfaz agua-gas. El vapor de agua se difunde de la interfaz hacia la fase gaseosa masiva con una fuerza impulsora en la fase gaseosa $(H_i - H_G)$ kg de H_2O/kg de aire seco. No hay fuerza impulsora para la transferencia de masa en la fase líquida, puesto que el agua es un líquido puro. La fuerza impulsora de la temperatura es $T_L - T_i$ en la fase líquida y $T_i - T_G$ K o °C en la fase gaseosa. Hay flujo de calor del líquido masivo a la interfaz en el líquido. También hay flujo de calor sensible desde la interfaz a la fase gaseosa. Además, de la interfaz del vapor de agua sale calor latente que se difunde a la fase gaseosa. El flujo de calor sensible del líquido a la interfaz es igual al flujo de calor sensible en el gas más el flujo de calor latente en el gas.

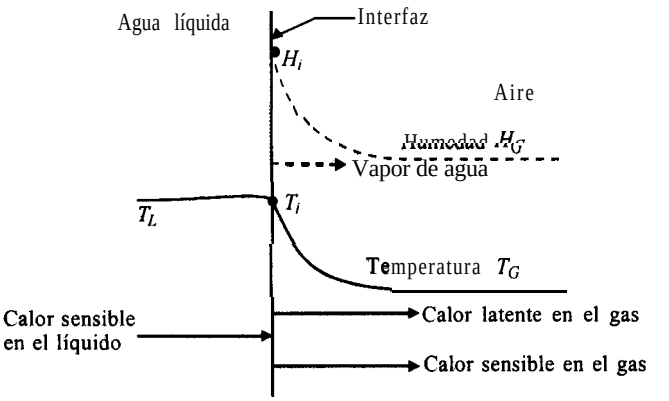


FIGURA 10.5-l. ***Perfiles de temperatura y concentración en la parte superior de la torre de enfriamiento.***

Las condiciones de la figura 10.5-l se presentan en la parte superior de lacolumna de enfriamiento. En la parte inferior de dicha columna, la temperatura de la masa de agua es mayor que la del bulbo húmedo del aire, pero puede ser inferior a la temperatura de bulbo seco. Entonces, la dirección del flujo de calor sensible de la figura 10.5-l se invierte.

2. Ecuación de velocidad para transferencia de calor y de masa. Se considerará una torre empacada para enfriamiento de agua con aire que fluye hacia arriba y agua a contraconiente hacia abajo, en la torre. El área interfacial total entre las fases aire y agua se desconoce, puesto que el área superficial del empaque no es igual al área interfacial entre las gotas de agua y el aire. Por consiguiente, se define una cantidad a, que es m^2 de área interfacial por m^3 de volumen de sección empacada, o m^2/m^3. Esto se combina con el coeficiente de transferencia de masa de la fase gaseosa k_G en kg mol/s · m^2 · Pa o kg mol/s · m^2 . atm, para obtener un coeficiente volumétrico $k_G a$ en kg mol/s . m^3 de volumen · Pa o kg mol/s · m^3 atm (lb mol/h · pie^3 · atm).

El proceso se lleva a cabo adiabáticamente y las diversas corrientes y condiciones que se muestran en la figura 10.5-2 son .

L = flujo de agua, kg de agua/s · m^2 (lb_m/h . pie^2)

T_L = temperatura del agua, °C o K (°F)

G = flujo de aire seco, kg/s . m^2 (lbm/h . pie*)

T_G = temperatura del aire, °C o K (“F)

H = humedad del aire, kg de agua/kg de aire seco (lb de agua/lb de aire seco)

H_y = entalpía de la mezcla de aire-vapor de agua, J/kg de aire seco (btu/ lb_m de aire seco)

La entalpía H_y, tal como se expresa en la ecuación (9.3-8) es

$$H_y = c_S(T - T_0) + H\lambda_0 = (1.005 + 1.88H)10^3\ (T - 0) + 2.501 \times 10^6 H \quad \text{(SI)}$$

$$H_y = c_S(T - T_0) + H\lambda_0 = (0.24 + 0.45H)(T - 32) + 1075.4\ H \text{ (Unidades del sistema inglés)} \quad (9.3\text{-}8)$$

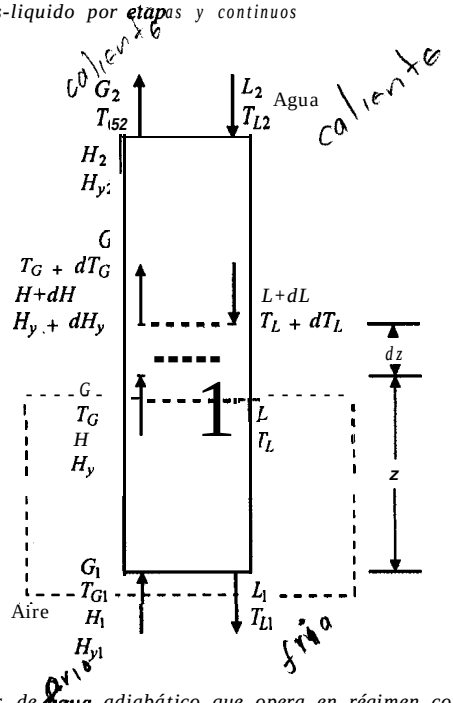


FIGURA 10.5-2. *Enfriador de agua adiabático que opera en régimen continuo a contracorriente.*

La temperatura básica selecciona& es 0 °C o 273 K (32 "F). Nótese que (T $-T_0$) °C = (T $-T_0$) K.

Si se efectúa un balance total de calor para la sección marcada con líneas punteadas en la figura 10.5-2, se obtiene una línea de operación,

$$G(H_y - H_{y1}) = Lc_L (T_L - T_{L1}) \tag{10.5-1}$$

Se supone que L es esencialmente constante, puesto que sólo se evapora una cantidad pequeña. La capacidad calorífica c_L de líquido se supone constante e igual a 4.187×10^3 J/kg · K (1.00 btu/lb$_m$ · °F). Cuando esta ecuación (10.5-1) se grafica con H_y en función de T_L, se obtiene una recta con pendiente de Lc_L/G. Llevando a cabo un balance general de calor en ambos extremos de la torre,

$$G(H_{y2} - H_{y1}) = Lc_L(T_{L2} - T_{L1}) \tag{10.5-2}$$

Al efectuar nuevamente un balance de calor para la altura dz de la columna y despreciarlos términos de calor sensible en comparación con el calor latente,

$$Lc_L dT_L = G\, dH_y \tag{10.5-3}$$

La transferencia total de calor sensible del volumen del líquido a la interfaz es (véase la Fig. 10.5-1),

$$Lc_L dT_L = G\, dH_y = h_L a\, dz(T_L - T_i) \tag{10.5-4}$$

donde $h_L a$ es el coeficiente volumétrico de transferencia de calor de la fase líquida en W/m^3 · K (btu/h · pie^3 · "F) y T_i es la temperatura en la interfaz.

Para una transferencia adiabática de masa, la velocidad de transferencia de calor debida al calor latente en el vapor de agua que se esta transfiriendo, se puede obtener de la ecuación (9.3-16) si se reordena y se usa una base volumétrica,

$$\frac{q_\lambda}{A} = M_B k_G a P \lambda_0 (H_i - H_G) dz \tag{10.5-5}$$

donde q_λ/A está en W/m^2 (btu/h . pie^2), M_B = peso molecular del aire, $k_G a$ es un coeficiente volumétrico de transferencia de masa en el gas en kg mol/s · m^3 · Pa, P = presión atmosférica en Pa, λ_0 es el calor latente del agua en J/kg de agua, H_i es Ea humedad del gas en la interfaz en kg de agua' kg de aire seco, y H_G es la humedad del gas en la fase gaseosa masiva en kg de agua/kg de aire seco. La velocidad de transferencia de calor sensible en el gas es

$$\frac{q_S}{A} = h_G a(T_i - T_G)dz \tag{10.5-6}$$

donde q_S/A se da en W/m^2 y $h_G a$ es un coeficiente volumétrico de transferencia de calor en el gas en W/m^3 · K.

Ahora con base en la figura 10.5-1, la ecuación (10.5-4) debe ser igual a la suma de las ecuaciones (10.5-5) y (10.5-6).

$$G dH_y = M_B k_G a P \lambda_0(H_i - H_G)dz + h_G a(T_i - T_G)dz \tag{10.5-7}$$

La ecuación (9.3-18) indica que

$$\frac{h_G a}{M_B k_y a} \cong c_S \tag{10.5-8}$$

Sustituyendo $k_y a$ por $P k_G a$,

$$\frac{h_G a}{M_B P k_G a} \cong c_S \tag{10.5-9}$$

Sustituyendo la ecuación (10.5-g) en la (10.5-7) y reordenando

$$G\, dH_y = M_B k_G a P\, dz[(c_S T_i + \lambda_0 H_i) - (c_S T_G + \lambda_0 H_G)] \tag{10.5-10}$$

Sumando y restando $c_S T_0$ en los corchetes,

$$G\, dH_y = M_B k_G a P\, dz\{c_S(T_i - T_0) + H_i\lambda_0 - [c_S(T_G - T_0) + H_G\lambda_0]\} \tag{10.5-11}$$

Los términos dentro de las llaves son $(H_{yi} - H_y)$ y la ecuación (10.5-11) se transforma en

$$G\, dH_y = M_B k_G a P\, dz(H_{yi} \quad H_y) \tag{10.5-12}$$

Al integrar, la ecuación final válida para calcular la altura de la torre es

$$\int_0^z dz = z = \frac{G}{M_B k_G a P}\int_{H_{y1}}^{H_{y2}} \frac{dH_y}{H_{yi} - H_y} \tag{10.5-13}$$

Al igualar la ecuación (10.5-4) con la (10.5-12), y al reordenar el resultado,

$$\frac{h_L a}{k_G a M_B P} = \frac{H_{yi} - H_y}{T_i - T_L} \tag{10.5-14}$$

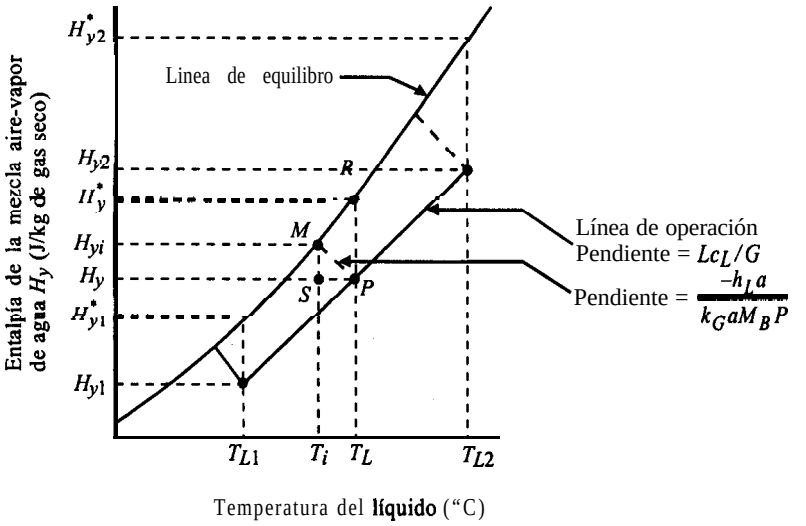


FIGURA 10.5-3. *Diagrama entalpía-temperatura y línea de operación para una torre de enfriamiento con agua.*

10.5C Diseño de una torre de enfriamiento de agua mediante el uso de coeficientes de transferencia de masa de película

El diseño de la torre se realiza siguiendo los pasos siguientes:

1. Se grafica la entalpía del aire saturado H_{yi} en función de T_i en una gráfica de H contra T tal como se muestra en la figura 10.5-3. Esta entalpía se calcula con la ecuación (9.343) usando la humedad de saturación obtenida de la gráfica de humedad para una temperatura dada, con 0 °C (273 K) como temperatura base. En la tabla 10.5-l se muestran valores calculados.
2. Conociendo las condiciones del aire de entrada T_{G1} y H_1, se calcula la entalpía de este aire H_{y1} a partir de la ecuación (9.3-8). El punto H_{y1} y T_{L1} (la temperatura deseada de salida del agua) se incluye en la figura 10.5-3 como uno de los puntos de la línea de operación. Ésta se grafica con una pendiente de Lc_L/G y termina en un punto T_{L2}, que es la temperatura de entrada del agua. (Esto proporciona H_{y2}.) En otro procedimiento, H_{y2} se puede calcular en la ecuación (10.5-2).

TABLA 10.5-l. *Entalpías de mezclas saturadas aire-vapor de agua (temperatura base 0 °C)*

T_L		H_y		T_L		H_y	
		btu	J			btu	J
°F	°C	lb_m de aire seco	kg de aire seco	°F	°C	lb_m de aire seco	kg de aire seco
60	15.6	18.78	43.68 × 10^3	100	37.8	63.7	148.2 × 10^3
80	26.7	36.1	84.0 × 10^3	105	40.6	74.0	172.1 × 10^3
85	29.4	41.8	97.2 × 10’	110	43.3	84.8	197.2 × 10^3
90	32.2	48.2	112.1 × 10^3	115	46.1	96.5	224.5 × 10^3
95	35.0	55.4	128.9 × 10^3	140	60.0	198.4	461.5 × 10^3

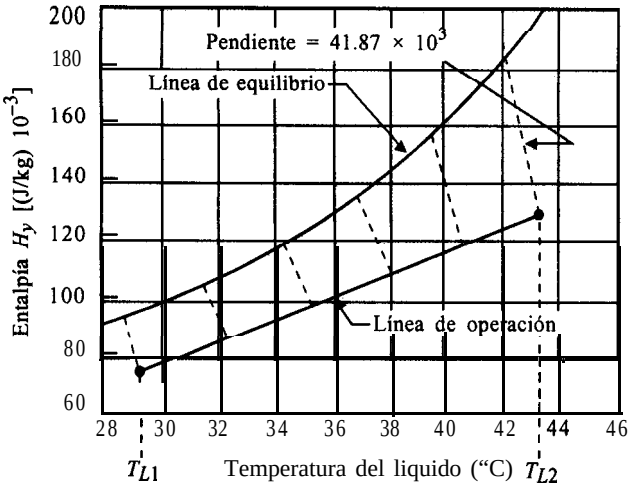


FIGURA 10.5-4. *Resolución gráfica del ejemplo 10.5-l.*

3. Conociendo $h_L a$ y $k_G a$, se grafican líneas con pendiente $-h_L a/k_G a M_B P$ como se indica en la figura 10.5-3. En la ecuación (10.5-14), el punto P representa a H_y y a T_L en la línea de operación, y el punto Mrepresenta a H_{yi} y T_i, que son las condiciones de interfaz. Por consiguiente, la línea MS o H_{yi} H_y representa a la fuerza impulsora en la ecuación (1 OS- 13).

4. Se calcula la fuerza impulsora $H_{yi} - H_y$ para varios valores de T_L entre $T_{L1} - T_{L2}$. Entonces, al graficar $1/(H_{yi} - H_y)$ en función de H_y desde H_{y1} hasta H_{y2}, se lleva a cabo una integración gráfica para obtener el valor integral en la ecuación (10.5-13). Finalmente, se calcula la altura z con la ecuación (10.5-13).

10.5D Diseño de una torre de enfriamiento de agua utilizando los coeficientes globales de transferencia de masa

A menudo, sólo se dispone de un coeficiente global de transferencia de masa $K_G a$ en kg mol/s · m³ . Pa o kg mol/s · m³ · atm, y la ecuación (10.5-13) se transforma en

$$z = \frac{G}{M_B K_G a P} \int_{H_{y1}}^{H_{y2}} \frac{dH_y}{H_y^* - H_y} \qquad \textbf{(10.5-E)}$$

El valor de H_y^* se determina verticalmente desde el valor de H_y en el punto P hasta la línea de equilibrio para dar H_y^* en el punto R, como se muestra en la figura 10.5-3. En muchos casos no se dispone de los coeficientes de película experimentales $K_G a$ y $h_L a$. Los pocos datos experimentales disponibles indican que $h_L a$ es muy grande y la pendiente de las líneas $-h_L a/(k_G a M_B P)$ de la ecuación (10.5-14) sería muy grande, y que el valor de H_{yi} se acercaría al de H_y^* de la figura 10.5-3.

Para diseñar la torre utilizando el coeficiente global de transferencia de masa se pasa por las siguientes etapas:

1. Los datos de entalpía y temperatura de la tabla 10.5-l se grafican como se indica en la figura 10.5-3.

2. La línea operativa se calcula como en las etapas 1 y 2 para los coeficientes de película y se grafica como se muestra en la figura 10.5-3.
3. En la figura 10.5-3 el punto P representa H_y y T_L en la línea operativa y el punto R representa H_y^* sobre la línea de equilibrio. Por consiguiente, la línea vertical RP o $H_y^* - H_y$ representa la fuerza impulsora en la ecuación (10.5-15).
4. La fuerza impulsora $H_y^* - H_y$ se calcula para varios valores de T_L entre T_{L1} y T_{L2}. Después, graficando $1/(H_y^* - H_y)$ en función de H_y desde H_{y1} hasta H_{y2}, se realiza una integración gráfica para obtener el valor de la integral en la ecuación (10.5-15). Por último, la altura z se obtiene de la ecuación (10.5-15).

Si se dispone de datos de enfriamiento experimentales de una corrida real en una torre de enfriamiento con altura z conocida, se utiliza la ecuación (10.5- 15) para obtener el valor experimental de $K_G a$.

EJEMPLO 10.5-l. ***Diseño de una torre de enfriamiento de agua empleando coeficientes de película***

Se desea enfriar agua desde T_{L2} = 43.3 °C (110 °F) hasta T_{L1} = 29.4 °C (85 °F) en una torre de enfriamiento de agua empacada trabajando a contracorriente, con un flujo de gas de G = 1.356 kg de aire seco/s · m² y una velocidad de flujo de agua de L = 1.356 kg de agua/s · m². El aire de entrada tiene 29.4 °C y una temperatura de bulbo húmedo de 23.9 "C. El coeficiente de transferencia de masa $k_G a$ tiene un valor estimado de 1.207 × 10⁻⁷ kg mol/s · m³. Pa y $h_L a/k_G a M_B P$ es 4.187 × 10⁴ J/kg · K (10.0 btu/lb$_m$ · °F). Calcule la altura z de la torre empacada. La torre opera a una presión de 1.013 × 10⁵ Pa.

Solución: Siguiendo el procedimiento descrito, se grafican la entalpías de las mezclas de aire saturado-vapor de agua de la tabla 10.5-l en la figura 10.5-4. El aire de entrada a T_{G1} = 29.4 °C tiene una temperatura de bulbo húmedo de 23.9 °C. La humedad obtenida de la gráfica de humedad es H_1 = 0.0 165 kg de H_2O/kg de aire seco. Sustituyendo en la ecuación (9.3-8) y observando que (29.4 − 0) °C = (29.4 − 0) K,

$$H_{y1} = (1.005 + 1.88 \times 0.0165)10^3(29.4 - 0) + 2.501 \times 10^6(0.0165)$$
$$= 71.7 \times 10^3 \text{ J/kg}$$

Se grafica el punto H_{y1} = 71.7 × 10³ y T_{L1} = 29.4 °C. Entonces, sustituyendo en la ecuación (10.5-2) y resolviendo,

$$1.356(H_{y2} - 71.7 \times 10^3) = 1.356(4.187 \times 10^3)(43.3 - 29.4)$$

TABLA *10.5-2. Valores de entalpia para la resolución del ejemplo 10.5-l (en J/kg de aire seco)*

H_{yi}	H_y	$H_{yi} - H_y$	$1/(H_{yi} - H_y)$
94.4 × 10³	71.7 × 10³	22.7 × 10³	4.41 × 10⁻⁵
108.4 × 10³	83.5 × 10³	24.9 × 10³	4.02 × 10⁻⁵
124.4 × 10³	94.9 × 10³	29.5 × 10³	3.39 × 10⁻⁵
141.8 × 10³	106.5 × 10³	35.3 × 10³	2.83 × 10⁻⁵
162.1 × 10³	118.4 × 10³	43.7 × 10³	2.29 × 10⁻⁵
184.7 × 10³	129.9 × 10'	54.8 × 10³	1.82 × 10⁻⁵

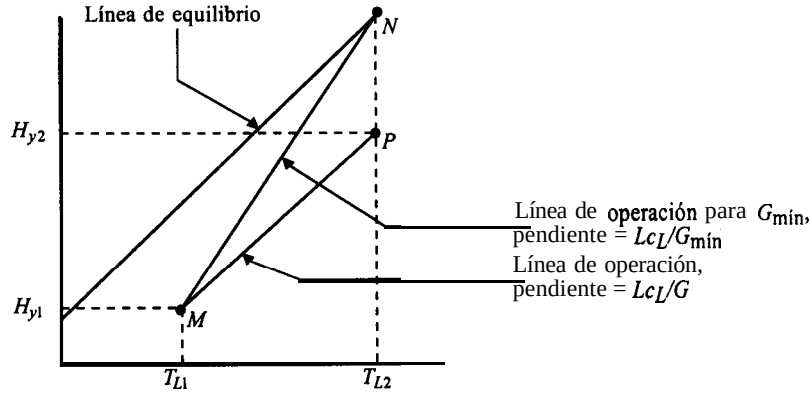


FIGURA 10-5.5. *Construcción de una linea de operación para un flujo de gas minimo.*

$H_{y2} = 129.9 \times 10^3$ J/kg de aire seco (55.8 btu/1b$_m$). También se grafica el punto $H_{y2} = 129.9 \times 10^3$ y $T_{L2} = 43.3$ "C, lo que da la línea de operación. Se grafican ahora las líneas con la pendiente $-h_L a / k_G a M_B P = -4\ 1.87 \times 1\ 0^3$ J/kg · K, proporcionando los valores de H_{yi} y H_y, que se tabulan en la tabla 10.5-2 junto con los otros valores calculados. Se grafican ahora valores de $1/(H_{yi} - H_{y})$ en función de H_y y el área bajo la curva desde $H_{y1} = 7\ 1.7 \times 1\ 0^3$ hasta $H_{y2} = 129.9 \times 10^3$ es

$$\int_{H_{y1}}^{H_{y2}} \frac{dH_y}{H_{yi} - H_y} = 1.82$$

Sustituyendo en la ecuación (10.5-13),

$$z = \frac{G}{M_B k_G a P} \int \frac{dH_y}{H_{yi} - H_y} = \frac{1.356}{29(1.207 \times 10^{-7})(1.013 \times 10^5)} (1.82)$$

$$= 6.98 \text{ m } (22.9 \text{ pie})$$

10.5E Valor mínimo del flujo de aire

Con frecuencia, el flujo de aire G no es un valor fijo, sino que se debe determinar para el diseño de la torre de enfriamiento. Como se señala en la figura 10.5-5 para un valor mínimo de G, se traza a través del punto H_{y1} y T_{L1}, con pendiente que tenga un punto de contacto con la línea de equilibrio en T_{L2}, que es el punto N. Si la línea de equilibrio es muy curva, la línea MN podría resultar tangente a la línea de equilibrio en un punto más abajo de dicha línea que el punto N. Para la torre real debe usarse un valor de G mayor que $G_{mín}$. Con frecuencia se utiliza un valor de G de 1.3 a 1.5 veces $G_{mín}$.

10.5F Diseño de una torre de enfriamiento de agua utilizando la altura de una unidad de transferencia

Muchas veces se usa otra forma del coeficiente de transferencia de masa de película en la ecuación (10.5-13):

$$z = H_G \int_{H_{y1}}^{H_{y2}} \frac{dH_y}{H_{yi} - H_y} \qquad (10.5\text{-}16)$$

$$H_G = \frac{G}{M_B k_G a P} \tag{10.5-17}$$

donde H_G es la altura de una unidad de transferencia de entalpía gaseosa en metros y el término integral recibe el nombre de número de unidades de transferencia. El término H_G se usa con frecuencia puesto que depende menos de las velocidades de flujo que $k_G a$.

A veces se usa un coeficiente general de transferencia de masa $K_G a$ en kgmol/s · m^3 · Pa o kg mol/s . m^3 · atm, y la ecuación (10.5- 15) se transforma en

$$z = \frac{G}{M_B K_G a P} \int_{H_{y1}}^{H_{y2}} \frac{dH_y}{H_y^* - H_y} = H_{OG} \int_{H_{y1}}^{H_{y2}} \frac{dH_y}{H_y^* - H_y} \tag{10.5-18}$$

donde H_{OG} es la altura de una unidad de transferencia general de entalpía gaseosa en metros. El valor de H_y^* se determina desplazándose verticalmente desde el valor de H_y hasta la línea de equilibrio, tal como se muestra en la figura 10.5-3. Este método sólo se debe usar cuando la línea de equilibrio es casi recta en el intervalo considerado. Sin embargo, la H_{OG} se suele usar aun si la línea de equilibrio es un tanto curva, debido a la falta de datos del coeficiente de transferencia de masa de película.

10.5G Temperatura y humedad de la corriente de aire en la torre

Los procedimientos descritos no proporcionan información alguna sobre los cambios de la temperatura y la humedad de la corriente de vapor de agua y aire a través de la torre. Si fuera de interés esta información, se dispone de un método gráfico formulado por Mickley (M2). La ecuación que se utiliza para el método gráfico se deduce si primero se hace que la ecuación (10.5-6) sea igual a $Gc_S\, dT_G$ y luego se combina con las ecuaciones (10.5-12) y (10.5-g) para generar la ecuación (10.5-19)

$$\frac{d H_v}{d T_G} = \frac{H_{yi} - H_y}{T_i - T_G} \tag{10.5-19}$$

10.5H Torre de deshumidificación

En la torre de enfriamiento o de humidificación que se analizó, la línea operativa queda debajo de la línea de equilibrio, y el agua se enfría y el aire se humidifica. En una torre de deshumidifícación, el agua fiía se usa para reducir la humedad y la temperatura del aire que entra. En este caso, la línea operativa queda arriba de la línea de equilibrio. Se emplean métodos de cálculo semejantes (Tl).

10.6 ABSORCIÓN EN TORRES EMPACADAS Y DE PLATOS

10.6A Equipo para absorción y destilación

l. Introducción a Za absorción. Como se estudió brevemente en la sección 10.1B, la absorción es un proceso de transferencia de masa en el cual un soluto vapor A en la mezcla de gases es absorbido por medio de un líquido en el cual el soluto es más o menos soluble. La mezcla gaseosa consiste casi siempre de un gas inerte y el soluto. El líquido es también casi inmiscible en la fase gaseosa; esto es, su vaporización en la fase gaseosa es poco considerable. Un ejemplo típico es la absorción en agua del soluto amoniaco de una mezcla de aire-amoniaco. Posteriormente, el soluto se recupera de

la solución mediante destilación. En el proceso inverso de desorción o empobrecimiento, se usan los mismos principios y ecuaciones.

En la sección 10.2 se analizaron las relaciones de equilibrio para sistemas gas-líquido en la absorción y éste es el tipo de datos que se necesitan para el diseño de torres de absorción. En el apéndice A.3 se incluyen algunos datos útiles. En la referencia Perry y Green (P1) se pueden consultar otros datos mas detallados.

2. Diversos tipos de torres de artesas *(platos) para absorción y destilación.* Para que el contacto entre el líquido y el vapor en la absorción y en la destilación sea eficiente, muchas veces se usan torres de artesas o platos. El tipo más común de dispositivo de contacto es el de platos perforados, que se muestra esquemáticamente en la figura 10.6-1a y en la sección 11.4A para la destilación.

1. *Plato perforado.* En la absorción de gas y en la destilación se utiliza esencialmente el mismo tipo de plato perforado. En éste, el vapor burbujea hacia arriba por los hoyos sencillos del plato a través del líquido que fluye. Los hoyos tienen tamaños que fluctuan entre los 3 y los 12 mm de diámetro, y es el de 5 mm un tamaño común. El área de vapor de los hoyos varía entre el 5 y el 15% del área del plato. El líquido se conserva sobre la superficie del plato, y no puede fluir de nuevo hacia abajo por los hoyos porque se lo impide la energía cinética del gas o vapor. La profundidad del líquido sobre el plato se mantiene por medio de un vertedero de salida con sobreflujo. El líquido de sobreflujo fluye por la canilla inferior hacia el siguiente plato, inferior.
2. *Plato de válvulas.* Una modificación del plato perforado es el plato de válvula que consiste en aberturas en el plato y una cubierta de válvulas con movimiento vertical para cada abertura, que proporciona un área abierta variable; ésta debe su variabilidad al flujo de vapor que inhibe la fuga del líquido por la abertura abajas tasas de vapor. Por lo tanto, este tipo de plato opera a un intervalo mayor de tasas de flujo que el plato perforado, con un costo sólo un 20% mayor que el del plato perforado. En la actualidad, el plato de válvulas se utiliza cada vez más.
3. *Plato de capuchones.* Los platos de capuchones, como el de la figura 10.6-1b, se han usado por mas de 100 años, pero desde 1950 generalmente se les remplaza por platos perforados o de válvula, ya que su costo es casi el doble que el de los platos perforados. En el plato de capuchones, el vapor o gas se eleva a través de las aberturas del plato hacia el interior de los capuchones. Después el gas fluye por las ranuras de la periferia de cada tapa y las burbujas fluyen hacia arriba por el líquido que fluye. Los detalles y los procedimientos de diseño de muchos de éstos y otros tipos de platos se dan en otras obras (B2, P1, Tl). Los diferentes tipos de eficiencias de los platos se analizan en la sección 11.5.

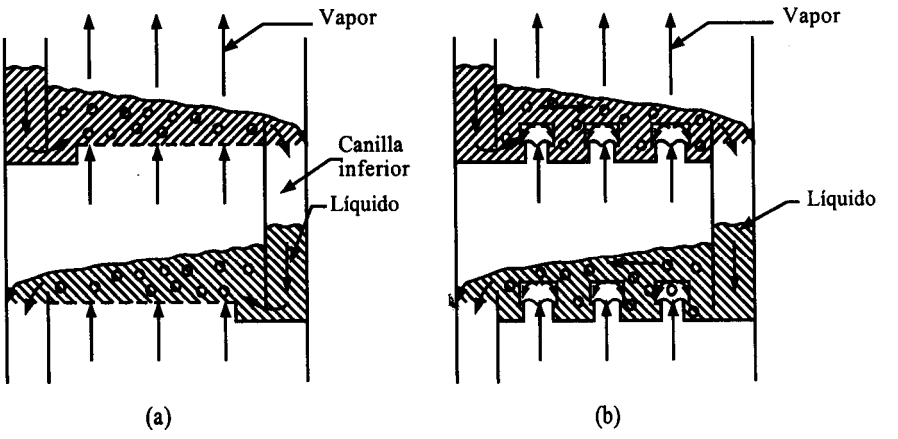


FIGURA 10.6-1. *Dispositivos para platos de contacto: a) detalle de una torre de platos perforados, b) detalle de una torre de platos de capuchones.*

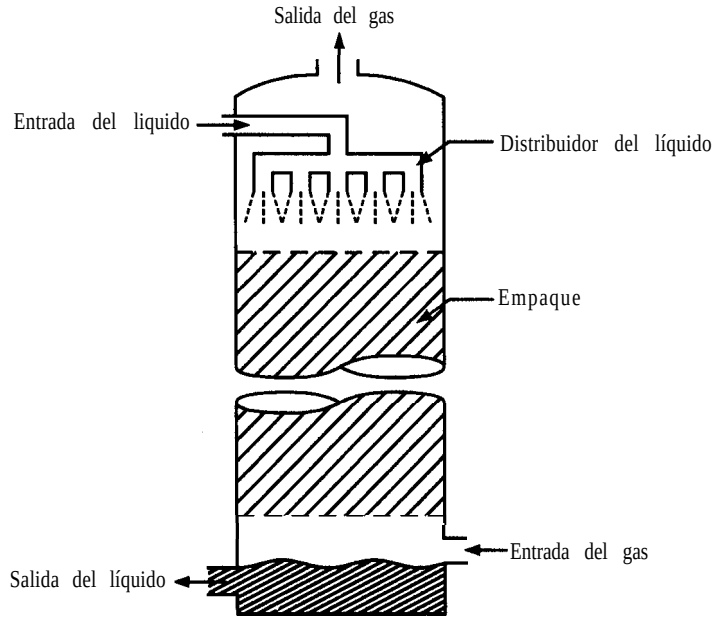


FIGURA 10.6-2. *Flujos y características de absorción para torres empacadas.*

3. Torres empacadas para absorción y destilación. Las torres empacadas se usan para el contacto continuo a contracorriente de un gas y un líquido en la absorción y también para el contacto de un vapor y un líquido en la destilación. La torre de la figura 10.6-2 consiste en una columna cilíndrica que contiene una entrada de gas y un espacio de distribución en el fondo, una entrada de líquido y un dispositivo de distribución en la parte superior, una salida de gas en la parte superior, una salida de líquido en el fondo y el empaque o relleno de la torre. El gas entra en el espacio de distribución que está debajo de la sección empacada y se va elevando a través de las aberturas o intersticios del relleno, así se pone en contacto con el líquido descendente que fluye a través de las mismas aberturas. El empaque proporciona una extensa área de contacto íntimo entre el gas y el líquido.

Se han desarrollado muchos tipos diferentes de rellenos para torres y hoy en día existen varias clases comunes. En la figura 10.6-3 se muestran los tipos de empaque mas usuales, que simplemente se introducen en la torre sin ningún orden. Estos empaques y otros rellenos comunes se pueden obtener comercialmente en tamaños de 3 mm hasta unos 75 mm. La mayoría de los empaques para torres están construidos con materiales inertes y económicos tales como arcilla, porcelana o grafito. La caracte-

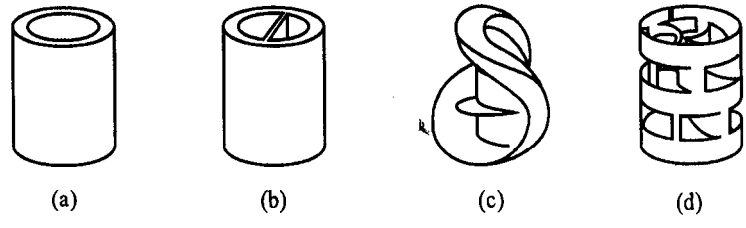


FIGURA 10.6-3. *Empaques de torres típicos: a) anillo de Raschig, b) anillo de Lessing, c) sillas de Berl, d) anillo de Pall.*

rística de un buen empaque es la de tener una gran proporción de espacios vacíos entre el orden del 60 y el 90%. El relleno permite que volúmenes relativamente grandes del líquido pasen a contracorriente con respecto al gas que fluye a través de las aberturas, con caídas de presión del gas relativamente bajas. En los procesos de separación vapor-líquido de la destilación se utilizan estos mismos tipos de empaques.

También se usan rellenos de formas geométricas que se pueden apilar y con tamaños de aproximadamente 75 mm. El relleno se apila verticalmente, y se forman canales abiertos que corren de manera ininterrumpida a través del lecho del empaque. La ventaja de una menor caída de presión del gas queda cancelada en parte, por el menor contacto gas-líquido que se obtiene en los rellenos apilados. Entre los empaques apilados típicos están las rejillas de madera, las de punto de goteo, los anillos espirales de partición, y otros.

En una torre empacada con cierto tipo y tamaño de relleno y con un flujo conocido de líquido, existe un límite máximo para la velocidad del flujo de gas, llamado *velocidad de inundación.* La torre no puede operar con una velocidad de gas superior a ésta. A velocidades gaseosas bajas, el líquido fluye hacia abajo a través del empaque casi sin influencia por el flujo ascendente de gas. A medida que se aumenta el gasto de gas (cuando se trata de velocidades bajas), la caída de presión es proporcional al gasto a la potencia 1.8. Al llegar al gasto de gas llamado *punto de carga,* éste comienza a impedir el flujo descendente de líquido y al mismo tiempo aparecen acumulaciones o piscinas localizadas en el empaque. La caída de presión del gas comienza a incrementarse a velocidades cada vez mayores; a medida que el gasto del gas aumenta, la acumulación o retención de líquido también aumenta. En el punto de inundación el líquido ya no puede seguir fluyendo a través del empaque y sale expulsado con el gas.

En la operación real de una torre, la velocidad del gas se mantiene por debajo del punto de inundación. Entonces la velocidad gaseosa económica óptima se aproxima a la mitad de la velocidad de inundación. Esta velocidad depende de un balance económico entre el costo de la energía y los costos fijos del equipo (S 1). En algunas referencias (P1, Ll, Tl) se analizan métodos detallados de diseño para predecir la caída de presión en diversos tipos de empaques.

10.6B Diseño de torres de absorción de platos

1. Deducción de la línea de operación. Una torre de absorción de platos tiene el mismo diagrama de flujo de proceso que el sistema de etapas múltiples a contracorriente de la figura 10.3-2 y se muestra como una torre vertical de platos en la figura 10.6-4. En el caso de un soluto *A* que se difunde a través de un gas en reposo *(B)* y después en un fluido quieto, en la absorción por agua de acetona *(A)* en aire (B), las moles de aire inerte o en reposo y de agua inerte permanecen constantes en toda la extensión de la torre. Si las velocidades son V' kg mol aire inerte/s y L' kg mol disolvente o agua inerte/s, o en kg mol inerte/s · m^2 (lb mol inerte/h . pie*), el balance general de material con respecto al componente *A* en la figura 10.6-4 es

$$L'\left(\frac{x_0}{1-x_0}\right)+V'\left(\frac{y_{N+1}}{1-y_{N+1}}\right)=L'\left(\frac{x_N}{1-x_N}\right)+V'\left(\frac{y_1}{1-y_1}\right) \qquad \textbf{(10.6-l)}$$

Un balance con respecto al área de la línea punteada sería

$$L'\left(\frac{x_0}{1-x_0}\right)+V'\left(\frac{y_{n+1}}{1-y_{n+1}}\right)=L'\left(\frac{x_n}{1-x_n}\right)+V'\left(\frac{y_1}{1-y_1}\right) \qquad \textbf{(10.6-2)}$$

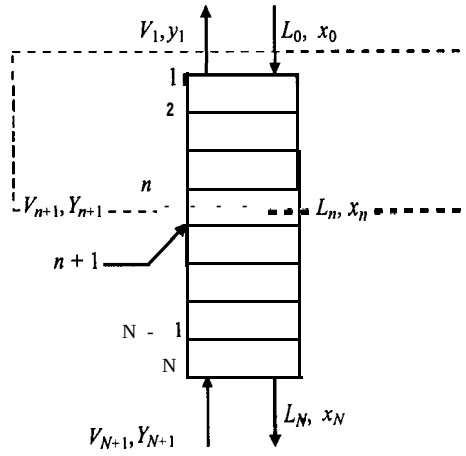


FIGURA 10.6-4. *Balance de materia en una torre de absorción de platos.*

donde x es la fracción mol A en el líquido, y es la fracción mol de A en el gas, L_n es el número total de moles de líquido/s, y $V_n + 1$ las moles totales de gas/s. Los flujos/s totales de líquido y de gas varían a lo largo de la torre.

La ecuación (10.6-2) es el balance de materia o línea de operación para la torre de absorción muy semejante a la ecuación (10.3-l 3) para un proceso de etapas a contracorriente, excepto que intervienen las corrientes inertes L' y V' en vez del gasto total L y V. La ecuación (10.6-2) relaciona la concentración $y_n + 1$ en la corriente de gas con x_n en la corriente de líquido que pasa a través de ella. Los términos V', L', x_0 y y_1 son constantes y por lo general se conocen o se pueden determinar.

2. Determinación gráfica del número deplatos. Una gráfica de la línea de operación, de la ecuación (10.6-2) como y en función de x proporciona una curva. Si x y y son muy diluidos, los denominadores 1 – x y 1 – y serán cercanos a 1.0 y la línea será aproximadamente recta, con una pendiente $\cong L'/V'$. El número de platos teóricos se determina estimando de manera ascendente el número de ellos, tal como se hizo en la figura 10.3-3 para el proceso a contracorriente de etapas múltiples.

EJEMPLO 10.6-l. Absorción de SO_2 en una torre de platos

Se desea diseñar una torre de platos para absorber SO_2 de una corriente de aire mediante agua pura a 293 K (68 "F). El gas de entrada contiene 20% de moles de SO_2 y el de salida 2% de moles a una presión total de 101.3 kPa. El gasto del aire inerte es de 150 kg de aire/h . m^2 y la velocidad de flujo del agua de entrada es 6000 kg de agua/h . m^2. Suponiendo una eficiencia total de los platos de 25%, ¿cuántos platos teóricos y cuántos reales se necesitan? Suponga que la torre opera a 293 K (20 "C).

Solución: Se calculan primero las velocidades molares de flujo,

$$V' = \frac{150}{29} = 5.18 \text{ kg mol de aire inerte/h} \cdot \text{m}^2$$

$$L' = \frac{6000}{18.0} = 3\,3\,3 \text{ kg mol de agua inerte/h} \cdot \text{m}^2$$

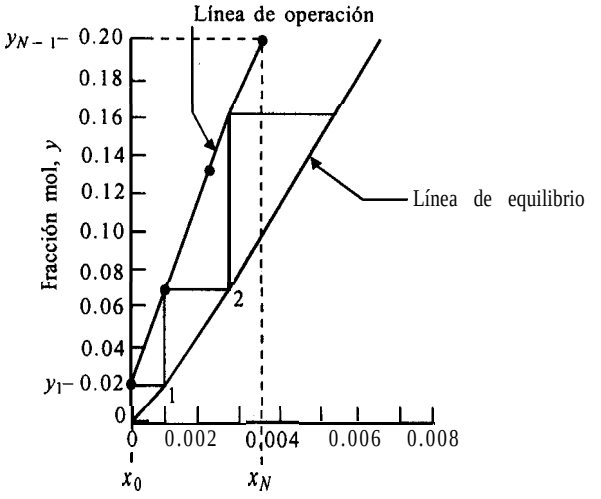


FIGURA 10.6-5. *Número teórico de platos para la absorción de SO_2 en el ejemplo 10.6-l.*

Con respecto ala figura 10.6-4, $y_{N+1} = 0.20, y_1 = 0.02$ y $x_0 = 0$. Sustituyendo en la ecuación (10.6-l) y despejando x_N,

$$333\left(\frac{0}{1-0}\right)+5.18\left(\frac{0.20}{1-0.20}\right)=333\left(\frac{x_N}{1-x_N}\right)+5.18\left(\frac{0.02}{1-0.02}\right)$$

$$x_N = 0.00355$$

Sustituyendo en la ecuación (10.6-2), y usando V' y L' como el kg mol/h · m^2 en lugar de kg mol/s . m^2,

$$333\left(\frac{0}{1-0}\right)+5.18\left(\frac{y_{n+1}}{1-y_{n+1}}\right)=333\left(\frac{x_n}{1-x_n}\right)+5.18\left(\frac{0.02}{1-0.02}\right)$$

Para graficar la línea de operación, es necesario calcular varios puntos intermedios. Sea que $y_{n+1} = 0.07$ y sustituyendo en la ecuación de operación,

$$0+5.18\left(\frac{0.07}{1-0.07}\right)=333\left(\frac{x_n}{1-x_n}\right)+5.18\left(\frac{0.02}{1-0.02}\right)$$

Por consiguiente, $x_n = 0.000855$. Para calcular otro punto intermedio, se establece que $y_{n+1} = 0.13$, por lo que el cálculo de x_n da como resultado 0.0020 1. Los dos puntos finales y los dos puntos intermedios de la línea de operación se grafican en la figura 10.6-5 junto con los datos de equilibrio obtenidos del Apéndice A.3. La línea de operación tiene cierto grado de curvatura.

El número de platos teóricos se determina con estimaciones secesivas ascendentes de las etapas y se obtienen 2.4 platos teóricos. El número real de platos es 2.4/0.25 = 9.6 platos.

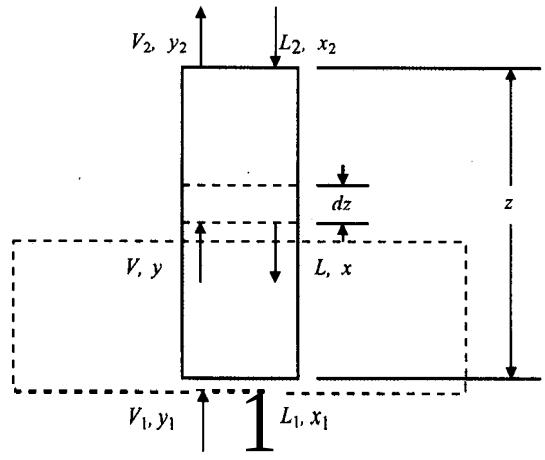


FIGURA 10.6-6. *Balance de materia para una torre de absorción empacada que opera a contracorriente.*

10.6C Diseño de torres empacadas para absorción

1. Deducción de la linea de operación. En el caso de la difusión del soluto A a través de un gas estacionario y después a través de un fluido estacionario, el balance general de materia del componente A en la figura 10.6-6 para una torre de absorción empacada es,

$$L'\left(\frac{x_2}{1-x_2}\right)+V'\left(\frac{y_1}{1-y_1}\right)=L'\left(\frac{x_1}{1-x_1}\right)+V'\left(\frac{y_2}{1-y_2}\right) \qquad (10.6\text{-}3)$$

donde L' son los kg mol de líquido inerte/s o kg mol de líquido inerte/s · m^2, V' *son* los kg mol de gas inerte/s o kg mol de gas inerte/s · m^2 y y_1 y x_1 son las fracciones mol de A en el gas y en el

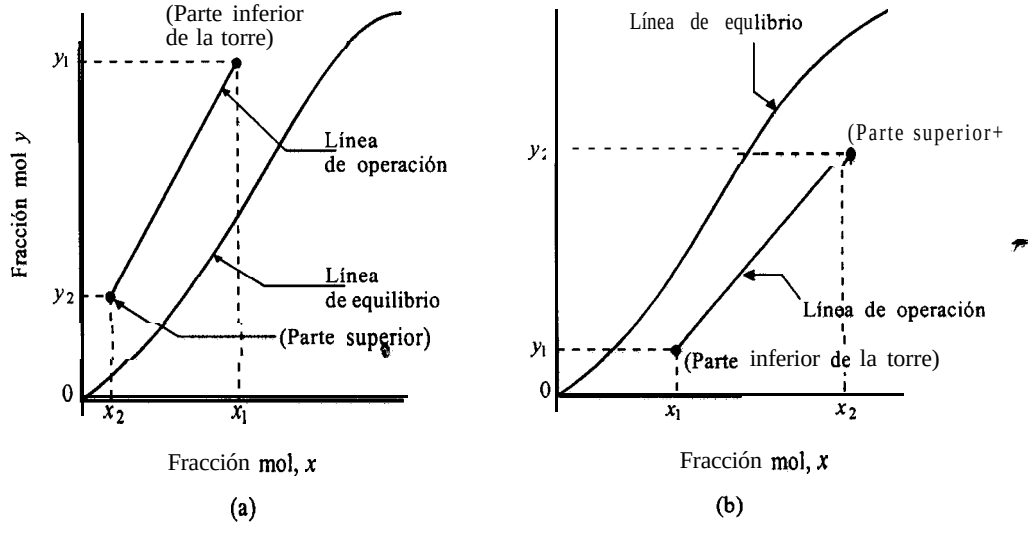


FIGURA 10.6-7. *Localización de líneas de operación: a) para la absorción de A de la corriente V a la L, b) para el empobrecimiento de A de la corriente L a la V.*

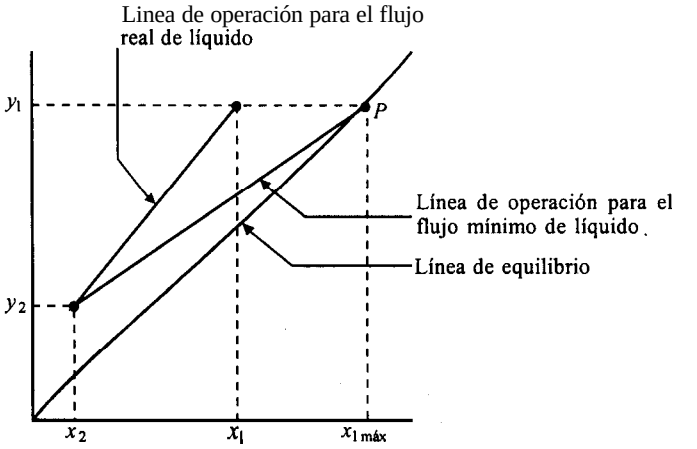


FIGURA 10.6-8. *Relación mínima* ***líquido/gas*** *para la absorción.*

líquido respectivamente. Los flujos de L' y V' son constantes en toda la torre, pero los flujos totales L y V no lo son.

Un balance con respecto a la línea punteada en la figura 10.6-6 proporciona la ecuación de la línea de operación:

$$L'\left(\frac{x}{1-x}\right)+V'\left(\frac{y_1}{1-y_1}\right)=L'\left(\frac{x_1}{1-x_1}\right)+V'\left(\frac{y}{1-y}\right) \qquad \textbf{(10.6-4)}$$

Al graficar esta ecuación en coordenadas yx, se obtiene una curva, como se muestra en la figura 10.6-7a. La ecuación (10.6-4) también se puede escribir en términos de la presión parcial p_1 de A, donde $y_1\,(1-y_1)=p_1/(P-p_1)$, y así sucesivamente. Si x y y son muy diluidos (1– x) y (1 – y) se pueden considerar como 1.0 y la ecuación (10.6-4) se transforma en

$$L'x + V'y_1 \cong L'x_1 + V'y \qquad \textbf{(10.6-5)}$$

La pendiente es L'/V' y la línea de operación, esencialmente recta.

Cuando se transfiere soluto de la corriente L a la V, el proceso se llama *empobrecimiento.* La línea esta por debajo de la línea de equilibrio, como se ve en la figura 10.6-7b.

2. Relaciones L'/V' límite y óptima. En el proceso de absorción, el flujo del gas de entrada V_1 (Fig. 10.6-6) y su composición y_1 suelen ser valores establecidos. Por lo general, el ingeniero de diseño también fija el valor de la concentración de salida y_2 y las necesidades del proceso establecen el valor de la concentración del líquido de entrada x_2. Por consiguiente, la cantidad de flujo de líquido de entrada L_2 o L' se deja a elección del diseñador.

En la figura 10.6-8 se han fijado los valores del flujo V_1 y de las concentraciones y_2, x_2 y y_1. Cuando la línea de operación tiene una pendiente mínima y toca la línea de equilibrio en el punto P, el flujo de líquido L' es mínimo y se le denomina $L'_{mín}$. El valor de x_1 tiene un máximo al llegar a $x_{1\,máx}$ cuando L' es mínimo. En el punto P, las fuerzas impulsoras y $- y^*$, y $- y_i$, $x^* - x$, o $x_i - x$ son todas iguales a cero. Para obtener el valor de $L'_{mín}$, se sustituyen los valores de y_1 y $x_{1\,máx}$ en la ecuación de la línea de operación. En algunos casos, si lalíneade equilibrio tiene una curvatura cóncava hacia abajo, el valor mínimo de L se alcanza cuando la línea de operación es tangente a la de equilibrio en vez de cortarla.

La selección de la relación óptima para L'/V' depende de un balance económico. En la absorción, un valor muy alto requiere de un gran flujo de líquido y, por tanto, de un diámetro considerable de la torre. El costo de recuperación del soluto del líquido por destilación puede ser entonces bastante elevado. Un flujo de líquido bajo da por resultado una torre muy alta, lo cual es costoso. De forma aproximada el flujo óptimo de líquido se obtiene con un valor de alrededor de 1.5 para la relación de la pendiente promedio de la línea de operación a la del equilibrio para la absorción. Este factor puede variar dependiendo del valor del soluto y del tipo de torre.

3. Coeficientes global y de película de transferencia de masa en torres empacadas. Como se estudió en la sección 10.5, es muy difícil medir experimentalmente el área de la interfaz A m^2 entre las fases L y V. Además, es difícil medir los coeficientes de película k'_x y k'_y y los coeficientes totales K'_x y K'_y. Por lo general, las mediciones experimentales en una torre empacada producen un coeficiente volumétrico de transferencia de masa que combina el área interfacial con el coeficiente de transferencia de masa.

Si se define a como el área interfacial en m^2 por m^3 de volumen de sección empacada, el volumen del empaque en una altura dz m (Fig. 10.6-6) es $S\ dz$, y

$$dA = aS\ dz \qquad \textbf{(10.6-6)}$$

donde S es el área de corte transversal de la torre en m^2. Los coeficientes volumétricos de transferencia de masa, de película y general se definen como:

$$k'_y a = \frac{\text{kg mol}}{\text{s} \cdot \text{m}^3 \text{ empaque . fracción mol}} \qquad k'_x a = \frac{\text{kg mol}}{\text{s} \cdot \text{m}^3 \text{ empaque . fracción mol}} \qquad \text{(SI)}$$

$$K'_y a = \frac{\text{kg mol}}{\text{s} \cdot \text{m}^3 \text{ empaque . fracción mol}} \qquad K'_x a = \frac{\text{kg mol}}{\text{s} \cdot \text{m}^3 \text{ empaque . fracción mol}} \qquad \text{(SI)}$$

$$k'_y a = \frac{\text{lb mol}}{\text{h . pie}^3 \text{ empaque . fracción mol}} \qquad k'_x a = \frac{\text{lb mol}}{\text{h . pie}^3 \text{ empaque . fracción mol}} \qquad \text{(Inglesas)}$$

4. Método de diseño para torres empacadas. Para la absorción de A desde B estacionario, se puede utiizar la ecuación (10.6-4) de la línea de operación. Para la altura diferencial dz de la torre en la figura (10.6-6) las moles de A que salen de V son iguales a las que entran a L,

$$d(Vy) = d(Lx) \qquad \textbf{(10.6-7)}$$

donde V = kg mol de gas total/s, L = kg mol de líquido total/s, y $d(Vy) = d(Lx)$ = kg mol de A transferido/s en la altura dz m. Los kg moles de A transferidos/s de la ecuación (10.6-7) deben ser iguales a los kg mol de A transferido& obtenidos con la ecuación de transferencia de masa para N_A. La ecuación (10.6-8) proporciona el flujo específico N_A mediante los coeficientes de película de gas y de líquido:

$$N_A = \frac{k'_y}{(1-y_A)_{iM}}(y_{AG} - y_{Ai}) = \frac{k'_x}{(1-x_A)_{iM}}(x_{Ai} - x_{AL}) \qquad \textbf{(10.4-8)}$$

donde $(1 - x_A)_{iM}$ y $(1 - y_A)_{iM}$ se definen con las ecuaciones (10.4-6) y (10.4-7). Multiplicando el lado izquierdo de la ecuación (10.4-8) por dA y los dos términos del lado derecho por $aS\,dz$, obtenido de la ecuación (10.6-6),

$$N_A\,dA = \frac{k'_y a}{(1-y_A)_{iM}}(y_{AG} - y_{Ai})S\,dz = \frac{k'_x a}{(1-x_A)_{iM}}(x_{Ai} - x_{AL})S\,dz \qquad (10.6\text{-}8)$$

donde $N_A\,dA$ = kg mol de A transferido/s en la altura dz m (lb mol/h).

Igualando las ecuaciones (10.6-7) y (10.6-8) y usando y_{AG} para la fase gaseosa total y x_{AL} para la fase líquida total,

$$d(Vy_{AG}) = \frac{k'_y a}{(1-y_A)_{iM}}(y_{AG} - y_{Ai})S\,dz \qquad (10.6\text{-}9)$$

$$d(Lx_{AL}) = \frac{k'_x a}{(1-x_A)_{iM}}(x_{Ai} - x_{AL})S\,dz \qquad (10.6\text{-}10)$$

Puesto que $V' = V(1 - y_{AG})$ o $V = V'/(1 - y_{AG})$,

$$d(Vy_{AG}) = d\left(\frac{V'}{(1-y_{AG})}y_{AG}\right) = V'd\left(\frac{y_{AG}}{(1-y_{AG})}\right) = \frac{V'\,dy_{AG}}{(1-y_{AG})^2} \qquad (10.6\text{-}11)$$

Sustituyendo V por $V'/(1 - y_{AG})$ en la ecuación (10.6-l 1) y después igualando la (10.6-l 1) con la (10.6-9),

$$\frac{V\,dy_{AG}}{1-y_{AG}} = \frac{k'_y a}{(1-y_A)_{iM}}(y_{AG} - y_{Ai})S\,dz \qquad (10.6\text{-}12)$$

Repitiendo para la ecuación (10.6.10) puesto que $L = L'/(1 - x_{AL})$,

$$\frac{L\,dx_{AL}}{1-x_{AL}} = \frac{k'_x a}{(1-x_A)_{iM}}(x_{Ai} - x_{AL})S\,dz \qquad (10.6\text{-}13)$$

Si se eliminan los subíndices A, G y L y se integra, las ecuaciones finales son como sigue si se usan coeficientes de película:

$$\int_0^z dz = z = \int_{y2}^{y1} \frac{V\,dy}{\dfrac{k'_y aS}{(1-y)_{iM}}(1-y)(y-y_i)} \qquad (10.6\text{-}14)$$

$$\int_0^z dz = z = \int_{x2}^{x1} \frac{L\,dx}{\dfrac{k'_x aS}{(1-x)_{iM}}(1-x)(x_i-x)} \qquad (10.6\text{-}15)$$

Las ecuaciones finales pueden deducirse de manera similar usando coeficientes globales,

$$z = \int_{y_2}^{y_1} \frac{V\,dy}{\dfrac{K'_y aS}{(1-y)_{*M}}(1-y)(y_i - y^*)} \qquad \textbf{(10.6-16)}$$

$$z = \int_{x_2}^{x_1} \frac{L\,dx}{\dfrac{K'_x aS}{(1-x)_{*M}}(1-x)(x^*-x)} \qquad \textbf{(10.6-17)}$$

En el caso general, las líneas de equilibrio y de operación pueden ser curvas y $k'_x a$, $k'_y a$, $K'_y a$, y $K'_x a$, varían algo con los flujos totales de gas y líquido. En este caso, las ecuaciones (10.6.14) – (10.6.17) deben integrarse por métodos gráficos. Los métodos para llevar a cabo esto en mezclas concentradas se analizan en la sección 10.7. A continuación se consideran los métodos para gases diluidos.

10.6D Métodos simplificados de diseño para la absorción de mezclas gaseosas diluidas en torres empacadas

Puesto que un porcentaje considerable de los procesos de absorción incluye el caso de un gas diluido A, conviene emplear de un procedimiento de diseño simplificado.

Cas concentraciones se pueden considerar como diluidas para propósitos de diseño de ingeniería, cuando las fracciones mol y y x en las corrientes de gas y líquido son menores de 0.10, esto es, 10%. Los flujos variarán en menos del 10% y los coeficientes de transferencia de masa considerablemente menos que esto. Como resultadode esto, los valores promedio de los flujos V y L, así como los coeficientes de transferencia de masa en las partes superior e inferior de la torre se pueden situar fuera de la integral. De la misma manera los términos $(1 - y)_{iM}/(1 - y)$, $(1 - y)_{*M}/(1 - y)$, $(1 - x)_{iM}/(1 - x)$ y $(1 - x)_{*M}/(1 - x)$ se pueden colocar fuera de la integral usando los valores promedio de la parte superior e inferior de la torre. (Estos términos suelen ser muy cercanos a 1 .O y se pueden eliminar por completo.) Entonces, las ecuaciones (8.6-14) a la (8.6-17) se transforman en

$$z = \left[\frac{V}{k'_y aS}\frac{(1-y)_{iM}}{1-y}\right]_{\text{prom}} \int_{y_2}^{y_1} \frac{dy}{y - y_i} \qquad \textbf{(10.6-18)}$$

$$z = \left[\frac{L}{k'_y aS}\frac{(1-x)_{iM}}{1-x}\right]_{\text{prom}} \int_{x_2}^{x_1} \frac{dy}{x_i - x} \qquad \textbf{(10.6-19)}$$

$$z = \left[\frac{V}{K'_y aS}\frac{(1-y)_{*M}}{1-y}\right]_{\text{prom}} \int_{y_2}^{y_1} \frac{dy}{y - y^*} \qquad \textbf{(10.6-20)}$$

$$z = \left[\frac{L}{K'_x aS}\frac{(1-x)_{*M}}{1-x}\right]_{\text{prom}} \int_{x_2}^{x_1} \frac{dx}{x^* - x} \qquad \textbf{(10.6-21)}$$

Como las soluciones están diluidas, la línea de operación será casi recta. Suponiendo que la línea de equilibrio sea aproximadamente recta sobre el intervalo de concentraciones usadas, $(y - y_i)$ varía linealmente con y y también con x,

$$y - y_i = ky + b \tag{10.6-22}$$

donde k y b son constantes. Por consiguiente, la integral de la ecuación (10.6-18) produce el siguiente resultado:

$$\int_{y_2}^{y_1} \frac{dy}{y - y_i} = \frac{y_1 - y_2}{(y - y_i)_M} \tag{10.6-23}$$

donde $(y - y_i)_M$ es la media logarítmica de la fuerza impulsora:

$$(y - y_i)_M = \frac{(y_1 - y_{i1}) - (y_2 - y_{i2})}{\ln[(y_1 - y_{i1})/(y_2 - y_{i2})]} \tag{10.6-24}$$

$$(y - y^*)_M = \frac{(y_1 - y_1^*) - (y_2 - y_2^*)}{\ln[(y_1 - y_1^*)/(y_2 - y_2^*)]}$$

Si el término $(1 - y)_{iM}/(1 - y)$ se considera como 1 .O, al sustituir la ecuación (10.6-23) en la (10.6-l 8) y hacer lo mismo para las ecuaciones (10.6-19) a la (10.6-21), los resultados finales son los siguientes:

$$\frac{V}{S}(y_1 - y_2) = k'_y\, az(y - y_i)_M \tag{10.6-26}$$

$$\frac{L}{S}(x_1 - x_2) = k'_x\, az(x_i - x)_M \tag{10.6-27}$$

$$\frac{V}{S}(y_1 - y_2) = K'_y\, az(y - y^*)_M \tag{10.6-28}$$

$$\frac{L}{S}(x_1 - x_2) = K'_x\, az(x^* - x)_M \tag{10.6-29}$$

donde el lado izquierdo son los kg mol absorbido& $\cdot m^2$ (lb mol/h $\cdot$ pie^2) con base en el balance de la materia, y el lado derecho es la ecuación de velocidad para la transferencia de masa. El valor de V es el promedio $(V_1 + V_2)/2$ y el de L es $(L_1 + L_2)/2$.

Las ecuaciones (10.6-26) a la (10.6-29) pueden usarse de manera diferente. A continuación, se estudian, como se muestra en la figura 10.6-9, las etapas generales que se deben seguirse:

1. La línea de operación de la ecuación, (10.6-4) se grafica según la figura 10.6-9 como una recta. Calcúlese V_1, V_2 y $V_{prom} = (V_1 + V_2)/2$; estímese también L_1, L_2 y $L_{prom} = (L_1 + L_2)/2$.
2. Se cuenta con, o se pueden obtener por medio de correlaciones empíricas, valores experimentales promedio de los coeficientes de película $k'_y a$ y $k'_x a$. Las composiciones en la interfaz y_{i1} y x_{i1} en

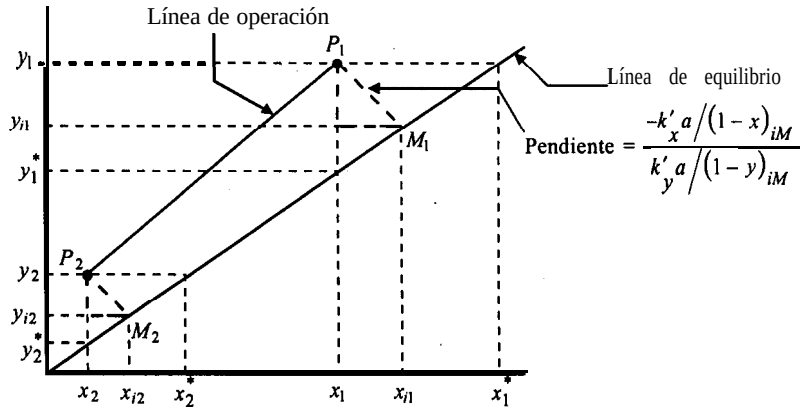


FIGURA 10.6-9. *Linea de operación y composiciones interfaciales en una torre empacada para la absorción de gases diluidos.*

el punto y_1, x_1 en la torre, se determinan al graficar la línea P_1M_1 cuya pendiente se calcula con la ecuación (10.6-30):

$$\text{pendiente} = \frac{k'_x a/(1-x)_{iM}}{k'_y a/(1-y)_{iM}} = -\frac{k_x a}{k_y a} \qquad \textbf{(10.6-30)}$$

$$\text{pendiente} \cong -\frac{k'_x a/(1-x_1)}{k'_y a/(1-y_1)} \qquad \textbf{(10.6-31)}$$

Cuando se usan los términos $(1-x)_{iM}$ y $(1-y)_{iM}$, el procedimiento será por aproximaciones sucesivas, como en el ejemplo 10.4-l. Sin embargo, puesto que las soluciones están diluidas, los términos $(1-x_1)$ y $(1 \quad y_1)$ pueden intervenir en la ecuación (10.6-31) sin aproximaciones sucesivas y con un error muy pequeño en el cálculo de la pendiente. Si se dispone de coeficientes $k_y a$ y $k_x a$ para el intervalo aproximado de concentraciones, también se pueden usar, puesto que incluyen los términos $(1-x)_{iM}$ y $(1-y)_{iM}$. Para la línea P_2M_2 en el otro extremo de la torre, los valores de y_{i2} y x_{i2} se determinan con la ecuación (10.6-30) u (10.6-31) y y_2 y x_2.

3. Si se usa el coeficiente general $K'_y a$, y_1^* y y_2^* se determinan como se indica en la figura 10.6-9. Si se usa $K'_x a$, se obtiene el x_1^* y x_2^*.
4. Calcule la media logarítmica de la fuerza impulsora $(y-y_i)_M$ con la ecuación (10.6-24) cuando se conoce $k'_y a$. Para $K'_y a$, el valor de $(y-y^*)_M$ se calcula con la ecuación (10.6-25). Las fuerzas impulsoras apropiadas se calculan con los coeficientes líquidos.
5. Calcule la altura de la columna z m por sustitución en las formas apropiadas de las ecuaciones (10.6-26) – (10.6-29).

EJEMPLO 10.6-2. Absorción de acetona en una torre empacada

Se absorbe acetona con agua en una torre empacada que tiene un área de corte transversal de 0.186 m^2 a 293 K y 101.32 kPa (1 atm). El aire de entrada contiene 2.6% de mol de acetona y el de salida 0.5%. El flujo de gas es 13.65 kg mol de aire inerte/h (30.1 lb mol / h). El flujo de entrada de agua pura es de 45.36 kg mol de agua/h (100 lb mol/h). Los

coeficientes de película para los flujos dados en la torre son $k'_y a = 3.78 \times 10^{-2}$ kg mol/s . m^3 . fracción mol (8.50 lb mol/h · pie^3 . fracción mol) y $k'_x a = 6.16 \times 10^{-2}$ kg mol/s . m^3 . fracción mol (13.85 lb mol/h . pie^3 . fracción mol). En el Apéndice A.3 se localizan los datos de equilibrio.

a) Calcule la altura de la torre con $k'_y a$.
b) Repita ahora con $k'_x a$.
c) Calcule $K'_y a$ y la altura de la torre.

Solución: Con base en el Apéndice A.3, para acetona-agua y x_A = 0.0333 fracción mol, p_A = 30/760 = 0.0395 atm o y_A = 0.0395 fracciónmol. Por consiguiente, la línea de equilibrio es $y_A = mx_A$ 0 0.0395 = $m(0.0333)$. Entonces, y = 1.186x. Esta línea de equilibrio se gráfica en la figura 10.6-10. Los datos son L' = 45.36 kg mol/h, V' = 13.65 kg mol/h, y_1 = 0.026, y_2 = 0.005 y x_2 = 0.

Sustituyendo en la ecuación (10.6-3) para un balance general de material con las velocidades de flujo como kg mol/h en lugar de kg mol/s,

$$45.36\left(\frac{0}{1-0}\right)+13.65\left(\frac{0.026}{1-0.026}\right)=45.36\left(\frac{x_1}{1-x_1}\right)+13.65\left(\frac{0.005}{1-0.005}\right)$$

$$x_1 = 0.00648$$

Se grafican los puntos y_1, x_1 y y_2, x_2 en la figura 10.6-10 y se traza una recta para la línea de operación.

Con la ecuación (10.6-3 1), la pendiente aproximada en el punto y_1, x_1 es

$$\text{pendiente} \cong -\frac{k'_x a/(1-x_1)}{k'_y a/(1-y_1)} = \frac{6.16 \times 10^{-2}/(1-0.00648)}{3.78\times10^{-2}/(1-0.026)} = -1.60$$

Graficando esta línea a través de y_1, x_1, intersecará a la línea de equilibrio en el punto y_{i1} = 0.0154 y x_{i1} = 0.0130. Además, y_1^* = 0.0077. Se emplea la ecuación (10-6.30) para

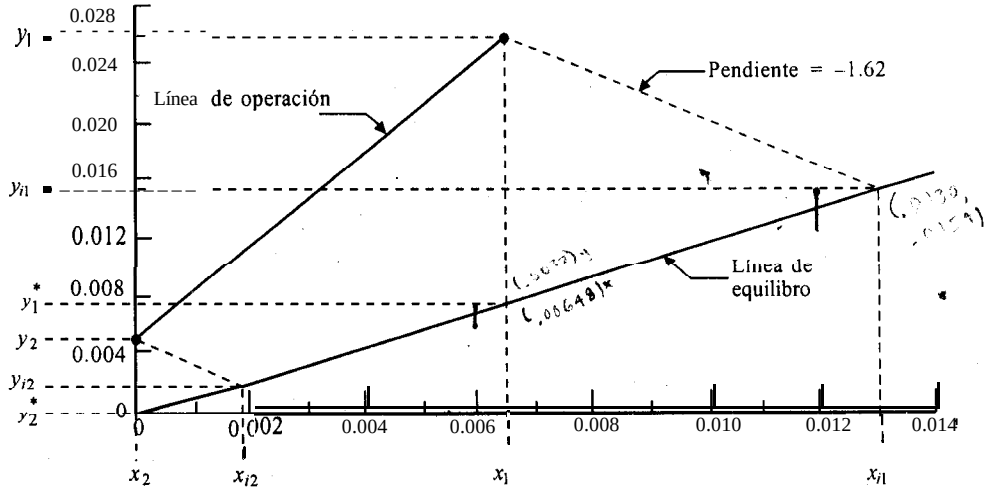


FIGURA 10.6-10. *Localización de las composiciones en la interfaz del ejemplo 10.6-2.*

calcular una pendiente más exacta, con los valores preliminares de y_{i1} y x_{i1} por aproximaciones sucesivas. Sustituyendo en la ecuación (10.4-6),

$$(1 - y_{i1})_{iM} = \frac{(1-y_{i1})-(1-y_1)}{\ln[(1-y_{i1})/(1-y_1)]}$$

$$= \frac{(1\text{-}0.0154)\text{-}(1\text{-}0.026)}{\ln[(1-0.0154)/(1-0.026)]} = 0.979$$

Usando la ecuación (10.4-7),

$$(1-x)_{iM} = \frac{(1-x_1)-(1-x_{i1})}{\ln[(1-x_1)/(1-x_{i1})]}$$

$$= \frac{(1-\ 0.00648)-(1-\ 0.0130)}{\ln[(1-0.00648)/(1-0.0130)]} = 0.993$$

Sustituyendo en la ecuación (10.6-30),

$$\text{pendiente} = -\frac{k'_x a/(1-x)_{iM}}{k'_y a/(1-y)_{iM}} = -\frac{6.16 \times 10^{-2}/0.993}{3.78 \times 10^{-2}/0.929} = -1.61$$

Por tanto, la pendiente aproximada y los valores de la interfaz son bastante precisos. Para la pendiente en el punto y_2, x_2,

$$\text{pendiente} \cong -\frac{k'_x a/(1-x_2)}{k'_y a/(1-y_2)} = -\frac{6.16 \times 10^{-2}/(1-0)}{3.78 \times 10^{-2}/(1-0.005)} = -1.62$$

La pendiente cambia poco en la torre. Grafícando esta línea, $y_{i2} = 0.0020$, $x_{i2} = 0.0018$ y $y^*_2 = 0$.

Sustituyendo en la ecuación (10.6-24),

$$(y - y_i)_M = \frac{(y_1 - y_{i1})-(y_2 - y_{i2})}{\ln[(y_1 - y_{i1})/(y_2 - y_{i2})]}$$

$$= \frac{(0.026-0.0154)-(0.005-0.0020)}{\ln[(0.026-0.0154)/(0.005-0.0020)]} = 0.00602$$

Para calcular las velocidades totales de flujo molar en kg mol/s,

$$V_1 = \frac{V'}{1-y_1} = \frac{13.65/3600}{1-0.026} = 3.893 \times 10^{-3} \text{ kg mol/s}$$

$$V_2 = \frac{V'}{1-y_2} = \frac{13.6513600}{1-0.005} = 3.811 \times 10^{-3} \text{ kg mol/s}$$

$$V_{prom} = \frac{V_1 + V_2}{2} = \frac{3.893 \times 10^{-3} + 3.811 \times 10^{-3}}{2} = 3.852 \times 10^{-3} \text{ kg mol/s}$$

$$L' \cong L_1 \cong L_2 \cong L_{prom} = \frac{45.36}{3600} = 1.260 \times 10^{-2} \text{ kg mol/s}$$

Para el inciso a), sustituyendo en la ecuación (10.6-26) y resolviendo,

$$\frac{V_{prom}}{S}(y_1 - y_2) = k'_y a z (y - y_i)_M$$

$$\frac{3.852 \times 10^{-3}}{0.186}(0.0260 - 0.005) = (3.78 \times 10^{-2}) z (0.00602)$$

$$z = 1.911 \text{ m } (6.27 \text{ pie})$$

Para el inciso b), usando una ecuación similar a la (10.6-24),

$$(x_i - x)_M = \frac{(x_{i1} - x_1) - (x_{i2} - x_2)}{\ln[(x_{i1} - x_1)/(x_{i2} - x_2)]}$$

$$= \frac{(0.0130 - 0.00648) - (0.0018 - 0)}{\ln[(0.0130 - 0.00648)/(0.0018 - 0)]} = 0.00368$$

Sustituyendo en la ecuación (10.6-27) y resolviendo,

$$\frac{1.260 \times 10^{-2}}{0.186}(0.00648 - 0) = (6.16 \times 10^{-2}) z (0.00368)$$

$$z = 1.936 \text{ m}$$

Esto concuerda con bastante aproximación con el inciso a) .
Para el inciso c), sustituyendo en la ecuación (10.4-25) para el punto y_1, x_1,

$$(1-y)_{*M} = \frac{(1-y_1^*) - (1-y_1)}{\ln[(1-y_1^*)/(1-y_1)]} = \frac{(1-0.0077) - (1 - 0.026)}{\ln[(1-0.0077)/(1-0.026)]} = 0.983$$

El coeficiente total de transferencia de masa $K'_y a$ en el punto y_1, x_1, se calcula sustituyendo en la ecuación (10.4-24).

$$\frac{1}{K'_y a/(1-y)_{*M}} = \frac{1}{k'_y a/(1-y)_{iM}} + \frac{m'}{k'_x a/(1-x)_{iM}}$$

$$\frac{1}{K'_y a/0.983} = \frac{1}{3.78 \times 10^{-2}/0.979 + 6.16 \times 10^{-2}/0.993} = 1.186$$

$$K'_y a = 2.183 \times 10^{-2} \text{ kg mol/s} \cdot \text{m}^3 \text{ . fracción mol}$$

Sustituyendo en la ecuación (10.6-25),

$$(y-y^*)_M = \frac{(y_1-y_1^*)-(y_2-y_2^*)}{\ln\left[(y_1-y_1^*)/(y_2-y_2^*)\right]}$$

$$= \frac{(0.0260-0.0077)-(0.0050-0)}{\ln\left[(0.0260-0.0077)/(0.0050-0)\right]} = 0.01025$$

Por último, sustituyendo en la ecuación (10.6-28),

$$\frac{3.852 \times 10^{-3}}{0.186}(0.0260-0.0050) = (2.183 \times 10^{-2})z(0.01025)$$

$$z = 1.944 \text{ m}$$

Este valor concuerda con el de los incisos a) y b).

10.6E Diseño de torres empacadas mediante unidades de transferencia

Otro método para el diseño de torres empacadas, que en algunos aspectos es incluso más adecuado, se basa en el uso del concepto de unidad de transferencia. En el caso más común de A que se difunde a través de **B** en reposo y sin difundirse, las ecuaciones (10.6-14) a la (10.6-17) se pueden reescribir como sigue:

$$z = H_G \int_{y_2}^{y_1} \frac{(1-y)_{iM}\, dy}{(1-y)(y-y_i)} \qquad (10.6\text{-}32)$$

$$z = H_L \int_{x_2}^{x_1} \frac{(1-x)_{iM}\, dx}{(1-x)(x_i-x)} \qquad (10.6\text{-}33)$$

$$z = H_{OG} \int_{y_2}^{y_1} \frac{(1-y)_{*M}\, dy}{(1-y)(y-y^*)} \qquad (10.6\text{-}34)$$

$$z = H_{OL} \int_{x_2}^{x_1} \frac{(1-x)_{*M}\, dx}{(1-x)(x^*-x)} \qquad (10.6\text{-}35)$$

donde

$$H_G = \frac{V}{k_y' aS} = \frac{V}{k_y a(1-y)_{iM} S} \qquad (10.6\text{-}36)$$

$$H_L = \frac{L}{k_x' aS} = \frac{L}{k_x a(1-x)_{iM} S} \qquad (10.6\text{-}37)$$

$$H_{OG} = \frac{V}{K_y' aS} = \frac{V}{K_y a(1-y)_{*M} S} \qquad (10.6\text{-}38)$$

$$H_{OL} = \frac{L}{K_x' aS} = \frac{L}{K_x a(1-x)_{*M} S} \qquad (10.6\text{-}39)$$

Las unidades de H están en m (pie). El valor de H_G es la altura de una unidad de transferencia basada en la película de gas. Los valores de las alturas de las unidades de transferencia son más constantes que los coeficientes de transferencia de masa. Por ejemplo, $k'_y a$ suele ser proporcional a $V^{0.7}$; entonces, $H_G \alpha V^{1.0}/V^{0.7} \alpha V^{0.3}$. En las ecuaciones (10.6-36) a la (10.6-39) se deben usar los valores promedio de los coeficientes de transferencia de masa $(1 - y)_{iM}$, $(1 - y)_{*M}$, $(1 - x)_{iM}$, y $(1 - x)_{*M}$.

Las integrales del lado derecho de la ecuaciones (10.6-32) a la (10.6-35) son el número de unidades de transferencia N_G, N_L, N_{OG} y N_{OL}, respectivamente. Entonces, la altura de la torre empacada es

$$z = H_G N_G = H_L N_L = H_{OG} N_{OG} = H_{OL} N_{OL} \qquad \textbf{(10.6-40)}$$

Estas ecuaciones no difieren básicamente de las que usan coeficientes de transferencia de masa. Todavía se necesitan los valores de $k'_y a$ y $k'_x a$ para determinar las concentraciones en la interfaz. Sin considerar $(1 - y)_{iM}/(1 - y)$, que es cercano a 1 .O en la ecuación (10.6-32), cuanto más alta sea la cantidad de absorción $(y_1 - y_2)$ o menor sea la fuerza impulsora $(y - y_i)$, mayor será el número de unidades de transferencia N_G y más alta la torre.

Cuando las soluciones son diluidas con concentraciones inferiores al 10%, los términos $(1 - y)_{iM}/(1 - y)$, $(1 - x)_{iM}/(1 - x)$, $(1 - y)_{*M}/(1 - y)$, y $(1 - x)_{*M}/(1 - x)$ pueden quedar fuera de la integral y utilizarse valores promedio. Con mucha frecuencia, estos valores son cercanos a 1 y se pueden despreciar. Las ecuaciones resultan, entonces, en

$$z = H_G N_G = H_G \left[\frac{(1-y)_{iM}}{1-y}\right]_{\text{prom}} \int_{y_2}^{y_1} \frac{dy}{y - y_i} \qquad \textbf{(10.6-41)}$$

$$z = H_L N_L = H_L \left[\frac{(1-x)_{iM}}{1-x}\right]_{\text{prom}} \int_{x_2}^{x_1} \frac{dx}{x_i - x} \qquad \textbf{(10.6-42)}$$

$$z = H_{OG} N_{OG} = H_{OG} \left[\frac{(1-y)_{*M}}{1-y}\right]_{\text{prom}} \int_{y_2}^{y_1} \frac{dy}{y - y^*} \qquad \textbf{(10.6-43)}$$

$$z = H_{OL} N_{OL} = H_{OL} \left[\frac{(1-x)_{*M}}{1-x}\right]_{\text{prom}} \int_{x_2}^{x_1} \frac{dx}{x^* - x} \qquad \textbf{(10.6-44)}$$

Si las líneas de operación y de equilibrio son rectas y las soluciones diluidas, la integral que se muestra en la ecuación (10.6-23) es válida.

$$\int_{y_2}^{y_1} \frac{dy}{Y - y_i} = \frac{y_1 - y_2}{(y - y_i)_M} \qquad \textbf{(10.6-23)}$$

Esta expresión se puede sustituir en la ecuación (10.6-41) y otras expresiones similares en las ecuaciones (10.6-42) hasta la (10.644).

EJEMPLO 10.6-3. Uso de unidades de transferencia para una torre empacada

Repita el ejemplo 10.6-2 usando unidades de transferencia y la altura de una unidad de transferencia como sigue:

a) Use H_G y N_G para calcular la altura de la torre.

b) Use H_{OG} y N_{OG} para calcular la altura de la torre.

Solución: Para el inciso a), $k'_y a = 3.78 \times 10^{-2}$ kg mol/s . m^3 fracción mol con base en el ejemplo 10.6-2. A partir de la ecuación (10.6-36),

$$H_G = \frac{V}{k'_y aS} \qquad \textbf{(10.6-36)}$$

El valorpromedio de *Ves* 3.852 $\times 10^{-3}$ kgmol/s y $S = 0.186$ m^2. Sustituyendo y resolviendo,

$$H_G = \frac{3.852 \text{ x } 10^{-3}}{(3.78 \text{ x } 10^{-2})(0.186)} = 0.548 \text{ m}$$

Puesto que la solución está diluida, el número de unidades de transferencia, con base en la ecuación (10.6-41), es

$$N_G = \left[\frac{(1-y)_{iM}}{1-y}\right]_{\text{prom}} \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{y - y_i} \qquad \textbf{(10.6-45)}$$

El término entre corchetes se evalúa en los puntos 1 y 2. En el punto $y_1 = 0.026, y_{i1} = 0.0154$, como se determinó en el ejemplo 10.6-2. Con base en la ecuación (10.4-6) del ejemplo 10.6-2, $(1 - y)_{iM} = 0.979$. Además, $1 - y = 1 - 0.026 = 0.974$. Entonces, en el punto 1,

$$\frac{(1-y)_{iM}}{1-Y} = \frac{0.979}{0.974} = 1.005$$

En el punto $y_2 = 0.005, y_{i2} = 0.002$. Sustituyendo en la ecuación (10.4-6), $(1 - y)_{iM} = 0.997$ y $1 - y = 1 - 0.005 = 0.995$. Entonces, en el punto 2,

$$\frac{(1-y)_{iM}}{1-Y} = \frac{0.997}{0.995} = 1.002$$

Por tanto, el valor promedio del término entre corchetes de la ecuación (10.6-45) es

$$\left[\frac{(1-y)_{iM}}{1-y}\right]_{\text{prom}} = \frac{1.005 + 1.002}{2} = 1.003$$

Usando la ecuación (10.6-23), la integral es

$$\int_{y_2}^{y_1} \frac{dy}{y - y_i} = \frac{y_1 - y_2}{(y - y_i)_M} \qquad \textbf{(10.6-23)}$$

De acuerdo con el ejemplo 10.6-2, $(y - y_i)_M = 0.00602$. Sustituyendo la ecuación (10.6-23) en la (10.6-45),

$$N_G = \left[\frac{(1-y)_{iM}}{1-Y}\right]_{\text{prom}} \frac{y_1 - y_2}{(y - y_i)_M} \qquad \textbf{(10.6-46)}$$

Sustituyendo en la ecuación (10.6-46),

$$N_G = (1.003)\left(\frac{0.026 - 0.005}{0.00602}\right) = 3.50 \text{ unidades de transferencia}$$

Por último, sustituyendo en la ecuación (10.6-40),

$$z = H_G N_G = (0.548)(3.50) = 1.918 \text{ m}$$

Para el inciso b), con $K'_y a = 2.183 \times 10^{-2}$ kg mol/ s · m^3 . fracción mol del ejemplo 10.6-2 y sustituyendo en la ecuación (10.6-38),

$$H_{OG} = \frac{V}{K'_y aS} = \frac{3.852 \text{ x } 10^{-3}}{(2.183 \text{ x } 10^{-2})(0.186)} = 0.949 \text{ m}$$

Cuando se resuelve una integral similar a la ecuación (10.6-23), se obtiene el siguiente número de unidades de transferencia en la ecuación (10.6-43).

$$N_{OG} = \left[\frac{(1-y)_{*M}}{1-y}\right]_{\text{prom}} \frac{y_1 - y_2}{(y - y^*)_M} \qquad (10.6\text{-}47)$$

Sustituyendo $(y - y^*)_M$ = 0.01025 del ejemplo 10-6-2 y los otros valores conocidos en la ecuación (10.6-47), y considerando el término entre corchetes como 1. 0,

$$N_{OG} = (1.0)\left(\frac{0.026 - 0.005}{0.01025}\right) = 2.05 \text{ unidades de transferencia}$$

Finalmente, por medio de la ecuación (10.6-40),

$$z = H_{OG} N_{OG} = 0.949(2.05) = 1.945 \text{ m}$$

'Nótese que el número de unidades de transferencia N_{OG} de 2.05 no es igual que el valor de N_G de 3.50.

10.7 ABSORCIÓN DE MEZCLAS CONCENTRADAS EN TORRES EMPACADAS

En la sección 10.6D se estudiaron los métodos simplificados de diseño para la absorción de gases diluidos en torres empacadas cuando las fracciones mol en las corrientes de gas y de líquido eran inferiores a aproximadamente 10%. Se obtienen entonces líneas de operación rectas y líneas de equilibrio casi rectas. En mezclas gaseosas concentradas, la línea de operación, y casi siempre la línea de equilibrio, tendrá bastante curvatura y $k'_x a$ y $k'_y a$ pueden variar con los flujos totales. Entonces, las ecuaciones de diseño (10.6-14) a la (10.6-17) se debe integrar de forma gráfica o numérica:

$$\int_0^z dz = z = \int_{y_2}^{y_1} \frac{V\, dy}{\frac{k'_y aS}{(1-y)_{iM}}(1-y)(y - y_i)} \qquad (10.6\text{-}14)$$

$$\int_0^z dz = z = \int_{x_2}^{x_1} \frac{L\,dx}{\dfrac{k'_x\,aS}{(1-x)_{iM}}(1-x)(x_i - x)} \tag{10.6-E}$$

$$\int_0^z dz = z = \int_{y_2}^{y_1} \frac{V\,dy}{\dfrac{K'_y\,aS}{(1-y)_{*M}}(1-y)(y - y^*)} \tag{10.6-16}$$

$$\int_0^z dz = z = \int_{x_2}^{x_1} \frac{L\,dx}{\dfrac{K'_x\,aS}{(1-x)_{*M}}(1-x)(x^* - x)} \tag{10.6-17}$$

Las etapas detalladas generales de los pasos a seguir son:

1. Se grafica la ecuación de la línea de operación (10.6-4) y la línea de equilibrio.
2. Se obtienen los valores de los coeficientes de película, $k'_y a$ y $k'_x a$ con base en ecuaciones empíricas. Estos coeficientes son funciones de G_y^n, kg totales de gas/s · m², y G_x^m, kg totales de líquido/s . m², donde n y m caen en el intervalo de 0.2 a 0.8. Con los valores de la ecuación de la línea de operación, se calculan los totales de V y L para diferentes valores de y y x en la torre y se convierten a G_y y G_x. Entonces, se calculan los valores de $k'_y a$ y $k'_x a$. Si la variación de $k'_y a$ o $k'_x a$ en las partes superior e inferior de la torre es pequeña, puede emplear un valor promedio.
3. Se principia con el fondo de la torre en el punto $P_1(y_1, x_1)$ y se determinan las composiciones en la interfaz y_{i1}, x_{i1} graficando una línea P_1M_1 con pendiente que se calcula por medio de la ecuación (10.6-30). Esta línea interseca a la línea de equilibrio en las concentraciones de interfaz en el punto M_1:

$$\text{pendiente} = -\frac{k'_x a/(1-x)_{iM}}{k'_y a/(1-y)_{iM}} = -\frac{k_x a}{k_y a} \tag{10.6-30}$$

donde $(1-y)_{iM}$ y $(1-x)_{iM}$ se conocen por medio de las ecuaciones (10.4-6) y (10.4-7), respectivamente. Éste es un método de aproximaciones sucesivas. Como primera aproximación se puede emplear $(1-x_1)$ para $(1-x)_{iM}$, y $(1-y_1)$ para $(1-y)_{iM}$. Los valores de y_{i1} y x_{i1}, determinados en la primera aproximación, se sustituyen en la ecuación (10.6-30) para la segunda aproximación.
4. Se determina ahora, por medio de la ecuación (10.6-30), una nueva pendiente en el punto $P_2(y_2, x_2)$ repitiendo el paso 3. Esto se repite para varios puntos intermedios en la torre. Esta pendiente puede variar a lo largo de la torre.
5. Usando los valores de y_i y x_i ya determinados, se integra gráficamente la ecuación (10.6- 14) para obtener la altura de la torre al graficar $f(y)$, donde $f(y)$ es como sigue:

$$f(y) = \frac{V}{\dfrac{k'_y\,aS}{(1-y)_{iM}}(1-y)(y - y_i)} \tag{10.7-l}$$

en función de y entre y_2 y y_1. Entonces se determina el área bajo la curva para obtener la altura de la torre. Si se usa $k'_x a$ u otros coeficientes, se grafican las funciones apropiadas indicadas en las ecuaciones (10.6-15) a la (10.6-17). Si una corriente está muy diluida, se puede suponer que $(1-y)_{iM}$ 0 $(1-x)_{iM}$ son iguales a 1.0.

EJEMPLO 10.7-l. Diseño de una torre de absorción para una mezcla gaseosa concentrada

Se desea diseñar una torre empacada con anillos cerámicos de 25.4 mm para absorber SO_2 del aire mediante agua pura a 293 K y 1 .O 13 $\times$ 1 0^5 Pa de presión absoluta. El gas de entrada contiene 20% mol de SO_2 y el que sale, 2% mol. El flujo de aire inerte es 6.53 $\times 10^{-4}$ kg mol de aire/s y el flujo de agua inerte es 4.20 $\times$ 1 0^{-2} kg mol de agua/s. El área de corte transversal de la torre es 0.0929 m^2. Para SO_2 diluido, los coeficientes de transferencia de masa de película a 293 K son para anillos de 25.4 mm (lpulg.) (W1),

$$k'_y a = 0.0594 G_y^{0.7} G_x^{0.25} \qquad k'_x a = 0.152 G_x^{0.82}$$

donde $k'_y a$ son kg mol/s . m^3 . fracción mol, $k'_x a$ son kg mol/s $\cdot$ m^3 $\cdot$ fracción mol, y G_x y G_y son kg totales de líquido o gas, respectivamente, por segundo por m^2 de corte transversal de torre. Calcule la altura de la torre.

Solución: Los datos dados son V' = 6.53 $\times 10^{-4}$ kg mol de aire/s (5.18 lb mol/h), L' = 4.20 $\times 10^{-2}$ (333 lb molk), y_1 = 0.20, y_2 = 0.02 y x_2 = 0

Sustituyendo en la ecuación general de balance de materiales, (10.6-3),

$$L'\left(\frac{x_2}{1-x_2}\right)+V'\left(\frac{y_1}{1-y_1}\right)=L'\left(\frac{x_1}{1-x_1}\right)+V'\left(\frac{y_2}{1-y_2}\right)$$

$$4.20\times10^{-2}\left(\frac{0}{1-0}\right)+6.53\times10^{-4}\left(\frac{0.2}{1-0.2}\right)=4.20\times10^{-2}\left(\frac{x_1}{1-x_1}\right)+6.53\times10^{-4}\left(\frac{0.02}{1-0.02}\right)$$

Resolviendo, x_1 = 0.00355. La ecuación (10.6-4) de la línea de operación es

$$4.20\times10^{-2}\left(\frac{x}{1-x}\right)+6.53\times10^{-4}\left(\frac{0.2}{1-0.2}\right)=4.20\times10^{-2}\left(\frac{0.00355}{1-0.00355}\right)+6.53\times10^{-4}\left(\frac{y}{1-y}\right)$$

Estableciendo que y = 0.04 en esta ecuación de la línea de operación y despejando x, x = 0.000332. Al seleccionar otros valores dey y al despejar x, se calculan los puntos de la línea de operación que se muestran en la tabla 10.7-l y se grafican en la figura 10.7-1, junto con los datos de la línea de equilibrio del Apéndice A.3.

El flujo molar total V se calcula a partir de V= V'/(1 y). Cuando y = 0.20, V= 6.53 $\times 10^{-4}$/(1 - 0.2) = 8.16 $\times 10^{-4}$. En la tabla 10.7-l se incluyen otros valores calculados. El flujo total de masa G_y en kg/s $\cdot$ m^2 es igual al flujo total de masa de aire más SO_2, dividido entre el área de corte transversal,

$$G_y = \frac{6.53 \times 10^{-4}(29)\text{kg aire/s} + 6.53 \times 10^{-4}\left(\frac{y}{1-y}\right)(64.1)\text{kg SO}_2\text{/s}}{0.0929\ \text{m}^2}$$

Estableciendo que y = 0.20,

$$G_y = \frac{6.53 \times 10^{-4}(29) + 6.53 \times 10^{-4}\left(\frac{0.2}{1-0.2}\right)64.1}{0.0929} = 0.3164 \text{ kg/s . m}^2$$

De la misma forma se calcula G_y para todos los puntos y se tabula de manera análoga. Para el flujo líquido, $L = L'/(1 \quad x)$. Además, para el gasto total de masa de líquido,

$$G_x = \frac{4.20 \times 10^{-2}(18) + 4.20 \times 10^{-2}\left(\frac{x}{1-x}\right)64.1}{0.0929}$$

En la tabla 10.7-l se incluyen diversos valores calculados de L y G_x para varios valores de x.

Para calcular los valores de $k'_x a, x = 0$, $G_x = 8.138$ y

$$k'_x a = 0.152 G_x^{0.82} = 0.152(8.138)^{0.82} = 0.848 \text{ kg mol/s} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{fracción mol}$$

Se calcula el resto de estos valores y se incluyen en la tabla 10.7-l. Para el valor de $k'_y a$, para $y = 0\ 02$, $G_y = 0.2130$, $G_x = 8.138$, y

$$k'_y a = 0.0594 G_y^{0.7} G_x^{0.25} = 0.0594(0.2130)^{0.7}(8.138)^{0.25}$$
$$= 0.03398 \text{ kg mol/s} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{fracción mol}$$

Se tabulan entonces éste y otros valores ya conocidos de k'_y, tomando en cuenta que estos valores varían en forma considerable en la torre.

A continuación se determina las composiciones en la interfaz y_i y x_i para los valores dados dey y x de una línea de operación. Para el punto $y_1 = 0.20$ y $x_1 = 0.00355$, se establece la estimación preliminar $(1 - y)_{iM} \cong 1 - y \cong 1 - 0.20 \cong 0.80$. Además, se estima que $(1 - x)_{iM} \cong 1 - x \cong 1 - 0.00355 \cong 0.996$. La pendiente de la línea P_1M_1 por medio de la ecuación (10.6-30), es, aproximadamente,

$$\text{pendiente} = \frac{k'_x a/(1-x)_{iM}}{k'_y a/(1-y)_{iM}} = \frac{-0.857/(0.996)}{0.04496/(0.80)} = -15.3$$

Graficando lo anterior en la figura 10.7-1, $y_1 = 0.1688$ y $x_i = 0.00566$. Se sustituyen estos valores para la segunda aproximación en las ecuaciones (10.4-6) y (10.4-7),

$$(1 - y)_{iM} = \frac{(1 - 0.1688) - (1 - 0.20)}{\ln[(1 - 0.1688)/(1 - 0.20)]} = 0.816$$

$$(1 - x)_{iM} = \frac{(1 - 0.00355) - (1 - 0.00566)}{\ln[(1 - 0.00355)/(1 - 0.00566)]} = 0.995$$

Lanuevapendiente por medio de la ecuación (10.6-30), es (–0.857/0.995)/(0.04496/0.816) = -15.6. Graficando, $y_i = 0.1685$ y $x_i = 0.00565$. Esto se muestra como el punto M_1. Este cálculo se repite hasta alcanzar el punto y_2, x_2. Lapendiente de la ecuación (10.6-30) aumenta de manera notable al ascender en la torre, y es – 24.6 al llegar al extremo superior. En la tabla 10.7-l se dan los valores de y_i y x_i.

TABLA ***10.7-I. Datos calculados para el ejemplo 10.7-I.***

Y	x	V	L	G_y	G_x	$k_y'a$	$k_x'a$	x_i	y_i	$1 - Y$	$(1-y)_{iM}$	$Y - y_i$	$\frac{V}{\frac{ak_y'}{(1-y)_{iM}}(1-y)(y-y_i)}$
0.02	0	6.66×10^{-4}	0.04200	0.2130	8.138	0.03398	0.848	0.00046	0.0090	0.980	0.983	0.0110	19.25
0.04	0.000332	6.80×10^{-4}	0.04201	0.2226	8.147	0.03504	0.849	0.00103	0.0235	0.960	0.968	0.0165	12.77
0.07	0.000855	7.02×10^{-4}	0.04203	0.2378	8.162	0.03673	0.850	0.00185	0.0476	0.930	0.941	0.0224	9.29
0.13	0.00201	7.51×10^{-4}	0.04208	0.2712	8.196	0.04032	0.853	0.00355	0.1015	0.870	0.885	0.0285	7.16
0.20	0.00355	8.16×10^{-4}	0.04215	0.3164	8.241	0.04496	0.857	0.00565	0.1685	0.800	0.816	0.0315	6.33

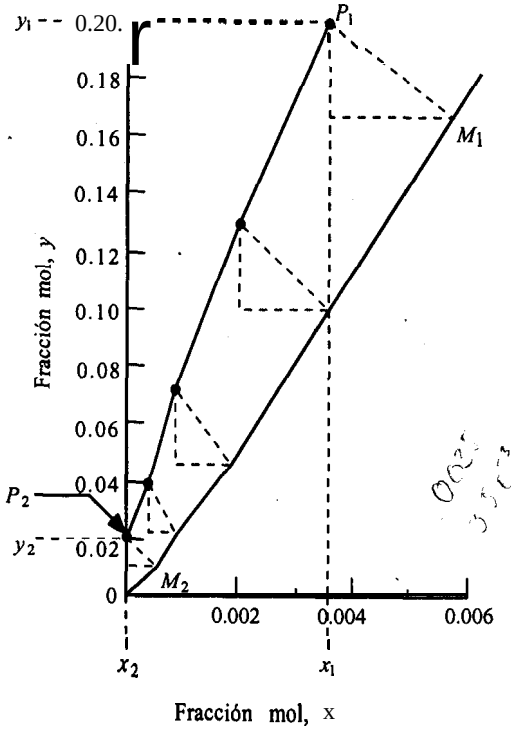


FIGURA 10.7-I. *Línea de operación y composiciones en la interfaz del ejemplo 10.7-l.*

Para integrar la ecuación (10.6-14), se necesitan valores de $(1 - y)$, $(1 - y)_{iM}$, y $(y - y_i)$ que se tabulan en la tabla 10.7-l. Entonces, se calcula $f(y)$ para $y = 0.20$ con base en la ecuación (10.7-l).

$$f(y) = \frac{V}{\dfrac{k'_y aS}{(1-y)_{iM}}(1-y)(y-y_i)} = \frac{8.16 \times 10^{-4}}{\dfrac{0.04496(0.0929)}{0.816}(0.800)(0.0315)} = 6.33$$

Esto se repite para otros valores de y. Después, se grafica la función $f(y)$ con respecto a y. El área total es, entonces, la suma de los cuatro rectángulos:

$$\text{área total} = 0.312 + 0.418 + 0.318 + 0.540 = 1.588$$

Por consiguiente, la altura de la torre es igual al área de la ecuación (10.6-14), y $z = 1.588$ m.

10.8 ESTIMACIÓN DE LOS COEFICIENTES DE TRANSFERENCIA DE MASA PARA TORRES EMPACADAS

10.8A Determinación experimental de coeficientes de película

Los coeficientes individuales de transferencia de masa de película $k'_y a$ y $k'_x a$ dependen casi siempre del número de Schmidt, del número de Reynolds y de la forma y tamaño del empaque. Las

interacciones entre estos factores son bastante complicadas. En consecuencia, las correlaciones de coeficientes de transferencia de masa son empíricas en alto grado. Además, la confiabilidad de estas correlaciones no es muy satisfactoria, pues suele haber desviaciones hasta de un 25%. La principal dificultad se origina en el hecho de que la resistencia o coeficiente total se mide experimentalmente y representa a las dos resistencias de película en serie. Para obtener el coeficiente de película en una sola fase, el experimento se diseña de tal manera que la otra resistencia de película sea despreciable o se pueda calcular en forma aproximada.

Para medir el coeficiente de transferencia de masa de película líquida $k'_x a$, se usa un sistema de absorción o desorción en agua de gases muy insolubles, tales como O_2 o CO_2. El experimento proporciona el valor de $K'_x a$, que es iguala $k'_x a$, puesto que la resistencia de la fase gaseosa se desprecia.

Para medir el coeficiente de película de la fase gaseosa $k'_y a$, se debe usar un sistema tal que el soluto sea muy soluble en el líquido y la resistencia de la fase líquida sea despreciable. La mayor parte de estos sistemas como los de NH_3 - aire - agua, tienen una resistencia en fase líquida de aproximadamente un 10%. Al restar esta resistencia de la fase líquida (obtenida al corregir los datos de $k'_x a$ para la absorción de CO_2 u O_2 con respecto a los datos de NH_3 para $k'_x a$) de la resistencia general en la ecuación (10.4-24), se obtiene el coeficiente $k'_y a$. En las referencias (G1, S1, S2) se estudian los detalles de este procedimiento.

10.8B Correlaciones para coeficientes de película

Los datos experimentales para el coeficiente de película de gases en mezclas diluidas se pueden correlacionar en términos de H_G, donde

$$H_G = \frac{V}{k'_y aS} \tag{10.6-36}$$

La ecuación empírica es:

$$H_G = \alpha G_y^{\beta} G_x^{\gamma} N_{Sc}^{0.5} \tag{10.8-1}$$

donde G_y = kg totales de gas/s · m^2; G_x = kg totales de líquido/s . m^2; y α, β y γ son constantes para cada empaque, como se ve en la tabla 10.8-l (T2). El efecto de la temperatura, que es pequeño, queda incluido en el número de Schmidt $\mu/\rho D$, donde μ es la viscosidad de la mezcla gaseosa en kg/m . s, ρ la densidad en kg/m^3, y D la difusividad del soluto A en el gas en m^2/s. Se puede demostrar que los coeficientes $k'_y a$ y H_G son independientes de la presión.

Se puede usar la ecuación (10.8-l) para corregir los datos disponibles de absorción del soluto A en un gas sobre un empaque específico. Con respecto a la absorción del soluto E en el mismo sistema y con idénticas velocidades de flujo de masa. Esto se logra por medio de la ecuación (10.8-2).

$$H_{G(E)} = H_{G(A)}[N_{Sc(E)}/N_{Sc(A)}]^{0.5} \tag{10.8-2}$$

Las correlaciones para los coeficientes de película de líquidos en mezclas diluidas señalan que H_L es independiente de la velocidad del gas dentro de ciertos límites, como indica la siguiente expresión:

$$H_L = \theta \left(\frac{G_x}{\mu_L}\right)^{\eta} N_{Sc}^{0.5} \tag{10.8-3}$$

donde H_L se da en m, μ_L es la viscosidad de líquido en kg/m · s, N_{sc} es el número de Schmidt $\mu_L/\rho D$, ρ es la densidad del líquido en kg/m^3, y D es la difusividad del soluto A en el líquido en m^2/s.

TABLA 10.8-l Altura de una película de gas en una unidad de transferencia, HG en metros*

Tipo de empaque	a	β	γ	*Intervalo de valores* G_y	*Intervalo de valores* G_x
Anillos de Raschig					
-9.5 mm (3/8 pulg.)	0.620	0.45	-0.47	0.271-0.678	0.678-2.034
25.4 mm (1 pulg.)	0.557	0.32	-0.5 1	0.271-0.814	0.678-6.10
38.1 mm (1.5 pulg.)	0.830	0.38	-0.66	0.271-0.950	0.678-2.034
38.1 mm (1.5 pulg.)	0.689	0.38	-0.40	0.271-0.950	2.034-6.10
50.8 mm (2 pulg.)	0.894	0141	-0.45	0.271-1.085	0.678-6.10
Sillas de Berl					
12.7 m m (0.5 pulg.)	0.541	0.30	-0.74	0.271-0.950	0.678-2.034
12.7 m m (0.5 pulg.)	0.367	0.30	-0.24	0.271-0.950	2.034–6.10
25.4 mm (1 pulg.)	0.461	0.36	-0.40	0,271-l .085	0.542-6.10
38.1 mm (1.5 pulg.)	0.652	0.32	-0.45	0.271-1.356	0.542–6.10

* $H_G = \alpha G_y^{\beta} G_x^{\gamma} N_{Sc}^{0.5}$ donde G_y = kg totales gas/s · m^2; G_x = kg totales líquido/s m^2; y $N_{Sc} = \mu/\rho D$.
Fuente: datos tomados de Fellinger (P2), según reporte de R. E. Treybal, *Mass Transfer Operations,* Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1955, pág. 239. Con autorización.

En la tabla 10.8-2 se incluyen datos para diferentes tipos de empaque. Se puede usar la ecuación (10.8-3) para corregir los datos disponibles para cierto empaque y un soluto con respecto a otro soluto.

EJEMPLO 10.8-l. Predicción de los coeficientes de película para absorción de amoniaco

Pronostique los valores de H_G, H_L y K'_y a para la absorción de NH_3 de agua en una solución diluida en una torre empacada con anillos de Raschig de 25.4 mm a 303 K (86 "F) y 101.32 kPa de presión. Las velocidades de flujo son $G_x = 2.543$ kg/s · m^2 y $G_y = 0.339$ kgls . m^2.

TABLA 10.8-2. *Altura de película líquida en una unidad de transferencia, H_L, en metros**

Empaque	θ	η	*Intervalo de* G_x
Anillos de Rasching			
9.5 mm (3/8 pulg.)	3.21×10^{-4}	0.46	0.542 – 20.34
12.7 mm (0.5 pulg.)	7.18×10^{-4}	0.35	0.542 – 20.34
25.4 mm (1 pulg.)	2.35×10^{-3}	0.22	0.542 – 20.34
38.1 mm (1.5 pulg.)	2.61×10^{-3}	0.22	0.542 – 20.34
50.8 mm (2 pulg.)	2.93×10^{-3}	0.22	0.542 – 20.34
Sillas de Berl			
12.7 mm (0.5 pulg.)	1.456×10^{-3}	0.28	0.542 – 20.34
25.4 mm (1 pulg.)	1.285×10^{-3}	0.28	0.542 – 20.34
38.1 mm (1.5 pulg.)	1.366×10^{-3}	0.28	0.542 – 20.34

* $H_L = \theta(G_x/\mu_L)^{\eta} N_{Sc}^{0.5}$ donde G_x = kg totales líquido/s . m^2, μ_L = viscosidad de líquido en kg/m s y $N_{Sc} = \mu_L/\rho D$. G_y es menor que la carga.
Fuente: basado en datos de Sberwood y Holloway (S3), tal como los reporta R. E. Treybal, *Mass Transfer Operations,* Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1955. p. 237. Con autorización.

Solución: Con base en el Apéndice A.3, la relación de equilibrio en una solución diluida es 0.0151 $= m(0.0126)$ o $y = 1.20x$. Además, del Apéndice A.3. para el aire, $\mu = 1.86 \times 10^{-5}$ kg/m · s. La densidad es $\rho = 1.168$ kg/m^3. La difusividad del NH_3, en aire a 273 K, es 1.98×10^{-5} m^2/s, de acuerdo con la tabla 6.2-l. Corrigiendo a 303 K por medio de la ecuación (6.2.45), $D_{AB} = 2.379 \times 10^{-5}$ m^2/s. Por tanto,

$$N_{Sc} = \frac{\mu}{\rho D} = \frac{1.86 \times 10^{-5}}{(1.168)(2.379 \times 10^{-5})} = 0.669$$

Sustituyendo en la ecuación (10.8-l) y con datos de la tabla 10.8-1,

$$H_G = \alpha G_y^{\beta} G_x^{\gamma} N_{Sc}^{0.5} = 0.557(0.339)^{0.32}(2.543)^{-0.51}(0.669)^{0.5} = 0.200 \text{ m}$$

La viscosidad del agua es igual a 1.1404×10^{-3} kg/m · s a 15 °C y 0.8007×10^{-3} a 30 "C, de acuerdo con el Apéndice A.2. El valor de D_{AB} para el NH_3 en agua a 288 K (15 "C), se obtiene de la tabla 6.3-l y es 1.77×10^{-9} m^2/s. Al corregir esto a 303 K (30 "C), y al usar la ecuación (6.3-9),

$$D_{AB} = \left(\frac{1.1404 \times 10^{-3}}{0.8007 \times 10^{-3}}\right)\left(\frac{303}{288}\right)(1.77 \times 10^{-9}) = 2.652 \times 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$$

Entonces, si $\rho = 996$ kg/ m^3 para el agua,

$$N_{Sc} = \frac{\mu}{\rho D} = \frac{0.8007 \times 10^{-3}}{(996)(2.652 \times 10^{-9})} = 303.1$$

Sustituyendo en la ecuación (10.8-3), y con datos de la tabla 10.8-2,

$$H_L = \theta \left(\frac{G_x}{\mu_L}\right)^{\eta} N_{Sc}^{0.5} = (2.35 \times 10^{-3})\left(\frac{2.543}{0.8007 \times 10^{-3}}\right)^{0.22} (303.1)^{0.5}$$
$$= 0.2412 \text{ m}$$

Convirtiendo a k'_y a usando la ecuación (10.6-36),

$$k'_y a = \frac{V}{H_G S} = \frac{0.399129}{0.200} = 0.0584 \text{ kg mol/s} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{fracción mol}$$

Para $k'_x a$ usando la ecuación (10.6-37),

$$k'_x a = \frac{L}{H_L S} = \frac{2.543118}{0.2412} = 0.586 \text{ kg mol/s} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{fracción mol}$$

Sustituyendo en la ecuación (10.4-24) para soluciones diluidas

$$\frac{1}{K'_y a} = \frac{1}{k'_y a} + \frac{m'}{k'_x a} = \frac{1}{0.0584} + \frac{1.20}{0.586} = 17.12 + 2.048 = 19.168$$

$$K'_y a = 0.0522 \text{ kg mol/s} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{fracción mol}$$

Nótese que el porcentaje de resistencia en la película de gas es (17.12/19.168)(100) = 89.3%.

PROBLEMAS

10.2-1. ***Equilibrio y la constante de la ley de Henry.*** *La* presión parcial del CO_2 en el aire es 1.333×10^4 Pa y la presión total es 1.133×10^5 Pa. La fase gaseosa está en equilibrio con una solución acuosa a 303 K. ¿Cuál es el valor de x_A para el CO_2 en equilibrio en la solución? Vea la constante de la ley de Henry en el Apéndice A.3.

Respuesta: $x_A = 7.07 \times 10^{-5}$ fracción mol de CO_2

10.2-2. ***Solubilidad de gases en solución acuosa.*** La concentración de CO_2 en agua a 303 K es 0.90×10^{-4} kg de CO_2/kg de agua. Si se utiliza la constante de la ley de Henry del Apéndice A.3, ¿qué presión parcial de CO_2 debe mantenerse en el gas para evitar que el CO_2 se vaporice de la solución acuosa?

Respuesta: $p_A = 6.93 \times 10^3$ Pa (0.0684 atm)

10.2-3. ***Regla de las fasespara un sistema gas-liquido.*** Se establece para un sistema SO_2-aire-agua una presión total a 1 atm abs con una presión parcial del SO_2 en el vapor de 0.20 atm. Calcule el número de grados de libertad, *F*. ¿Qué variables de las no especificadas se pueden fijar de manera arbitraria?

10.3-l. ***Contacto de etapa de equilibrio para un sistema gas-liquido.*** Una mezcla gaseosa a 2.026×10^5 Pa de presión total, que contiene aire y SO_2, se pone en contacto en un mezclador de equilibrio de una sola etapa con agua pura a 293 K. La presión parcial del SO_2 en el gas original es 1.52×10^4 Pa. El gas de entrada contiene 5.70 kg mol totales y el agua, 2.20 kg mol totales. El gas y el agua de salida están en equilibrio. Calcule las cantidades y las composiciones de las fases de salida. (Use datos de equilibrio de la figura 10.2-l.)

Respuesta: $x_{A1} = 0.00495$, $y_{A1} = 0.0733$, $L_1 = 2.21$ kg mol, $V_1 = 5.69$ kg mol

10.3-2. ***Absorción en una torre a contracorriente por etapas.*** Repita el ejemplo 10.3-2 con las mismas condiciones pero con el siguiente cambio. Use un flujo de agua pura para la torre de 108 kg mol de H_2O/h, esto es, 20% por encima del valor de 90 usado en el ejemplo 10.3-2. Determine el número de etapas requeridas. Repita la operación empleando la ecuación analítica de Kremser.

10.3-3. ***Remoción de la contaminación de una crema por medio de vapor.*** Se desea efectuar una remoción a contracorriente por etapas para eliminar la contaminación de una crema. La contaminación está presente en la crema original que se alimenta al proceso a una concentración de 20 partes por millón (ppm). Por cada 100 kg de crema que entran por unidad de tiempo, se usan 50 kg de vapor para la remoción. Se desea reducir la concentración de la contaminación en la crema a 1 ppm. La relación de equilibrio entre la contaminación en el vapor y la crema líquida es $y_A = 10x_A$, donde y_A está en ppm de contaminante en el vapor y x_A en ppm en la crema (El). Determine el número de etapas teóricas necesarias. [*Sugerencia*: En este caso, para extraer de la corriente líquida (L) a la corriente de vapor (V), la línea de operación debe estar por debajo de la de equilibrio en el diagrama $y_A - x_A$. Se supone que el vapor no se condensa durante la remoción. Use ppm en los balances de materiales.]

Respuesta: El número de etapas = 1.85 (iniciando en el extremo concentrado y descendiendo)

10.4-l. ***Coeficiente global de tranferencia de masa a partir del coeficiente de película.*** Con los mismos datos del ejemplo 10.4-1, calcule los coeficientes globales de transferencia de masa K'_x y K_x, el flujo específico y el porcentaje de resistencia en la película gaseosa.

Respuesta: $K'_x = 1.173 \times 10^{-3}$ kg mol/s · m^2 · fracción mol, $K_x = 1.519 \times 10^{-3}$, $N_A = 3.78 \times 10^{-4}$ kg mol/s · m^2, 36.7% resistencia

10.4-2. ***Concentraciones en la interfaz y coeficientes totales de transferencia de masa.*** Use los mismos datos de equilibrio y coeficientes de película k'_y y k'_x del ejemplo 10.4-l. Sin embargo, aplique las concentraciones del volumen $y_{AG} = 0.25$ y $x_{AL} = 0.05$. Obtenga lo siguiente:

a) Concentraciones en la interfaz y_{Ai} y x_{Ai} y el flujo específico N_A.

b) Coeficientes totales de transferencia de masa K'_y y K_y y el flujo específico N_A.
c) Coeficiente total de transferencia de masa K'_x y el flujo específico N_A.

10.5-l. ***Torre de enfriamiento de agua a contracorriente.*** *Una torre* de enfriamiento de agua opera a contracorriente y con tiro forzado para enfriar agua de 43.3 a 26.7 "C. El aire entra por la parte inferior de la torre a 23.9 °C con temperatura de bulbo húmedo de 2 1.1 "C. El valor de H_G para las condiciones de flujo es igual a 0.533 m. La resistencia a la transferencia de calor de la fase líquida se puede despreciar; esto es h_L es muy grande; deben usarse valores de H_y^*. Calcule la altura necesaria de la torre suponiendo que se usará 1.5 veces el flujo mínimo de aire necesario.

10.5-2. ***Flujo mínimo de gas y altura de una torre de enfriamiento por agua.*** ***Se*** planea enfriar agua de 110 °F a 85 °F en una torre de enfriamiento empacada que opera a contracorriente, mediante aire de entrada a 85 °F con temperatura de bulbo húmedo de 75°F. El flujo de agua es de 2000 $lb_m/h \cdot pie^2$ y el flujo de aire 1400 lb_m de aire/h . pie^2. El coeficiente total de transferencia de masa es $K_G a$ = 6.90 lb mol/h · pie^3 · atm.

a) Calcule el flujo mínimo de aire que se puede usar.
b) Calcule la altura necesaria de la torre cuando el flujo de aire que se usa es de 1400 1 b_m de aire/h · pie^2.

Respuesta: a) G_{min} = 935 lb_m aire/h · pie^2 (424 1 kg aire/h . m^2); b) z = 21.8 pie (6.64 m)

10.5-3. ***Diseño de una torre de enfriamiento de agua.*** Vuelva a calcular el ejemplo 10.5-1, pero considere 1.75 veces el flujo mínimo de aire.

10.5-4. ***Efecto de los cambios de las condiciones del aire en una torre de enfriamiento.*** Considerando la torre de enfriamiento del ejemplo 10.5-1, ¿a qué temperatura se enfriará el agua si el aire entra a 29.4 °C pero con temperatura de bulbo húmedo de 26.7 "C? Se usan los mismos gastos de gas y líquido. El agua entra a 43.3 "C, como antes. (Sugerencia: En este caso, la incógnita es T_{L1}. La altura de la torre es la misma que en el ejemplo 10.5-l. La pendiente de la línea de operación es igual que antes. La resolución se debe hacer por aproximaciones sucesivas. Suponga un valor de T_{L1} mayor de 29.4 °C. Proceda a una integración gráfica para ver si se obtiene la misma altura, z.)

10.6-l. ***Cantidad de absorción en una torre de platos.*** Una torre contiene el equivalente de 3.0 platos teóricos, y se utiliza para absorber SO_2 del aire por medio de agua pura a 293 K y 1 .O 13 × 1 0^5 Pa. El gas de entrada contiene 20% mol de SO_2, y la masa y velocidad del aire de entrada es de 150 kg de aire inerte/h · m^2. El gasto del agua de entrada es 6000 kg/h · m^2. Calcule la composición de salida del gas. *(Sugerencia:* La resolución se obtiene por aproximaciones sucesivas. Suponga una composición de gas de salida de y_1 = 0.01. Grafique la línea de operación y determine el número de platos teóricos necesarios. Si no son 3.0 platos, suponga otro valor de y_1, y así sucesivamente.)

Respuesta: y_1 = 0.011

10.6-2. ***Método analítico para el número de platos de absorción.*** Use las ecuaciones analíticas de la sección 10.3 para el contacto por etapas a contracorriente, para calcular el número de platos teóricos necesarios en el ejemplo 10.6-l.

10.6-3. ***Absorción de amoniaco en una torre de platos.*** Se usa una torre de platos para eliminar el 99% del amoniaco de una corriente de aire de entrada que contiene 6 % mol de amoniaco a 293 K y 1.013 × 10^5 Pa. El gasto de agua pura de entrada es de 188 kg de $H_2O/h \cdot m^2$ y el flujo de aire inerte es de 128 kg de aire/h · m^2. Calcule el número de platos teóricos necesarios. (Use datos de equilibrio del Apéndice A.3.) Para el extremo diluido de la torre, trace un diagrama ampliado para aproximar el número de platos con más precisión.

Respuesta: y_1 = 0.000639 (salida), x_N = 0.0260 (salida), 3.8 platos teóricos

10.6-4. ***Flujo mínimo de liquido en una torre empacada.*** La corriente de gas de un reactor químico contiene 25% mol de amoniaco y el resto son gases inertes. El flujo total son

18 1.4 kg mol/h que pasan a una torre de absorción a 303 K y 1.013×10^5 Pa de presión, en donde el líquido limpiador es agua que contiene 0.005 fracción mol de amoniaco. La concentración del gas de salida debe ser 2.0 % mol de amoniaco. ¿Cuál es el flujo mínimo $L'_{mín}$? Use 1.5 veces el mínimo para grafícar las líneas de equilibrio y operación.

Respuesta: $L'_{mín}$ = **262.6 kg** mol/h

10.6-5. ***Extracción con vapor y número de platos.*** Un hidrocarburo relativamente no volátil que contiene 4.0 % de mol de propano se extrae por acción directa de vapor sobrecalentado en una torre de extracción de platos, para reducir el contenido de propano a 0.2%. Ea temperatura se mantiene constante a 422 K por medio de un calentamiento interno de la torre, que opera a 2.026×10^5 Pa de presión. Se usa un total de 11.42 kg mol de vapor directo para 300 kg mol de líquido total de entrada. El equilibrio vapor-liquido se puede representar mediante y = 25x, donde y es la fracción mol de propano en el vapor y x es la fracción mol de propano en el hidrocarburo. El vapor se puede considerar como gas inerte y no se condensará. Grafique las líneas de operación y de equilibrio y determine el numero de platos teóricos necesarios.

Respuesta: 5.6 platos (empezando desde la parte superior de la torre)

10.6-6. ***Absorción de amoniaco en una torre empacada.*** Una corriente de gas contiene 4.0% de mol de NH_3 y su contenido de amoniaco se reduce a 0.5% mol en una torre de absorción empacada que opera a 293 K y 1.013×10^5 Pa. El flujo de agua pura de entrada es de 68.0 kg mol/h y el flujo total de gas de entrada es de 57.8 kg mol/h. (El diámetro de la torre es 0.747 m.) Los coeficientes de transferencia de masa de película son $k'_y a$ = 0.0739 kg mol/s . m^3 · fracción mol y $k'_x a$ = *0.169* kg mol/s · m^3 · fracción mol. Usando los métodos de diseño para mezclas de gases diluidos, determine a lo siguiente:

a) Calcule la altura de la torre usando $k'_y a$.

b) Calcule la altura de la torre usando $K'_y a$.

Respuesta: a) z = **2.362** m **(7.75** pie)

10.6-7. ***Altura de una torre si se emplea el coeficiente total de transferencia de masa.*** Repita el ejemplo 10.6-2, usando el coeficiente global de transferencia de masa para lâquâdos $K'_x a$ para calcular la altura de la torre.

10.6-8. ***Coeficiente global experimental de transferencia de masa.*** ***Se*** obtienen los siguientes datos experimentales en una torre de 0.254 m de diámetro que absorbe acetona del aire a 293 K y 101.32 kPa usando agua pura. La altura de los anillos de Raschig de 25.4 mm = 4.88 m, V' = 3.30 kg mol de aire/h, y_1 = 0.01053 fracción mol de acetona, y_2 = 0.00072, L' = *9.03* kg mol de agua/h, x_1 = 0.00363 fracción mol de acetona. Calcule el valor experimental de $K_y a$.

10.6-9. ***Conversión de coeficientes de transferencia de masa a coeficientes de unidades de transferencia.*** Se obtienen los siguientes datos experimentales para la absorción de acetona diluida en aire con agua a 80 °F y 1 atm abs de presión en una torre empacada con anillos de Raschig de 25.4 mm. El flujo de gas inerte es de 95 lb_m de aire& · pie^2 y el flujo de agua pura es de 987 $lb_m/h \cdot pie^2$. Los coeficientes experimentales son $k_G a$ = 4.03 lb mol/h . pie^3 . atm y $k_L a$ = 16.6 lb mol/h · pie^3 · lb mol/ pie^3. Los datos de equilibrio se pueden expresar como $c_A = 1.37 p_A$, donde c_A lb mol/h pie^3 y p_A = atm de presión parcial de acetona.

a) Calcule la altura de película de las unidades de transferencia, H_G y H_L.

b) Calcule H_{OG}.

Respuesta: b) H_{OG} = 0.957 pie (0.292 m)

10.6-10. ***Altura de una torre usando unidades de transferencia.*** Repita el ejemplo 10.6-2, pero use unidades de transferencia y calcule H_L, N_L y la altura de la torre.

10.611. ***Valor experimental de H_{OG}.*** Use los datos experimentales del problema 10.6-8; calcule el número de unidades de transferencia de H_{OG}. y el valor experimental H_{OG}.

Respuesta: H_{OG} = 1.265 m

10.7-l. ***Coeficientes de película para líquidos y diseño de una torre para SO_2.*** Con los datos del ejemplo 10.7-1, calcule la altura de la torre con base en la ecuación (10.6-15), que depende del coeficiente de película de transferencia de masa para líquidos $k'_x a$. *[Nota:* Se han obtenido ya los valores en la interfase x_i. Efectue una integración gráfica de la ecuación (10.6-15).]

Respuesta: z = 1.586 m

10.7-2. ***Diseño de una torre para SO_2 usando coeficientes totales.*** Con los datos del ejemplo 10.7-1, calcule la altura de la torre a partir del coeficiente total de transferencia de masa $k'_y a$. *[Sugerencia:* Calcule $K'_y a$ en la parte superior de la torre y en el fondo a partir de los coeficientes de película. Después use un promedio lineal de dos valores para el diseño. Obtenga los valores de y^* con base en la gráfica de las líneas de operación y equilibrio. Integre gráficamente la ecuación (10.6-16) y mantenga $K'_y a$ fuera de la integral.]

10.7-3. ***Altura de una torre empacada usando unidades de transferencia.*** Para el ejemplo 10.7-1, calcule la altura de la torre usando H_G y el número de unidades de transferencia N_G. [Sugerencia: Calcule H_G en la parte superior de la torre con la ecuación (10.6-36), y el valor en la parte inferior de la torre. Use el promedio lineal para el valor de H_G. Calcule el número de unidades de transferencia N_G por integración gráfica de la integral de la ecuación (10.6-32). Entonces, obtenga la altura de la torre.]

Respuesta: H_G = 0.2036 m (valor promedio)

10.7-4. ***Diseño de una torre de absorción usando unidades de transferencia.*** *Se* desea extraer SO_2 gaseoso de una mezcla gaseosa por medio de agua pura a 303 K y 1.013×10^5 Pa. El gas de entrada,contiene 6.00 % mol de SO_2 y la salida 0.3 % de mol de SO_2. El área de corte transversal del empaque de la torre es 0.426 m^2. El flujo de gas de entrada es 13.65 kg mol de aire inerte/h y el flujo de agua de entrada es 984 kg mol de agua inerte/h. Los coeficientes de transferencia de masa son $H_L = 0.436$ m y $k_G a = 6.06 \times 10^{-7}$ kg $mol/s \cdot m^3 \cdot$ Pa y se suponen constantes en la torre para el intervalo de concentraciones considerado. Use los datos de equilibrio del Apéndice A.3. Determine por integración gráfica el valor de N_G. Calcule la altura de la torre. *(Nota:* La línea de equilibrio tiene bastante curvatura, por lo que es necesario una integración gráfica para esta mezcla diluida.)

Respuesta: N_G = 8.47 unidades de transferencia, z = 1.311 m

10.8-l. ***Predicción de los coeficientes de transferencia de masa*** Pronostique los coeficientes de transferencia de masa $H_G, H_L, k'_x a, k'_y a, K'_x a$ para la absorción de CO_2 de aire por medio de agua con el mismo empaque del ejemplo 10.8-l y usando 1.6 veces de las cantidades de flujo del mismo a 303 K. *(Sugerencia:* Use datos de equilibrio del Apéndice A.3 para las constantes de la ley de Henry para el CO_2 en agua. Use los datos de difusividad para CO_2 en agua obtenidos de la tabla 6.3-l y para CO_2 en aire, de la tabla 6.2-l. Corrija los datos a 303 K.)

Respuesta: H_G = 0.2186 m, $H_L = 0.2890$ m

10.8-2. ***Corrección de los coeficientes de transferencia de masa de películas.*** Para la absorción del soluto NH_3 desde el aire por parte del agua a 20 °C y 101.3 kPa de presión absoluta, los valores experimentales son H_G = 0.1372 m y H_L = 0.2103 m para las alturas de unidades de transferencia. Las tasas de flujo son G_y = 13770 kg/h . m^2 y G_y = 1343 kg/h . m^2. Para la absorción de la acetona del aire con agua en las mismas condiciones, y en el mismo empacamiento, pronostique $k'_y a, k'_x a$ y $K'_y a$. Utilice los datos de equilibrio del Apéndice A.3. Use la difusividad para la acetona en agua de la tabla 6.3- 1. La difusividad de la acetona en aire a 0 °C es 0.109×10^{-4} m^2/s a 101.3 kPa de presión absoluta.

REFERENCIAS

(B1) BADGER, W. L. y BANCHERO, J. T. *Introduction to Chemical Engineering,* Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1955.

(B2) *Bubble Tray Design Manual.* American Institute of Chemical Engineers, Nueva York, 1958.

(E1) EARLE, R. L. *Unit Operations in Food Processing,* Oxford: Pergamon Press, Inc., 1966.

(G1) GEANKOPLIS, C. J. *Mass Trunsport Phenomena,* Columbus, Ohio: Ohio State University Bookstores, 1972.

(L1) LEVA, M. *Tower Packings and Packed Tower Design,* 2a. ed., Akron, Ohio: U.S. Stoneware, Inc., 1953.

(M1) **MICKLEY, H. S., SHERWOOD, T. K.** *y* **REED,** *C.* E. *Applied Mathematics in Chemical Engineering,* 2a. ed., Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1957.

(M2) **MICKLEY, H. S.,** *Chem. Eng. Progr., 45, 739* (1949).

(P1) **PERRY, R. H. y GREEN, D.** *Perry's Chemical Engineers' Handbook,* 6a. ed., Nueva York: McGraw-Hill, Book Company, 1984.

(S1) **SHERWOOD, T. K., PIGFORD, R. L. y WILKE,** *C.* R. *Mass Trunsfer,* Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1975.

(S2) **SHULMAN,** H. L. y colab. *A.I.Ch.E.J.,* 1, 274 (1955); 9, 479 (1963).

(S3) **SHERWOOD, T. K. y HOLLOWAY, F. A. L.** *Trans. A.I.Ch.E., 30, 39* (1940).

(T1) **TREYBAL, R. E.** *Mass Transfer Operations,* 3a. ed., Nueva York: McGraw-Hill Book Company 1980.

(T2) **TREYBAL, R. E.** *Mass Trunsfer Operutions.* Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1955.

(W1) WHITNEY, **R. P. y** VIVIAN, J. E. *Chem. Eng. Progr., 45, 323* (1949).

CAPÍTULO ll

Procesos de separación vapor-líquido

11.1 RELACIONES DE EQUILIBRIO VAPOR-LÍQUIDO

11.1A La regla de las fases y la ley de Raoult

Al igual que en los sistemas gas-líquido, el equilibrio en los sistemas vapor-líquido sigue la regla de las fases, ecuación (10.2-l). Usaremos como ejemplo ilustrativo el sistema vapor-líquido, amoniaco-agua. Para dos componentes y dos fases, el valor de F de la ecuación (10.2- 1) es 2 grados de libertad. Las cuatro variables son temperatura, presión y las composiciones del NH_3 (A) y_A en la fase. vapor y x_A en la fase líquida. Al especificar y_A 0 x_A, la composición del agua (B), queda fija, puesto que $y_A + y_B = 1.0$ y $x_A + x_B =$ 1.0. Si la presión es fija, sólo se puede establecer una variable más. Al especificar la composición líquida, la temperatura y la composición del vapor quedan automáticamente especificadas.

La ley *de Raoult,* que es una ley ideal, se puede definir para fases vapor-líquido en equilibrio:

$$p_A = P_A x_A \tag{11.1-1}$$

donde p_A es la presión parcial del componente A en el vapor de Pa (atm), P_A es la presión de vapor de A puro en Pa (atm), y x_A es la fracción mol de A en el líquido. Esta ley sólo es válida para soluciones ideales, como benceno-tolueno, hexano-heptano y alcohol metílico-alcohol etílico, que por lo general son sustancias muy similares entre sí. Muchos sistemas que son soluciones ideales o no ideales siguen la ley de Henry en soluciones diluidas.

11.1B Diagramas de punto de ebullición y gráficas *xy*

Con frecuencia las relaciones de equilibrio vapor-líquido de una mezcla binaria de *A y B se* expresan en forma de un diagrama de puntos de ebullición, como el que se muestra en la figura. ll. l-l para el sistema de benceno (A)-tolueno *(B),* a presión total de 101.32 kPa. La línea superior es del vapor saturado *(linea de punto de* rocio) y la línea inferior es del líquido saturado *(linea de punto de burbuja).* La región de dos fases está localizada en la zona situada entre estas dos líneas.

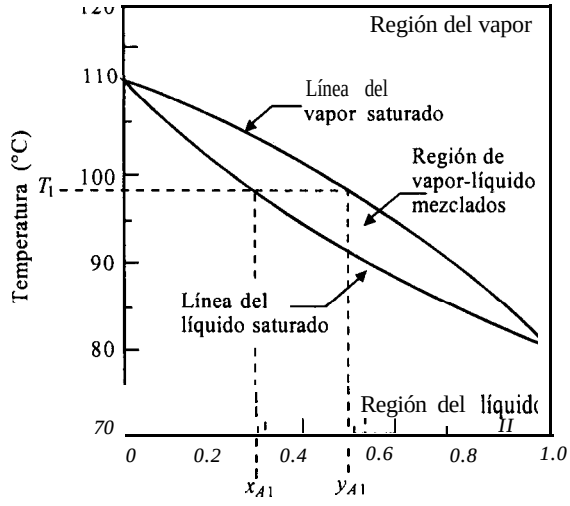


FIGURA 11.1-1. *Diagrama de puntos de ebullición para benceno (A)-tolueno (B) a 101.325 kPa (1 atm) de presión total.*

En la figura ll. 1 - 1, si se empieza calentando una muestra de líquido frío de x_{A1} = 0.3 18, la ebullición se inicia a 98 °C (371.2 K) y la composición del primer vapor en equilibrio es y_{A1} = 0.532. A medida que continúa la ebullición, la composición x_A se desplazará hacia la izquierda, puesto que y_A es más rico en *A*.

El sistema benceno-tolueno sigue la ley de Raoult, por lo que el diagrama de puntos de ebullición se puede determinar a partir de los datos de presión del vapor puro de la tabla 11. 1- 1 junto con las siguientes ecuaciones:

$$p_A + p_B = P \tag{11.1-2}$$

$$P_A x_A + P_B (1 - x_A) = P \tag{11.1-3}$$

$$y_A = \frac{p_A}{P} = \frac{P_A x_A}{P} \tag{11.1-4}$$

EJEMPLO 11.1-1. Uso de la ley de Raoultpara un diagrama de puntos de ebullición
Calcule las composiciones del vapor y del líquido en equilibrio a 95 °C (368.2 K) para benceno-tolueno, usando las presiones de vapor de la tabla ll. l-l a 101.32 kPa.

Solución: De la tabla 11.1-1, a 95 °C para el benceno, P_A = 155.7 kPa y P_B = 63.3 kPa. Sustituyendo en la ecuación (ll. l-3) y resolviendo,

$$155.7 (x_A) + 63.3 (1 - x_A) = 101.32 \text{ kPa (760 mm Hg)}$$

TABLA *11.1-l. Datos de presión de vapor y de fracción mol de equilibrio para el sistema benceno-tolueno*

Presión de vapor							
Temperatura		*Benceno*		*Tolueno*		*Fracción mol de benceno a 101.325 kPa*	
K	*°C*	*kPa*	*mm Hg*	*kPa*	*mm Hg*	x_A	y_A
353.3	80.1	101.32	760			1.000	1.000
358.2	85	116.9	877	46.0	345	0.780	0.900
363.2	90	135.5	1016	54.0	405	0.581	0.777
368.2	95	155.7	1168	63.3	475	0.411	0.632
373.2	100	179.2	1344	74.3	557	0.258	0.456
378.2	105	204.2	1532	86.0	645	0.130	0.261
383.8	110.6	240.0	1800	101.32	760	0	0

Por consiguiente, x_A es = 0.411 y $x_B = 1 - x_A$ = l-0.41 1 = 0.589. Sustituyendo enlaecuación (11.1-4),

$$y_A = \frac{P_A x_A}{P} = \frac{155.7(0.411)}{101.32} = 0.632$$

En la figura 11. l-2 se muestra un método muy común para graficar los datos de equilibrio, donde se traza una curva de y_A en función de x_A para el sistema benceno-tolueno. Se incluye la línea de 45° para mostrar que y_A es más rico en el componente A que x_A.

El diagrama de puntos de ebullición de la figura 11. l-l es típico de un sistema ideal que sigue la ley de Raoult. Los sistemas no ideales difieren considerablemente. En la figura ll. l-3a se muestra el diagrama de puntos de ebullición para un azeótropo de ebullición máxima. La temperatura máxima $T_{máx}$ corresponde a una concentración x_{Az} y en este punto, $x_{Az} = y_{Az}$. La gráfica de y_A en función de x_A mostraría que la curva cruza la línea de 45° en este punto. El sistema acetona-cloroformo es un ejemplo típico. En la figura ll. 1-3b se muestra un azeótropo de ebullición mínima $y_{Az} = x_{Az}$ a $T_{mín}$. Un sistema típico de este caso es el de etanol-agua.

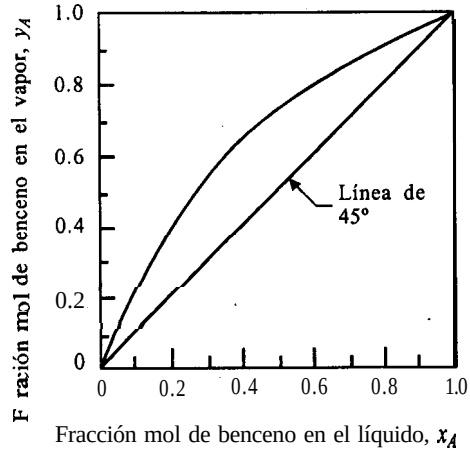


FIGURA 11 .l-2. *Diagrama de equilibrio para el sistema benceno (A)-tolueno (B) a 101.32 kPa (l atm).*

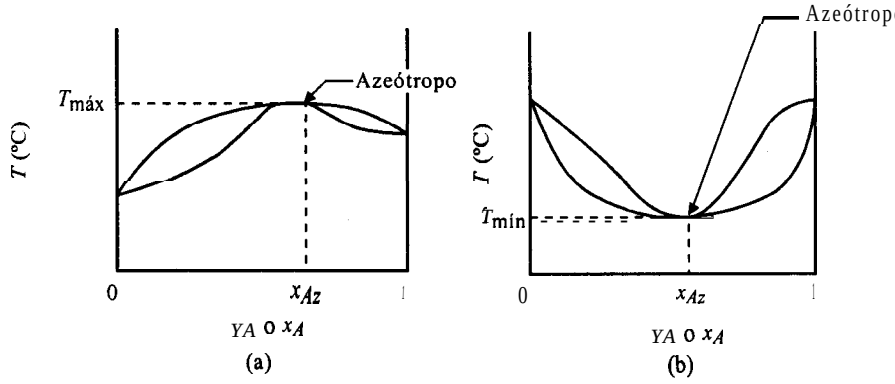


FIGURA 11.1-3. *Diagramas de equilibrio del punto de ebullición: (a) azeótropo de ebullición máxima, (b) azeótropo de ebullición mínima.*

II.2 CONTACTO DE EQUILIBRIO DE UNA SOLA ETAPA PARA UN SISTEMA VAPOR-LÍQUIDO

Cuando se considera un sistema vapor-líquido, si V_2 es la corriente de vapor y L_0 la corriente de líquido, y ambas se ponen en contacto en una sola etapa de equilibrio, como se ve en la figura 10.3-1, es necesario usar el diagrama de puntos de ebullición o diagrama de equilibrio x_y, pues no se dispone de una relación de equilibrio similar a la ley de Henry. Puesto que únicamente se consideran dos componentes A y B, sólo intervienen las ecuaciones (10.3-l) y (10.3-2) en los balances de materias. Si los efectos de calor sensible son pequeños y los calores latentes de ambos compuestos son iguales, entonces, cuando se condensa 1 mol de A, se debe vaporizar 1 mol de *B*. Por tanto, el total de moles de vapor V_2 que entran es igual al total de moles V_1 que salen. Además, los moles de $L_0 = L_1$. A este caso se le llama *derrame molal constante.* Un ejemplo típico es el sistema benceno-tolueno.

EJEMPLO 11.2-1. Contacto de equilibrio para una mezcla vapor-líquido

Un vapor a su punto de rocío y 101.32 kPa, que contiene una fracción mol de 0.40 de benceno (A) y 0.60 de tolueno *(B)* en un total de 100 kg mol, se pone en contacto con 110 kg mol de un líquido a su punto de ebullición que contiene una fracción mol de 0.30 de benceno y 0.70 de tolueno. Las dos corrientes entran en contacto en una sola etapa, y las corrientes de salida están en equilibrio entre sí. Suponga un derrame mola1 constante. Calcule las cantidades y las composiciones de las corrientes de salida.

Solución: El diagrama de flujo del proceso es igual al de la figura 10.3-l. Los valores dados son V_2 = 100 kg mol, y_{A2} = 0.40, L_0 = 110 kg mol, y x_{A0} = 0.30. Para un derrame mola1 constante, $V_2 = V_1$ y $L_0 = L_1$. Sustituyendo en la ecuación (10.3-2) para realizar un balance de materias con respecto al componente A,

$$L_0 x_{A0} + V_2 y_{A2} = L_1 x_{A1} + V_1 y_{A1} \qquad (10.3\text{-}2)$$

$$110(0.30) + 100(0.40) = 110 x_{A1} + 100\, y_{A1} \qquad (11.2\text{-}1)$$

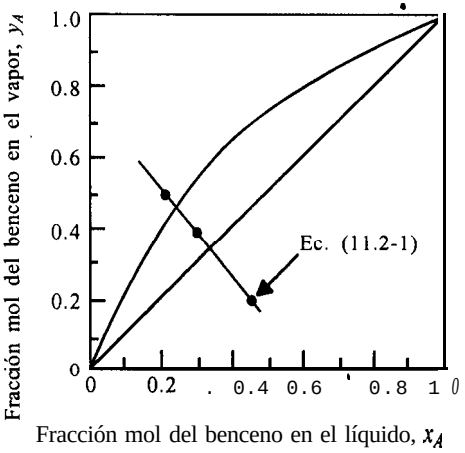


FIGURA 11.2-l. *Resolución del ejemplo 11.2-l.*

Para resolver la ecuación (ll .2-1), se debe emplear la relación de equilibrio entre y_{A1} y x_{A1} de la figura ll. l-l. El proceso se basa en aproximaciones sucesivas, puesto que no se dispone de una expresión analítica que relacione y_A con x_A.

Primero, se supone que $x_{A1} = 0.20$ y se sustituye en la ecuación(11.2-l) para obtener el valor de y_{A1}.

$$1\,10(0.30) + 100(0.40) = 1\,10(0.20) + 100\,y_{A1}$$

Se obtiene $y_{A1} = 0.5\,1$. En la figura ll .2-1 se muestran las relaciones de equilibrio para el sistema benceno-tolueno. Resulta evidente que $y_{A1} = 0.51$ y $x_{A1} = 0.20$ no se localizan en la curva. Se incluye ahora este punto en la gráfica. A continuación, se supone que $x_{A1} = 0.40$ y se encuentra $y_{A1} = 0.29$. Este punto se incluye también en la figura ll .2-1. Suponiendo que $x_{A1} = 0.30, y_{A1} = 0.40$. Se traza entonces una línea entre estos tres puntos que representa a la ecuación (11.2-l). En la intersección de esta línea con la curva de equilibrio, $y_{A1} = 0.455$ y $x_{A1} = 0.25$, lo cual concuerda con la ecuación (11.2-l).

ll.3 MÉTODOS SIMPLES DE DESTILACIÓN

ll .3A Introducción

La operación unitaria de destilación es un método que se usa para separar los componentes de una solución líquida, el cual depende de la distribución de estos componentes entre una fase de vapor y una fase líquida. Ambos componentes están presentes en las dos fases. La fase de vapor se origina de la fase líquida por vaporización en el punto de ebullición.

El requisito básico para separar los componentes por destilación consiste en que la composición del vapor sea diferente de la composición del líquido con el cual está en equilibrio en el punto de ebullición de este último. La destilación se basa en soluciones en las que todos los componentes son bastante volátiles, como soluciones amoniaco-agua o etanol-agua, en las que ambos componentes también están en fase de vapor. Sin embargo, al evaporar una solución de sal y agua, se vaporiza el agua pero la sal no. El proceso de absorción difiere de la destilación en cuanto a que uno de los componentes de la absorción es esencialmente insoluble en la fase líquida. Como ejemplo de absorción puede citarse el caso de la extracción de amoniaco del aire con agua, donde el aire es insoluble en la solución agua-amoniaco.

11.3B Volatilidad relativa de los sistemas vapor-líquido

En la figura ll. 1-2, y con respecto al diagrama de equilibrio para una mezcla binaria de A y B, cuanto más grande sea la distancia entre la línea de equilibrio y la línea de 45°, mayor será la diferencia entre la composición del vapor y_A y la composición de líquido x_A. Por consiguiente, la separación se lleva a cabo con mayor facilidad. Una medida numérica de esta facilidad de separación es la volatilidad relativa, α_{AB}. Esta expresión se define como la relación entre la concentración de A en el vapor y la concentración de A en el líquido, dividida entre la relación entre la concentración de B en el vapor y la concentración de B en el líquido,

$$\alpha_{AB} = \frac{\text{YA}/x_A}{y_B/x_B} = \frac{y_A/x_A}{(1-y_A)/(1-x_A)} \qquad \textbf{(11.3-1)}$$

donde α_{AB} es la volatilidad relativa de A con respecto a B en el sistema binario.

Si el sistema obedece la ley de Raoult, como sucede en el caso de benceno-tolueno,

$$Y_A = \frac{P_A x_A}{P} \qquad y_B = \frac{P_B x_B}{P} \qquad \textbf{(11.3-2)}$$

Sustituyendo la ecuación (11.3-2) en la (11.3-l) para un sistema ideal,

$$a_{AB} = \frac{P_A}{P_B} \qquad \textbf{(11.3-3)}$$

La ecuación (ll .3-1) se puede reordenar para obtener la siguiente expresión

$$y_A = \frac{\alpha x_A}{1+(\alpha-1)x_A} \qquad \textbf{(11.3-4)}$$

donde $\alpha = \alpha_{AB}$. Cuando el valor de a es superior a 110. la separación es factible. El valor de a cambia a medida que varía la concentración. Cuando los sistemas binarios siguen la ley de Raoult, la volatilidad relativa suele variar muy poco en un intervalo de concentraciones bastante amplio a presión total constante.

y	x
0	0
.19	.10
.37	.20
.50	.30
.62	.40
.71	.50
.78	.60
.85	.70
.90	.80
.96	.90
1	1

EJEMPLO 11.3-1. Volatilidad relativa de un sistema benceno-tolueno

Con los datos de la tabla ll. l-l calcule la volatilidad relativa del sistema benceno-tolueno a 85°C (358.2 K) y 105 °C (378.2 K).

Solución: A 85 °C, sustituyendo en la ecuación (ll .3-3) para un sistema que sigue la ley de Raoult,

$$\alpha = \frac{P_A}{P_B} = \frac{116.9}{46.0} = 2.54$$

De la misma manera, a 105 °C,

$$\alpha = \frac{204.2}{86.0} = 2.38$$

La variación de α es de alrededor de un 7%.

11.3C Destilación en equilibrio o instantánea (flash)

1. Introducción a los métodos de destilación. La destilación se puede llevar a cabo en la práctica por medio de cualquiera de dos métodos principales. El primer método consiste en la producción de un vapor por ebullición de la mezcla líquida que se va a separar en una sola etapa, para recuperar y condensar los vapores. En este método no se permite que el líquido regrese al destilador de una sola etapa y se ponga en contacto con los vapores que se desprenden. El segundo método implica el retorno de una porción del condensado al destilador. Los vapores se desprenden a través de una serie de etapas o platos, y parte del condensado fluye hacia abajo a través de la serie de etapas o platos a contracorriente con respecto a los vapores. Este segundo metodo se llama *destilaciónfraccionada, destilación con reflujo o rectificación.*

Existen tres tipos importantes de destilación que se verifican en una sola etapa o en un solo destilador y que no incluyen rectificación. El primero es la destilación en equilibrio o instantánea, el segundo es la destilación simple por lotes o diferencial, y el tercero es la destilación simple con arrastre de vapor.

2. Destilación de equilibrio o instantánea. En este proceso, que se verifica en una sola etapa, la mezcla líquida se vaporiza parcialmente. Se permite que el vapor establezca un equilibrio con el líquido, y entonces se separan las fases de vapor y de líquido. Esto se puede hacer por lotes o en régimen continuo.

En la figura ll .3-1 se muestra la vaporización parcial de la mezcla binaria de los componentes *A* y *B* que fluyen en un calentador a velocidad *F* mol/h. La mezcla alcanza su equilibrio y entonces se separa. La composicion de *F* es x_F fracción mol de *A*. El balance total de material con respecto al componente *A* es el siguiente:

$$Fx_F = Vy + Lx \tag{11.3-5}$$

Puesto que $L = F - V$, la ecuación (11.3-5) se transforma en

$$Fx_F = Vy + (F - V)x \tag{11.3-6}$$

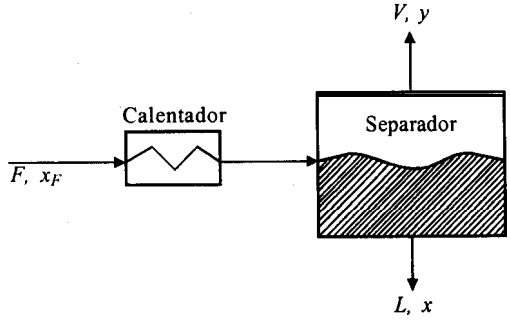


FIGURA 11.3-1. *Destilación en equilibrio o instantánea (flash).*

Por lo general, los valores de moles por hora de alimentación *F*, moles por hora de vapor *V* y moles por hora de *L* se conocen o pueden establecer. Por consiguiente, en la ecuación (11.3-6) hay dos incógnitas: *x* y y. La otra relación que se requiere para resolver la ecuación (11.3-6) es la línea de equilibrio. Un método conveniente consiste en graficar la ecuación (11.3-6) en el diagrama de equilibrio xy. La intersección de la ecuación y la línea de equilibrio da la solución deseada. Este proceso es similar al del ejemplo 11.2-l que se muestra en la figura 11.2-1.

11.3D Destilación simple por lotes o diferencial

En este tipo de destilación, primero se introduce líquido en un recipiente de calentamiento. La carga líquida se hierve lentamente y los vapores se extraen con la misma rapidez con que se forman, enviándolos a un condensador donde se recolecta el vapor condensado (destilado). La primera porción de vapor condensado es más rica en el componente más volátil *A*. A medida que se procede con la vaporización, el producto vaporizado es más pobre en *A*.

En la figura 11.3-2 se muestra un destilador simple. La operación se inicia introduciendo en el destilador una carga de L_1 moles de componentes *A* y *B* con una composicion x_1 fracción mol de *A*. En un momento dado, habrá *L* moles de líquido remanentes en el destilador con una composición x y la composición del vapor que se desprende en equilibrio es y. Se ha vaporizado entonces una can-tidad diferencial *dL*.

La composición del recipiente varía con el tiempo. Para determinar la ecuación de este proceso, se supone que se vaporiza una cantidad pequeña *dL*. La composición del líquido varía de x a $x - dx$ y la cantidad de líquido de *L* a $L - dL$. Se hace un balance de materiales con respecto a *A*, donde la cantidad original = cantidad remanente en el líquido + cantidad de vapor.

$$xL = (x - dx)(L - dL) + y\,dL \tag{11.3-7}$$

Efectuando la multiplicación del lado derecho,

$$xL = xL - x\,dL - L\,dx + dx\,dL + y\,dL \tag{11.3-8}$$

Despreciando el término dx *dL* y reordenando,

$$\frac{dL}{L} = \frac{dx}{y - x} \tag{11.3-9}$$

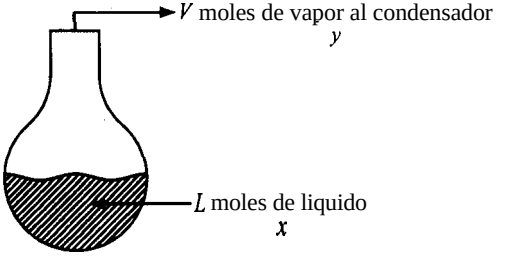


FIGURA 11.3-2. *Destilación simple por lotes o diferencial.*

Integrando,

$$\int_{L_2}^{L_1} \frac{dL}{L} = \ln \frac{L_1}{L_2} = \int_{x_2}^{x_1} \frac{dx}{y - x} \qquad (11.3\text{-}10)$$

donde L_1 son los moles originales cargados, L_2 son los moles remanentes en el destilador, x_1 es la composición original y x_2 es la composición final del líquido.

La integración de la ecuación (11.3-10) se puede llevar a cabo por medios gráficos, graficando $1/(y - x)$ en función de x y determinando el área bajo la curva entre x_1 y x_2. La curva de equilibrio proporciona la relacion entre y y x. A la ecuación (1 í.3-10) se le llama *ecuación de Rayleigh*. La composición promedio del total de material destilado, y_{prom}, se obtiene por medio de un balance de materias:

$$L_1 x_1 = L_2 x_2 + (L_1 - L_2) y_{prom} \qquad (11.3\text{-}11)$$

EJEMPLO 11.3-2. Destilación diferencial simple

Una mezcla de 100 moles que contiene 50% mol de n-pentano y 50% mol de n-heptano se destila en condiciones diferenciales a 103.3 kPa hasta obtener 40 moles. ¿Cuál es la composición promedio del total del vapor destilado y la del líquido remanente? Los datos de equilibrio son los siguientes, donde x y y son fracciones mol de n-pentano:

X	Y	X	Y	x	Y
1.000	1.000	0.398	0.836	0.059	0.271
0.867	0.984	0.254	0.701	0	0
0.594	0.925	0.145	0.521		

Solución: Losvalores que se usarán en laecuación (11.3-10) son L_1 = 100 mol, x_1 = 0.50, L_2 = 60 mol, V (moles destiladas) = 40 mol. Sustituyendo en la ecuación (ll .3-10),

$$\ln \frac{dx0}{60} = 0{,}510 = \int_{x_2}^{x_1=0.5} \frac{}{\text{Y - X}} \qquad (11.3\text{-}12)$$

La incógnita es x_2, esto es, lacomposicion del líquido L_2 al final de la destilación diferencial. Para llevar a cabo la integración gráfica se traza la curva de $1/(y - x)$ en función de x en la figura 11.3-3 como sigue. Para x = 0.594, el valor de equilibrio de y es 0.925. Entonces, $1/(y - x) = 1/(0.925 - 0.594) = 3.02$. Se incluye en la gráfica el punto $1/(y - x) = 3.02$ y x = 0.594, y otros puntos más, de idéntica manera.

Para determinar el valor de x_2, se obtiene el área de la ecuación (ll .3- 12) bajo la curva desde $x_1 = 0.5$ hasta un valor de x_2 que dé un área de 0.510. Por consiguiente, $x_2 = 0.277$. Sustituyendo en la ecuación (11.3-l 1) y despejando la composición promedio de los 40 moles destilados,

$$100(0.50) = 60(0.277) + 40(y_{prom})$$

$$y_{prom} = 0.835$$

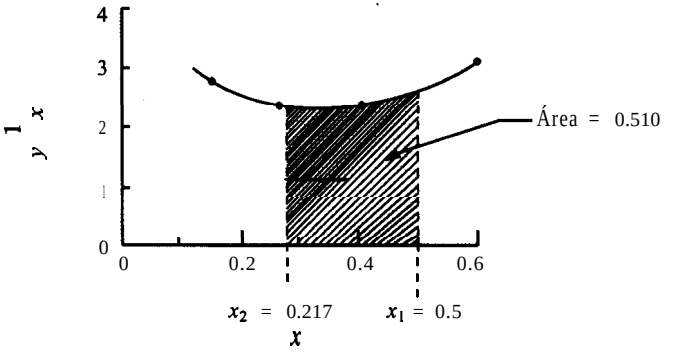


FIGURA *11.3-3. Integración gráfica del ejemplo 11.3-Z.*

11.3E Destilación simple con arrastre de vapor

Los líquidos con alto punto de ebullición no se pueden purificar por destilación a presión atmosférica, puesto que los componentes de la mezcla líquida podrían descomponerse a las temperaturas elevadas que se requieren. Con frecuencia, las sustancias de alto punto de ebullición son casi insolubles en agua; entonces, se logra una separación a temperatura más baja por medio de una *destilación simple con arrastre de vapor,* método que se usa con bastante frecuencia para separar un componente de alto punto de ebullición de cantidades pequeñas de impurezas no volátiles.

Si se hierve una capa de agua líquida (A) y un componente inmiscible de alto punto de ebullición (B) como el hidrocarburo, a 101.3 kPa abs de presión, entonces, de acuerdo con la regla de las fases, la ecuación (10.2-l) para tres fases y dos componentes es,

$$F = 2 - 3 + 2 = 1 \text{ grado de libertad}$$

Por consiguiente, si la presión total es fija, el sistema también lo es. Puesto que hay dos fases líquidas, cada una de ellas desarrollará su propia presión de vapor a la temperatura prevaleciente y no puede ser influida por la presencia de la otra. Cuando la suma de las dos presiones de vapor individuales es igual a la presión total, la mezcla hierve y

$$P_A + P_B = P \qquad \textbf{(11.3-13)}$$

donde P_A es la presión de vapor de agua pura A y P_B es la presión de vapor de B puro. Entonces, la composición del vapor es

$$y_A = \frac{P_A}{P} \qquad y_B = \frac{P_B}{P} \qquad \textbf{(11.3-14)}$$

Mientras estén presentes las dos fases líquidas, la mezcla hervirá a la misma temperatura, produciendo un vapor de composición constante y_A. La temperatura se determina mediante las curvas de presión de vapor de A y B puros.

En la destilación con arrastre de vapor, mientras haya agua líquida presente, el componente B de alto punto de ebullición se vaporizará a temperatura muy inferior a su punto de ebullición normal sin usar vacío. Los vapores de agua *(A)* y el componente *(B)* de alto punto de ebullición se suelen recolectar en un condensador y las dos fases líquidas inmiscibles resultantes se separan. Este método tiene la desventaja de requerir de grandes cantidades de calor para evaporar simultáneamente el agua y el compuesto de alto punto de ebullición.

La relación entre moles de B destilado y moles de A destilado es:

$$\frac{n_B}{n_A} = \frac{P_B}{P_A} \tag{11.3-15}$$

La destilación con arrastre de vapor se emplea algunas veces en la industria alimenticia para eliminar contaminantes y sabores de grasas y aceites comestibles. En muchos casos se emplea vacío en vez de destilación por arrastre de vapor para purificar materiales de alto punto de ebullición. La presión total es bastante baja, por lo que la presión de vapor del sistema iguala a la presión total a temperaturas relativamente bajas.

Van Winkle (V1) dedujo ecuaciones para la destilación por arrastre de vapor en la cual hay una considerable cantidad de componente no volátil junto con el componente de alto punto de ebullición. Esto implica un sistema de tres componentes. También considera otros casos para la destilación por arrastre de vapor binaria en lotes, de multicomponentes, en lotes y continua.

ll.4 DESTILACIÓN CON REFLUJO Y EL MÉTODO DE McCABE-THIELE

11.4A Introducción a la destilación con reflujo

La rectificación (fraccionada) o destilación por etapas con reflujo se puede considerar desde un punto de vista simplificado como un proceso en el cual se lleva a cabo una serie de etapas de vaporización instantánea, de manera que los productos gaseosos y líquidos de cada etapa fluyen a contracorriente. El líquido de una etapa se conduce o fluye a la etapa inferior y el vapor de una etapa fluye hacia arriba, a la etapa superior. Por consiguiente, en cada etapa entra una corriente de vapor V y una corriente líquida L, que se mezclan y alcanzan su equilibrio, y de dicha etapa sale una corriente de vapor y una corriente de líquido en equilibrio. El diagrama de flujo de este sistema se muestra en la figura 10.3-l para una etapa simple y en el ejemplo ll .2-1 para la mezcla benceno-tolueno.

Para el contacto a contracorriente por etapas múltiples de la figura 10.3-2, se obtuvo la ecuación de balance de materias o ecuación de la línea de operación (10.3-13), que relaciona las concentraciones de las corrientes de vapor y de líquido que se ponen en contacto en cada etapa. En una columna de destilación, las etapas (a las que se llama *casquetes de burbujeo* o platos) de una torre de destilación están distribuidas verticalmente, como se muestra de manera esquemática en la figura ll .4-1.

La alimentación entra a la columna de la figura ll .4-1 aproximadamente en la zona media de la misma. Si la alimentación es líquida, fluirá hacia abajo, aun casquete de burbujeo o etapa. El vapor entra al plato y burbujea a través del líquido a medida que éste fluye hacia abajo, El vapor y el líquido que salen del plato están esencialmente en equilibrio. El vapor continúa hacia arriba pasando a la siguiente etapa o plato, donde nuevamente se pone en contacto con el líquido que fluye hacia abajo. En este caso, la concentración del componente mas volátil (el componente A de punto de ebullición más bajo) va aumentando en el vapor de una etapa a la superior siguiente y disminuye el líquido de una etapa a la inferior siguiente. El vapor final que sale por la parte de arriba se envía a un condensador y se extrae una porción del producto líquido (destilado), que contiene una alta concentración de A. El líquido remanente en el condensador regresa (refluja) al plato superior.

El líquido que sale por el plato inferior entra a un hervidor, donde se vaporiza parcialmente, y el líquido remanente, que es pobre en A o rico en B, se extrae como producto líquido. El vapor del hervidor regresa a la etapa o plato inferior. En la torre de la figura ll .4-1 sólo se muestran tres platos, pero en

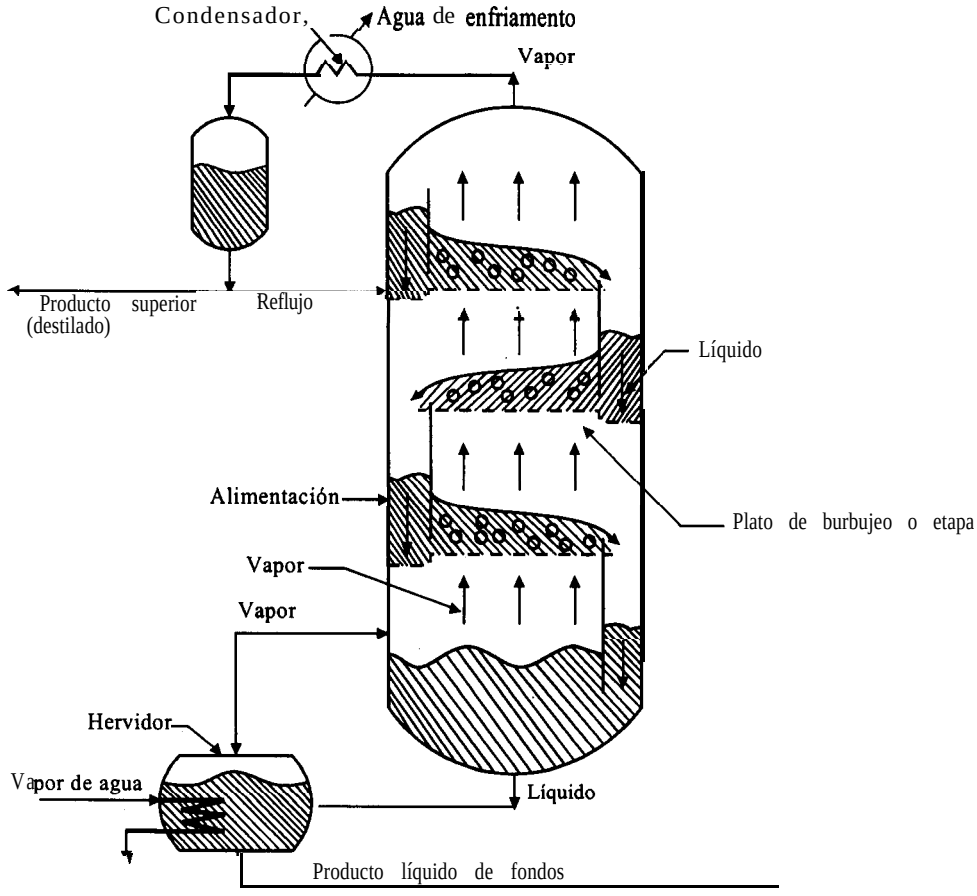


FIGURA 11.4-1. *Flujo del proceso para una torre fraccionadora que contiene artesas o platos con casquete de burbujeo.*

muchos casos, el número de platos es mayor. En el plato de burbujeo, el vapor penetra a través de una abertura y burbujea en el líquido para producir un contacto íntimo entre el líquido y el vapor en el plato. En el plato teórico, el vapor y el líquido que salen del mismo están en equilibrio. El hervidor se puede considerar como una etapa o plato teórico.

11.4B Método de McCabe-Thiele para el cálculo del número de etapas teóricas

1. Introducción y supuestos. McCabe y Thiele han desarrollado un método matemático gráfico para determinar el número de platos o etapas teóricas necesarios para la separación de una mezcla binaria de *A* y *B*. Este método usa balances de materia con respecto a ciertas partes de la torre, que producen líneas de operación similares a las de la ecuación (10.3-13), y la curva de equilibrio *xy* para el sistema.

El supuesto principal del método de McCabe-Thiele consiste en que debe haber un derrame equimolar a través de la torre, entre la entrada de alimentación y el plato superior y la entrada de alimentación y el plato inferior. Esto se ve en la figura 11.4-2, donde las corrientes de líquido y vapor entran a un plato, establecen su equilibrio y salen del mismo. El balance total de material proporciona la expresión

$$V_{n+1} + L_{n-1} = V_n + L_n \tag{11.4-1}$$

Un balance de componentes con respecto a A da

$$V_{n+1}\, y_{n+1} + L_{n-1}x_{n-1} = V_n y_n + L_n x_n \tag{11.4-2}$$

donde V_{n+}, son mol/h de vapor del plato $n + 1$, L_n son mol/h de líquido del plato n, y_{n+1} es la fracción mol de A en V_{n+1}, y así sucesivamente. Las composiciones y_n y x_n están en equilibrio y la temperatura del plato n es T_n. Si se toma T_n como referencia se puede demostrar por medio de un balance de calor que las diferencias de calor sensible en las cuatro corrientes son bastante pequeñas cuando los calores de disolución son despreciables. Por consiguiente, sólo son importantes los calores latentes en las corrientes V_{n+}, y V_n. Puesto que los calores molares latentes para compuestos químicamente similares son casi iguales, $V_{n+1} = V_n$ y $L_n = L_{n-}$, . Por tanto, la torre tiene un derrame mola1 constante.

2. Ecuación para la sección de enriquecimiento. En la figura ll .4-3 se muestra una columna de destilación continua con alimentación que se introduce a la misma en un punto intermedio, un producto destilado que sale por la parte superior y un producto líquido que se extrae por la parte inferior. La parte superior de la torre por encima de la entrada de alimentación recibe el nombre de *sección de enriquecimiento,* debido a que la alimentación de entrada de mezcla binaria de componentes A y B se enriquece en esta sección, por lo que el destilado es más rico en A que en la alimentación. La torre opera en estado estacionario.

Un balance general de materia con respecto a la totalidad de la columna en la figura ll .4-3 establece que la alimentación de entrada de F mol/h debe ser igual al destilado D en mol/h más los residuos W en mol/h.

$$F = D + W \tag{11.4-3}$$

Un balance total de materia con respecto al componente A nos da,

$$Fx_F = Dx_D + Wx_W \tag{11.4-4}$$

En la figura 11.4-4a se muestra esquemáticamente la sección de la torre de destilación que está por encima de la alimentación, esto es, la sección de enriquecimiento. El vapor que abandona el plato superior con composición y_1 pasa al condensador, donde el líquido condensado que se obtiene está a su punto de ebullición. La corriente de reflujo L mol/h y el destilado D mol/h tienen la misma composición, por lo que $y_1 = x_D$. Puesto que se ha supuesto un derrame equimolal, $L_1 = L_2 = L_n$ y $V_1 = V_2 = V_n = V_{n+1}$.

Efectuando un balance total de materia con respecto a la sección de líneas punteadas en la figura ll .4-4a,

$$V_{n+1} = L_n + D \tag{11.4-S}$$

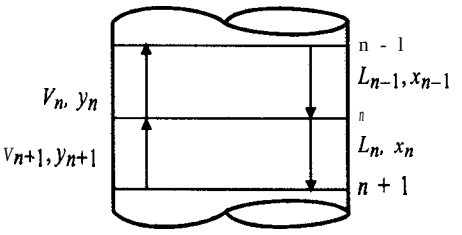


FIGURA 11.4-2. *Flujos de vapor y liquido que entran y salen de un plato*

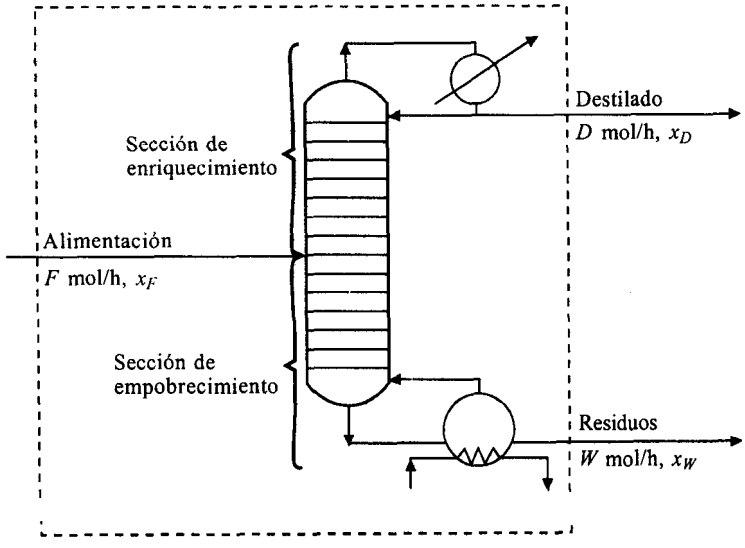


FIGURA 11.4-3. *Columna de destilación donde se muestran las secciones de balance de* materia para el *método de* ***McCabe-Thiele.***

Al llevar a cabo un balance con respecto al componente A,

$$V_{n+1}y_{n+1} = L_n x_n + Dx_D \tag{11.4-6}$$

Al despejar y_{n+1}, la línea de operación de la sección de enriquecimiento es

$$y_{n+1} = \frac{L_n}{V_{n+1}} x_n + \frac{Dx_D}{V_{n+1}} \tag{11.4-7}$$

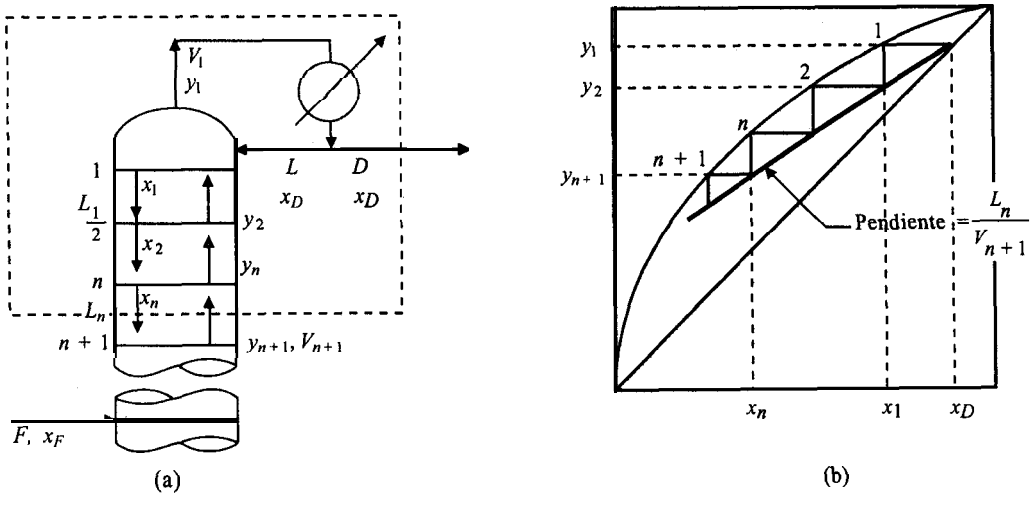


FIGURA *11.44. Balance de materia y linea de operación para la sección de enriquecimiento: (a) esquema de* la **torre,** *(b) lineas de operación y de equilibrio.*

Puesto que $V_{n+,} = L_n + D$, $L_n/V_{n+,} = R/(R+1)$ y la ecuación (ll .4-7) se transforma en

$$y_{n+1} = \frac{R}{R+1} x_n + \frac{x_D}{R+1} \qquad \textbf{(11.4-8)}$$

donde $R = L_n/D$ = razón de reflujo = constante. La ecuación (ll .4-7) resulta en una recta cuando se grafica la composición del vapor en función de la composición del líquido. Esta expresión, que se grafica en la figura 11.4-4b, relaciona las composiciones de dos corrientes en contacto. La pendiente es $L_n/V_{n+,}$, o $R(R+1)$, como expresa la ecuación (ll .4-8). La intersección con la línea $y = x$ (línea diagonal de 45") se produce en el punto $x = x_D$. La intersección de la línea de operación en $x = 0$ es $y = x_D/(R+1)$.

Las etapas teóricas se determinan empezando en x_D y escalonando el primer plato hasta x_1. Entonces y_2 es la composición del vapor que pasa por el líquido x_1. Se procede así de manera similar con el resto de los platos teóricos que se escalonan hacia abajo de la torre en la sección de enriquecimiento hasta llegar al plato de alimentación.

3. Ecuaciones para sección de empobrecimiento. Al llevar a cabo un balance total de materiales sobre la sección de líneas punteadas de la figura ll .4-5a para la zona de empobrecimiento de la torre por debajo de la entrada de alimentación,

$$V_{m+1} = L_m - W \qquad (11.4\text{-}9)$$

Efectuando un balance con respecto al componente A,

$$V_{m+1} y_{m+1} = L_m x_m - W x_W \qquad (11.4\text{-}10)$$

Al despejar y_{m+1}, la línea de operación de la sección de empobrecimiento es

$$y_{m+1} = \frac{L_m}{V_{m+1}} x_m - \frac{W x_W}{V_{m+1}} \qquad (11.4\text{-}11)$$

Una vez más, puesto que se supone un flujo equimolal, $L_m = L_N$ = constante y $V_{m+,} = V_N$ = constante. La ecuación (ll .4-11) es una recta cuando se grafica como y en función de x en la figura ll .4-5b, con pendiente L_m/V_{m+1}. La intersección con la línea $y = x$ es el punto $x = x_W$. La intersección en $x = 0$ es $y = -Wx_W/V_{m+1}$.

Una vez más, las etapas teóricas para la sección de empobrecimiento se determinan empezando en x_W, pasando a y_W, y después a través de la línea de operación, etcétera.

4. Efecto de las condiciones de alimentación. Las condiciones de la corriente de alimentación F que entra a la torre determinan la relación entre el vapor V_m en la sección de empobrecimiento y V_n en la sección de enriquecimiento y entre L_m y L_n. Si la alimentación es parte en líquido y parte en vapor, éste se añade a V_m para producir V_n.

Por conveniencia del cálculo, las condiciones de alimentación se presentan con la cantidad q, que se define como

$$q = \frac{\text{calor necesario para vaporizar 1 mol de alimentación en las condiciones de entrada}}{\text{calor latente molar de vaporización de la alimentación}} \qquad (11.4\text{-}12)$$

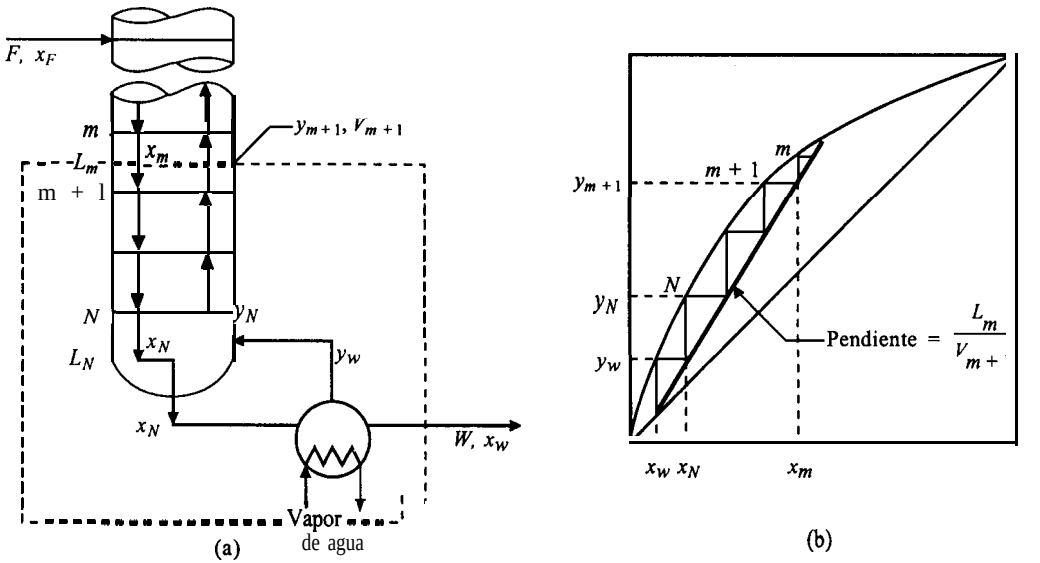


FIGURA 11.4-5. *Balance de materia y linea de operación para la sección de empobrecimiento: (a) esquema de la torre, (b) líneas de operación y equilibrio.*

Si la alimentación entra en su punto de ebullición, el numerador de la ecuación (ll .4-12) es igual al denominador y q = 1 .O. La ecuación (ll .4-12) puede escribirse en términos de entalpías.

$$q = \frac{H_V - H_F}{H_V - H_L} \tag{11.4-13}$$

donde H_V es la entalpía de la alimentación al punto de rocío, H_L es la entalpía de la alimentación al punto de ebullición (punto de burbuja), y H_F es la entalpía de la alimentación en condiciones de entrada. Si la alimentación entra como vapor en su punto de rocío, $q = 0$. Para alimentación líquida en frío $q > 1.0$, para vapor sobrecalentado $q < 0$, y cuando la alimentación es en parte líquida y en parte vapor, q es la fracción de alimentación que es líquida.

También podemos considerar a q como el número de moles de líquido saturado producido en el plato de alimentación por cada mol de alimentación que penetra a la torre. El diagrama de la figura ll .4-6 muestra la relación entre flujos por arriba y por abajo de la entrada de alimentación. Con base en la definición de q, se pueden establecer las siguientes ecuaciones:

$$L_m = L_n + qF \tag{11.4-14}$$

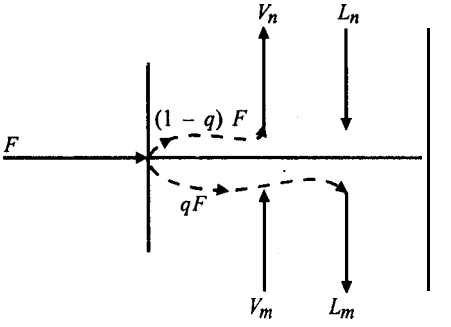


FIGURA 11.4-6. *Relación entre los flujos por encima y por debajo de la entrada de alimentación.*

$$V_n = V_m + (1 - q)F \tag{11.4-15}$$

El punto de intersección de las ecuaciones de líneas de operación de enriquecimiento y de empobrecimiento en una gráfica xy se obtiene como sigue: Se escriben las ecuaciones (11.4-6) y (11.4-10) sin los subíndices de los platos:

$$V_n y = L_n x + Dx_D \tag{11.4-16}$$

$$V_m y = L_m x - Wx_W \tag{11.4-17}$$

donde los valores de y y x dan el punto de intersección de las dos líneas de operación. Al restar la ecuación (11.4-16) de la (11.4-17),

$$(V_m - V_n)y = (L, - L_n)x - (Dx_D + Wx_W) \tag{11.4-18}$$

Al sustituir las ecuaciones (11.4-4), (11.4-14) y (ll .4-15) en la ecuación (ll .4-18) y reordenar,

$$y = \frac{q}{\bar{9} - \frac{1}{l}} x - \frac{x_F}{q - 1} \tag{11.4-19}$$

Esta igualdad es expresión de la líneaq y establece la localización de la intersección de ambas líneas de operación. Estableciendo que y = x en la ecuación (ll .4-19), la intersección de la ecuación de la línea q con la línea de 45° es y = $x = x_F$, donde x_F es la composición total de la alimentación.

En la figura ll .4-7 se grafica la línea q para las diversas condiciones de alimentación señaladas en la propia figura. La pendiente de la línea q es $q/(q - 1)$. Por ejemplo, como se muestra en la figura para el líquido por debajo de su punto de ebullición, $q > 1$, y la pendiente es > 1. 0. Se grafican las líneas de enriquecimiento y de operación para el caso de una alimentación de parte líquido y parte vapor y las dos líneas se intersecan en la línea q. Un método conveniente para localizar la línea de operación de empobrecimiento consiste en graficar la línea de operación de enriquecimiento y la línea q. Después, se traza la línea de empobrecimiento entre la intersección de la línea q y la línea de operación de enriquecimiento y el punto y = $x = x_W$.

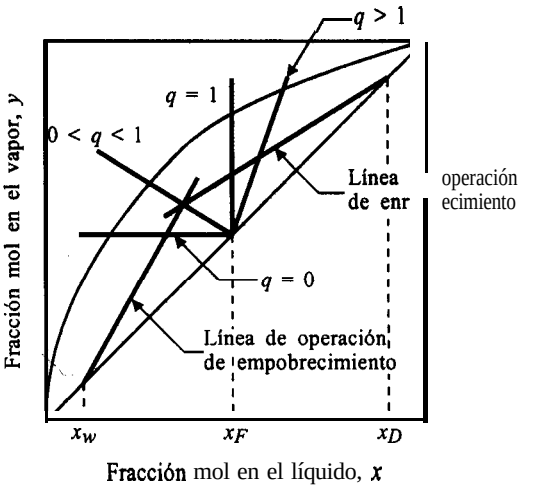


FIGURA ll .4-7. *Localización de la linea q para diferentes condiciones de alimentación: liquido por debajo de su punto de ebullición ($q > 1$). liquido a su punto de ebullición ($q = 1$). liquido + vapor ($0 < q < 1$), vapor saturado ($q = 0$).*

5. Localización del plato de alimentación en una torre y número de platos. Para determinar el número de platos teóricos necesarios en una torre se trazan las líneas de empobrecimiento y de operación de manera que se intersequen en la línea q, como se indica en la figura 11.4-8. Después, se procede a escalonar los platos hacia abajo empezando en la parte superior, en x_D. Para los platos 2 y 3, los escalones pueden ir hacia la línea de operación de enriquecimiento (véase la Figura ll .4-8a). En el punto 4, el escalón pasa la línea de empobrecimiento. Se necesitaría entonces un total de 4.6 etapas teóricas. (La alimentación entraría en el plato 4.)

Si se aplica el método correcto, el desplazamiento hacia la línea de empobrecimiento sucederá en la etapa 2, como lo muestra en la figura ll .4-8b. Si la alimentación penetra en el plato 2 se requieren solamente 3.7 etapas. Para mantener el número de platos al mínimo, el cambio de la línea de operación de enriquecimiento a la línea de operación de empobrecimiento se debe hacer en la primera oportunidad que exista después de pasar la intersección de la línea de operación.

En la figura ll .4-8b, la alimentación es en parte líquido y en parte vapor, puesto que $0 < q < 1$. En consecuencia, al introducir la alimentación en el plato 2, la porción de vapor de la alimentación se separa y se adiciona debajo del plato 2 y el líquido se adiciona al líquido por encima del plato 2, que penetra al mismo. Si la alimentación es totalmente líquida, se debe adicionar al líquido que fluye al plato 2 del plato por encima de éste. Si la alimentación es toda vapor, se debe adicionar debajo del plato 2 para unirse al vapor que se eleva del plato inferior.

Puesto que un hervidor se considera como una etapa teórica cuando el vapor y_W está en equilibrio con x_W, como se muestra en la figura ll .4-5b, el número de platos teóricos en una torre es igual al número de etapas teóricas menos una.

EJEMPLO 11.4-1. Rectificación de una mezcla de benceno-tolueno

Se desea destilar una mezcla líquida de benceno-tolueno en una torre fraccionadora a 101.3 kPa de presión. La alimentación de 100 kg mol/h es líquida y contiene 45 % mol de benceno y 55% mol de tolueno, y entra a 327.6 K (130 "F). También se desea obtener un destilado que contenga 95% mol de benceno y 5% mol de tolueno y un residuo que contenga 10% mol de benceno y 90% mol de tolueno. La relación de reflujo es 4:1. La capacidad calorífica promedio de la alimentación es 159 kJ/kg mol · K (38 btu lb/mol · "F) y el calor latente promedio es 32099 kJ/kg mol (13800 btu lb/mol). En la tabla 11. 1 - 1 y en la figu-

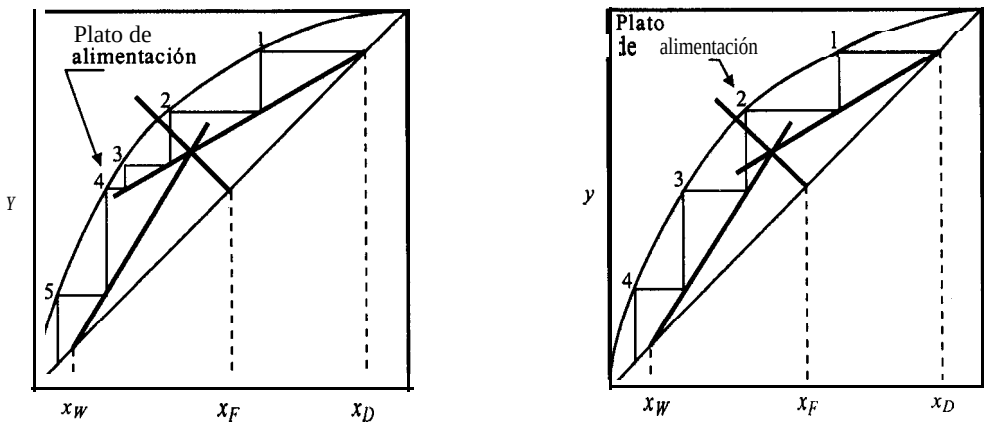


FIGURA 11.4-8. *Método para escalonar el* ***número*** *de platos teóricos y localización del plato de alimentación: (a) localización inapropiada de la alimentación en el plato 4. (b) localización apropiada de la alimentación en el plato 2 para obtener el número minimo de etapas.*

ra ll. 1- 1 se incluyen datos de equilibrio para este sistema.Calcule los kg mol por hora de destilado, los kg mol por hora de residuo y el número de platos teóricos que se requieren.

Solución: Los datos proporcionados son F = 100 kg mol/h, x_F = 0.45, x_D = 0.95, x_W = 0.10 y $R = L_n/D$ = 4. Para el balance total de materias, sustituyendo en la ecuación (11.4-3),

$$F = D + W \tag{11.4-3}$$

$$100 = D + W$$

Al sustituir la ecuación (ll .4-4) y despejar D y W,

$$Fx_F = Dx_D + Wx_W \tag{11.4-4}$$

$$100(0.45) = D(0.95) + (100 - D)(0.10)$$

$$D = 41.2 \text{ kg mol/h} \qquad W = 58.8 \text{ kg mol/h}$$

Para la línea de operación de enriquecimiento, usando la ecuación (ll .4-8),

$$y_{n+1} = \frac{R}{R+1}x_n + \frac{x_D}{R+1} = \frac{4}{4+1}x_n + \frac{0.95}{4+1} = 0.800x_n + 0.190$$

En la figura ll .4-9 se grafican los datos de equilibrio de la tabla ll. 1- 1 y la línea de operación de enriquecimiento.

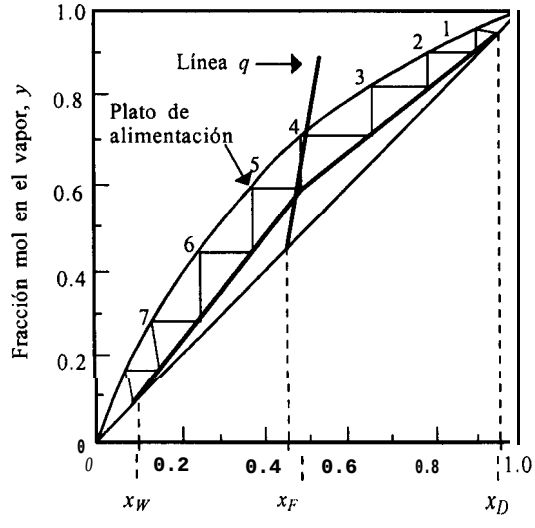


FIGURA ll .4-9. *Diagrama de McCabe-Thiele para la destilación de benceno-tolueno del ejemplo 11.4-I.*

A continuación se calcula el valor de q. Con base ene1 diagrama de puntos de ebullición, figura 11.1-1, para x_F = 0.45, el punto de ebullición de la alimentación es 93.5 °C o 366.7 K (200.3 °F). De la ecuación (11.4-13),

$$q = \frac{H_V - H_F}{H_V - H_L} \tag{11.4-13}$$

El valor de $H_V - H_L$ = calor latente = 32099 kJ/kg mol. El numerador de la ecuación (11.4-13) es

$$H_V - H_F = (H_V - H_L) + (H_L - H_F) \tag{11.4-20}$$

Ademas

$$H_L - H_F = c_{pL}(T_B - T_F) \tag{11.4-21}$$

donde la capacidad calorífica de la alimentación líquida c_{pL} = 159 kJ/kg mol · K, T_B = 366.7 K (punto de ebullición de la alimentación) y T_F = 327.6 K (temperatura de entrada de la alimentación). Sustituyendo las ecuaciones (ll .4-20) y (11.4-2 1) en la (ll .4-13),

$$q = \frac{(H_V - H_L) + c_{pL}(T_B - T_F)}{H_V - H_L} \tag{11.4-22}$$

Al sustituir los valores conocidos en la ecuación (ll .4-22),

$$q = \frac{32099 + 159(366.7 - 327.6)}{32099} = 1.195 \quad \text{(SI)}$$

$$q = \frac{13800 + 38(200.3 - 130)}{13800} = 1195 \quad \text{(Unidades del sistema inglés)}$$

Con base en la ecuación (ll .4-19), la pendiente de la línea q es

$$\frac{q}{\text{q-l}} = \frac{1.195}{1.195 - 1} = 6.12$$

Se grafica entonces la línea q en la figura ll .4-9, empezando en el punto y = x_F = 0.45 con pendiente de 6.12.

Se traza la línea de operación de empobrecimiento conectando el punto y = x = x_W = 0.10 con la intersección de la línea q y la línea de operación de enriquecimiento. Empezando en el punto y = x = x_D , se trazan las etapas teóricas como se muestra en la figura ll .4-9. El número de etapas teóricas es 7.6 o 7.6 menos un hervidor, lo cual da 6.6 platos teóricos. La alimentación se introduce en el plato 5 a partir de la parte superior.

11.4C Razón de reflujo total y mínimo según el método de McCabe-Thiele

1. Reflujo total. En la destilación de una mezcla binaria de *A* y *B*, por lo general se especifican las condiciones de alimentación, la composición del destilado y la de los residuos, y se tiene que

calcular el número de platos teóricos. Sin embargo, el número de platos teóricos necesarios depende de las líneas de operación. Para fijar éstas, se establecer la razón de reflujo $R = L_n/D$ de la parte superior de la columna.

Uno de los valores límite de la razón de reflujo es el del reflujo total, o $R = \infty$. Puesto que $R = L_n/D$, y, mediante la ecuación (11.4-5),

$$V_{n+1} = L_n + D \tag{11.4-5}$$

entonces L_n es muy grande, como también el flujo de vapor V_n. Esto significa que la pendiente $R/(R + 1)$ de la línea de operación de enriquecimiento se transforma en 1 .O y que las líneas de operación de ambas secciones de la columna coinciden con la línea diagonal de 45°, de acuerdo con el diagrama de la figura 11.4-10.

El número de platos teóricos que se requieren se obtiene, como antes, escalonando los platos del destilado a los residuos. Esto proporciona el número mínimo de platos que se pueden utilizar para obtener cierta separación. En la practica, esta condición se puede lograr si se regresa el vapor condensado V_1 de la parte superiora la torre en forma de reflujo, esto es, como reflujo total. Además, todo el líquido de los residuos se pasa al hervidor. Por consiguiente, todos los productos de destilado y de residuos se reducen a un flujo cero, al igual que la alimentación nueva a la torre.

Esta condición de reflujo total se puede interpretar como un requisito de tamaños infinitos de condensador, hervidor y diámetro de torre para determinada velocidad de alimentación.

Si la volatilidad relativa α de la mezcla binaria es más o menos constante, se puede emplear la siguiente expresión analítica de Fenske para calcular el número mínimo de etapas teóricas N_m cuando se usa un condensador total,

$$N_m = \frac{\log\left(\dfrac{x_D}{1-x_D}\dfrac{1-x_W}{x_W}\right)}{\log \alpha_{\text{prom}}} \tag{11.4-23}$$

Para variaciones pequeñas de α, $\alpha_{\text{prom}} = (\alpha_1\alpha_W)^{1/2}$ donde α_1 es la volatilidad relativa del vapor superior y α_W es la volatilidad relativa del líquido residual.

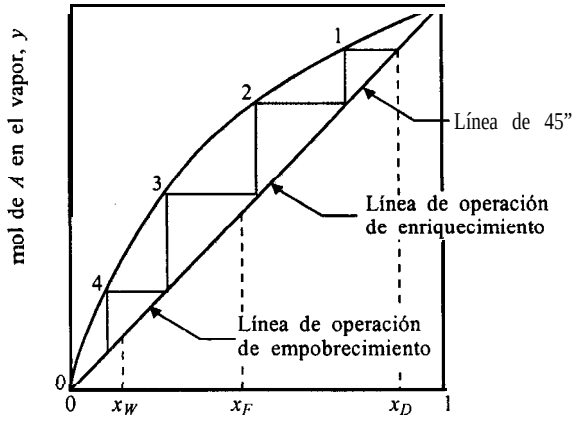


FIGURA 11.4-10. *Reflujo total y número minimo de platos con el método de McCabe-Thiele.*

2. Razón de reflujo mínimo. El reflujo mínimo se puede definir como la razón de reflujo, R_m, que requerirá un número infinito de platos para la separación deseada de x_D y x_W. Esto corresponde a un flujo mínimo de vapor en la torre, y por tanto, a tamaños mínimos del hervidor y del condensador. Este caso se muestra en la figura 11.4-11. Si se disminuye R, la pendiente de la línea de operación de enriquecimiento $R/(R + 1)$ disminuye, y la intersección de esta línea y la de empobrecimiento con la línea q se aleja más de la línea de 45°, acercándose a la línea de equilibrio. El resultado es un aumento del número de etapas requeridas para valores fijos de x_D y x_W. Cuando las dos líneas de operación tocan la línea de equilibrio, se produce un "punto comprimido" ("pinch") en y' y x', donde el número de escalones requeridos se vuelve infinito. La pendiente de la línea de operación de enriquecimiento se determina como sigue, con base en la figura 11.4-11, puesto que dicha línea pasa a través de los puntos x', y' y $x_D (y = x_D)$:

$$\frac{R_m}{R_m + 1} = \frac{x_D - y'}{x_D - x'} \tag{11.4-24}$$

En algunos casos, cuando la línea de equilibrio tiene una inflexión, como en la figura 11.4-12, la línea de operación a reflujo mínimo será tangente a la línea de equilibrio.

3. Razones de reflujo de operación y óptima. Para el caso de reflujo total, el número de platos es un mínimo, pero el diámetro de la torre es infinito, lo que corresponde a un costo infinito de la torre y también de vapor y de agua de enfriamiento. Éste es uno de los límites en la operación de la torre. Además, para un reflujo mínimo el número de platos es infinito, lo que nuevamente produce un costo infinito. Este es el segundo límite de operación de la torre.

La razón de reflujo de operación que se debe aplicar en realidad está situada entre esos dos límites. Para seleccionar el valor apropiado de R se requiere un balance económico completo de los costos fijos de la torre y de los de operación. La razón óptima de reflujo que debe intervenir para un costo total mínimo por año, está situada entre el mínimo R_m y el reflujo total. Se ha demostrado en muchos casos que para lograr esto, la relación de reflujo de operación debe estar situada entre $1.2R_m$ y $1.5R_m$.

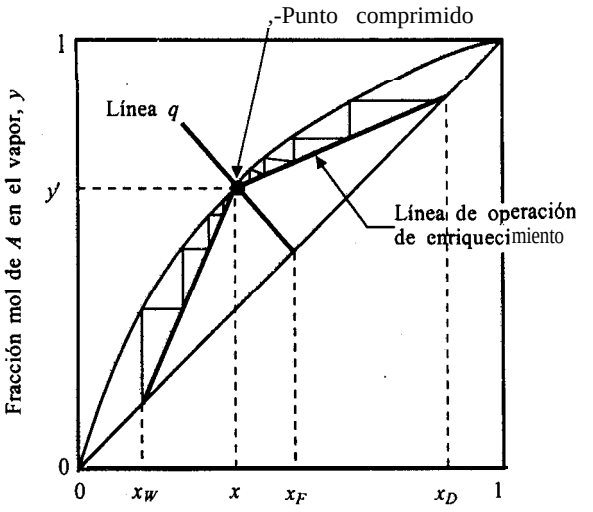


FIGURA 11.4-1 *1. Reflujo mínimo y número infinito de platos con el méfodo de McCabe-Thiele.*

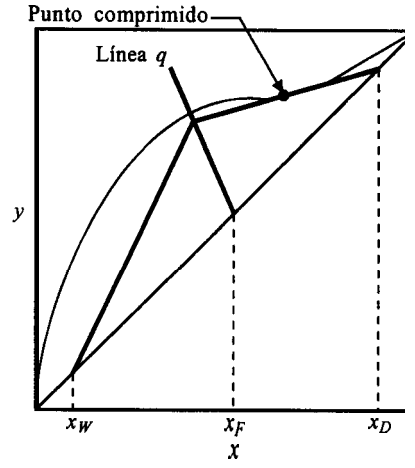


FIGURA 11.4-12. *Razón de reflujo minimo y número infinito de platos cuando la linea de operación es tangente a la de equilibrio.*

EJEMPLO 11.4-2. Relación de rejlujo mínimo y rejlujo total en una rectificación
Calcule lo siguiente para la rectificación del ejemplo ll .4-1, en el que se destila una mezcla benceno-tolueno para producir una composición de destilado de x_D = 0.95 y una composición de residuos de x_W = 0.10.

a) Razón de reflujo mínimo R_m.

b) Número mínimo de platos teóricos para un reflujo total.

Solución: Para resolver el inciso a) se grafica la línea de equilibrio en la figura ll .4-13 y se inclu-ye la ecuación de la línea q para x_F = 0.45. Con los mismos valores de x_D y x_W del ejemplo 11.4-1, se grafica la línea de operación de enriquecimiento para un reflujo mínimo, en forma de línea punteada que interseque a la de equilibrio en el mismo punto en

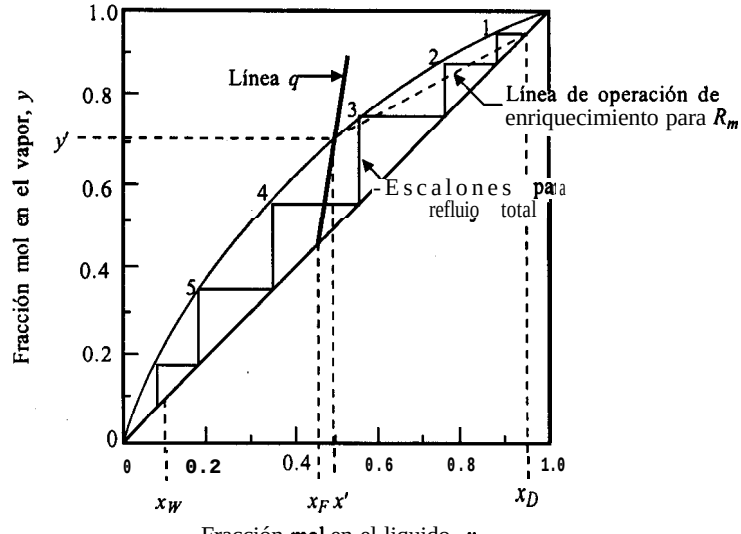


FIGURA 11.4-13. *Resolución gráfica para razón de reflujo minimo R_m con rejlujo total del ejemplo 11.4-2.*

el cual se produce la intersección de la línea q. Leyendo los valores de $x' = 0.49$ y $y' = 0.702$, sustituyendo en la ecuación (11.4-24) y despejando R_m,

$$\frac{R_m}{R_m + 1} = \frac{x_D - y'}{x_D - x'} = \frac{0.95 - 0.702}{0.95 - 0.49}$$

Por tanto, la relación mínima de reflujo es $R_m = 1.17$.

Para el caso del reflujo total en el inciso b), se trazan los escalones teóricos como en la figura 11.4-13. El número mínimo de escalones teóricos es 5.8, lo cual da 4.8 platos teóricos más un hervidor.

11.4D Casos especiales de rectificación usando el método de McCabe-Thiele

1. Destilación en una columna de empobrecimiento. En algunos casos la alimentación que va a destilarse no se introduce en un punto intermedio de la columna, sino que se añade por la parte superior de una columna de empobrecimiento (véase el diagrama de la Fig. 11.4-14a). Por lo general, la alimentación es un líquido saturado a su punto de ebullición y el producto superior V_D es el vapor que se desprende del plato superior, que va a un condensador sin reflujo y sin retorno de líquido a la torre.

El producto residual W, casi siempre tiene alta concentración del compuesto B menos volátil. Por lo tanto, la columna opera como de empobrecimiento, pues el vapor extrae del líquido al componente

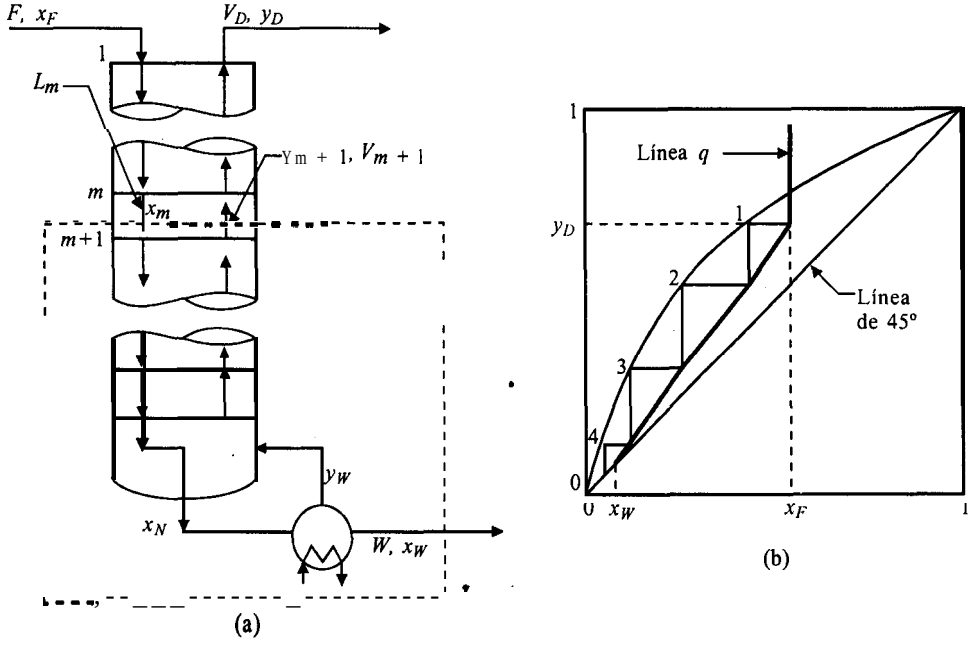


FIGURA 11.4-14. *Balance de materia y linea de operación para una torre de empobrecimiento: a) flujos en la torre, b) lineas de operación y de equilibrio.*

A más volátil, a medida que dicho líquido fluye hacia abajo. Suponiendo velocidades molares de flujo constantes, un balance de materia del componente más volátil A con respecto a la línea punteada de la figura ll .4-14a produce al reordenar la expresión,

$$y_m = \frac{L_m}{V_{m+1}} x_m - \frac{W x_W}{V_{m+1}} \qquad (11.4\text{-}25)$$

Esta ecuación de la línea de empobrecimiento es la misma que la de la línea de empobrecimiento para una torre completa, tal como se expresó en la ecuación (ll .4-1 1). Interseca a la línea y = x en el punto x = x_W, y la pendiente es constante, con un valor de L_m/V_{m+1}.

Si la alimentación es un líquido saturado, entonces $L_m = F$. Si la alimentación es un líquido frío por debajo de su punto de ebullición, se debe utilizar la línea q con $q > 1$.

$$L_m = qF \qquad (11.4\text{-}26)$$

En la figura 11.4-14 se muestran las gráficas de la ecuación de la línea de operación de empobrecimiento (11.4-25) y de la línea q (11.4-19) para q = 1.0. Los escalones se trazan hacia abajo de la torre empezando en x_F.

EJEMPLO 11.4-3. Número de platos en una torre de empobrecimiento

En una torre de empobrecimiento que opera a 101.3 kPa, se introducen 400 kg mol/h de una alimentación líquida al punto de ebullición, que contiene 70% mol benceno (A) y 30% mol de tolueno (B). El flujo de producto residual debe ser de 60 kg mol/h, que contiene solamente 10% mol de A y el resto, B. Calcule los kg mol/h de vapor superior, su composición y el número de escalones teóricos requeridos.

Solución: Con respecto a la figura 11.4-14a, los valores conocidos son, F = 400 kg mol/h, x_F = 0.70, W = 60 kg mol/h, y x_W = 0.10. En la figura 11.4-15 se grafican los datos de equilibrio de la tabla ll. l-l, y a través de un balance total de materiales,

$$F = W + V_D$$

$$400 = 60 + V_D$$

Despejando, V_D = 340 kg mol/h. Llevando a cabo un balance del componente A y resolviendo,

$$F x_F = W x_W + V_D y_D$$

$$400(0.70) = 60(0.10) + 340(y_D)$$

$$y_D = 0.806$$

Para un líquido saturado, la línea q es vertical y se grafica como lo señala la figura ll .4- 15. La línea de operación se traza a través del punto y = x_W = 0.10 y de la intersección de yo = 0.806 con la línea q. De otra manera, la ecuación (ll .4-25) se puede usar con una pendiente de L_m/V_{m+1} = 400/340. Escalonando los platos desde la parte de arriba, se requieren 5.3 etapas teóricas o 4.3 platos teóricos más un hervidor.

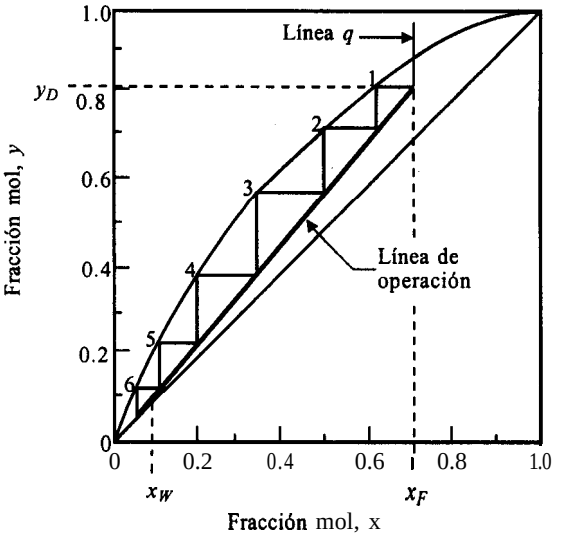


FIGURA 11.4-I *5. Torre de empobrecimiento del ejemplo 11.4-3.*

2. Destilación en la columna enriquecedora. Algunas veces se usan torres de enriquecimiento en las cuales la alimentación entra por el fondo en forma de vapor. El destilado superior se produce de la misma manera que en la torre fraccionadora completa y, por lo general, es muy rico en el componente más volátil, A. El residuo líquido es de composición muy parecida a la de la alimentación, aunque ligeramente más pobre en el componente A. Si la alimentación es vapor saturado, el vapor en la torre $V_n = F$. Se puede aplicar, entonces, la ecuación de la línea de enriquecimiento (11.4-7), así como la de la línea q (ll .4-19).

3. Rectificación con inyección directa de vapor. Por lo general, el calor que requiere una torre de destilación se aplica a uno de los extremos de intercambiador de calor (hervidor) y el vapor no entra directamente en contacto con la solución en ebullición, como se muestra en la figura ll .4-5. Sin embargo, cuando se está destilando la solución acuosa de un compuesto A más volátil y agua B, el calor requerido se puede suministrar inyectando directamente vapor abierto al fondo de la torre. En este caso no se necesita el intercambiador de calor.

El vapor se inyecta al líquido en forma de pequeñas burbujas en el fondo de la torre, tal como lo muestra la figura ll .4-1 6a. Entonces, el vapor que se separa del líquido esta en equilibrio con él, cuando se obtiene suficiente contacto. Llevando a cabo un balance total en la torre y un balance con respecto a A,

$$F + S = D + W \tag{11.4-27}$$

$$Fx_F + Sy_S = Dx_D + Wx_W \tag{11.4-28}$$

donde S = mol/h de vapor y y_S = 0 = fracción mol de A en el vapor. La ecuación de la-línea de operación de enriquecimiento es la misma que para el vapor indirecto.

Para la ecuación de la línea de empobrecimiento, el balance total y el balance con respecto al componente A son los siguientes:

$$L_m + S = V_{m+1} + \text{w} \tag{11.4-29}$$

$$L_m x_m + S(0) = V_{m+1} y_{m+1} + W x_W \tag{11.4-30}$$

Al despejar y_{m+1} en la ecuación (ll .4-30),

$$y_{m+1} = \frac{L_m}{V_{m+1}} x_m - \frac{W x_W}{V_{m+1}} \tag{11.4-31}$$

Para la entrada de vapor saturado, $S = V_{m+1}$ y por consiguiente, según de la ecuación (ll .4-29), $L_m = W$. Sustituyendo en la ecuación (ll .4-31), la línea de operación de empobrecimiento es

$$y_{m+1} = \frac{W}{S} x_m - \frac{W}{S} x_W \tag{11.4-32}$$

Cuandoy=O,x $= x_W$. Por tanto, la línea de empobrecimiento pasa a través del punto y = 0, $x = x_W$ (como se señala en la Fig. ll .4-16b), y continúa hasta el eje x. Además, para la intersección de la línea de empobrecimiento con la de 45°, cuando y = x en la ecuación (ll .4-32), $x = Wx_W/(W - S)$.

Para una razón de reflujo y una composición de destilado de la parte superior dadas, el uso del vapor abierto en lugar de cerrado requiere de una fracción extra de una etapa, puesto que el paso inferior empieza por debajo de la línea y = x (Fig. ll .4-1 6b). La ventaja del vapor directo radica en que permite que el calentador sea de construcción mas simple, pues es un rociador

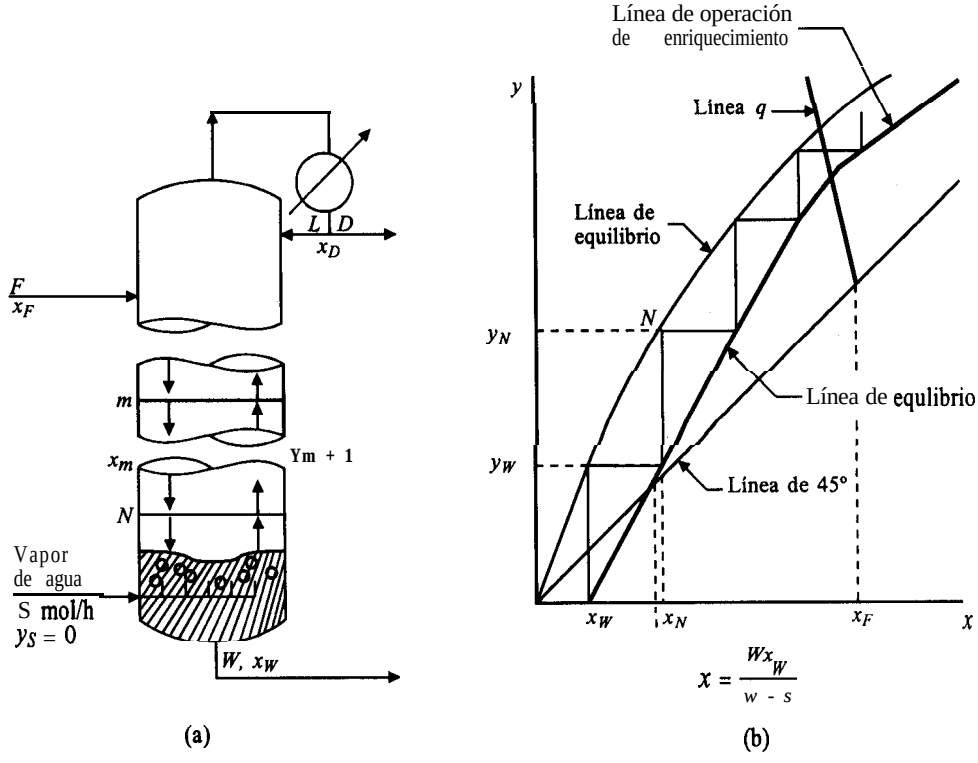


FIGURA ll .4-1 6. *Uso de inyección directa de vapor: a) esquema de la torre, b) líneas de operación y de equilibrio.*

4. Torre de rectificación con corriente de vapor lateral. En algunos casos se extraen productos intermedios o corrientes laterales de secciones de la torre entre la zona de destilado y la de residuos. La corriente lateral puede ser vapor o líquido y extraerse en un punto por encima de la entrada de alimentación o por debajo de la misma, dependiendo de la composición deseada.

En la figura ll .4-17 se muestran los flujos para una columna con corriente líquida lateral que se extrae por encima de la entrada de alimentación. La línea de operación de enriquecimiento superior por encima de la corriente lateral de líquido y la línea de operación de empobrecimiento por debajo de la alimentación, se determinan de la manera usual. La ecuación de la línea q tampoco es afectada por la corriente lateral y también se calcula como antes. La corriente líquida lateral altera la velocidad del líquido que está por debajo y, por consiguiente, también afecta al balance de materia y la línea de operación en la porción media entre los platos de alimentación y la corriente líquida lateral.

Al efectuar un balance total de materia en la porción superior de la torre, como se muestra en la zona de líneas punteadas de la figura 11.4-17,

$$V_{S+1} = L_S + O + D \tag{11.4-33}$$

donde 0 es mol/h de líquido saturado extraído como corriente lateral. Puesto que la corriente líquida lateral está saturada,

$$L_n = L_S + 0 \tag{11.4-34}$$

$$V_{S+1} = V_{n+1} \tag{11.4-35}$$

Al efectuar un balance con respecto al componente más volátil,

$$V_{S+1}\, y_{S+1} = L_S x_S + O x_O + D x_D \tag{11.4-36}$$

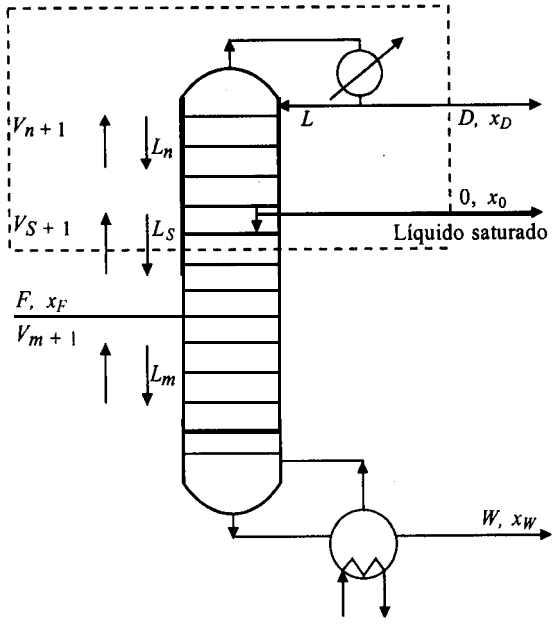


FIGURA 11.4-17. *Flujo de proceso para una torre de rectificación con una corriente liquida lateral*

Al despejar y_{S+1}, la línea de operación para la región entre la corriente lateral y la alimentación es

$$y_{S+1} = \frac{L_S}{V_{S+1}} x_S + \frac{Ox_o + Dx_D}{V_{S+1}} \qquad \textbf{(11.4-37)}$$

La pendiente de esta línea es L_S/V_{S+1}. La línea se puede localizar de acuerdo con la figura ll .4-18, por medio de la línea q que determina la intersección de la línea de empobrecimiento, y la ecuación (11.4-37), o se puede fijar por medio de la especificación de x_O, esto es, la composición de la corriente lateral. En una torre real, el escalón en el diagrama de McCabe-Thiele se debe localizar en la intersección de las líneas de operación en x_O. Si esto no ocurre así, la razón de reflujo se puede alterar ligeramente para cambiar los escalones.

5. Condensadores parciales. En algunos casos especiales se desea extraer el destilado superior como vapor en lugar de líquido. Esto también puede ocurrir cuando el bajo punto de ebullición del destilado provoca que la condensación completa resulte muy difícil. El condensado líquido en un condensador parcial se regresa a la torre como reflujo y el vapor se extrae como producto, como se muestra en la figura 11.4-19.

Si el tiempo de contacto entre el vapor y el líquido es suficiente, el condensador parcial está en una etapa teórica. Entonces, la composición x_R del reflujo líquido está en equilibrio con la composición del vapor y_D, donde $y_D = x_D$. Si el enfriamiento en el condensador es rápido y el vapor y el líquido no alcanzan su equilibrio, sólo se obtiene una separación parcial.

11.5 EFICIENCIAS DE LOS PLATOS EN LA DESTILACIÓN Y LA ABSORCIÓN

11.5A Introducción

En todo lo antes expuesto sobre platos teóricos o etapas de destilación, se supuso que el vapor que se desprende de un plato esta en equilibrio con el líquido que sale del mismo. Sin embargo, si el tiempo de contacto y el grado de mezclado en el plato son insuficientes, las corrientes no están en equilibrio. Como resultado, la eficiencia del plato o etapa no es del 100%. Esto significa que, en una separación cualquiera, se necesitan usar mas platos reales que el numero teórico que se determina por calculo. Los análisis de esta sección son aplicables tanto a torres de destilación como a torres de absorción.

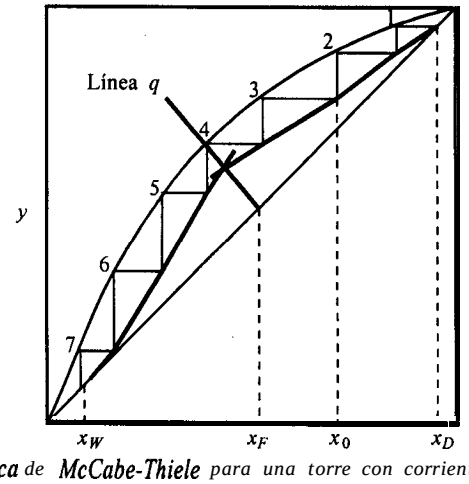


FIGURA 11.4-I 8. *Gráfica de McCabe-Thiele para una torre con corriente líquida lateral por encima de la alimentación.*

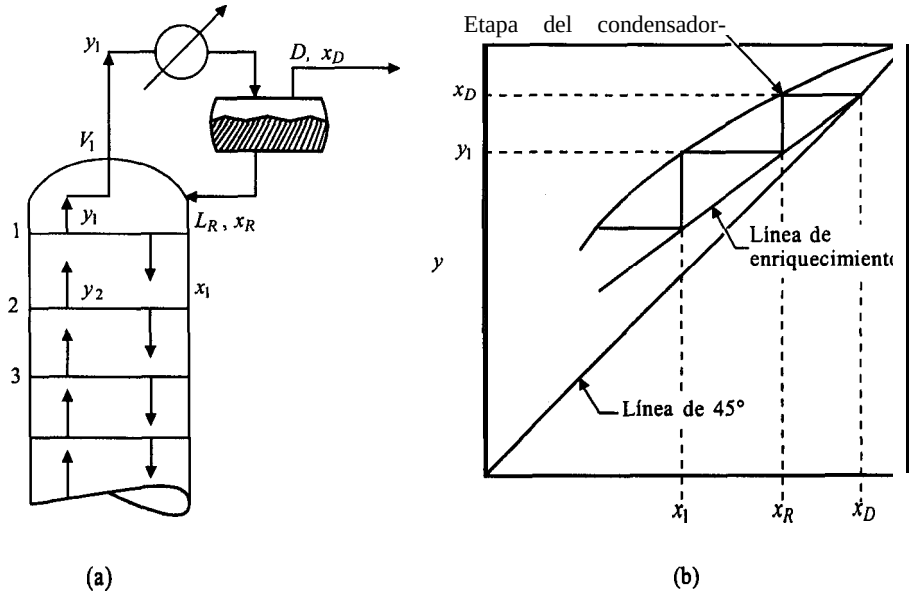


FIGURA 11.4-19. *Condensador parcial donde el vapor y el liquido salen en equilibrio: a) diagrama de flujo del proceso, b) gráfica de McCabe-Thiele.*

Se usan tres tipos de eficiencia de platos o de etapas: *eficiencia total de platos* E_O, *eficiencia de platos de Murphree* E_M, y eficiencia de platos puntual o local E_{MP} (llamada a veces *eficiencia puntual de Murphree).* Estas eficiencias se consideraran en forma individual.

11.5B Tipos de eficiencia de platos

1. Eficiencia total de platos. La *eficiencia total de platos* E_O *se* refiere a la totalidad de la torre y es de uso muy simple, aunque es la menos fundamental. Se define como la relación entre el número de platos teóricos o ideales necesarios en una torre y el número de platos reales usados:

$$E_O = \frac{\text{número de platos ideales}}{\text{número de platos reales}} \qquad \textbf{(11.5-1)}$$

Por ejemplo, si se necesitan ocho etapas teóricas y la eficiencia total es de 60%, el numero de platos teóricos es ocho menos un hervidor, o sea, siete platos. El numero real de platos es 710.60, u 11.7 platos.

Existen dos correlaciones empíricas para eficiencias totales de platos de destilación y absorción en torres comerciales y en diseños estándar de platos (01). Para destilación de hidrocarburos, estos valores varían entre 50 y 85% y para absorción de hidrocarburos, de 10 a 50%. Estas correlaciones sólo se deben usar como estimaciones aproximadas.

2. Eficiencia de platos de Murphree. La eficiencia de platos de Murphree E_M *se* define como sigue:

$$E_M = \frac{y_n - y_{n+1}}{y_n^* - y_{n+1}} \qquad \textbf{(11.5-2)}$$

donde y_n es la concentración real promedio del vapor mezclado que sale del plato n, como se muestra enlafigura 11.5-1, y_{n+1} es la concentración real promedio del vapor mezclado que entra al plato n, Y y_n^* es la concentración del vapor que estaría en equilibrio con el líquido de concentración x_n que sale del plato, hacia abajo.

El líquido que entra al plato tiene concentración de x_{n-1}, y al desplazarse por el mismo, su concentración se reduce a x_n a la salida de dicho plato. Por consiguiente, existe un gradiente de concentraciones en el líquido a medida que fluye por el plato. El vapor que entra al plato se pone en contacto con líquido que tiene diferentes concentraciones, y el vapor de salida no tiene una concentración uniforme.

3. Eficiencia puntual. La *eficiencia puntual* o *local* E_{MP} de un plato se define como

$$E_{MP} = \frac{y'_n - y'_{n+1}}{y^*_n - y'_{n+1}} \tag{11.53}$$

donde y'_n es la concentración del vapor en un punto específico del plato n (como se aprecia en la Fig. ll .5-1), y_{n+1} es la concentración del vapor que entra ,al plato n en el mismo punto, y y'^*_n, es la concentración del vapor que estaría en equilibrio con x_n en el mismo punto. Puesto que y_n no puede ser mayor que y'^*_n, la eficiencia local no puede ser superior a 1.00, esto es, 100%.

En las torres de diámetro pequeño, el flujo de vapor produce suficiente agitación en el líquido como para que éste sea uniforme en todo el plato. De esta manera, la concentración del líquido que sale es igual a la que está en el propio plato. Entonces, $y'_n = y_n$, $y'_{n+1} = y_{n+1}$ y $y'^*_n = y^*_n$. En estas condiciones, la eficiencia puntual resulta igual a la eficiencia de Murphree en el plato o $E_M = E_{MP}$.

En las columnas de diámetro considerable hay un mezclado incompleto del líquido en los platos. Parte del vapor se pone en contacto con el líquido de entrada x_{n-1}, que es más rico en el componente A que x_n. Esto produce un vapor más rico en este punto que en el punto de salida, esto es, que en el punto donde x_n sale. Por consiguiente, la eficiencia de plato E_M será mayor que la eficiencia del punto E_{MP}. El valor E_M se puede relacionar con E_{MP} por medio de la integración de E_{MP} con respecto a la totalidad del plato.

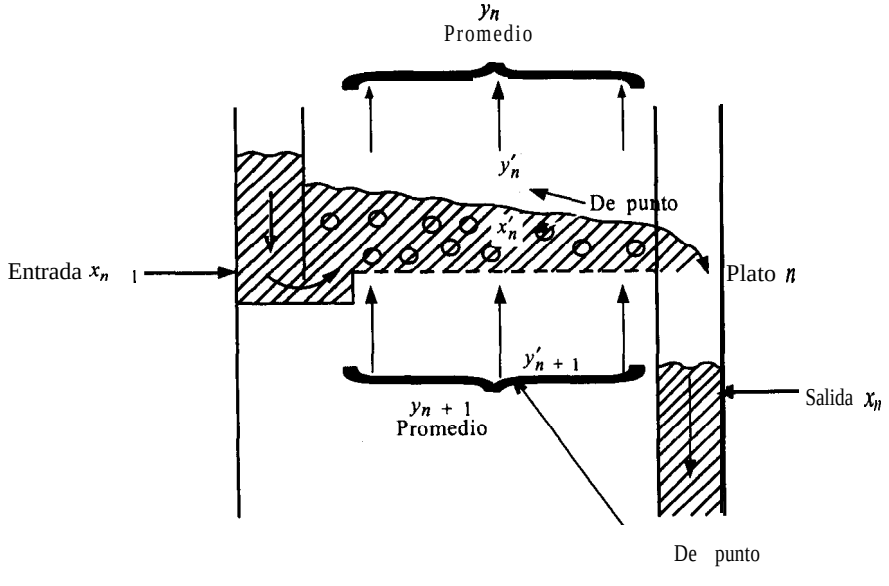


FIGURA ll .5-1. *Composiciones del vapor y del líquido en un plato perforado y eficiencia de platos.*

11.5C Relación entre eficiencias

La relación entre E_{MP} y E_M puede deducir matemáticamente siempre y cuando se especifique el grado de mezclado del líquido y del vapor. Robinson y Gilliland (R1) presentan deducciones matemáticas para tres series de supuestos diferentes. Sin embargo, generalmente se requieren datos experimentales para obtener el grado de mezclado. Van Winkle (VI) resume algunos métodos semiteóricos para predecir E_{MP} y E_M.

Cuando se conoce o se puede predecir la eficiencia de platos de Murphree E_M, la eficiencia total de platos E_O puede se correlacionar con E_M por medio de diversos métodos. En el primero de ellos, cuando la pendiente *m* de la línea de equilibrio es constante, al igual que la pendiente L/V de la línea de operación, la expresión analítica es:

$$E_O = \frac{\log\left[1 + E_M(mV/L - 1)\right]}{\log(mV/L)} \qquad \textbf{(11.5-4)}$$

Si las líneas de equilibrio y de operación de la torre no son rectas, se aconseja utilizar el método gráfico en el diagrama de McCabe-Thiele para determinar el número real de platos cuando se conoce la eficiencia de platos de Murphree. En la figura ll S-2 se muestra un diagrama que compara un plato real con uno ideal. El triángulo *acd* representa un plato ideal y el triangulo más pequeño, *ube, un* plato real. Para el caso considerado, la eficiencia de Murphree es E_M= 0.60 = *ba/ca*. La línea punteada que va desde el punto *b se* traza de tal modo que el valor de *ba/ca* para cada plato sea 0.60. Los platos se escalonan usando esta eficiencia, y el número total de escalones proporciona el numero real de platos necesario. El hervidor se considera como un plato teórico, por lo que para este plato se usa la curva real de equilibrio, tal como se muestra en la figura ll S-2. Se obtienen 6.0 platos reales mas un hervidor.

11.6 DESTILACIÓN FRACCIONADA CON EL MÉTODO DE ENTALPÍA-CONCENTRACIÓN

11.6A Datos de entalpía-concentración

1. Introducción. En la sección ll .4B se usó el método de McCabe-Thiele para calcular el número de etapas teóricas o platos necesarios para cierta separación de una mezcla binaria de *A* y *B* por

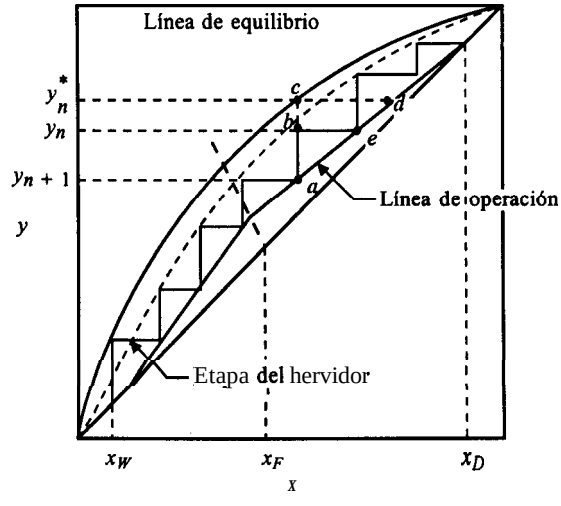


FIGURA. ll .5-2. *Uso de la eficiencia de platos de Murphree para determinar el número real de platos.*

rectificación o destilación fraccionada. Los supuestos principales del método consisten en que los oalores latentes son iguales, las diferencias de calor sensible son despreciables y hay un derrame mola1 constante en cada sección de la torre de destilación. Aquí se considerará la destilación fraccionada mediante datos de entalpía-concentración y con velocidades de derrame mola1 que no son necesariamente constantes. El análisis se efectúa usando balances de entalpía así como de materiales.

2. Datos de entalpía-concentración. Un diagrama de entalpía-concentración para una mezcla binaria vapor-líquido de A y B toma en consideración los calores latentes, los calores de disolución o de mezclado y los calores sensibles de los componentes de la mezcla. Se requieren los siguientes datos para construir dicho diagrama a presión constante: 1) capacidad calorífica del líquido en función de la temperatura, la composición y la presión; 2) calor de disolución en función de la temperatura y la composición; 3) calores latentes de vaporización en función de la composición y la presión o la temperatura; 4) punto de ebullición en función de la presión, la composición y la temperatura.

El diagrama a presión constante se basa en estados arbitrarios de referencia del líquido y en la temperatura, por ejemplo, 273 K (32 °F). La línea de líquido saturado en la entalpía h kJ/kg (btu/lb$_m$) o kJ/ kg mol, se calcula por medio de la expresión

$$h = x_A c_{pA}(T - T_0) + (1 - x_A)c_{pB}(T - T_0) + \Delta H_{\text{dis}} \qquad (11.6\text{-}1)$$

donde x_A es la fracción mol o de peso de A, T es el punto de ebullición de la mezcla en K (“F) °C, T_0 es la temperatura de referencia, K, c_{pA} es la capacidad calorífica líquida del componente A en kJ/ kg · K (btu/lb$_m$ · “F) o kJ/kg mol · K, c_{pB} es la capacidad calorífica de B, y ΔH_{dis} es el calor de disolución a T_0 en kJ/kg (btu/lb$_m$) o kJ/kg mol. Si hay un desprendimiento de calor durante la mezcla, el valor de ΔH_{dis} de la ecuación (ll .6-1) será un valor negativo. Muchas veces los calores de disolución son pequeños, como en las mezclas de hidrocarburos, y se desprecian.

La línea de entalpía del vapor saturado de H kJ/kg (but/lb$_m$) o kJ/kg mol de una composición de vapor y_A se calcula mediante

$$H = y_A[\lambda_A + c_{pyA}(T - T_0)] + (1 - y_A)[\lambda_B + c_{pyB}(T - T_0)] \qquad (11.6\text{-}2)$$

donde c_{pyA} es la capacidad calorífica del vapor de A y c_{pyB} es la de B. Los calores latentes λ_A y λ_B son los valores a la temperatura de referencia T_0. Generalmente el calor latente se da como λ_{Ab} en el punto de ebullición normal T_{bA} del componente puro A y λ_{Bb} para B. Entonces, para corregir esto a la temperatura de referencia T_0 que se emplea en la ecuación (ll .6-2),

$$\lambda_A = c_{pA}(T_{bA} - T_0) + \lambda_{Ab} - c_{pyA}(T_{bA} - T_0) \qquad (11.6\text{-}3)$$

$$\lambda_B = c_{pB}(T_{bB} - T_0) + \lambda_{Bb} - c_{pyB}(T_{bB} - T_0) \qquad (11.6\text{-}4)$$

En la ecuación (ll .6-3), el líquido puro se calienta de T_0 hasta T_{bA}, se vaporiza a T_{bA} y luego se enfría como vapor a T_0. Del mismo modo, la ecuación (11.6-4) también se cumple para λB. Por conveniencia, la temperatura de referencia T_0 se suele tomar como igual al punto de ebullición del componente de menor punto de ebullición, A. Esto significa que $\lambda_A = \lambda_{Ab}$. Por lo tanto, sólo λ_{Bb} se debe corregir a λ_B.

EJEMPLO 11.6-1. Gráfica de concentración y entalpía para benceno y tolueno
Prepare una gráfica de entalpía y concentración para benceno y tolueno a 1 atm de presión. Los datos de equilibrio se encuentran en la tabla ll. I-l y en las figuras 11. l-l y ll. l-2. Los datos de las propiedades físicas se dan en la tabla 11.6-l

TABLA 11.6- 1. *Datos de las propiedades físicas del benceno y el tolueno*

Componente	Punto de ebullición (°C)	Capacidad calorífica, (kJ/kg mol · K)		Calor latente de vaporización (kJ/kg mol)
		Líquido	Vapor	
Benceno (A)	80.1	138.2	96.3	30820
Tolueno (B)	110.6	167.5	138.2	33330

Solución: Por conveniencia se usa una temperatura de referencia de $T_0 = 80.1°C$, de modo que la entalpía de líquido del benceno puro ($x_A = 1.0$) en el punto de ebullición sea cero. Para el primer punto elegimos el tolueno puro ($x_A = 0$). Para el tolueno líquido en el punto de ebullición de 110.6°C, usando la ecuación (ll .6-1) con calor de disolución igual a cero y los datos de la tabla ll .6-1,

$$h = x_A c_{pA}(T - 80.1) + (1 - x_A)c_{pB}(T - 80.1) + 0 \qquad (11.6\text{-}5)$$

$$h = 0 + (1 - 0)\,(167.5)\,(110.6 - 80.1) = 5109 \text{ kJ/kg mol}$$

Para la línea de entalpía del vapor saturado se utiliza la ecuación (ll .6-2), pero primero se calcula λ_B a la temperatura de referencia $T_0 = 80.1$ °C mediante la ecuación (11.6-4).

$$\lambda_B = c_{pB}(T_{bB} - T_0) + \lambda_{Bb} - c_{pyB}(T_{bB} - T_0) \qquad (11.6\text{-}4)$$

$$= 167.5(110.6 - 80.1) + 33330 - 138.2(110.6 - 80.1)$$

$$= 34224 \text{ kJ/kg mol}$$

Para calcular H se emplea la ecuación (ll .6-2) y $y_A = 0$.

$$H = y_A[\lambda_A + c_{pyA}(T - T_0)] + (1 - y_A)[\lambda_B + c_{pyB}(T - T_0)] \qquad (11.6\text{-}2)$$

$$= 0 + (1.0 - 0)[34224 + 138.2(110.6 - 80.1)]$$

$$= 38439 \text{ kJ/kg mol}$$

Para el benceno puro, $x_A = 1.0$ y $y_A = 1.0$. Si se utiliza la ecuación (ll .6-5), y dado que $T = T_0 = 80.1$, $h = 0$. Para la entalpía del vapor saturado, al utilizar la ecuación (ll .6-2) y $T = 80.1$,

$$H = 1.0[30820 + 96.3(80.1 - 80.1)] + 0 = 30820$$

Si se elige x_A = 0.50, el punto de ebullición es T_b = 92 °C y la temperatura del vapor saturado para y_A = OSO es 98.8 °C, según la figura ll. l-l. Al utilizar la ecuación (ll .6-5) para la entalpía del líquido saturado en el punto de ebullición,

$$h = 0.5(138.2)(92 - 80.1) + (1 - 0.5)(167.5)(92 - 80.1) = 1820$$

Empleando la ecuación (11.6-2) para y_A = 0.5, la entalpía del vapor saturado a 98.8 °C es

$$H = 0.5[30820 + 96.3(98.8 - 80.1)] + (1 - 0.5)[34224 + 138.2(98.8 - 80.1)] = 34716$$

Si se elige x_A = 0.30 y y_A = 0.30, h = 2920 y H = 36 268. Además, para x_A = 0.80 y y_A = 0.80, h = 562 y H= *32380.* Estos valores están tabulados en la tabla ll .6-2 y grafícados en la figura ll .6-1.

Algunas propiedades de la gráfica de entalpía y concentración son las siguientes. La región entre la línea de vapor saturado y la línea de líquido saturado consta de dos fases, líquido y vapor. A partir de la tabla ll. l-l para x_A = 0.411, el vapor en equilibrio es y_A = 0.632. Estos dos puntos están grafícados en la figura ll .6- 1, y la línea de unión representa las entalpías y composiciones de las fases líquida y de vapor en equilibrio. Se pueden dibujar otras líneas de unión de la misma manera. La región que se encuentra debajo de la línea de h en función de x_A representa el líquido debajo del punto de ebullición.

TABLA 11.6-2. *Datos de entalpía-concentración para mezclas de benceno y tolueno a 101.325 kPa (1 atm) de presión total*

Liquido saturado		*Vapor saturado*	
Fracción molar, x_A	*Entalpia.* h, *(kJ/kg mol)*	*Fracción molar,* y_A	*Entalpia,* H, *(kJ/kg mol)*
0	5109	0	38439
0.30	2920	0.30	36268
0.50	1820	0.50	34716
0.80	562	0.80	32380
1.00	0	1.00	30820

11.6B Destilación en la sección de enriquecimiento de la torre

Para analizar la sección de enriquecimiento de una torre fraccionadora usando datos de entalpía y concentración, se llevan a cabo el balance de materia general y el de los componentes en la figura ll .6-2:

$$V_{n+1} = L_n + D \tag{11.6-6}$$

$$V_{n+1}y_{n+1} = L_n x_n + Dx_D \tag{11.6-7}$$

La ecuación (ll .6-7)se reordena para dar la línea operativa de la sección enriquecedora.

$$y_{n+1} = \frac{L_n}{V_{n+1}} x_n + \frac{Dx_D}{V_{n+1}} \tag{11.6-8}$$

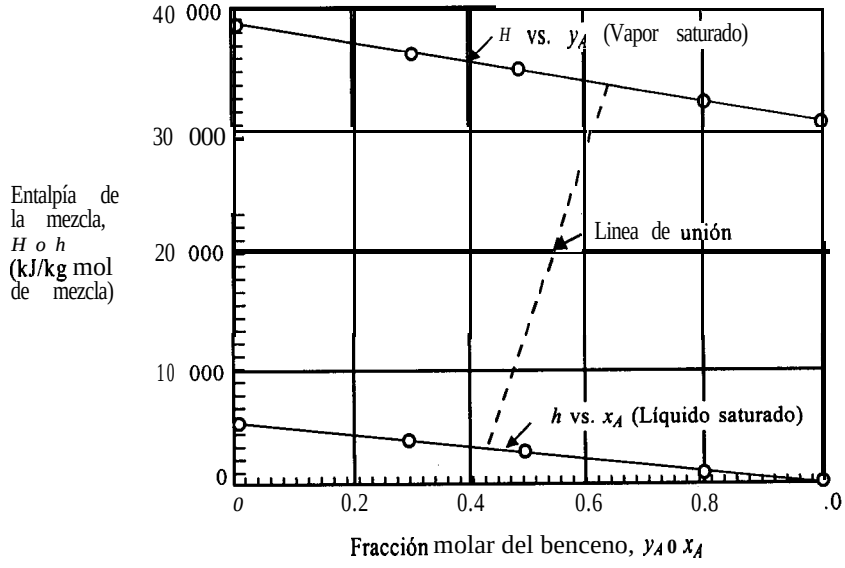


FIGURA 11.6-I. *Gráfica de entalpia-concentración para una mezcla de benceno y tolueno a 1.0 atm abs.*

Ésta es igual a la ecuación (11.4-7) para el método de McCabe-Thiele, pero ahora las tasas de flujo del líquido y el vapor V_n + , y $L_n$varían a través de la torre y la ecuación (11.6-8) no será una línea recta en una gráfica xy.

Si se hace un balance de entalpía,

$$V_{n+1}H_{n+1} = L_n h_n + Dh_D + q_c \tag{11.6-9}$$

donde q_c es el rendimiento del condensador, en kJ/h o kW (btu/h). Se puede hacer un balance de entalpía sólo en torno al condensador.

$$q_c = V_1 H_1 - Lh_D - Dh_D \tag{11.6-10}$$

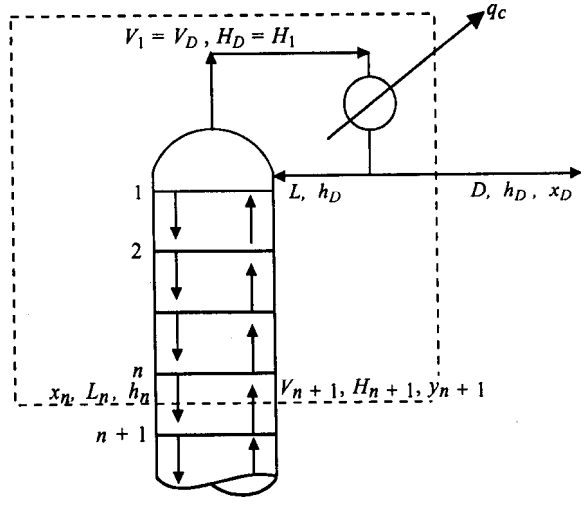


FIGURA *11.6-2. Zona de enriquecimiento de una torre de destilación.*

Al combinar las ecuaciones (ll .6-9) y (ll .6-10) para eliminar q_c, se obtiene una forma alterna.

$$V_{n+1}H_{n+1} = L_n h_n + V_1 H_1 - Lh_D \tag{11.6-11}$$

Se sustituye el valor de L_n de la ecuación (ll .6-6) en la (ll .6-11),

$$V_{n+1}H_{n+1} = (V_{n+1} - D)h_n + V_1 H_1 - Lh_D \tag{11.6-12}$$

Las ecuaciones (11.6-8) y (11.6-12) son las expresiones finales de trabajo para la sección enriquecedora.

Para graficar la ecuación (ll .6-8) de la línea operativa, se determinan los términos V_{n+1} y L_n a partir de la ecuación (11.6-12). Si se establece la razón de reflujo, se conocen V_1 y L. Los valores H_1 y h_D se pueden determinar mediante las ecuaciones (ll .6-1) y (ll .6-2) o a partir de una gráfica de entalpía y concentración. Si se elige un valor de x_n, se necesitará una solución de prueba y error para obtener H_{n+1}, puesto que y_{n+1} no se conoce. Los pasos que hay que seguir se indican en seguida.

1. Seleccione un valor de x_n. Suponga que $V_{n+1} = V_1 = L + D$ y $L_n = L$. Después, utilice estos valores en la ecuación (ll .6-8) para calcular un valor aproximado de y_{n+1}. Esto supone una línea operativa recta.
2. Utilice el valor de y_{n+1} para obtener H_{n+1}, y también obtenga h_n usando x_n. Sustituya estos valores en la ecuación (11.6-12) y despeje V_{n+1}. Obtenga L_n a partir de la ecuación (11.6-6).
3. Sustituya en la ecuación (ll .6-8) y despeje y_{n+1}.
4. Si el valor calculado de y_{n+1} no es igual al valor supuesto de y_{n+1}, repita los pasos 2 y 3. Generalmente no se necesita un segundo intento. Suponga otro valor de x_n y repita los pasos 1 y 4.
5. Grafique la línea operativa curva para la sección enriquecedora. En general se necesitan sólo unos cuantos valores de los flujos L_n y V_{n+1} para determinar la línea operativa, que es ligeramente curva.

11.6C Destilación en la sección de empobrecimiento de la torre

Para analizar la sección de empobrecimiento de una torre fraccionadora, se llevan a cabo un balance de materia total y un balance de materia de componentes en la figura ll .4-5a.

$$L_m = W + V_{m+1} \tag{11.6-13}$$

$$L_m x_m = W x_W + V_{m+1} y_{m+1} \tag{11.6-14}$$

$$y_{m+1} = \frac{L_m}{V_{m+1}} x_m - \frac{W x_W}{V_{m+1}} \tag{11.6-15}$$

Se realiza un balance de entalpía cuando q_R kJ/h o kW(btu/h) entra en el hervidor de la figura ll .4-5a y se sustituye $(V_{m+1} + W)$ en lugar de L_m de la ecuación (ll .6-13),

$$V_{m+1}H_{m+1} = (V_{m+1} + W)h_m + q_R - Wh_W \tag{11.6-16}$$

Al hacer un balance global de entalpía en la figura ll .4-3,

$$q_R = Dh_D + Wh_W + q_c - Fh_F \qquad (11.6\text{-}17)$$

Las ecuaciones finales de trabajo aplicables son de la (11.6-15) a la (11.6-17).

Si se emplea un método semejante al de la sección enriquecedora para resolver las ecuaciones, se elige un valor de y_{m+1} y se calcula un valor aproximado de x_m a partir de la ecuación (ll .6-15), suponiendo un derrame molar constante. Después se calcula V_{m+1} y L_m de las ecuaciones (11.6-16) y (ll .6-13). Más adelante, se utiliza la ecuación (ll .6-15) para determinar x_m. Compare este valor calculado de x_m con el valor supuesto.

EJEMPLO 11.6-2. ***Destilación con el método de entalpía y concentración***

Una mezcla líquida de benceno y tolueno se destila usando las mismas condiciones que en el ejemplo ll .4-1, excepto que se va a usar una razón de reflujo de 1.5 veces la razón de reflujo mínimo. Se usará el valor de R_m = 1.17 del ejemplo ll .4-2. Utilice balances de entalpía para calcular las tasas de flujo líquido y el vapor en varios puntos de la torre y grafique las líneas de operación curvas. Determine el número de etapas teóricas necesarias.

Solución: Los datos son los siguientes: F = 100 kg mol/h, x_F = 0.45, x_D = 0.95, x_W = 0.10, $R = 1.5 R_m = 1.5(1.17) = 1.755$, D = 41.2 kg mol/h, W = 58.8 kg mol/h. La alimentación entra a 54.4 °C y q = 1,195. Los flujos en la parte superior de la torre se calculan como sigue.

$$\frac{L}{D} = 1.755; \qquad L = 1.755(41.2) = 72.3; \qquad V_1 = L + D = 72.3 + 41.2 = 113.5$$

La temperatura de saturación en la parte superior de la torre para $y_1 = x_D = 0.95$ es 82.3 °C según la figura ll. l-1. Si se utiliza la ecuación (ll .6-2),

$$H_1 = 0.95[30820 + 96.3(82.3 - 80.1)] + (1 - 0.95)[34224 + 138.2(82.3 - 80.1)] = 31206$$

Este valor de 31206 podría haberse obtenido también a partir de la gráfica de entalpía y concentración, figura ll .6- 1. El punto de ebullición del destilado D se obtiene de la figura 11.1-1 y es 81.1 "C. Si se utiliza la ecuación (11.6-5),

$$h_D = 0.95(138.2)(81.1 - 80.1) + (1 - 0.95)(167.5)(81.1 - 80.1) = 139$$

De nuevo, este valor se pudo haber obtenido de la figura ll .6-1.

Siguiendo el procedimiento esbozado para la sección enriquecedora, para el paso 1 se elige un valor de x_n = 0.55. Si se supone una línea de operación recta para la ecuación (ll .6-8), se obtiene un valor aproximado de y_{n+1}.

$$y_{n+1} = \frac{72.3}{113.5} x_n + \frac{41.2}{113.5}(0.95) = 0.637(x_n) + 0.345$$

$$= 0.637(0.55) + 0.345 = 0.695$$

Al empezar con el paso 2 y al usar la figura 11.6-1, para $x_n = 0.55$, $h_n = 1590$ y para $y_{n+1} = 0.695$, $H_{n+1} = 33240$. Si se sustituye en la ecuación (11.6-12) y se resuelve,

$$V_{n+1}(33240) = (V_{n+1} - 41.2)\ 1590 + 113.5(31206) - 72.3(139)$$

$$V_{n+1} = 109.5$$

Al utilizar la ecuación (ll .6-6),

$$109.5 = L_n + 41.2 \text{ o } L_n = 68.3$$

Para el paso 3, si se sutituye en la ecuación (11.6-8),

$$y_{n+1} = \frac{68.3}{109.5}(0.55) + \frac{41.2}{109.5}(0.95) = 0.700$$

Este valor calculado dey,, $_{+1}$ = 0.700 está lo bastante cerca del valor aproximado de 0.695 como para que no se necesiten intentos adicionales.

Si se elige otro valor para $x_n = 0.70$ y se usa la ecuación (ll .6-8), se calcula un valor aproximado de y_{n+1}.

$$y_{n+1} = \frac{72.3}{135.5}(0.70) + \frac{41.2}{113.5}(0.95) = 0.791$$

Al utilizar la figura 11.6-l para $x_n = 0.70$, $h_n = 1000$ y para $y_{n+1} = 0.791$, $H_{n+1} = 32500$. Al sustituir en la ecuación (ll .6-12) y al resolver,

$$V_{n+1}(32500) = (V_{n+1} - 41.2)\ 1000 + 113.5(31206) \quad 72.3(139)$$

$$V_{n+1} = 110.8$$

Si se usa la ecuación (ll .6-6),

$$L_n = 110.8 - 41.2 = 69.6$$

Si se sustituye en la ecuación (11.6-8),

$$y_{n+1} = \frac{69.6}{110.8}(0.70) + \frac{41.2}{110.8}(0.95) = 0.793$$

En la figura 11.6-3 se grafican los puntos de la línea operativa curva en la región enriquecedora. Esta línea es aproximadamente recta y está ligeramente arriba de la del sobreflujo molar constante.

Si se utiliza la ecuación (ll .6-10) se puede calcular la carga térmica del condensador.

$$q_c = 113.5(31206) - 72.3(139) - 41.2(139)$$

$$= 3\ 526100 \text{ kJ/h}$$

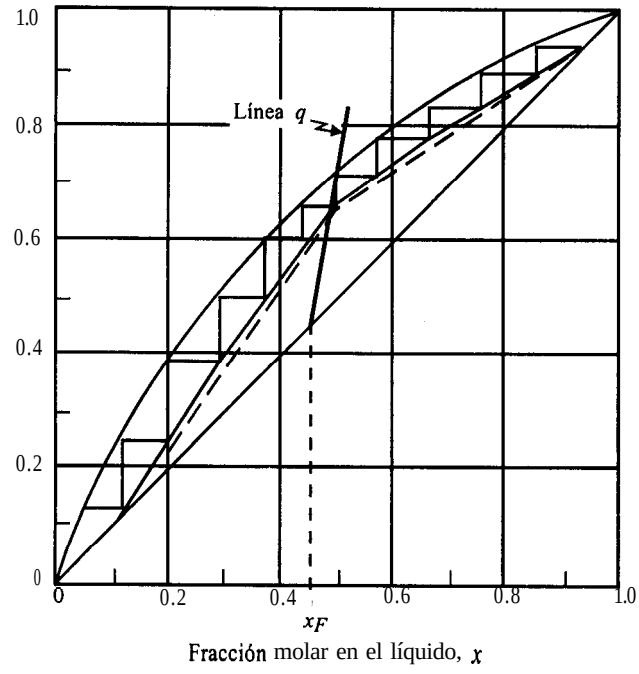


FIGURA 11.6-3. *Gráfica de las líneas operativas curvas usando el método de entalpia y concentración para el ejemplo 11.6-2. Las líneas continuas son para el método de entalpía y concentración y las lineas punteadas para el sobreflujo molar constante.*

Para obtener la carga térmica del hervidor q_R, se necesitan los valores de h_W y h_F. Si se utiliza la figura 11.6-l para $x_W = 0.10$, $h_W = 4350$. La alimentación está a 54.5 °C. Al usar la ecuación (11.6-5),

$$h_F = 0.45(138.2)(54.5 - 80.1) + (1 - 0.45)(167.5)(54.5 - 80.1)$$

$$= -3929$$

Al emplear la ecuación (ll .6-17),

$$q_R = 41.2(139) + 58.8(4350) + 3526100 - 100(-3929)$$

$$= 4180500 \text{ kJ/h}$$

Si se utiliza la figura ll .4-5 y se hace un balance de materia abajo del platillo del fondo y en tomo al hervidor,

$$L_N = W + V_W \tag{11.6-18}$$

Reescribiendo la ecuación (ll .6-16) para esta sección del fondo,

$$V_W H_W = (V_W + W)h_N + q_R - Wh_W \tag{11.6-19}$$

Con base en el diagrama de equilibrio, figura ll. l-2, para $x_W = 0.10$, $y_W = 0.207$, que es la composición del vapor que sale del hervidor.

Para el derrame equimolal en la sección de empobrecimiento, usando las ecuaciones (11.4-14) y (11.4-15),

$$L_m = L_n + q_F = 72.3 + 1.195(100) = 191.8 \quad (11.4\text{-}14)$$

$$V_{m+1} = V_{n+1} - (1 - q)F$$

$$= 113.5 - (1 - 1.195)100 = 133.0 \quad (11.4\text{-}15)$$

Al seleccionar $y_{m+1} = y_W = 0.207$, y aplicar la ecuación (11.6-15), se obtiene un valor aproximado de $x_m = x_N$

$$y_{m+1} = \frac{L_m}{V_{m+1}} x_m - \frac{W x_W}{V_{m+1}} \quad (11.6\text{-}15)$$

$$0.207 = \frac{191.8}{133.0}(x_N) - \frac{58.8}{133.0}(0.10)$$

El resultado es $x_N = 0.174$. A partir de la figura 11.6-1, para $x_N = 0.174$, $h_N = 3800$, y para, $y_W = 0.207$, $H_W = 37000$. Si se sustituye en la ecuación (11.6-19),

$$V_W(37000) = (V_W + 58.8)(3800) + 4180500 - 58.8(4350)$$

El resultado es $V_W = 125.0$. Utilizando la ecuación (11.6-18), $L_N = 183.8$. Sustituyendo en la ecuación (11.6-l 5) y despejando x_N,

$$0.207 = \frac{183.8}{125.0}(x_N) - \frac{58.8}{125.0}(0.10)$$

$$x_N = 0.173$$

Este valor de 0.173 es bastante cercano al valor aproximado de 0.174.

Si se supone un valor de $y_{m+1} = 0.55$ y se utiliza la ecuación (11.6-15), se obtiene un valor aproximado de x_m.

$$y_{m+1} = 0.55\frac{191.8}{133.0}(x_m) - \frac{58.8}{133.0}(0.10)$$

$$x_m = 0.412$$

A partir de la figura 11.6-1, para $x_m = 0.412$, $h_m = 2300$, y para $y_{m+1} = 0.55$, $H_m = 34400$. Sustituyendo en la ecuación (ll .6-16),

$$V_{m+1}(34400) = (V_{m+1} + 58.8)(2300) + 4180500 - 58.8(4350)$$

El resultado es, $V_{m+1} = 126.5$. Usando la ecuación (11.6-13),

$$L_m = W + V_{m+1} = 58.8 + 126.5 = 185.3$$

Al sustituir en la ecuación (ll .6-15) y al despejar x_m,

$$y_{m+1} = 0.55 = \frac{185.3}{126.5} x_m - \frac{58.8}{126.5} \quad (0.1)$$

$$x_m = 0.407$$

Este valor de 0.407 es bastante cercano al valor aproximado de 0.4 12 como para que no se necesiten intentos adicionales. Los dos puntos calculados para la sección de empobrecimiento se grafican en la figura 11.6-3. Esta línea de empobrecimiento también es aproximadamente recta y apenas está por encima de la línea operativa para el derrame mola1 constante.

Si se usa la línea operativa para el método de balance de entalpía, el número de etapas teóricas es 10.4. Por el método equimolal se obtienen 9.9 etapas. Esta diferencia sería más grande si la razón de reflujo de 1.5 veces R_m se disminuyera a, digamos, 1.2 o 1.3. Para razones de reflujo mayores, la diferencia del número de etapas sería menor.

Adviértase que en el ejemplo 11.6-2, en la sección de empobrecimiento, el flujo de vapor aumenta levemente desde 125.0 hasta 126.5 al ir desde el hervidor hasta cerca del plato de alimentación. Estos valores son menores que el de 133.0 obtenido al suponer un derrame equimolal. Conclusiones semejantes son válidas para la sección enriquecedora. El método de entalpía y concentración es útil para calcular los flujos de vapor interno y de líquido en cualquier punto de la columna. Por tanto, estos datos se usan para determinar el tamaño de los platillos. Además, los cálculos de q_C y q_R se utilizan para diseíiar el condensador y el hervidor. El método es muy aplicable para el diseño usando una solución de computadora para las mezclas binarias y de componentes múltiples para hacer balances de masa y entalpía de plato a plato para la torre completa. Se dispone de un método gráfico de Ponchon-Savarit, más restrictivo, únicamente para mezclas binarias (K3, T2).

ll.7 DESTILACIÓN DE MEZCLAS DE MULTICOMPONENTES

11.7A Introducción a la destilación de multicomponentes

En la industria, muchos de los procesos de destilación incluyen la separación de más de dos componentes. Los principios generales del diseño de las torres de destilación de multicomponentes son iguales en muchos aspectos a los que se describieron para los sistemas binarios. Se tiene un balance de masa para cada componente de la mezcla de multicomponentes. Los balances de entalpía o calor que se realizan son muy semejantes a los del caso binario.-Los datos de equilibrio se usan para calcular los puntos de ebullición y de rocío, y también se utilizan los conceptos de reflujo mínimo y reflujo total como casos limitantes.

1. Número de torres de destilación necesarias. En la destilación binaria, una torre se usa para separar los dos componentes *A* y *B* en componentes relativamente puros, con *A* en el destilado y *B* en el residuo. Sin embargo, en una mezcla de multicomponentes de n componentes, serán necesarios $n - 1$ fraccionadores para la separación. Por ejemplo, para un sistema de tres componentes, *A*, *B* y C, donde *A es* el más volátil y C el menos volátil, se necesitan dos columnas, como se muestra en la figura ll .7-1. La alimentación de *A, B y C se* destila en la columna 1, y *A* y *B se* eliminan en el destilado y C en el residuo. Como la separación en esta columna se realiza entre *B* y C, el residuo que contiene C contendrá una pequeña cantidad de *B* y a menudo una cantidad

despreciable de *A* (que se suele llamar componente traza). La cantidad del componente traza *A* en los fondos con frecuencia se puede despreciar si las volatilidades relativas son razonablemente grandes. En la columna 2 se destila la alimentación de *A* y *B*; en el destilado, *A* contiene una pequeña cantidad del componente *B* y una cantidad mucho menor de C. El residuo que contiene *B* también estará contaminado con una pequeña cantidad de C y *A*. Como alternativa, la columna 1 se puede usar para eliminar el destilado de *A*, y *B* más C se alimentan a la columna 2 para la separación de *B y C*.

2. Métodos de cálculo del diseño. En la destilación de multicomponentes, como en la binaria, se suponen etapas o platos ideales para los cálculos etapa por etapa. Usando los datos de equilibrio, los cálculos de equilibrio se emplean para obtener el punto de ebullición y la composición del vapor en equilibrio a partir del líquido, o el punto de rocío y dicha composición a partir de una composición dada del vapor. Después se usan balances de material y de calor semejantes a los que se describieron en la sección ll .6 para calcular los flujos hacia y desde las etapas adyacentes. Estos cálculos de diseño de etapa por etapa implican cálculos de prueba y error, y generalmente se emplean computadoras digitales de alta velocidad para proporcionar soluciones rigurosas.

En un diseño, las condiciones de la alimentación generalmente se conocen o se especifican (temperatura, presión, composición, gasto). Por lo tanto, en la mayoría de los casos el procedimiento de cálculo procede según uno de dos métodos generales. En el primer método se especifica la separación desea& entre dos de los componentes y se calcula el número de platos teóricos para una razón determinada de reflujo. Es claro que con más de dos componentes en la alimentación no se conocerán las composiciones completas del destilado y del residuo, y se tendrán que usar procedimientos de prueba y error. En el segundo método se especifica o se supone el numero de etapas en la sección enriquecedora y en la de separación, y la razón de reflujo, y se calcula la separación de los componentes suponiendo los flujos de líquido y de vapor y las temperaturas para el primer intento. Este enfoque se suele preferir para los cálculos en computadora (H2, P1). En los procedimientos de prueba y error, el método de diseño de Geddes (P1, S1, Tl), que es un procedimiento confiable, se usa a menudo para calcular las composiciones resultantes del destilado y del residuo, así como las temperaturas y composiciones de los platos. En la literatura están disponibles algunas combinaciones y variaciones de los rigurosos métodos de cálculo anteriores (H2, P1, Sl) y no se consideraran más por el momento.

Todas las variables del diseño de una columna de destilación están interrelacionadas, y sólo un pequeño número de ellas se puede establecer en el diseño. Para un análisis más detallado de la especificación de esas variables, véase Kwauk (K2).

3. Métodos cortos de cálculo. En lo que resta de este capítulo se consideran los métodos cortos de cálculo para la solución aproximada de la destilación de multicomponentes. Estos métodos son muy útiles para estudiar un gran número de casos con gran rapidez para ayudar a orientar al

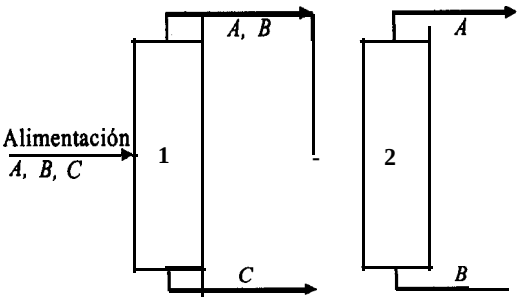


FIGURA 11.7-l. *Separación de un sistema ternario de A. B y C.*

diseñador, para determinar las condiciones óptimas aproximadas o para proporcionar información con respecto a los estimados de costos. Antes de estudiar estos métodos, se describen las relaciones de equilibrio y los métodos de cálculo de punto de burbuja, de punto de rocío y de vaporización instantánea para los sistemas de multicomponentes.

11.7B Datos de equilibrio en la destilación de multicomponentes

Para los sistemas de multicomponentes que pueden considerar ideales, la ley de Raoult permite determinar la composición del vapor en equilibrio con el líquido. Por ejemplo, en un sistema de cuatro componentes *A, B, C y D,*

$$p_A = P_A x_A, \qquad p_B = P_B x_B, \qquad PC = P_C x_C, \qquad p_D = P_D x_D \tag{11.7-1}$$

$$y_A = \frac{p_A}{P} = \frac{P_A}{P} x_A, \qquad y_B = \frac{P_B}{P} x_B, \qquad y_C = \frac{P_C}{P} x_C, \qquad y_D = \frac{P_D}{P} x_D \tag{11.7-2}$$

En los sistemas de hidrocarburos, debido a que no son ideales, los datos de equilibrio se suelen representar mediante

$$y_A = K_A x_A, \qquad y_B = K_B x_B, \qquad y_C = K_C x_C, \qquad y_D = K_D x_D \tag{11.7-3}$$

donde K_A *es* la constante de equilibrio o coeficiente de distribución vapor-líquido para el componente *A*. Estos valores de K para los sistemas de hidrocarburos ligeros (metano a decano) se han determinado semiempíricamente y cada valor K está en función de la temperatura y la presión. Hay gráficas convenientes del factor K realizadas por Depriester (D1) y Hadden y Grayson (H1). Para los sistemas de hidrocarburos, generalmente se supone que K no esta en función de la composición, lo cual es bastante exacto para la mayoría de los cálculos de ingeniería. Nótese que para un sistema ideal, $K_A = P_A/P$, y así sucesivamente. Como un ejemplo, los datos para los hidrocarburos n-butano, n-pentano, n-hexano y n-pentano se grafícan en la figura 11.7-2 a 405.3 kPa (4.0 atm) absolutos (D1, H1).

La volatilidad relativa α_i de cada componente individual de una mezcla de multicomponentes se puede definir de manera semejante a la de una mezcla binaria. Si el componente C de una mezcla de *A, B* C y *D* se elige como el componente base,

$$\alpha_i = \frac{K_i}{K_C}, \quad \alpha_A = \frac{K_A}{K_C}, \quad \alpha_B = \frac{K_B}{K_C}, \quad \alpha_C = \frac{K_C}{K_C} = 1.0, \quad \alpha_D = \frac{K_D}{K_C} \tag{11.7-4}$$

Los valores de K_i dependerán más de la temperatura que los valores de α_i puesto que con la temperatura aumentan las líneas de K_i de la figura 11.7-2 todas de la misma manera.

11.7C Punto de ebullición, punto de rocío y destilación instantánea

1. Punto de ebullición. A una presión específica, el punto de ebullición o punto de burbuja de una mezcla de multicomponentes dada debe satisfacer la relación $\Sigma y_i = 1.0$. Para una mezcla de *A, B,* C y *D,* donde C es el componente base,

$$\Sigma y_i = \Sigma K_i x_i = K_C \Sigma \alpha_i x_i = 1.0 \tag{11.7-5}$$

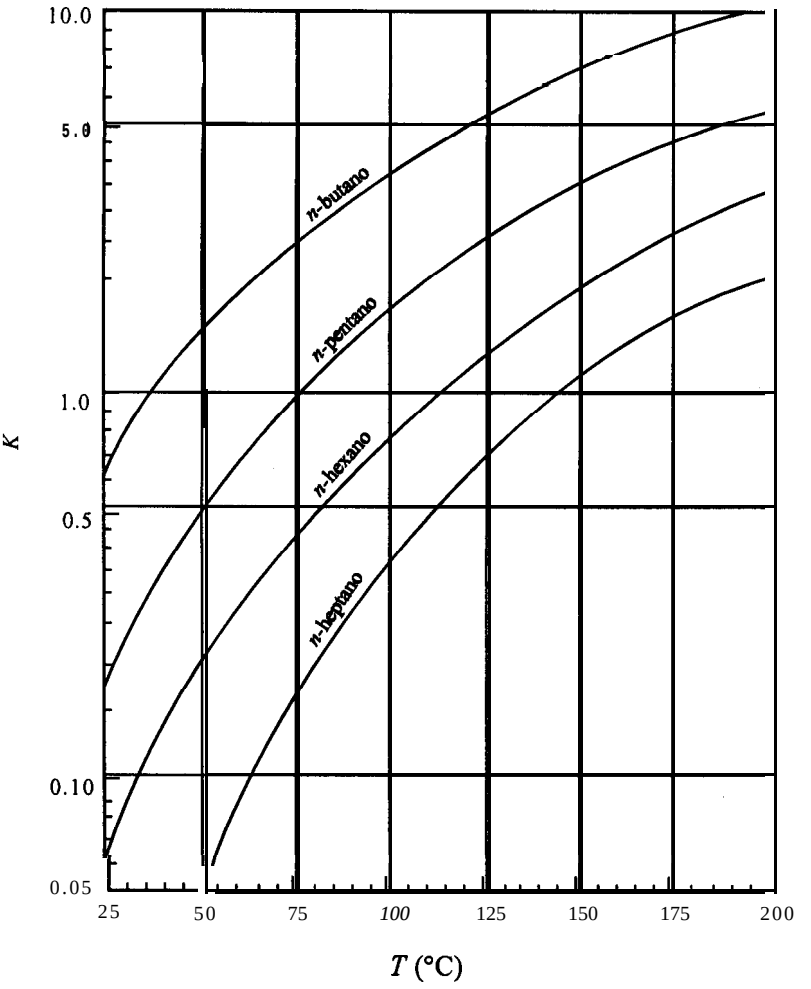


FIGURA 11.7-2. *Valores de K en equilibrio para sistemas de hidrocarburos ligeros a 405.3 kPa (4.0 atm) absolutos.*

El cálculo es un proceso de prueba y error, como se indica a continuación. Primero se supone la temperatura y se calculan los valores de α_i a partir de los valores de K_i a esa temperatura. Después se calcula el valor de K_C a partir de $K_C = 1.0/\Sigma\alpha_i x_i$. La temperatura correspondiente al valor calculado de $K_C = 1.0/\Sigma\alpha_i x_i$. La temperatura que corresponde al valor calculado de K_C se compara con la supuesta. Si los valores difieren, la temperatura calculada se usa para la siguiente iteración. Después de conocer la temperatura final, la composición del vapor se calcula a partir de

$$y_i = \frac{\alpha_i x_i}{\Sigma(\alpha_i x_i)} \tag{11.7-6}$$

2. Punto de rocío. Para el cálculo del punto de rocío, que también es por prueba y error,

$$\Sigma x_i = \Sigma\left(\frac{y_i}{K_i}\right) = \left(\frac{1}{K_C}\right)\Sigma\left(\frac{y_i}{\alpha_i}\right) = 1.0 \tag{11.7-7}$$

El valor de K_C se obtiene a partir de $K_C = \Sigma(y_i/\alpha_i)$. Cuando se conoce la temperatura final, la composición del líquido se calcula a partir de

$$x_i = \frac{y_i/\alpha_i}{\Sigma(y_i/\alpha_i)} \qquad \textbf{(11.7-8)}$$

EJEMPLO ll. 7-1. Punto de ebullición de un líquido con multicomponentes
Un líquido se alimenta auna torre de destilación a 405.3 kPa absolutos. Su composición en fracciones molares es como sigue: n-butano (x_A = 0.40), n-pentano (x_B = 0.25), n-hexano (x_C = 0.20) y n-heptano (x_D = 0.15). Calcule el punto de ebullición y el vapor en equilibrio con el líquido.

Solución: Primero se supone una temperatura de 65 °C y los valores de K se obtienen de la figura ll .7-2. Empleando el componente C (n-hexano) como componente base, se calculan los siguientes valores usando la ecuación (ll .7-5) para el primer intento:

	Intento 1 (65 "C)				*Intento 3 (70 "C) Final*			
comp.	x_i	K_i	$\frac{K_i}{Kc} = \alpha_i$	$\alpha_i x_i$	K_i	α_i	$\alpha_i x_i$	y_i
A	0.40	1.68	6.857	2.743	1.86	6.607	2.643	0.748
B	0.25	0.63	2.571	0.643	0.710	2.522	0.63 1	0.178
C	0.20	0.245	1.000	0.200	0.2815	1.000	0.200	0.057
D	0.15	0.093	0.380	0.057	0.110	0.391	0.059	0.017
	1.00		$\Sigma\alpha_i x_i$ =	3.643		Ca, x_i =	3.533	1.000

$K_C = 1/\Sigma\alpha_i x_i = 1/3.643 = 0.2745$ (69 "C) $K_C = 1/3.533 = 0.2830$ (70 "C)

El valor calculado de K_C es 0.2745, que corresponde a 69 °C, en la figura ll .7-2. Utilizando 69 °C para el segundo intento, se obtiene una temperatura de 70 "C.
Usando 70 °C para el tercer intento, los cálculos mostrados en la tabla dan un valor calculado final de 70 "C, que es el punto de burbuja. Los valores de y_i se obtienen a partir de la ecuación (11.7-6).

3. Destilación instantánea de una mezcla de multicomponentes. Para la destilación instantánea, el diagrama de flujo de proceso se muestra en la figura 11.3-l. Si se define $f = V/F$ como la fracción de la alimentación vaporizada y $(1 - f) = L/F$ como la fracción de la alimentación que queda como líquido, y se hace un balance del componente *i* como en la ecuación (ll .3-6), se obtiene lo siguiente:

$$y_l = \frac{f - 1}{f} x_{il} + \frac{x_{iF}}{f} \qquad (11.7\text{-}9)$$

donde y_i es la composición del componente *i* en el vapor, en equilibrio con x_i en el líquido después de la vaporización. Además, para el equilibrio, $y_i = K_i x_i = K_C \alpha_i x_i$, donde $\alpha_i = K_i/K_C$. Entonces, la ecuación (ll .7-9) se convierte en

$$y_i = K_c\alpha_i x_i = \frac{f}{f}^{l} + \frac{x_{iF}}{f} \qquad \textbf{(11.7-10)}$$

Despejando x_i y sumando todos los componentes,

$$\sum x_i = \sum \frac{x_{iF}}{f(K_C\alpha_i - 1) + 1} = 1.0 \qquad \textbf{(11.7-11)}$$

Esta ecuación se resuelve por prueba y error suponiendo primero una temperatura si ya se estableció la fracción f vaporizada. Cuando los valores $\sum x_i$ llegan a 1.0 es que se ha elegido la temperatura apropiada. La composición del vapor y_i se puede obtener a partir de $y_i = K_C\alpha_i x_i$ o mediante un balance de materia.

11.7D Componente8 fase en la destilación de multicomponentes

El fraccionamiento de una mezcla de multicomponentes en una torre de destilación permite la separación de sólo dos componentes. Para una mezcla de *A, B, C, D,* etc., una separación en una torre sólo se puede hacer entre *A* y *B,* o entre *B y* C, etc. Los componentes separados se llaman *fase ligera,* que es la más volátil (se identifica con el subíndice *L) y fase pesada (H).* Los componentes más volátiles que la fase ligera *se* llaman *componentes ligeros* y quedan en el residuo en pequeñas cantidades. Los componentes menos volátiles que la fase pesada se denominan *componentes pesados y* están presentes en el destilado en pequeñas cantidades. Los dos componentes fase se presentan en cantidades considerables tanto en el destilado como en el residuo.

11.7E Reflujo total para la destilación de multicomponentes

1. Etapas mínimas para el reflujo total, Al igual que en la destilación binaria, el número mínimo de etapas teóricas, N_m, se puede determinar para la destilación de multicomponentes para el reflujo total. La ecuación de Fenske (ll .4-23) también se aplica a dos componentes cualesquiera en un sistema de multicomponentes. Cuando se aplica a la fase pesada H y a la fase ligera *L, se* convierte en

$$N_m = \frac{\log[(x_{LD}D/x_{HD}D)(x_{HW}W/x_{LW}W)]}{\log(\alpha_{L,\text{prom}})} \qquad \textbf{(11.7-12)}$$

donde x_{LD} es la fracción mola1 de la fase ligera en el destilado, x_{LW} es la fracción mola1 en los fondos, x_{HD} es la fracción mol de la fase pesada en el destilado y x_{HW} es la fracción mol en el residuo. El valor promedio de α_L de la fase ligera se calcula a partir del α_{LD} a la temperatura superior (punto de rocío) de la torre y α_{LW} a la temperatura del residuo.

$$\alpha_{L,\text{prom}} = \sqrt{\alpha_{LD}\alpha_{LW}} \qquad \textbf{(11.7-13)}$$

Nótese que la estimación del punto de rocío del destilado y del punto de ebullición del residuo es parcialmente por prueba y error, ya que la distribución de los otros componentes del destilado y del residuo no se conoce y puede afectar estos valores.

2. Distribución de otros componentes. Para determinar la distribución o la concentración de otros componentes en el destilado y en los fondos en reflujo total, la ecuación (ll .7- 12) se puede reordenar

y escribirse para cualquier otro componente *i* como sigue:

$$\frac{x_{iD}D}{x_{iW}W} = (\alpha_{i,\text{prom}})^{Nm}\frac{x_{HD}D}{x_{HW}W} \qquad (11.7\text{-}14)$$

Estas concentraciones de los otros componentes determinados en reflujo total se pueden usar como aproximaciones con razones de reflujo mínimas y finitas. Métodos más exactos para el reflujo finito y mínimo se encuentran disponibles en otras obras (H2, S1, Vl).

EJEMPLO ll. 7-2. Cálculo de las temperaturas de la parte superior y del fondo y reflujo total

La alimentación líquida de 100 mol/h en el punto de ebullición dado en el ejemplo ll .7-1 se pasa a una torre de destilación a 405.3 kPa y se fracciona de modo que el 90% del n-pentano (B) se recupera en el destilado y 90% del n-hexano (C) en el residuo. Calcule lo siguiente.

a) Los moles por hora y la composición del destilado y del residuo.
b) La temperatura superior (punto de rocío) del destilado y el punto de ebullición del residuo.
c) Las etapas mínimas para el reflujo total y la distribución de otros componentes en el destilado y en el residuo.

Solución: Para el inciso a) se hacen balances de materia para cada componente, siendo el componente n-pentano (B) la fase ligera (L) y el n-hexano (C) la fase pesada (H). Para el balance general,

$$F = D + W \qquad (11.7\text{-}15)$$

Para el componente *B*, la fase ligera,

$$x_{BF}F = 0.25(100) = 25.0 = y_{BD}D + x_{BW}W \qquad (11.7\text{-}16)$$

Como el 90% de *B* está destilado, $y_{BD}D = (0.90)(25) = 22.5$. Por lo tanto, $x_{BW}W = 2.5$. Para el componente C, la fase pesada,

$$x_{CF}F = 0.20(100) = 20.0 = y_{CD}D + x_{CW}W \qquad (11.7\text{-}17)$$

Además, el 90% de C está en el residuo y $x_{CW}W = 0.90(20) = 18.0$. Entonces, $y_{CD}D = 2.0$. En el primer intento se supone que no hay un componente *D* (más pesado que la fase pesada C) en el destilado y que no hay un A ligero en el residuo. Por consiguiente, los moles de A en el destilado = $y_{AD}D = 0.40(100) = 40.0$. Además, los moles de *D* en el residuo = $x_{DW}W = 0.15(100) = 15.0$. Estos valores se tabulan en seguida.

	Alimentación, F		*Destilado, D*		*Fondos, W*	
Comp.	x_F	$x_F F$	$y_D = x_D$	$y_D D$	x_W	$x_W W$
A	0.40	40.0	0.620	40.0	0	0
B (Fase Ligera L)	0.25	25.0	0.349	22.5	0.070	2.5
C (Fase Pesada H)	0.20	20.0	0.03 1	2.0	0.507	18.0
D	0.15	15.0	0	0	0.423	15.0
	1.00	*F = 100.0*	*1.000*	*D = 64.5*	1.000	W = 35.5

Para determinar el punto de rocío del destilado (temperatura superior) del inciso b), se estima un valor de 67 °C en el primer intento. Los valores K se leen en la figura ll .7-2 y los valores de α se calculan. Utilizando las ecuaciones (ll .7-7) y (ll .7-8), se calculan los siguientes valores:

Comp.	y_{iD}	K_i(67 °C)	α_i	y_i/α_i	x_i
A	0.620	1.75	6.73	0.0921	0.351
B (L)	0.349	0.65	2.50	0.1396	0.531
C (H)	0.031	0.26	1.00	0.0310	0.118
D	0	0.10	0.385	0	0
	1.000		$\sum y_i/\alpha_i$ =	0.2627	1.000
	$K_c = \sum y_i/\alpha_i$ = 0.2627				

El valor calculado de K_C es 0.2627, que corresponde casi a 67 °C, que es la temperatura final del punto de rocío.

Para determinar el punto de burbuja del residuo, se supone una temperatura de 135 °C en el intento 1 y se usan las ecuaciones (11.7-S) y (ll .7-6) para los cálculos. Un segundo intento utilizando 132 °C da la temperatura final, como se muestra en seguida.

Comp.	x_{iW}	K_i	α_i	α_i/x_i	y_i
A	0	5.00	4.348	0	0
B (L)	0.070	2.35	2.043	0.1430	0.164
C (H)	0.507	1.15	1.000	0.5070	0.580
D	0.423	0.61	0.530	0.2242	0.256
	1.000		$\sum \alpha_i/x_i$ =	0.8742	1.000
	K_c = 110.8742 = 1.144				

El valor de K_C que se obtiene es 1.44, que es cercano al valor a 132 "C.
Para el inciso c), los valores α apropiados de la fase ligera L (n-pentano) para usar en la ecuación (11.7-13) son como sigue:

$$\alpha_{LD} = 2.50 \qquad (t = 67\ °C \text{ en la parte superior de la columna})$$

$$\alpha_{LW} = 2.04 \qquad (t = 132\ °C \text{ en el fondo de la columna})$$

$$\alpha_{L,\,\text{prom}} = \sqrt{\alpha_{LD}\,\alpha_{LW}} = \sqrt{2.50(2.04)} = 2.258 \qquad (11.7\text{-}13)$$

Al sustituir en la ecuación (ll .7-12),

$$N_m = \frac{\log[(0.349 \text{ x } 64.5 / 0.031 \text{ x } 64.5)(0.507 \text{ x } 35.5 / 0.070 \text{ x } 35.5)]}{\log(2.258)}$$

= 5.404 etapas teóricas (4.404 platos teóricos)

La distribución o composición de los otros componentes se puede calcular usando la ecuación (11.7-14). Para el componente A, el valor a promedio que se debe usar es

$$\alpha_{A,\,\text{prom}} = \sqrt{\alpha_{AD}\,\alpha_{AW}} = \sqrt{6.73 \times 4.348} = 5.409$$

$$\frac{x_{AD}D}{x_{AW}W} = (\alpha_{A,\text{prom}})^{N_m}\frac{x_{HD}D}{x_{HW}W} = (5.409)^{5.404}\frac{0.031(64.5)}{0.507(35.5)} = 1017 \qquad (11.7\text{-}14)$$

Si se hace un balance global para A,

$$x_{AF}F = 40.0 = x_{AD}D + x_{AW}W \qquad (11.7\text{-}18)$$

Al sustituir $x_{AD}D = 1017x_{AW}W$ de la ecuación (11.7-14) en la (11.7-18) y al resolver,

$$x_{AW}\text{ w} = 0.039, \qquad x_{AD}D = 39.961$$

Para la distribución del componente D, $\alpha_{D,\text{ prom}} = \sqrt{0.385 \times 0.530} = 0.452$

$$\frac{x_{DD}D}{x_{DW}W} = (\alpha_{D,\text{prom}})^{N_m}\frac{x_{HD}D}{x_{HW}W} = (0.452)^{5.404}\frac{0.031(645)}{0.507(35.5)} = 0.001521$$

$$x_{DF}F = 15.0 = x_{DD}D + x_{DW}W$$

Al resolver, $x_{DD}D = 0.023$, $x_{DW}W = 14.977$.
Las composiciones revisadas del destilado y del residuo son las siguientes.

	Destilado. D		*Residuo, W*	
comp.	$Yo = x_D$	x_DD	x_w	x_wW
A	0.6197	39.961	0.0011	0.039
B (L)	0.3489	22.500	0.0704	2.500
C (H)	0.0310	2.000	0.5068	18.000
D	0.0004	0.023	0.4217	14.977
	1.0000	*D = 64.484*	1.0000	*W = 35.516*

Por tanto, los moles de D en el destilado son muy pocos, como lo son los moles de A en el residuo.
Cuando se utiliza la nueva composición del destilado, un nuevo cálculo del punto de rocío suponiendo 67 °C da un valor calculado de $K_C = 0.2637$. Este valor está muy próximo al de 0.2627 que se obtuvo cuando las trazas de D en el destilado se consideraron como cero. Por tanto, el punto de rocío es 67 "C. Si se repite el cálculo del punto de burbuja para el residuo suponiendo 132 "C, se obtiene un valor de $K_C = 1.138$, que está muy cerca del valor a 132 "C. Por consiguiente, el punto de burbuja sigue estando a 132 "C. Si se observa que cambia la temperatura ya sea del punto de burbuja o del punto de rocío, los nuevos valores deberán usarse para obtener de nuevo N_m.

11.7F Método corto para la razón de reflujo mínimo para la destilación de multicomponentes

Como en el caso de la destilación binaria, la relación de reflujo mínimo R_m es aquella que requerirá un número infinito de platos para la separación dada de los componentes fase.

En la destilación binaria sólo ocurre un "punto pinch" en el cual el número de etapas se vuelve infinito, y esto suele ser el platillo de alimentación. En la destilación de multicomponentes ocurren dos puntos "pinch" o zonas de composición constante: uno en la sección por arriba del plato de alimentación y otro por debajo del mismo. El procedimiento riguroso plato por plato para calcular R_m es por prueba y error y puede ser extremadamente tedioso si los cálculos se hacen a mano.

El método corto de Underwood para calcular R_m (U1, U2) emplea valores α promedio constantes y también supone flujos constantes en ambas secciones de la torre. Este método brinda un valor razonablemente preciso. Las dos ecuaciones para determinar la relación de reflujo mínimo son

$$1 - q = \sum \frac{\alpha_i x_{IF}}{\alpha_i - \theta} \qquad \textbf{(11.7-19)}$$

$$R_m + 1 = \sum \frac{\alpha_i x_{iD}}{\alpha_i - \theta} \qquad \textbf{(11.7-20)}$$

Los valores de x_{iD} para cada componente del destilado en la ecuación (ll .7-20) se supone que son los valores en el reflujo mínimo. Sin embargo, como una aproximación, se utilizan los valores obtenidos mediante la ecuación de reflujo total de Fenske. Como cada α_i puede variar con la temperatura, el valor promedio de α_i que se usa en las ecuaciones precedentes se aproxima usando α_i a la temperatura promedio de la parte superior y del fondo de la torre. Algunos (P 1, S1) han usado el α promedio empleado en la ecuación de Fenske o el α a la temperatura de la alimentación que entra. Para despejar R_m, primero se obtiene el valor de θ en la ecuación (ll .7-19) por prueba y error. Este valor de θ se encuentra entre el valor α de la fase ligera y el valor α de la fase pesada, que es 1.0. Utilizando este valor de θ en la ecuación (ll .7-20), se obtiene directamente el valor de R_m. Cuando aparecen componentes distribuidos entre los componentes fase, se pueden usar los métodos modificados descritos por otros autores (S1, T2, Vl).

11.7G Métodos cortos para el número de etapas a la relación de reflujo de operación

1. Número de etapas en la razón de reflujo de operación. La determinación del número mínimo de etapas para el reflujo total de la sección 11.7E y la determinación de la razón de reflujo mínimo de la sección ll .7F son útiles para establecer los intervalos permisibles del número de etapas y las condiciones de flujo. Estos intervalos ayudan a seleccionar las condiciones de operación particulares para un cálculo de diseño. Los procedimientos relativamente complejos y rigurosos para efectuar un cálculo etapa por etapa en cualquier relación de operación se analizaron en la sección ll .7A.

Un método corto importante para determinar el número teórico de etapas para una relación de reflujo de operación R es la correlación empírica de Erbar y Maddox (El) de la figura ll .7-3. Esta correlación es un tanto semejante a la de Gilliland (G1) y debe considerarse como un método aproximado. En la figura ll .7-3, la razón de reflujo de operación R (para flujos en la parte superior de la columna) se correlaciona con el valor R_m mínimo que se obtuvo usando el método de Underwood, con el número mínimo de etapas N_m que se obtuvo con el método de Fenske y con el número de etapas N en la R de operación.

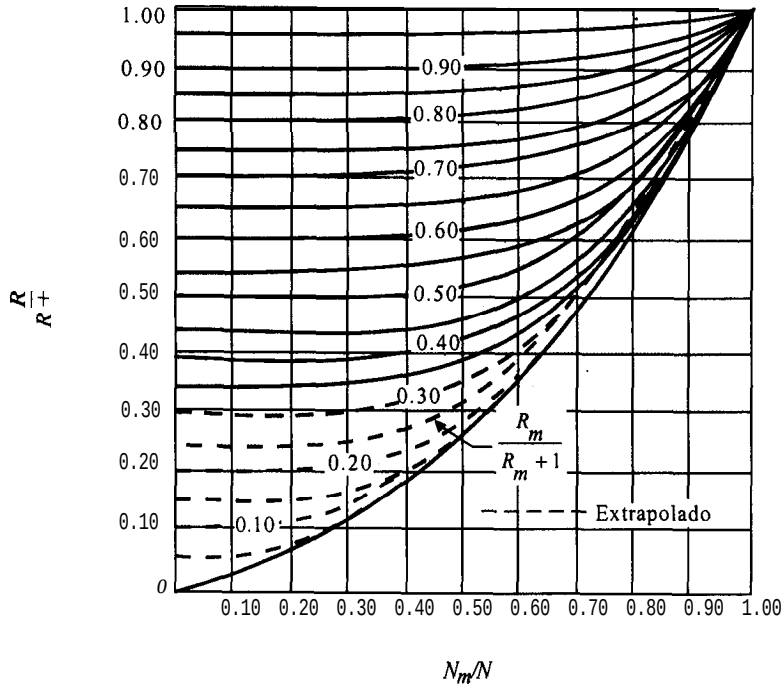


FIGURA 11.7-3. *Correlación de Erbar y Maddox entre la relación de reflujo y el número de etapas (Rm se basa en el método de Underwood.) [De J. H. Erbar, R. N. Maddox, Petrol. Refiner. 40 (5), 183 (1961). Con autorización.]*

2. Estimación de la ubicación del plato de alimentación. Kirkbride (K1) propuso un método aproximado para calcular el número de etapas teóricas arriba y abajo de la alimentación que se puede utilizar para estimar la ubicación de la etapa de alimentación. Esta relación empírica es como sigue:

$$\log \frac{N_e}{N_s} = 0.206 \log \left[\left(\frac{x_{HF}}{x_{LF}} \right) \frac{W}{D} \left(\frac{x_{LW}}{x_{HD}} \right)^2 \right] \tag{11.7-21}$$

donde N_e es el número de etapas teóricas arriba del plato de alimentación y N_s es el número de etapas teóricas por debajo del plato de alimentación.

EJEMPLO 11.7-3. Razón de reflujo mínimo y número de etapas con la razón de reflujo de operación

Utilice las condiciones y los resultados el ejemplo 11.7-2 para calcular lo siguiente.

a) La razón de reflujo mínimo utilizando el método de Underwood.
b) El número de etapas teóricas enunarazón de reflujo de operación R de 1.5 R_m usando la correlación de Erbar-Maddox.
c) La ubicación del plato de alimentación utilizando el método de Kirkbride.

Solución: Para el inciso a), la temperatura que hay que usar para determinar los valores de α_i es el promedio entre la superior de 67 °C y la del fondo de 132 °C (del ejemplo 11.7-2) y es (67 + 132)/2 o 99.5 "C. Los valores K_i que se obtuvieron a partir de la figura

ll .7-2 y los valores α_i y las composiciones del destilado y de la alimentación para las ecuaciones (ll .7- 19) y (ll .7-20) son como sigue:

Comp.	x_{iF}	x_{iD}	K_i(99.5 °C)	α_i(99.5 °C)	x_{iW}
A	0.40	0.6197	3.12	5.20	0.0011
B (L)	0.25	0.3489	1.38	2.30	0.0704
C (H)	0.20	0.0310	0.60	1.00	0.5068
D	0.15	0.0004	0.28	0.467	0.4217
	1.00	1.0000			1.0000

Al sustituir en la ecuación (ll .7-19) con q = 1 .O para la alimentación en el punto de ebullición,

$$1 - q = 1 - 1 = 0 = \frac{5.20(0.40)}{5.20 - \theta} + \frac{2.30(0.25)}{2.30 - \theta} + \frac{1.00(0.20)}{1.00 - \theta} + \frac{0.467(0.15)}{0.467 - \theta} \qquad (11.7\text{-}22)$$

Esto es por prueba y error, de modo que se usará un valor de θ = 1.210 para el primer intento (θ debe quedar entre 2.30 y 1.00). Éste y otros intentos se muestran en seguida.

	2.08	0.575	0.200	0.070	
θ (Supuesto)	5.2 − θ	2.3 − θ	1.0 − θ	0.467 − θ	$\sum$ (Suma)
1.210	0.5213	0.5275	-0.9524	-0.0942	+0.0022
1.200	0.5200	0.5221	-1 .oooo	-0.0955	-0.0528
1.2096	0.5213	0.5273	-0.9542	-0.0943	+0.0001

El valor final de θ = 1.2096 se sustituye en la ecuación (11.7-20) para despejar R_m.

$$R_m + 1 = \frac{5.20(0.6197)}{5.20 - 1.2096} + \frac{2.30(0.3489)}{2.30 - 1.2096} + \frac{1.00(0.031)}{1.00 - 1.2096} + \frac{0.467(0.0004)}{0.467 - 1.2096}$$

Al resolver, R_m = 0.395.

Para el inciso b) se calculan los siguientes valores. $R = 1.5R_m = 1.5(0.395) = 0.593$, $R/(R + 1) = 0.593/(0.593 + 1.0) = 0.3723$, $R_m/(R_m + 1) = 0.395/(0.395 + 1.0) = 0.2832$. A partir de la figura ll .7-3, $N_m/N = 0.49$. Por lo tanto, $N_m/N = 0.49 = 5.40/N$. Al resolver, N = ll .O etapas teóricas en la torre. Esto da ll .O − 1 .O (hervidor) o 10.0 platos teóricos.

Para la ubicación del platillo de alimentación en el inciso c), se usa la ecuación (11.7-21),

$$\log\frac{N_e}{N_s} = 0.206 \log\left[\left(\frac{0.20}{0.25}\right)\frac{35.516}{64.484}\left(\frac{0.0704}{0.0310}\right)^2\right] = 0.07344$$

Por lo que $N_e/N_s = 1.184$. Además, $N_e + N_s = 1.184\ N_s + N_s = N = 11.0$ etapas.

Resolviendo, $N_s = 5.0$ y $N_e = 6.0$, esto significa que el plato de alimentación está a 6.0 platos de la parte alta.

PROBLEMAS

ll .1-1. ***Regla de las fasespara un sistema de vapor.*** Calcule el número de grados de libertad para el sistema NH_3-agua existiendo una sola fase de vapor. ¿Qué variables se pueden fijar?

Respuesta: $F = 3$ grados de libertad; las variables T, P, y_A

11.1-2. ***Punto de ebullición y ley de Raoult.*** Con los datos de la tabla 11. l-l, proceda a lo siguiente para el sistema benceno-tolueno:

a) Calcule y_A y x_A a 378.2 K, con la ley de Raoult.

b) ¿Podrá hervir una mezcla con composición $x_A = 0.40$ a 358.2 K y 101.32 kPa de presión? De no ser así, ¿a qué temperatura hervirá y cuál sera la composición del primer vapor que se desprenda?

11.1-3. ***Cálculo del diagrama de puntos de ebullición.*** A continuación se muestran datos de presión de vapor para el sistema hexano-octano:

		Presión de vapor			
		n-Hexano		*n-Octano*	
T(°F)	*T(°C)*	*kPa*	*m m H g*	*kPa*	*mm Hg*
155.7	68.7	101.3	760	16.1	121
17.5	79.4	136.7	1025	23.1	173
200	93.3	197.3	1480	37.1	278
225	107.2	284.0	2130	57.9	434
258.2	125.7	456.0	3420	101.3	760

a) Calcule y grafique los datos xy a una presión total de 101.32 kPa, usando la ley de Raoult.

b) Construya el diagrama de puntos de ebullición.

11.2-l. ***Contacto de una sola etapa para un sistema vapor-liquido.*** Una mezcla de 100 mol que contiene 60% mol de n-pentano y 40% mol de n-heptano se vaporiza a 101.32 kPa abs de presión hasta que se producen 40 mol de vapor y 60 mol de líquido en equilibrio. Esto se lleva a cabo en un sistema de una sola etapa y el vapor y el líquido se mantienen en contacto entre sí hasta que lavaporización es completa. Los datos de equilibrio se muestran en el ejemplo ll .3-2. Calcule la composición del vapor y del líquido.

11.3-l. ***Volatilidad relativa de un sistema binario.*** Usando los datos de equilibrio para el sistema *n*-pentano-n-heptano del ejemplo ll .3-2, calcule la volatilidad relativa para cada concentración y grafique α en función de la composición de líquido x_A.

11.3-2. ***Comparación de destilación diferencialy repentina.*** Una mezcla de 1 OO kg mol que contiene 60% mol de n-pentano (A) y 40% de mol de n-heptano (B) se vaporiza a 101.32 kPa de presión en condiciones diferenciales hasta destilar 40 kg mol. Use los datos de equilibrio del ejemplo 11.3-2:

a) ¿Cuál es la composición promedio del vapor total destilado y la composición del líquido remanente?

b) Si esta misma vaporización se lleva a cabo en una destilación de equilibrio o instantánea y se destilan 40 kg mol, ¿cuál será la composición del vapor destilado y la del líquido remanente?

Respuesta: a) $x_2 = 0.405$, $y_{prom} = 0.892$; b) $x_2 = 0.430$, $y_2 = 0.854$

11.3-3. ***Destilación diferencial de benceno-tolueno.*** Una mezcla que contiene 70% mol de benceno y 30% mol de tolueno se destila en condiciones diferenciales a 101.32 kPa (1 atm). Se vaporiza un total de un tercio de los moles en la alimentación. Calcule la composición promedio del destilado y la composición del líquido remanente. Use los datos de equilibrio de la tabla ll. 1 - 1.

11.3-4. ***Destilación de etilanilina con arrastre de vupor.*** Una mezcla contiene 100 kg de H_2O y 1 OO kg de etilanilina (peso molecular = 12 1.1 kg/kg mol), inmiscible en agua. El compuesto orgánico tiene una pequeña cantidad de impurezas no volátiles disueltas. Para purificar, la etilanilina se destila con arrastre de vapor, haciendo burbujear vapor saturado en la mezcla a presión total de 101.32 kPa (1 atm). Determine el punto de ebullición de la mezcla y la composición del vapor. La presión de vapor de cada uno de los componentes puros es como sigue (Tl):

Temperatura		P_A *(agua)*	P_B *(etilanilina)*
K	*° C*	*kPa*	*kPa*
353.8	80.6	48.5	1.33
369.2	96.0	87.7	2.67
372.3	99.15	98.3	3.04
386.4	113.2	163.3	5.33

11.3-5. ***Destilación de benceno con arrastre de vapor.*** Una mezcla de 50 g mol de benceno líquido y 50 g mol de agua hierve a 101.32 kPa. (El benceno líquido es inmiscible en agua.) Determine el punto de ebullición de la mezcla y la composición del vapor. ¿Cuál es el primer componente que se elimina por completo del destilador? Los datos de presión de vapor de los componentes puros son:

Temperatura		P_{agua}	$P_{benceno}$
K	*°C*	*(mm Hg)*	*(mm Hg)*
308.5	35.3	43	150
325.9	52.7	106	300
345.8	72.6	261	600
353.3	80.1	356	760

11.4-1. ***Destilación por medio del método de McCabe-Thiele.*** Una columna de rectificación se alimenta con 100 kg mol/h de una mezcla de 50% mol de benceno y 50% mol de tolueno a 101.32 kPa de presión absoluta. La alimentación es un líquido a su punto de ebullición. El destilado debe contener 90% mol de benceno y el residuo 10% mol de benceno. La relación de reflujo es 4.52: 1. Calcule los kg mol/h de destilado, los kg mol/h de residuo y el número de platos teóricos necesarios por medio del método de McCabe-Thiele.

Respuesta: D = 50 kg mol/h, W = 50 kg mol/h, 4.9 platos teóricos más un hervidor.

11.4-2. ***Rectificación de una mezcla de heptano-etilbenceno.*** Se desea fraccionar una alimentación de líquido saturado de 200 mol/h al punto de ebullición, que contiene 42% mol de heptano y 58% mol de etilbenceno a 101.32 kPa abs, para obtener un destilado con 97% mol de heptano

y un residuo que contenga 1.1% mol de heptano. La relación de reflujo es 2.5: 1. Calcule las mol/h de destilado, mol/h de residuo, el numero teórico de platos y el número de platos de alimentación. A continuación se proporcionan los datos de equilibrio a 101.32 kPa abs para la fracción mol de n-heptano x_H y y_H:

Temperatura				*Temperatura*			
K	*°C*	x_H	y_H	*K*	*°C*	x_H	y_H
409.3	136.1	0	0	383.8	110.6	0.485	0.730
402.6	129.4	0.08	0.230	376.0	102.8	0.790	0.904
392.6	119.4	0.250	0.514	371.5	98.3	1.000	1.000

Respuesta: D = 85.3 mol/h, W = 114.7 mol/h, 9.5 platos más un hervidor, la alimentación se introduce en el plato 6 contando desde la parte superior.

11.4-3. Solución *gráfica para* una razón *de reflujo mínima y total.* Calcule las siguientes variables por medio de métodos gráficos, para la rectificación del problema ll .4-1, donde se destila una alimentación líquida equimolar de benceno y tolueno para obtener un destilado de composición x_D = 0.90 y residuo de composición x_W = 0.10:

a) Razón de reflujo mínimo, R_m
b) Número mínimo de platos teóricos y reflujo total.

Respuesta: a) R_m = 0.91; b) 4.0 platos teóricos más un hervidor.

11.4-4. *Número mínimo de platos teóricos y razón de reflujo mínimo.* Determine la relación de reflujo mínimo R_m y el número mínimo de platos teóricos con reflujo total para la rectificación de una mezcla de heptano y etilbenceno, como la del problema ll .4-2. Proceda por medio de métodos gráficos de McCabe-Thiele.

11.4-5. *Rectificación mediante una alimentación parcialmente vaporizada.* Se desea fraccionar una alimentación total de 200 mol/h que tiene una composición total de 42% mol de heptano y 58% mol de etilbenceno a 101.3 kPa de presión, para obtener un destilado que contenga 97% mol de heptano y residuo con 1.1% mol de heptano. La alimentación entra a la torre parcialmente vaporizada, por lo que 40% mol es líquido y 60% mol es vapor. Los datos de equilibrio son los del problema ll .4-2. Calcule:

a) Moles por hora de destilado y de residuo.
b) Razón de reflujo mínimo $R_,$,
c) Etapas mínimas y platos teóricos con reflujo total.
d) Número teórico de platos que se requieren para una razón de reflujo de operación de 2.5: 1. Compare con los resultados del problema ll .4-2, que usa alimentación de líquido saturado.

11.4-6. *Destilación mediante una alimentación de vapor.* Repita el problema 11.4-l pero con una alimentación que es vapor saturado a su punto de rocío. Calcule lo siguiente:

a) Razón de reflujo mínimo $R_,$.
b) Número mínimo de platos teóricos con reflujo total.
c) Número teórico de platos con una razón de reflujo de operación de 1.5 $(R_,)$.

11.4-7. *Torre de enriquecimiento para benceno-tolueno.* En una torre de enriquecimiento se procesan 100 kg mol/h de una alimentación de vapor saturado que contiene 40% mol de benceno (A) y 60% mol de tolueno (B) a 101.32 kPa abs. El destilado debe contener 90% mol de benceno. La razón de reflujo se fija a un valor de 4.0: 1. Calcule las mol kg/h de destilado D y el residuo W, así como sus composiciones. Además, calcule el número de platos teóricos que se requieren.

Respuesta: D = **20** kg mol/h, W = 80 kg mol/h, x_W = 0.275

11.4-S. ***Torre de empobrecimiento.*** Una mezcla líquida que contiene 10% mol de n-heptano y 90% mol de n-octano se alimenta a su punto de ebullición por la parte superior de una torre de empobrecimiento a 101.32 kPa abs. El residuo debe contener 98% mol de n-octano. Se extraen 2 moles de vapor por cada 3 moles de alimentación. Calcule la composición de vapor y el número de platos teóricos requeridos. Los datos de equilibrio que se muestran a continuación corresponden a fracción mol de n-heptano:

x	y	x	y
0.284	0.459	0.039	0.078
0.097	0.184	0.012	0.025
0.067	0.131		

11.4.9. ***Torre de empobrecimiento e inyección directa de vapor. Una*** corriente de alimentación líquida a su punto de ebullición contiene 3.3% mol etanol y 96.7% mol de agua y entra por el plato superior de una torre de empobrecimiento. Se inyecta vapor saturado directamente al líquido en el fondo de la torre. El vapor superior que se extrae contiene 99% del alcohol de la alimentación. Suponga un derrame equimolarpara este problema. La tabla inferior contiene los datos de equilibrio para la fracción mol de alcohol a 101.32 kPa de (1 atm abs):

x	y	x	y
0	0	0.0296	0.250
0.0080	0.0750	0.033	0.270
0.020	0.175		

a) Para un número infinito de etapas teóricas, calcule el mínimo de moles de vapor necesarias por cada mol de alimentación. *(Nota:* Aseguírese de graficar la línea q.)
b) Empleando el doble de mínimo de moles de vapor, calcule el numero de etapas teóricas necesarias, la composición del vapor superior y la composición del residuo.

Respuesta: a) 0.121 moles de vapor/mol de alimentación;
b) 5.0 etapas teóricas, $x_D = 0.135$, $x_W = 0.00033$

ll .5-1. ***Eficiencia de Murphree y número real de platos.*** Para *la* destilación de heptano y etilbenceno del problema ll **.4-2,** se estima que la eficiencia de platos de Murphree es 0.55. Determine el número real de platos que se necesitan escalonando los platos y usando una eficiencia de platos de 0.55. Además, calcule la eficiencia total de los platos E_O.

ll .6-1. ***Uso del método de entalpía y concentración*** *para* ***destilar una solución*** *de etanol y agua.* Una mezcla de 50% en peso de etanol y 50% en peso de agua que es un líquido saturado en el punto de ebullición, se va a destilar a 101.3 3 kPa para dar un destilado que contenga 85% en peso de etanol y un residuo que contenga 3% en peso de etanol. ka tasa de alimentación es de 453.6 kg/h y se usará una razón de reflujo de 1.5. Utilice los datos de equilibrio y entalpía del Apéndice A.3. Observe que los datos están dados en fracción peso y en kJ/kg. Utilice estas unidades de manera congruente al graficar los datos de entalpía y concentración y los datos de equilibrio. Haga lo siguiente.
a) Calcule la cantidad de destilado y de residuo
b) Calcule el número de platos teóricos necesarios.
c) Calcule las cargas del condensador y del hervidor.

Respuesta: a) $D = 260.0$ kg/h, $W = 193.6$ kg/h
b) 3.9 platos más hervidor
c) $q_C = 698\ 750$ kJ/h, $q_R = 704\ 770$ kJ/h

11.6-2. ***Destilación de una solución de etanol-agua usando el método de entalpia-concentración.*** Repita el ejemplo 11.6-1, ahora con una relación de reflujo de 2.0 en lugar de 1.5.

Respuesta: 3.6 platos teóricos más hervidor

ll .6-3. ***Reflujo minimoy número teórico deplatos.*** Se desea destilar una alimentación de etanol-agua que contiene 60% en peso de etanol a 101.32 kPa de presión, para obtener un destilado que contenga 85% en peso de etanol y un residuo que contenga 2% en peso de etanol. La velocidad de alimentación es de 10000 kg/h y su entalpía es 116.3 kJ/kg (50 btu/lb_m). Utilice de manera congruente las unidades de kg/h, fracción de peso y kJ/kg.

a) Calcule las cantidades de destilado y de residuo.
b) Determine la razón de reflujo mínimo usando los datos de entalpía-concentración del Apéndice A.3.
c) Usando 2.0 veces la razón de reflujo mínimo, determine el número teórico de platos que se necesitan.
d) Calcule las cargas de calor del condensador y del hervidor.
e) Determine el número mínimo de platos teóricos con reflujo total.

Respuesta: b) $R_m = 0.373$
c) 4.4 platos teóricos más hervidor
d) $q_C = 3634$ kW, $q_R = 4096$ kW
e) 2.8 platos teóricos más hervidor.

11.6-4. ***Destilación de una alimentación de benceno y tolueno utilizando el método de entalpia y concentración.*** Una alimentación líquida de 1 OO kg mol/h de benceno-tolueno en el punto de ebullición contiene 55% mol de benceno y 45% mol de tolueno. Se destila a 101.32 kPa de presión para dar un destilado con x_D = 0.98 y un residuo de x_W = 0.04. Utilizando una razón de reflujo de 1.3 veces el mínimo y el método de entalpía y concentración, haga lo siguiente.

a) Determine el numero teórico de platos necesarios.
b) Calcule las cargas de calor en el condensador y en el hervidor.
c) Determine el numero mínimo de platos teóricos a reflujo total.

11.6-5. ***Uso de la gráfica de entalpiay concentración.*** Para el sistema de benceno y tolueno, haga lo siguiente:

a) Grafique los datos de entalpía y concentración usando los valores de la tabla ll .6-2. Para un valor de x = 0.60 = y, calcule la entalpía h del líquido saturado y la entalpía H del vapor saturado y grafique esos datos.
b) Una mezcla contiene 60 mol de benceno y 40 mol de tolueno. Esta mezcla se calienta hasta que se producen 30 mol de vapor. La mezcla esta en equilibrio. Determine la entalpía de esta mezcla general y grafique este punto sobre el diagrama de entalpía-concentración.

11.7-1. ***Vaporización instantánea de una alimentación de multicomponentes.*** Para la alimentación a la torre de destilación del ejemplo ll. 1.-1, calcule lo siguiente.

a) El punto de rocío de la alimentación y la composición del líquido en equilibrio. (Nota: El punto de ebullición de 70 °C ya se había calculado.)
b) La temperatura y la composición de ambas fases cuando el 40% de la alimentación se vaporizó en una destilación instantánea.

Respuesta: a) 107 °C, x_A = 0.114, x_B = 0.158, x_C = 0.281, x_D = 0.447;
b) 82 °C, x_A = 0.260, x_B = 0.254, x_C = 0.262, x_D = 0.224;
y_A = 0.610, y_B = 0.244, y_C = 0.107, y_D = 0.039

11.7-2. ***Punto de ebullición, punto de rocio y vaporización instantánea.*** En seguida se da la composición de una alimentación líquida en fracción molar: n-butano (x_A = 0.35), n-pentano,

(x_B = 0.20), n-hexano, (x_C = 0.25), n-heptano, (x_D = 0.20). A una presión de 405.3 kPa, calcule lo que sigue:

a) El punto de ebullición y la composición del vapor en equilibrio.
b) El punto de rocío y la composición del líquido en equilibrio.
c) La temperatura y la composición de ambas fases cuando el 60% de la alimentación se ha vaporizado en una destilación instantánea.

11.7-3. ***Vaporización de una mezcla de alcoholes de multicomponentes.*** Los datos de vapor-presión para los siguientes alcoholes se dan en seguida.

	Presión de vapor (mm Hg)			
T(°C)	*Metanol*	*Etanol*	*n-propanol*	*n-butanol*
50	415	220.0	88.9	33.7
60	629	351.5	148.9	59.2
65	767	438	190.1	77.7
70	929	542	240.6	99.6
75	1119	665	301.9	131.3
80	1339	812	376.0	165.0
85	1593	984	465	206.1
90	1884	1185	571	225.9
100	2598	1706	843	387.6

La siguiente composición es la de una mezcla líquida de alcoholes que se va a alimentar a una torre de destilación a 101.32 kPa: alcohol metílico (x_A = 0.30), alcohol etílico (x_B = 0.20), alcohol n-propílico (x_C = 0.15), y alcohol *n*-butílico (x_D = 0.35). Calcule lo siguiente suponiendo que la mezcla sigue la ley de Raoult,

a) El punto de ebullición y la composición del vapor en equilibrio.
b) El punto de rocío y la composición del líquido en equilibrio.
c) La temperatura y la composición de ambas fases cuando el 40% de la alimentación se ha vaporizado en una destilación instantánea.

Respuesta: a) 83 °C, y_A = 0.589, y_B = 0.241, y_C = 0.084, y_D = 0.086
b) 100 °C, x_A = 0.088, x_B = 0.089, x_C = 0.136, x_D = 0.687

11.7-4. ***Reflujo total, reflujo mínimo, número de etapas.*** La siguiente alimentación de 1 OO mol/h en el punto de ebullición y a 405.3 kPa de presión se alimenta auna torre fraccionadora: n-butano (x_A = 0.40), n-pentano (x_B = 0.25), n-hexano (x_C = 0.20) y n-heptano (x_D = 0.15). Esta alimentación se destila de manera que el 95% del n-pentano se recupera en el destilado y el 95% del n-hexano se recupera en el residuo. Calcule lo siguiente.

a) Las moles por hora y la composición del destilado y el residuo. ,
b) Las temperaturas de la parte superior y del fondo de la torre.
c) Las etapas mínimas para el reflujo total y la distribución de otros componentes (componentes traza) en el destilado y en el residuo, es decir, los moles y las fracciones molares. [También corrija las composiciones y moles del inciso (a) para las trazas.]
d) La razón de reflujo mínimo utilizando el método de Underwood.
e) El número de etapas teóricas a una razón de reflujo de operación de 1.3 veces el mínimo, utilizando la correlación de Erbar-Maddox.
f) La ubicación del plato de alimentación usando el métodod de Kirkbride.

Respuesta: a) D = 64.75 mol/h, x_{AD} = 0.6178, x_{BD} = 0.3668, x_{CD} = 0.0154, x_{DD} = 0; W = 35.25 mol/h, x_{AW} = 0, x_{BW} = 0.0355, x_{CW} = 0.5390, x_{DW} = 0.4255;
b) arriba 66 °C; abajo 134 °C; N_m = 7.14 etapas; composiciones de las trazas, $x_{AW} = 1.2 \times 10^{-4}$, $x_{DD} = 4.0 \times 10^{-5}$;
d) R_m = 0.504;

e) N = 16.8 etapas;
f) N_e = 9.1 etapas, N_s = 7.7 etapas, alimentación en 9.1 etapas desde la parte superior.

11.7-5. ***Diseño por método corto de una torre de destilación de multicomponentes.*** Una alimentación formada por una parte líquida y una parte de vapor (q = 0.30) a 405.4 kPa se alimenta a razón de 1000 mol/h a una torre de destilación. La composición global de la alimentación es n-butano (x_A = 0.35), n-pentano (x_B = 0.30), n-hexano (x_C = 0.20) y n-heptano (x_D = 0.15). La alimentación se destila de modo que el 97% de n-pentano se recupera en el destilado y el 85% del n-hexano se recupera en el residuo. Calcule lo siguiente:

a) La cantidad y la composición de los productos y las temperaturas en la parte superior.
b) El número de etapas en el reflujo total y la distribución de los otros componentes en los productos.
c) La relación de reflujo mínimo, el número de etapas a 1.2 R_m y la ubicación del plato de alimentación.

11.7-6. ***Destilación de una mezcla de alcoholes de multicomponentes.*** Una alimentación de 30% mol de metano1 (A), 20% de etanol (B), 15% de n-propano1 (C) y 35% de n-butano1 (D) se destila a 101.32 kPa para dar una composición del destilado que contiene 95.0% mol de metano1 y una composición residual que contiene 5.0% de metano1 y los otros componentes como se calculó. La alimentación está por debajo del punto de ebullición, de modo que q = 1.1. La razón de reflujo operativa es 3.0. Suponga que se cumple la ley de Raoult y utilice los datos de vapor-presión del problema 11.7-3. Calcule lo siguiente:

a) La composición y las cantidades del destilado y el residuo para una alimentación de 100 mol/h.
b) Las temperaturas de la parte superior y del residuo y el número de etapas a reflujo total. (Calcule también la distribución de los otros componentes.)
c) La relación de reflujo mínimo, el número de etapas a R = 3.00 y la ubicación del plato de alimentación.

Respuesta: a) D = 27.778 mol/hr x_{AD} = 0.95, x_{BD} = 0.05, x_{CD} = 0, x_{DD} = 0;
W = 72.222 mol/h, x_{AW} = 0.0500, x_{BW} = 0.2577, x_{CW} = 0.2077, x_{DW} = 0.4846;
b) 65.5 °C, temperatura superior; 94.3 °C, temperatura del fondo; N_m = 9.21 etapas, x_{CD} = 3.04 x 1 o-s, x_{DD} = 8.79 x 10^{-7} (composición de las trazas);
c) R_m = 2.20, N = 16.2 etapas, N_s = 7.6, N_e = 8.6, alimentación en la etapa 8.6 desde la parte superior.

11.7-7. ***Método corto de diseñopara la destilación de una mezcla ternaria.*** Una alimentación líquida a su punto de burbuja se va a destilar en una torre de platos para producir el destilado y el residuo como sigue. Alimentación, x_{AF} = 0.047; x_{BF} = 0.072, x_{CF} = 0.881; destilado, x_{AD} = 0.1260; x_{BD} = 0.1913, x_{CD} = 0.6827; fondos, x_{AW} = 0, x_{BW} = 0.001, x_{CW} = 0.999. Los valores α promedio por usar son α_A = 4.19, α_B = 1.58, α_C = 1.00.

a) Para una tasa de alimentación de 100 molk, calcule D y W, el número de etapas a reflujo total y la distribución (concentración) de A en el residuo.
b) Calcule R_m y el número de etapas a 1.25 R_m.

REFERENCIAS

(D1) **Depriester,** C. L. *Chem. Eng. Progr. Symp. Ser.,* **49**(7), 1(1953).
(E1) **Erbar, J. H. y Maddox, R.N.** *Petrol. Refiner,* **40**(5), 183(1961).
(G1) **Gilliland, E. R.** *Ind. Eng. Chem., 32,* 1220(1940).
(H1) **Hadden,** S. T. *y* **Grayson, H.** *G. Petrol. Refiner,* **40**(9), 207(1961).

(H2) **HOLLAND,** *C.* D. *Multicomponent Distillation,* Englewood Cliffs, Nueva York: Prentice-Hall, 1963.

(K1) **KIRKBRIDE,** *C. G., Petrol. Refiner, 23,* 32(1944).

(K2) **KWAUK, M.** *A.I.Ch.E.J., 2, 240 (1956).*

(K3) KING, *C.* J., *Separation Processes,* 2a. ed., Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1980.

(O1) **O'CONNELL, H. E.** *Trans. A.I. Ch. E., 42,* 741(1946).

(P1) **PERRY, R. H. y GREEN, D.** *Perry's Chemical Engineers' Handbook,* 6a. ed., Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1984.

(R1) **ROBINSON, C. S. y GILLILAND, E. R.** *Elements of Fractional Distillation,* 4a. ed., Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1950.

(S1) **SMITH, B. D.** *Design of Equilibrium Stage Processes.* Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1963.

(T1) **THIELE, E. W. y GEDDES, R. L.** *Ind. Eng. Chem, 25,* 289(1933).

(T2) **TREYBAL, R.** E. *Mass Transfer Operations,* 3a. ed. Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1980.

(U1) **UNDERWOOD, A. J. V.** *Chem. Eng. Progr., 44,* 603(1948); 45, 609(1949).

(U2) **UNDERWOOD, A. J. V.** *J. Inst. Petrol., 32,* 614(1946).

(V1) **VAN WINKLE, M.** *Distillation.* Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1967.

CAPÍTULO 12

Procesos de separación líquido-líquido y sólido-fluido

12.1 INTRODUCCIÓN A LOS PROCESOS DE ADSORCIÓN

12.1A Introducción

En los procesos de adsorción, uno o más componentes de una corriente de gas o de líquido se adsorben en la superficie de un sólido y se lleva a cabo una separación. En los procesos comerciales, el adsorbente generalmente tiene la forma de partículas pequeñas en un lecho fijo. El fluido se hace pasar por el lecho y las partículas sólidas adsorben componentes del fluido. Cuando el lecho está casi saturado, el flujo se detiene y el lecho se regenera térmicamente o por otros métodos, de modo que ocurre una desorción. Así se recupera el material adsorbido (adsorbato) y el adsorbente sólido queda listo para otro ciclo de adsorción.

Entre las aplicaciones de la adsorción en fase líquida están la eliminación de compuestos orgánicos del agua o de soluciones orgánicas, la eliminación de impurezas coloreadas de sustancias orgánicas y la eliminación de diversos productos de fermentación de las descargas de los fermentadores. Las separaciones incluyen la de parafinas de compuestos aromáticos y la de fructuosa de glucosa utilizando zeolitas.

Las aplicaciones de la adsorción en fase gaseosa incluyen la eliminación de agua de hidrocarburos gaseosos, la de componentes azufrados del gas natural, la de disolventes del aire y de otros gases, y la de olores del aire.

12.1B Propiedades físicas de los adsorbentes

Se han desarrollado muchos adsorbentes para una amplia gama de separaciones. Por lo común, los adsorbentes tienen forma de pelotitas, pequeñas cuentas o gránulos cuyo tamaño va de cerca de 0.1 mm a 12 mm, y las partículas más grandes se usan en los lechos empacados. Una partícula de adsorbente tiene una estructura muy porosa, con numerosos poros muy finos, cuyo volumen alcanza hasta el 50% del volumen total de la partícula. La adsorción suele ocurrir como una monocapa sobre la superficie de los poros, pero a veces se forman varias capas. La adsorción física, o de Van der Waals, por lo general sucede entre las moléculas adsorbidas y la superficie interna sólida del poro, y es fácilmente reversible.

El proceso de adsorción global consta de una serie de pasos. Cuando el fluido pasa alrededor de la partícula en un lecho fijo, el soluto primero se difunde desde el volumen del fluido hacia toda la superficie exterior de la partícula. Luego, el soluto se difunde hacia el interior del poro hasta la superficie del mismo. Por último, el soluto se adsorbe sobre la superficie. Así, el proceso de adsorción global es una serie de pasos.

Existen varios adsorbentes comerciales y algunos de los principales se describen en seguida. Todos se caracterizan por grandes áreas superficiales de los poros, que van desde 100 hasta mas de 2000 m^2/g.

1. *Carbón activado.* Éste es un material microcristalino que proviene de la descomposición térmica de madera, cortezas vegetales, carbón, etc., y tiene áreas superficiales de 300 a 1200 m^2/g con un promedio de diámetro de poro de 10 a 60 Å. Las sustancias orgánicas generalmente se adsorben carbón activado.
2. Gel *de sílice.* Este adsorbente se fabrica tratando con ácido una solución de silicato de sodio y luego secándola. Tiene un área superficial de 600 a 800 m^2/g y un promedio de diámetro de poro de 20 a 50 Å. Se utiliza principalmente para deshidratar gases líquidos y para fraccionar hidrocarburos.
3. *Alúmina activada.* Para preparar este material se activa el óxido de aluminio hidratado calentándolo para extraer el agua. Se usa ante todo para secar gases y líquidos. Las áreas superficiales fluctúan entre 200 y 500 m^2/g con un promedio de diámetro de poro de 20 a 140 Å.
4. *Zeolitas tipo tamiz molecular.* Estas zeolitas son aluminosilicatos cristalinos porosos que forman una red cristalina abierta que tiene poros de uniformidad precisa. Por tanto, el tamaño uniforme del poro es diferente al de otros tipos de adsorbentes que tienen una gama de tamaños de poro. Las diversas zeolitas tienen tamaños de poro que van de cerca de 3 a 10 Å. Las zeolitas se usan para secado, separación de hidrocarburos y de mezclas y muchas otras aplicaciones.
5. *Polimeros o resinas sintéticas.* Se fabrican polimerizando dos tipos principales de monómeros. Los que se generan a partir de compuestos aromáticos como el estireno y el divinilbenceno se usan para adsorber compuestos orgánicos no polares de soluciones acuosas. Los que provienen de ésteres acrílicos se utilizan para solutos más polares en soluciones acuosas.

12.1C Relaciones de equilibrio para adsorbentes

El equilibrio entre la concentración de un soluto en la fase fluida y su concentración en el sólido se parece un poco a la solubilidad en equilibrio de un gas en un líquido. Los datos se grafican para dar isotermas de adsorción, como se muestra en la figura 12.1-1. La concentración en la fase sólida se expresa como q, en kg de adsorbato(soluto)/kg de adsorbente(sólido), y en la fase fluida (gaseosa o líquida) como c, en kg de adsorbato/m^3 de fluido.

Los datos que siguen una ley lineal se pueden expresar mediante una ecuación parecida a la ley de Henry.

$$q = Kc \tag{12.1-1}$$

donde K es una constante determinada experimentalmente, en m^3/kg de adsorbente. Esta isoterma lineal no es común, pero en la región diluida se puede usar para aproximar los datos de muchos sistemas.

La ecuación de la isoterma de Freundlich, que es empírica, a menudo sirve para aproximar los datos para muchos sistemas de adsorción físicos y es particularmente útil para líquidos.

$$q = Kc^n \tag{12.1-2}$$

donde K y n son constantes y se -determinan experimentalmente. En una gráfica log-log de q en función de c, la pendiente es el exponente adimensional n. Las dimensiones de K dependen del valor

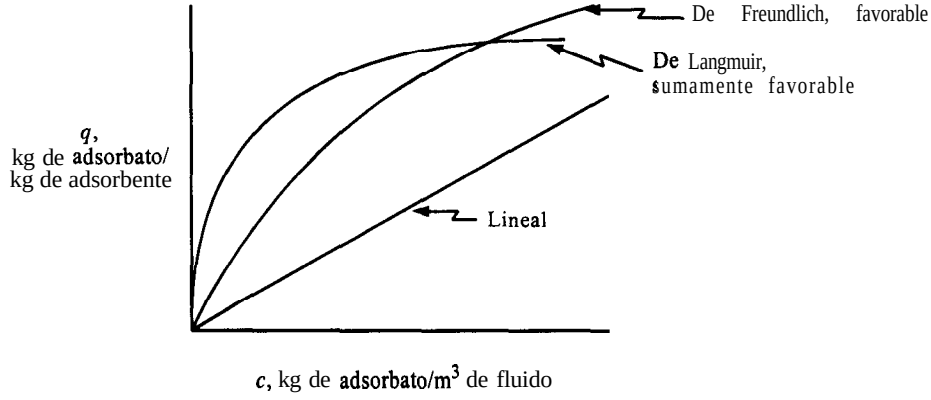

De Freundlich, favorable
De Langmuir, sumamente favorable
Lineal
q, kg de adsorbato/ kg de adsorbente
c, kg de adsorbato/m³ de fluido

FIGURA 12.1-1. ***Algunos tipos comunes de isotermas de adsorción.***

de n. Esta ecuación a veces se usa para correlacionar datos para hidrocarburos gaseosos en carbón activado.

La isoterma de Langmuir tiene una base teórica y está dada por la siguiente ecuacion, donde q_o y K son constantes empíricas:

$$q = \frac{q_o c}{K + c} \tag{12.1-3}$$

donde q_o es una constante, en kg de adsorbato/kg de sólido, y K es una constante, en kg/m³. La ecuación se dedujo suponiendo un número fijo de sitios activos disponibles para la adsorción, que sólo se forma una monocapa y que la adsorción es reversible y alcanza una condición de equilibrio. Cuando se grafica llq en función de $1/c$, la pendiente es K/q_o y la intersección es $1/q_o$.

En casi todos los sistemas de adsorción, a medida que aumenta la temperatura la cantidad adsorbida por el adsorbente va disminuyendo con rapidez, lo cual es útil porque la adsorción normalmente se hace a la temperatura ambiente y la desorción se puede efectuar aumentando la temperatura.

EJEMPLO 12.1-I. Isoterma de adsorción para fenol en agua de desecho

Se realizaron en el laboratorio pruebas por lote utilizando soluciones de fenol en agua y partículas granulares de carbón activado (R5). Los datos de equilibrio a la temperatura ambiente se muestran en la tabla 12. 1- 1. Determine la isoterma que concuerda con los datos.

TABLA 12.1-1. ***Datos de equilibrio para el ejemplo 12. l-l (RS)***

c, $\left(\frac{kg\ de\ fenol}{m^3\ de\ solución}\right)$	q, $\left(\frac{kg\ de\ fenol}{kg\ de\ carbón}\right)$
0.322	0.150
0.117	0.122
0.039	0.094
0.006 1	0.059
0.0011	0.045

Solución: Graticando los datos como $1/q$ en función de $1/c$, se ve que los resultados no son una línea recta y no siguen la ecuación de Langmuir (12.1-3). La gráfica de log q en función de log c de la figura 12.1-2 produce una línea recta y, por consiguiente, sigue la ecuación de la isoterma de Freundlich (12.1-2). La pendiente n es 0.229 y la constante K es 0.199, para dar

$$q = 0.199\ c^{0.229}$$

12.2 ADSORCIÓN POR LOTES

La adsorción por lotes se suele usar para adsorber solutos de disoluciones líquidas cuando las cantidades tratadas son pequeñas, como en la industria farmacéutica y en otras. Al igual que en muchos otros procesos, se necesita una relación de equilibrio como las isotermas de Freundlich o de Langmuir y un balance de materia. La concentración inicial de la alimentación es c_F y la concentración final en equilibrio es c. Del mismo modo, la concentración del soluto adsorbido en el sólido es q_F y el valor final en equilibrio es q. El balance de materia sobre el adsorbato es

$$q_F M + c_F S = qM + cS \qquad \textbf{(12.2-1)}$$

donde M es la cantidad de adsorbente, en kg, y S es el volumen de la solución de alimentación, en m^3.

Al graficar la variable q de la ecuación (12.2-1) en función de c, el resultado es una línea recta. Si se traza la isoterma de equilibrio en la misma gráfica, la intersección de ambas líneas da los valores finales en equilibrio de q y c.

EJEMPLO 12.2-L Adsorción por lotes en carbón activado

Una disolución de agua residual con volumen de 1 .0 m^3 contiene 0.2 1 kg de fenol/m^3 de solución (0.2 1 g/L). Se agrega a la solución un total de 1.40 kg de carbón activado granular nuevo, y se mezcla hasta que alcanza el equilibrio. Usando la isoterma del ejemplo 12.1- 1, ¿cuáles son los valores fínales en el equilibrio, y qué porcentaje de fenol se extrae?

Solución: Los valores dados son c_F = 0.21 kg fenol/m^3, S= 1 .O m^3, M= 1.40 kg carbono y se supone que q_F es cero. Al sustituir en la ecuación (12.2-l),

$$0(1.40) + 0.21(1.0) = q\ (1.40) + c\ (1.0)$$

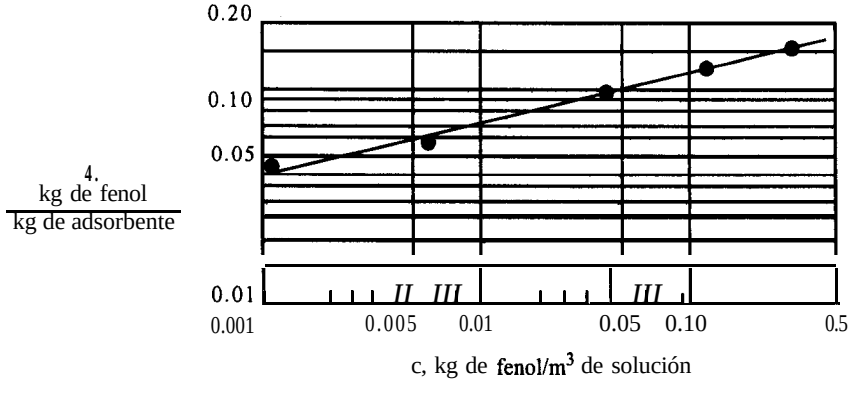


FIGURA 12.1-2. *Gráfica de los datos del ejemplo 12.1-l.*

Esta ecuación de línea recta se gratica en la figura 12.2-1, así como la isoterma del ejemplo 12.1-1. En la intersección, q = 0.106 kg de fenol/kg de carbón y c = 0.062 kg de fenol/ m^3. El porcentaje de fenol extraído es

$$\% \text{ extraído} = \frac{c_F - c}{c_F}(100) = \frac{0.210 - 0.062}{0.210}(100) = 70.5$$

12.3 DISEÑO DE COLUMNAS DE ADSORCIÓN DE LECHO FIJO

12.3A Introducción y perfiles de concentración

Un método muy usado para la adsorción de solutos de líquidos o gases emplea un lecho fijo de partículas granulares. El fluido que se va a tratar se hace descender a través del lecho empacado a una tasa de flujo constante. La situación es más compleja que la de un simple proceso por lotes en un tanque agitado que alcanza el equilibrio. En el proceso de lecho fijo son importantes las resistencias a la transferencia de masa, y el proceso se lleva a cabo en estado no estacionario. La eficiencia del proceso depende de la dinámica global del sistema, y no sólo de las consideraciones de equilibrio.

Las concentraciones del soluto en la fase fluida y en la fase adsorbente sólida cambian con el tiempo y también con la posición en el lecho fijo conforme prosigue la adsorción. En la entrada del lecho se supone que el sólido no tiene soluto al principio del proceso; a medida que el fluido entra en contacto con la entrada del lecho, se realiza la mayor parte de la transferencia de masa y de la adsorción. Cuando el fluido pasa a través del lecho, su concentración va disminuyendo muy rápidamente con la distancia hasta llegar a cero mucho antes del final del lecho. El perfil de concentración al principio, en el tiempo t_1, se muestra en la figura 12.3-1a, donde la relación de concentraciones c/c_o se gratica en función de la longitud del lecho. La concentración del fluido c_o es la de la alimentación y c es la concentración del fluido en un punto del lecho.

Después de cierto tiempo, el sólido que se encuentra cerca de la entrada de la torre está casi saturado, y la mayor parte de la transferencia de masa y de la adsorción sucede ahora en un punto ligeramente más lejano a la entrada. En un tiempo posterior t_2, el perfil o la zona de transferencia de

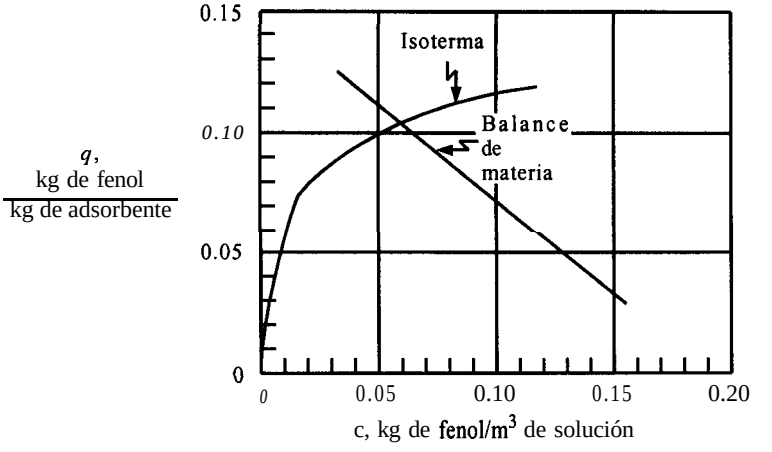


FIGURA 12.2-1. *Solución al ejemplo 12.2-l.*

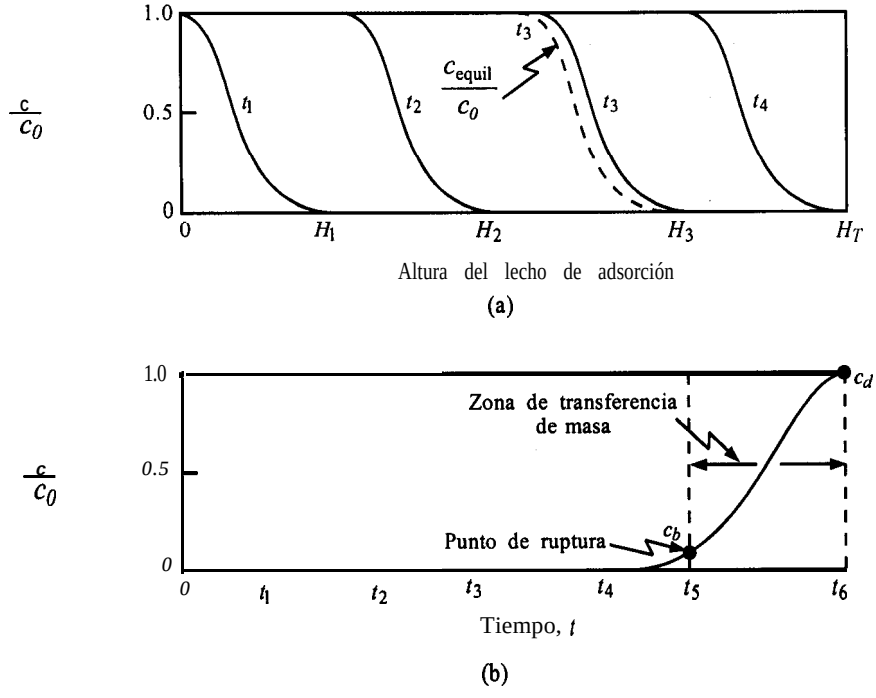


FIGURA 12.3-1 *Perfiles de concentración para adsorción en un lecho fijo: a) perfiles a varias posiciones y tiempos en el lecho, b) perfil de concentración de avance en el fluido a la salida del lecho.*

masa donde ocurre la mayor parte del cambio de la concentración, se ha desplazado más lejos dentro del lecho. Los perfiles de concentración que se muestran corresponden a la fase fluida. Los perfiles de concentración para la concentración de adsorbatos en el sólido son similares. En la entrada, el sólido esta casi saturado y su concentración permanece casi constante hasta la zona de transferencia de masa, donde desciende rápidamente hasta casi cero. La línea punteada correspondiente al tiempo t_3 muestra la concentración en la fase fluida en equilibrio con el sólido. La diferencia de las concentraciones es la fuerza que impulsa la transferencia de masa.

12.3B Concentración de la curva de avance

Como se ve en la figura 12.3-1a, la mayor parte de la adsorción ocurre en cualquier momento en una zona relativamente angosta de adsorción o de transferencia de masa. Mientras la solución continúa fluyendo, esta zona de transferencia de masa, que tiene forma de *S*, va bajando por la columna. En un tiempo dado t_3 en la figura 12.3-1a, cuando casi la mitad del lecho está saturado de soluto, la concentración de salida sigue siendo aproximadamente cero, como se observa en la figura 12.3-1b. Esta concentración de salida sigue siendo casi cero hasta que la zona de transferencia de masa empieza a llegar a la salida de la torre en el tiempo t_4. Entonces, la concentración de salida empieza a elevarse, y en t_5 llega a c_b, que se llama *punto de ruptura*.

Después de que se alcanza el punto de ruptura, la concentración c se eleva muy rápidamente hasta el punto c_d, que es el final de la curva de avance donde el lecho pierde su efectividad. La concentración de punto de ruptura representa el máximo que se puede descartar y se suele tomar como 0.01 hasta 0.05 para c_b/c_q. El valor c_d/c_o se toma como el punto donde c_d es aproximadamente igual a c,.

En una zona angosta de transferencia de masa, la curva de avance es muy marcada y la mayor parte de la capacidad del lecho se ha usado en el punto de ruptura. Esto permite un uso eficiente del adsorbente y disminuye el costo de energía para la regeneración.

12.3C Capacidad de la columna y el método de diseño para su aumento de escala

El ancho y la forma de la zona de transferencia de masa dependen de la isoterma de adsorción, de la tasa de flujo, de la tasa de transferencia de masa hacia las partículas y de la difusión en los poros. Se han publicado varios métodos teóricos que predicen la zona de transferencia de masa y los perfiles de concentración en el lecho. Los resultados pronosticados pueden ser inexactos a causa de muchas incertidumbres debidas a los patrones de flujo y a las correlaciones para predecir la difusión y la transferencia de masa. Por tanto, se necesita hacer experimentos a escala de laboratorio para determinar los resultados.

Se puede demostrar que la capacidad total o estequiométrica de la torre de lecho empacado, cuando el lecho completo alcanza el equilibrio con la alimentación, es proporcional al área entre la curva y una línea en c/c_o = 1 .O como se muestra en la figura 12.3-2. El área total sombreada representa la capacidad total o estequiométrica del lecho como sigue (R6):

$$t_t = \int_0^\infty \left(1 - \frac{c}{c_o}\right) dt \qquad \textbf{(12.3-1)}$$

donde t_t es el tiempo equivalente a la capacidad total o estequiométrica. La capacidad utilizable del lecho hasta el tiempo de punto de ruptura t_b, es el área cuadriculada.

$$t_u = \int_0^{t_b} \left(1 - \frac{c}{c_o}\right) dt \qquad \textbf{(12.3-2)}$$

donde t_u es el tiempo equivalente a la capacidad utilizable o el tiempo en el cual la concentración del efluente alcanza su máximo nivel permisible. El valor de t_u suele ser muy cercano al de t_b.

La relación t_u/t_t es la fracción de la capacidad o longitud total del lecho utilizada hasta el punto de ruptura (C3, L 1, M1). Así, para una longitud total del lecho de H_T m, H_B es la longitud del lecho utilizada hasta el punto de ruptura,

$$H_B = \frac{t_u}{t_t} H_T \qquad \textbf{(12.3-3)}$$

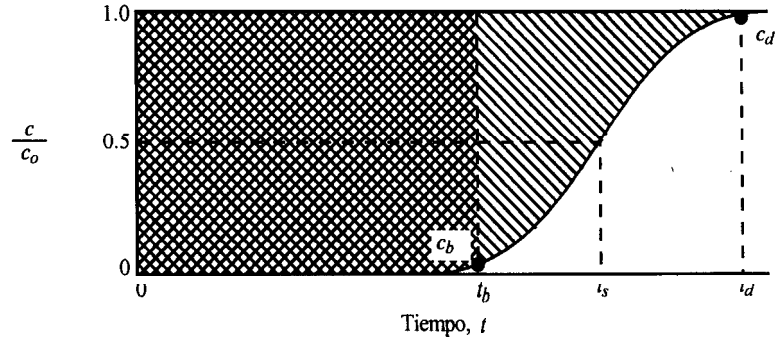


FIGURA 12.3-2. *Determinación de la capacidad de una columna a partir de la curva de avance.*

La longitud del lecho no usado H_{UNB} en m, es entonces la tracción no usada multiplicada por la longitud total.

$$H_{UNB} = \left(1 - \frac{t_u}{t_t}\right) H_T \tag{12.3-4}$$

H_{UNB} representa la sección o zona de transferencia de masa; depende de la velocidad del fluido y es esencialmente independiente de la longitud total de la columna. Es por eso que el valor de H_{UNB} se puede medir a la velocidad de diseño en una columna de laboratorio de diámetro pequeño empacada con el adsorbente deseado. Después, el lecho adsorbente a escala completa se diseña simplemente calculando primero la longitud del lecho necesaria para lograr la capacidad utilizable requerida, *HB,* en el punto de ruptura. El valor de H_B es directamente proporcional a t_b. Por consiguiente, la longitud H_{UNB} de la sección de transferencia de masa simplemente se suma a la longitud H_B necesaria para obtener la longitud total, H_T.

$$H_T = H_{UNB} + H_B \tag{12.3-5}$$

Este procedimiento de diseño se usa con mucha frecuencia y su validez depende de que las condiciones en la columna de laboratorio sean semejantes a las de la unidad a escala real. La unidad de diámetro pequeño debe estar bien aislada para parecerse a la torre de diámetro grande, que trabaja adiabáticamente. La velocidad de masa en ambas unidades debe ser igual y el lecho debe tener la longitud suficiente para contener una zona de transferencia de masa en estado estacionario (Ll). La dispersión axial o la mezcla axial pueden no ser exactamente iguales en las dos torres, pero con el cuidado necesario, este método de diseño es muy útil.

Un procedimiento alterno aproximado que se puede usar en lugar de integrar y obtener áreas, es suponer que la curva de avance de la figura 12.3-2 es simétrica en c/c_o = 0.5 y t_s. Entonces, el valor de t_t de la ecuación (12.3-1) es simplemente t_s. Esto implica que el área bajo la curva entre t_b y t_s es igual al área sobre la curva entre t_s y t_d.

EJEMPLO 12.3-1. Aumento de escala de una columna de adsorción de laboratorio

Una corriente residual de vapor de alcohol en aire que proviene de un proceso se adsorbe con partículas de carbón activado en un lecho empacado con un diámetro de 4 cm y una longitud de 14 cm, y que contiene 79.2 g de carbón. La corriente de gas que ingresa tiene una concentración c_0 de 600 ppm y una densidad de 0.00115 g/ cm^3 y entra al lecho con. una tasa de flujo de 754 cm^3/s. Los datos de la tabla 12.3-1 dan las concentraciones de la curva de avance. La concentración del punto de ruptura se establece como c/c_o = 0.01. Haga lo siguiente:

a) Determine el tiempo de punto de ruptura, la fracción de la capacidad total utilizada hasta el punto de ruptura y la longitud del lecho no usado. Determine también la capacidad de saturación del carbón.

TABLA 12.3-l. *Concentración de avance para el ejemplo 12.3-I.*

Tiempo, h	c/c_o	*Tiempo, h*	c/c_o
0	*0*	*5.5*	0.658
3	0	6.0	0.903
3.5	0.002	6.2	0.933
4	0.030	6.5	0.975
4.5	0.155	6.8	0.993
5	0.396		

b) Si el tiempo de punto de ruptura necesario para una nueva columna es 6.0 h, ¿qué longitud total debe tener la nueva columna que se requiere?

Solución: Los datos de la tabla 12.3-1 se grafican en la figura 12.3-3. Para el inciso a), en c/c_o = 0.01, el tiempo de punto de ruptura es t_b = 3.65 h según la gráfica. El valor de t_d es de cerca de 6.95 h. Al integrar gráficamente, las áreas son A_1 = 3.65 h y A_2 = 1.51 h. Entonces, a partir de la ecuación (12.3-l), el tiempo equivalente a la capacidad total o estequiométrica del lecho es

$$t_t = \int_0^\infty \left(1 - \frac{c}{c_o}\right) dt = A_1 + A_2 = 3.65 + 1.51 = 5.16 \text{ h}$$

El tiempo equivalente a la capacidad utilizable del lecho hasta el tiempo de punto de ruptura es, aplicando la ecuación (12.3-2),

$$t_u = \int_0^{t_b = 3.65} \left(1 - \frac{c}{c_o}\right) dt = A_1 = 3.65 \text{ h}$$

Por tanto, la fracción de la capacidad total usada hasta el punto de ruptura es t_u/t_t = 3.65/5.16 = 0.707. A partir de la ecuación (12.3-3), la longitud del lecho usado es H_B = 0.707 (14) = 9.9 cm. Para calcular la longitud del lecho no usado a partir de la ecuación (12.3-4),

$$H_{UNB} = \left(1 - \frac{t_u}{t_t}\right) H_T = (1 - 0.707)\ 14 = 4.1 \text{ cm}$$

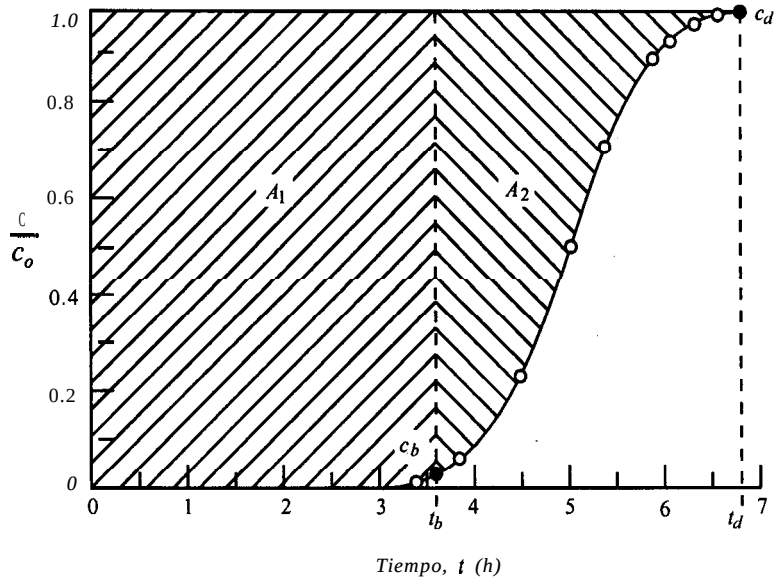


FIGURA 12.3-3. *Curva de avance del ejemplo 12.3-I.*

Para responder al inciso b), con el t_b de 6.0 h, el valor de H_B se obtiene simplemente de la relación entre los tiempos de punto de ruptura multiplicados por el antiguo H_B.

$$H_B = \frac{6.0}{3.65}(9.9) = 16.3 \text{ cm}$$

$$H_T = H_B + H_{UNB} = 16.3 + 4.1 = 20.4 \text{ cm}$$

Se determina la capacidad de saturación del carbón.

$$\text{Gasto de aire} = (754 \text{ cm}^3/\text{s})(3600 \text{ s})(0.00115 \text{ g/cm}^3 = 3122 \text{ g aire/h}$$

$$\text{Total de alcohol adsorbido} = \left(\frac{600 \text{ g alcohol}}{10^6 \text{ g aire}}\right)(3122 \text{ g aire/h})(5.16 \text{ h})$$

$$= 9.67 \text{ g alcohol}$$

$$\text{Capacidad de saturación} = 9.67 \text{ g alcohol}/79.2 \text{ g carbón}$$

$$= 0.1220 \text{ g alcohol/g carbón}$$

La fracción del nuevo lecho que se usa hasta el punto de ruptura es ahora 16.3/20.4, o 0.799.

Al aumentar la escala quizá no sólo sea necesario modificar la altura de la columna, sino que también el gasto real de fluido con respecto al que se usa en la unidad piloto. Como la velocidad de masa en el lecho debe permanecer constante al aumentar la escala, el diámetro del lecho debe ajustarse para conservarla constante.

Los sistemas de adsorción de gas típicos usan lechos fijos de cerca de 0.3 m a 1.5 m de alto con circulación descendente del gas. Se emplean velocidades superficiales de gas bajas, de 15 a 50 cm/s (0.5 a 1.7 pie/s). El tamaño de las partículas adsorbentes fluctúa de la malla 4 a la 50 (0.3 a 5 mm). Las caídas de presión son bajas y sólo hay unas cuantas pulgadas de agua por pie de lecho. El tiempo de adsorción es desde 0.5 h hasta más de 8 h. Para los líquidos, la velocidad superficial del líquido en el lecho es de 0.3 a 0.7 cm/s (4 a 10 gpm/pie^2).

12.3D Modelos básicos para predecir la adsorción

La adsorción en lechos fijos es el método más importante que se utiliza para este proceso. Un lecho fijo o empacado consta de un tubo cilíndrico vertical lleno o empacado con partículas adsorbentes. Los adsorbentes se diseñan principalmente según los datos de laboratorio y los métodos descritos en la sección 12.3C. En esta sección se describen las ecuaciones básicas para la adsorción isotérmica, a fin de que se entiendan mejor los fundamentos de este proceso.

El balance de materia del soluto en estado no estacionario en el fluido es como sigue para una sección de longitud *dz* del lecho.

$$\varepsilon \frac{\partial c}{\partial t} + (1-\varepsilon)\rho_p \frac{\partial q}{\partial t} = -v\frac{\partial c}{\partial z} + E\frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \qquad (12.3\text{-}6)$$

donde ε es la fracción vacia externa del lecho; v es la velocidad superficial en el lecho vacío, en m/s; ρ_p es la densidad de partícula, en kg/m^3, y E es un coeficiente de dispersión axial, en m^2/s. El

primer término representa la acumulación de soluto en el líquido. El segundo término es la acumulación de soluto en el sólido. El tercer término representa la cantidad de soluto que fluye por convección hacia la sección *dz* del lecho menos la que fluye hacia afuera. El último término representa la dispersión axial de soluto en el lecho que provoca la mezcla de soluto y disolvente.

La segunda ecuación diferencial que se necesita para describir este proceso relaciona el segundo término de la ecuación (12.3-6) para la acumulación de soluto en el sólido, con la tasa de transferencia de masa externa del soluto del volumen de solución a la partícula y la difusión y adsorción sobre el área superficial interna. La adsorción física real es muy rápida. La tercera ecuación es la isoterma de equilibrio.

Existen muchas soluciones a estas tres ecuaciones que son no lineales y acopladas. Con frecuencia, estas soluciones no concuerdan bien con los resultados experimentales y no se analizan aquí.

12.3E Variables de proceso y ciclos de adsorción

Los procesos de adsorción a gran escala se pueden dividir en dos amplias clases. La primera y más importante es el sistema cíclico por lotes, en el cual el lecho fijo de adsorción se satura y se regenera alternativamente de manera cíclica. La segunda es un sistema de flujo continuo que implica un flujo continuo de una contracorriente de adsorbente hacia un flujo de alimentación.

Hay cuatro métodos básicos de uso común para el sistema de adsorción cíclico por lotes en lechos fijos. Estos métodos difieren uno de otro principalmente por los medios que se usan para regenerar el adsorbente después del ciclo de adsorción. En general, estos cuatro métodos básicos utilizan de dos a tres lechos fijos en paralelo, uno en el ciclo de adsorción y el otro o los otros dos en un ciclo de desorción para dar continuidad al flujo. Después de que un lecho ha completado el ciclo de adsorción, el flujo se desvía hacia el segundo lecho recién regenerado para la adsorción. Entonces el primer lecho se regenera mediante cualquiera de los métodos siguientes.

1. *Ciclo de oscilación de temperatura.* También se llama ciclo de oscilación térmica. El lecho de adsorción usado se regenera calentándolo con serpentines de vapor dentro de él, o con una corriente de gas de purga caliente para eliminar el adsorbato. Después, el lecho se enfría, para que se pueda usar para la adsorción en el del ciclo siguiente. El tiempo de regeneración generalmente es de pocas horas.
2. *Ciclo de oscilación de presión.* En este caso el lecho se desorbe reduciendo la presión a temperatura esencialmente constante y luego purgando el lecho a baja presión con una pequeña fracción de la corriente del producto. Este proceso para gases usa un ciclo muy corto para la regeneración comparado con el ciclo de oscilación de temperatura.
3. *Ciclo de remoción con gas de purga inerte.* En este ciclo el adsorbato se elimina haciendo pasar un gas inerte o que no se adsorbe a través del lecho. Esto disminuye la presión parcial o la concentración alrededor de las partículas y sobreviene la desorción. Los tiempos de regeneración son de algunos minutos.
4. *Ciclo de desplazamiento y purga.* La presión y la temperatura se mantienen esencialmente constantes como al emplear gas de purga, pero se utiliza un gas o un líquido que se adsorbe con más fuerza que el adsorbato y lo desplaza. También los ciclos suelen ser de pocos minutos.

La remoción con vapor se usa a menudo para regenerar sistemas de recuperación de disolventes que utilizan adsorbente de carbón activado, y se puede considerar como una combinación del ciclo de oscilación de temperatura y el de desplazamiento y purga.

12.4 PROCESOS DE INTERCAMBIO DE IONES

12.1A Introducción y materiales para el intercambio de iones

Los procesos de intercambio de iones son básicamente reacciones químicas entre iones en solución y iones en una fase sólida insoluble. Las técnicas que se usan en el intercambio de iones se parecen tanto a las que se utilizan en la adsorción, que para la mayoría de los fines de ingeniería, el intercambio de iones se puede considerar como un caso especial de adsorción.

En el intercambio de iones, el sólido elimina ciertos iones, pero como se debe conservar su electroneutralidad, libera iones de reemplazo a la solución. Los primeros materiales empleados para intercambio de iones fueron unas arenas porosas naturales llamadas zeolitas, que intercambian cationes. Los iones con carga positiva en solución, como el Ca^{2+}, se difunden por los poros del sólido y se intercambian con los iones Na+ del mineral.

$$\underset{\text{(solución)}}{Ca^{2+}} + \underset{\text{(sólido)}}{Na_2R} \Leftrightarrow \underset{\text{(sólido)}}{CaR} + \underset{\text{(solución)}}{2Na^+} \qquad \textbf{(12.4-1)}$$

donde *R* representa al sólido. Ésta es la base del "ablandamiento" del agua. Para regenerar la zeolita se agrega una solución de NaCl que impulsa la reacción reversible anterior a la izquierda. Casi todos esos sólidos inorgánicos de intercambio de iones intercambian sólo cationes.

La mayor parte de los sólidos de intercambio de iones en la actualidad son resinas o polímeros sintéticos. Ciertas resinas poliméricas sintéticas contienen grupos sulfónicos, carboxílicos o fenólicos, y estos grupos aniónicos pueden intercambiar cationes.

$$\underset{\text{(solución)}}{Na+} + \underset{\text{(sólido)}}{HR} \Leftrightarrow \underset{\text{(sólido)}}{NaR} + \underset{\text{(solución)}}{H^+} \qquad \textbf{(12.4-2)}$$

Aquí *R* representa a la resina sólida. El Na+ en la resina sólida puede intercambiarse por H^+ *u* otros cationes.

Otras resinas sintéticas similares que contienen grupos amino se usan para intercambiar aniones y OH^- en solución

$$\underset{\text{(solución)}}{Cl-} + \underset{\text{(sólido)}}{RNH_3OH} \Leftrightarrow \underset{\text{(sólido)}}{RNH_3Cl} + \underset{\text{(solución)}}{OH^-} \qquad \textbf{(12.4-3)}$$

12.4B Relaciones de equilibrio en el intercambio de iones

Las isotermas de intercambio de iones se desarrollaron usando la ley de acción de masas. Por ejemplo, en una reacción sencilla de intercambio iónico como la ecuación (12.4-2), HR y NaR representan los sitios de intercambio de iones en la resina unidos a un protón H^+ y un ion sodio, Na+. Se supone que un número fijo de sitios está lleno con H^+ o Na+. En el equilibrio,

$$K = \frac{[NaR][H^+]}{[Na^+][HR]} \qquad \textbf{(12.4-4)}$$

Como la concentración total de los grupos iónicos [R] en la resina es fija (B7),

$$[\bar{R}] = \text{constante} = [\text{Na}\bar{R}] + [\text{H}\bar{R}] \qquad \textbf{(12.4-5)}$$

Al combinar las ecuaciones (12.4-4) y (12.4-5),

$$[\text{Na}\bar{R}] = \frac{K[\bar{R}][\text{Na}^+]}{[\text{H}^+] + K[\text{Na}^+]} \qquad \textbf{(12.4-6)}$$

Si la solución se amortigua de manera que $[H^+]$ sea constante, la ecuación anterior para el intercambio o adsorción del sodio se asemeja a la isoterma de Langmuir.

12.4C Diseiio de columnas de intercambio iónico de lecho fijo

La velocidad de intercambio iónico depende de la transferencia de masa de los iones desde el volumen de la solución a la superficie de la partícula, de la difusión de los iones en los poros del sólido hacia la superficie, del intercambio de los iones en la superficie y de la difusión de los iones de intercambio de regreso al volumen de la solución. Este proceso es igual al de la adsorción. Las ecuaciones diferenciales deducidas también son muy semejantes. Los métodos de diseño que se utilizan para el intercambio de iones y la adsorción son parecidos y se describen en la sección 12.3 para procesos de adsorción.

12.5 PROCESOS DE EXTRACCIÓN LÍQUIDO-LÍQUIDO EN UNA SOLA ETAPA

12.5A Introducción a los procesos de extracción

Para separar uno o más de los componentes de una mezcla, ésta se pone en contacto con otra fase. Dichas fases pueden ser gas-líquido, como se analizó en el capítulo 10; vapor-líquido, como se estudio en el capítulo ll ; líquido-líquido o líquido-sólido. En esta sección se consideraran, en primer término, ***los procesos de separación por extracción líquido-líquido.*** Otros nombres que también se usan son ***extracción con líquido o extracción con disolvente.***

En la destilación, el líquido se vaporiza parcialmente para crear otra fase, que es un vapor. La separación de los componentes depende de las presiones de vapor relativas de las sustancias. La fase de vapor y la líquida tienen gran semejanza química. En la extracción líquido-líquido, ambas fases son químicamente muy diferentes, lo que conduce a una separación de los componentes de acuerdo con sus propiedades físicas y químicas.

Algunas veces la extracción por disolvente se usa como una alternativa a la separación por destilación o evaporación. Por ejemplo, el ácido acético se separa del agua por destilación o por extracción con disolvente, usando un disolvente orgánico. Después de esta operación, el producto resultante (disolvente orgánico-ácido acético) se destila. La selección de destilación o extracción con disolvente depende en gran parte, de los costos relativos (C7). Otro ejemplo son los ácidos grasos de alto peso molecular que se pueden separar de los aceites vegetales por extracción con propano líquido o por destilación al alto vacío, la cual es más costosa.

En la industria farmacéutica algunos productos como la penicilina se presentan en mezclas de fermentación bastante complejas, y se usa la extracción con líquido para separar la penicilina. Muchas separaciones de metales se llevan a cabo comercialmente por extracción de soluciones acuosas, como cobre-hierro, uranio-vanadio y tantalio-columbio.

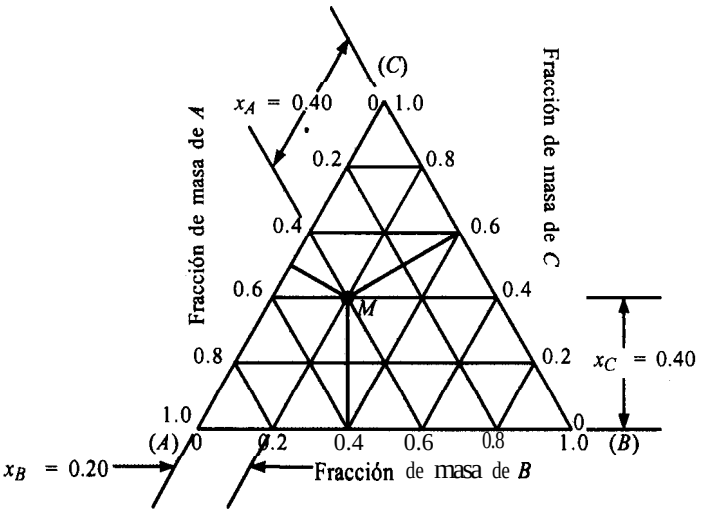


FIGURA 12.5-1. *Coordenadas para un diagrama triangular.*

12.5B Relacione8 de equilibrio en la extracción

1. Regla de las fases. En general, un sistema líquido-líquido tiene tres componentes, *A,B y C, y* dos fases en equilibrio. Sustituyendo en la regla de las fases, ecuación (i 0.2-1), los grados de libertad son 3, y las variables son temperatura, presión y las cuatro concentraciones. (Hay cuatro concentraciones porque sólo es posible especificar dos de las tres concentraciones de fracciones de masa de una fase.) La tercera completa el total de las fracciones de masa a un valor de 1.0, $x_A + x_B + x_C = 1.0$. Cuando se fija la presión y la temperatura, que es el caso usual, el sistema queda fijo al establecer una concentración en cualquier fase.

2. Coordenadas triangulares y datos de equilibrio. Las coordenadas triangulares equiláteras se usan con mucha frecuencia para representar los datos de equilibrio de un sistema de tres componentes, puesto que se tienen tres ejes. Esto se muestra en la figura 12.5-1. Cada uno de los tres vértices representa un componente puro, *A, B* o C. El punto *M* representa una mezcla de *A, B* y C, la distancia perpendicular desde el punto *M* hasta la base *AB* representa a la fracción de masa x_C de C en la mezcla en el punto *M*; la distancia a la base *CB* es la fracción de masa x_A de *A,* y la distancia a la base *AC* es la fracción de masa x_B de *B.* De esta forma,

$$x_A + x_B + x_C = 0.40 + 0.20 + 0.40 = 1.0 \qquad \textbf{(12.5-l)}$$

En la figura 12.5-2 se muestra un diagrama de fases común de un par de componentes *A y B* parcialmente miscibles. Algunos ejemplos típicos son metil-isobutil-cetona (A)-agua *(B)*- acetona (*C*), agua (A)-cloroformo (B)-acetona (*C*), y benceno (A)-agua (B)-ácido acético (*C*). Con respecto a la figura 12.5-2, el líquido C se disuelve por completo en *A* o *B.* El líquido *A es* muy poco soluble en *B* y *B* es un poco soluble en *A.* La región de dos fases corresponde a la zona delineada por la curva envolvente. Una mezcla original de composición *M* se separa en dos fases *a* y *b* que están en la línea de unión de equilibrio que pasa a través del punto *M.* (Se muestran también otras de líneas de unión.) Ambas fases son idénticas en el punto *P,* que se llama *punto de Plait.*

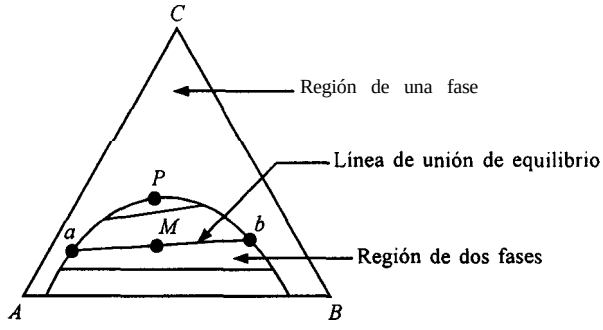


FIGURA 12.5-2. *Diagrama de fases liquido-líquido en el que los componentes A y B son parcialmente miscibles.*

3. Datos de equilibrio en coordenadas rectangulares. Los diagramas triangulares tienen ciertas desventajas debido a las coordenadas especiales, por lo cual, un método más útil para graficar los datos de los tres componentes consiste en el empleo de coordenadas rectangulares. Esto se muestra en la figura 12.5-3 para el sistema ácido acético (*A*)-agua (@-disolvente de éter isopropílico (C). (Los datos se toman del Apéndice A.3. Los disolventes *B* y C son parcialmente miscibles. La concentración del componente C se grafica en el eje vertical y la de *A* en el eje horizontal. La concentración del componente *B* se obtiene por diferencia de las ecuaciones (12.5-2) o (12.5-3):

$$x_B = 1.0 - x_A - x_C \qquad \textbf{(12.5-2)}$$

$$y_E = 1.0 - y_A - y_C \qquad \textbf{(12.5-3)}$$

La región de dos fases de la figura 12.5-3 está en el interior de la envolvente y la región de una fase en el exterior. Se muestra una línea de unión *gi* que conecta a la capa rica en agua *i*, llamada *capa de refinado*, y la capa de disolvente rica en éter g, llamada *capa de extracto*. La composición del refinado se designa como x y la del extracto y. Por consiguiente, la fracción de masa C se denomina como y_C en la capa de extracto y x_C en la de refinado. Para construir la línea de unión *gi* mediante la gráfica de equilibrio $y_A - x_A$ debajo del diagrama de fases, se trazan líneas verticales a *g* e *i*.

EJEMPLO 12.5-l. Balance de materia para capas en equilibrio

Una mezcla original que pesa 100 kg y contiene 30 kg de éter isopropílico (C), 10 kg de ácido acético (*A*) y 60 kg de agua *(B)*, alcanza su equilibrio y las fases de equilibrio se separan. ¿Cuáles son las composiciones de las dos fases de equilibrio?

Solución: La composición de la mezcla original es $x_C = 0.30$, $x_A = 0.10$ y $x_B = 0.60$. La composición de $x_C = 0.30$ y $x_A = 0.10$ se grafica como el punto *h* en la figura 12.5-3. Se traza la línea de unión *gi* a través del punto *h* por el procedimiento de aproximaciones sucesivas. La composición de la Cápa del estracto (éter) en el punto ges $y_A = 0.04, y_C = 0.94$ y $y_B = 1.00 - 0.04 - 0.94 = 0.02$ fracción masa. La composición de la capa de refinado (agua) en el punto *i es* $x_A = 0.12$, $x_C = 0.02$ y $x_B = 1.00 - 0.12 - 0.02 = 0.86$.

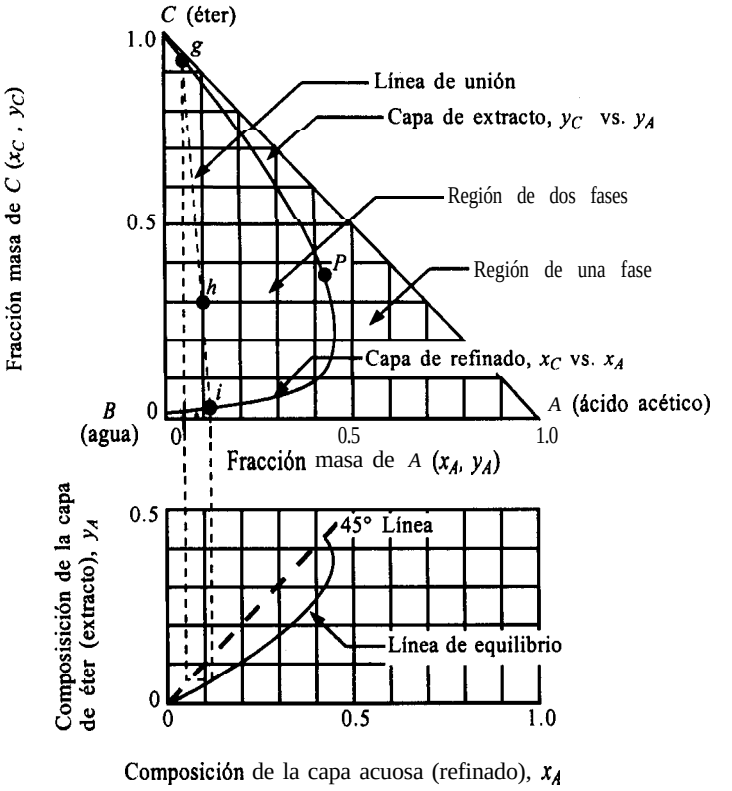


FIGURA 12.5-3. *Diagrama de fases líquido-líquido para ácido acético (A)-agua (B)-éter isopropílico (C) a 293 K (20°)*

En la figura 12.5-4 se muestra otro tipo común de diagrama de fases, donde dos pares de disolventes *B* y *C*, así como *A* y *C*, son parcialmente miscibles. Algunos ejemplos de este sistema son el estireno (*A*)-etilbenceno (B)-dietilen-glicol (*C*) y el sistema clorobenceno (*A*)-metil-etil-cetona (*B*)-agua (*C*).

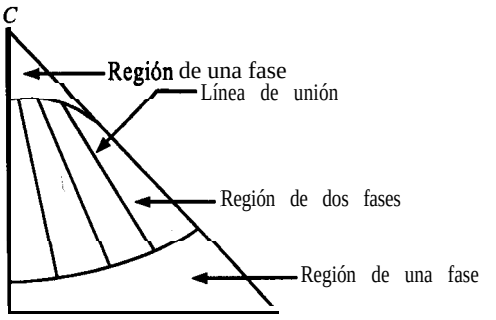


FIGURA 12.5-4. *Diagrama de fases donde los pares de disolventes B-C y A-C son parcialmente miscibles.*

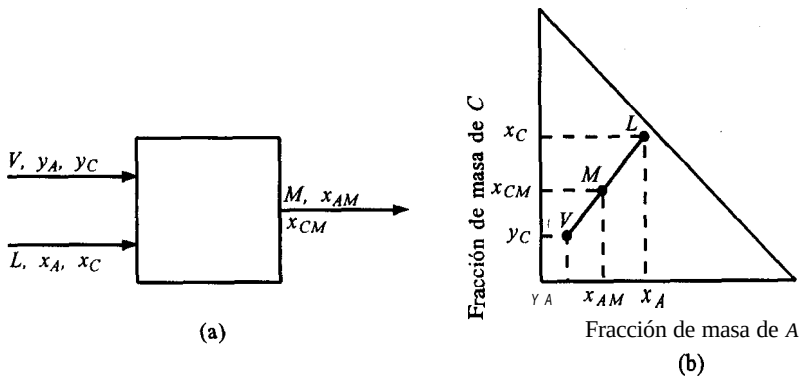


FIGURA 12.5-S. *Adición gráfica y regla del brazo de palanca:* a) *flujo del proceso, b) adición gráfica.*

12.5C Extracción en equilibrio en una sola etapa

1. Deducción de la regla del brazo de palanca para adición gráfica. Se deducirá para su uso en las gráficas rectangulares de diagramas de fases para extracción. En la figura 12.5-5a se mezclan (suman) dos corrientes ***L*** kg y ***V*** kg, que contienen los componentes ***A, B*** y C, para obtener la corriente de mezcla resultante de ***M*** kg de masa total. Si se escribe un balance total de masa y un balance con respecto a ***A,***

$$V + L = M \tag{12.5-4}$$

$$Vy, + Lx_A = Mx_{AM} \tag{12.5-5}$$

donde x_{AM} es la fracción masa de ***A*** en la corriente ***M.*** Al escribir un balance para el componente C,

$$Vy_C + Lx_C = Mx_{CM} \tag{12.5-6}$$

Combinando las ecuaciones (12.5-4) y (12.5-5),

$$\frac{L}{V} = \frac{y_A - x_{AM}}{x_{AM} - x_A} \tag{12.5-7}$$

Combinando las ecuaciones (12.5-4) y (12.5-6),

$$\frac{L}{V} = \frac{y_C - x_{CM}}{x_{CM} - x_C} \tag{12.5-8}$$

Igualando las ecuaciones (12.5-7) y (12.5-8) y reordenando,

$$\frac{x_C - x_{CM}}{x_A - x_{AM}} = \frac{x_{CM} - y_C}{x_{AM} - y_A} \tag{12.5-9}$$

Esto indica que los puntos ***L, M y V*** deben formar una línea recta. Usando las propiedades de los triángulos rectángulos semejantes,

$$\frac{L\,(\text{kg})}{V\,(\text{kg})} = \frac{\overline{VM}}{\overline{LM}} \tag{12.5-10}$$

Ésta es la regla del brazo de palanca, la cual señala que kg L/kg V es igual a la longitud de la línea $\overline{M}$/ longitud de la línea $\overline{LM}$. Además,

$$\frac{L(\text{kg})}{M(\text{kg})} = \frac{\overline{VM}}{\overline{LV}} \tag{12.5-11}$$

Estas ecuaciones también son válidas para kg mol y frac mol, lb_m, etc.

EJEMPLO 12.5-2. Cantidades en las fases para una extracción con disolvente

Las composiciones de las dos capas de equilibrio del ejemplo 12.5-1 son, para la capa de extracto (V) y_A = 0.04, y_B = 0.02 y y_C = 0.94, y para la capa del refinado (L) x_A = 0.12, x_B = 0.86 y x_C = 0.02. La mezcla original contenía 100 kg y x_{AM} = 0.10. Determíne las cantidades de V y L.

Solución: Sustituyendo en la ecuación (12.5-4),

$$V + L = M = 100$$

Sustituya en la ecuación (12.5-5), donde M = 100 kg y x_{AM} = 0.10,

$$\text{v}\ (0.04) + L(0.12) = 100\ (0.10)$$

Resolviendo simultáneamente las dos ecuaciones, L = 75.0 y V= 25.0. Aplicando la regla del brazo de palanca se determina que la longitud de la línea hg en la figura 12.5-3 es 4.2 unidades y la línea gi es. igual a 5.8 unidades. Entonces, por medio de la ecuación (12.5-11),

$$\frac{L}{M} = \frac{L}{100} = \frac{\overline{hg}}{\overline{gi}} = \frac{4.2}{5.8}$$

Despejando, L = 72.5 kg y V = 27.5 kg, lo cual constituye una comprobación bastante razonable del método de balance de material.

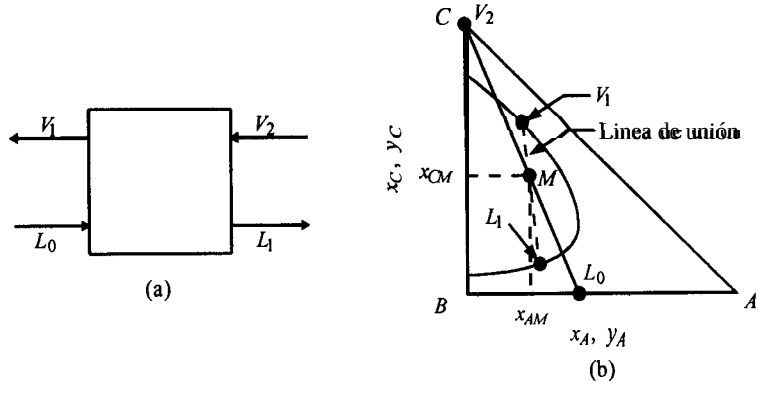


FIGURA 12.5-6. *Extracción en equilibrio líquido-líquido de una sola etapa: a) diagrama de flujo del proceso, b) gráfica en un diagrama de fases.*

2. Extracción en equilibrio en una sola etapa. Se considerará ahora la separación de *A* de una mezcla de *A* y *B* por medio del disolvente C en una sola etapa en equilibrio. Este proceso se muestra en la figura 12.5-6a, con entrada de las corrientes V_2 y L_0. Las corrientes se mezclan y alcanzan su equilibrio, y las corrientes de salida L_1 y V_1 salen del proceso en equilibrio entre sí.

Las ecuaciones para este proceso son las mismas que las que se estudiaron en la sección 10.3 para una sola etapa de equilibrio, donde y representa la composición de las corrientes V y x las corrientes *L:*

$$L_0 + V_2 = L_1 + V_1 = M \tag{12.5-12}$$

$$L_0 x_{A0} + V_2 y_{A2} = L_1 x_{A1} + V_1 y_{A1} = M x_{AM} \tag{12.5-13}$$

$$L_0 x_{C0} + V_2 y_{C2} = L_1 x_{C1} + V_1 y_{C1} = M x_{CM} \tag{12.5-14}$$

Puesto que $x_A + x_B + x_C = 1.0$, no se requiere una ecuación en términos de *B.* Para resolver estas tres ecuaciones, es útil el diagrama de fases de equilibrio de la figura 12.5-6b. Como se conocen las cantidades y las composiciones de L_0 y V_2 es posible calcular los valores M, x_{AM} y x_{CM} con base en las ecuaciones (12.5-12) ala (12.5-14). Los puntos L_0, V_2 y M se pueden graficar tal como se muestra en la figura 12.5-6b. Entonces mediante un procedimiento de aproximaciones sucesivas se traza una línea de unión a través del punto M, que localiza las composiciones de L_1 y V_1. Las cantidades de L_1 y V_1 se pueden determinar por sustitución en las ecuaciones (12.5-12) ala (12.5-14), o usando la regla del brazo de palanca.

12.6 EQUIPO PARA EXTRACCIÓN LÍQUIDO-LÍQUIDO

12.6A Introducción y tipos de equipo

Como en el caso de los procesos de separación de absorción y destilación, las dos fases de la extracción líquido-líquido se ponen en contacto íntimo con un alto grado de turbulencia para lograr velocidades de transferencias de masa elevadas. Después de este contacto, ambas fases se separan. En la absorción y en la destilación, esta separación es rápida y fácil, debido a la gran diferencia de densidad entre la fase gaseosa (o vapor) y la líquida. En la extracción con disolvente, la diferencia de densidades entre las dos fases es muy pequeña y la separación es más complicada.

Existen dos tipos principales de equipo para extracción con disolvente: recipientes equipados con agitación mecánica para el mezclado, y recipientes en los que el mezclado se obtiene por el propio flujo de los fluidos. El equipo de extracción se puede operar por lotes o en régimen continuo como en los casos de absorción y destilación.

12.6B Mezcladores-sedimentadores para la extracción

Para lograr una transferencia de masa eficiente, con frecuencia se usa un mezclador mecánico que permite un contacto íntimo entre las dos fases líquidas. En general, una de las fases se dispersa en la otra en forma de gotas pequeñas, por lo que se requiere un tiempo de contacto suficiente para que se verifique la extracción. Las gotas pequeñas producen áreas interfaciales grandes y una extracción más rápida; sin embargo, las gotas no deben ser tan pequeñas como para que el tiempo de sedimentación subsiguiente sea demasiado largo.

En la sección 3.4 se analizó el diseño y los requerimientos de potencia de los agitadores o mezcladores con deflectores. En la figura 12.6-1a se muestra un mezclador-sedimentador típico, donde

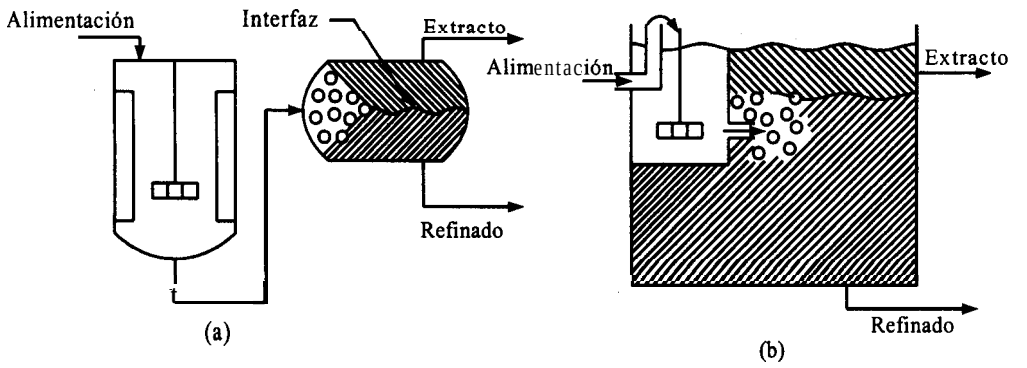


FIGURA 12.6-1. *Mezcladores-sedimentadores* ***típicos*** *para* ***extracción:*** *a) mezclador-sedimentador por separado, b)* ***combinación*** *de mezclador-sedimentador.*

el mezclador o agitador está completamente separado del sedimentador. La alimentación de fase acuosa y fase orgánica se presenta en el mezclador, y las fases mezcladas se separan en el sedimentador. En la figura 12.6-1b se muestra una combinación de mezclador-sediimentador, que algunas veces se usa para la extracción de sales de uranio o de cobre de soluciones acuosas. Ambos tipos de mezclador-sedimentador se pueden combinar en serie para extracción a contracorriente o en etapas múltiples.

12.6C Contactores de platos y de torres agitadas para la extracción

Como se estudió en la sección 10.6 para las torres de absorción y destilación de platos, en los procesos de contacto líquido-líquido se usan dispositivos similares. En la figura 12.6-2a se muestra una torre de extracción de platos perforados, donde se dispersan las gotas del disolvente ligero líquido que tienden a elevarse. Las gotas dispersadas coalescen o se aglutinan debajo de cada plato y se vuelven a formar por encima de éste, al pasar a través de las perforaciones. El líquido acuoso pesado fluye hacia abajo en los platos, donde se pone en contacto con las gotas flotantes y después pasa por la bajada del plato hacia el plato inferior.

En la figura 12.6-2b se muestra una torre de extracción con agitación. Una serie de agitadores de paletas, montados sobre un eje giratorio central, proporcionan la agitación para ambas fases. Cada agitador esta separado del siguiente por una sección en calma constituida por un tamiz de alambre que promueve el aglutinamiento de las gotas y la separación de las fases. Este aparato es, en esencia, una serie de mezcladores-sedimentadores, uno encima del otro (C8, P1, Tl). Otro tipo es la columna de platos de vaivén de Karr, que contiene una serie de platos de criba con una gran área abierta del 60% donde los platos se mueven de abajo hacia arriba (C6, C8, L3). Éste es uno de los pocos tipos de torres de extracción cuya escala se puede aumentar con precisión razonable (C6, K3).

12.6D Torres de extracción empacadas y de rocío

Las torres de extracción empacadas y de rocío permiten contactos diferenciales, y en ellas el mezclado y la sedimentación proceden con régimen continuo y simultaneo (C8). En torres de platos o en contactores mezclador-sedimentador, la extracción y la sedimentación se verifican en etapas definidas. En la figura 12.6-3, el líquido pesado entra por la parte superior de la torre de rocío, llena

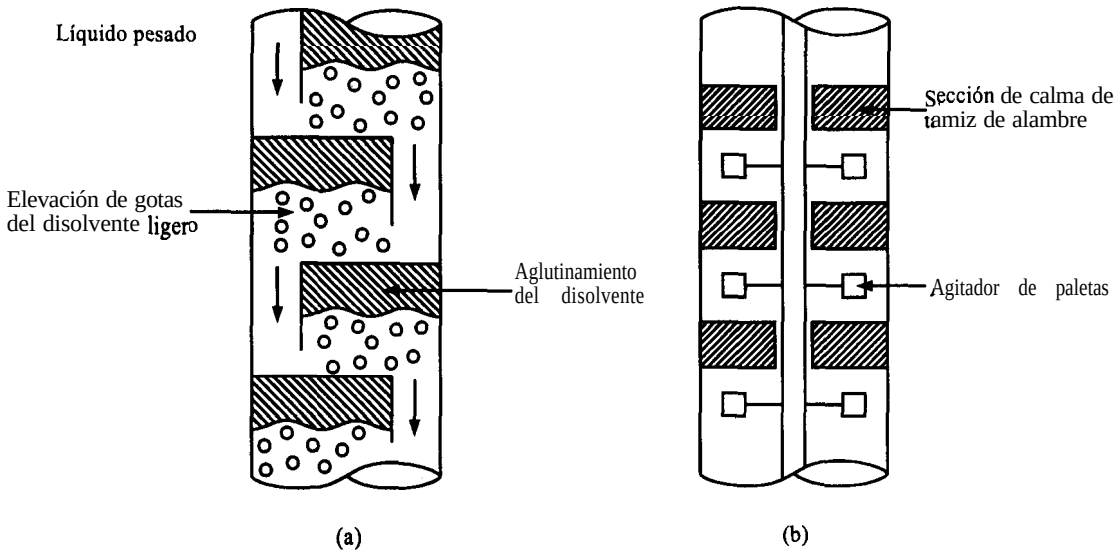


FIGURA 12.6-2. *Torres de extracción: a) torre de platos perforados, b) torre de extracción con agitada.*

la torre, lo que constituyendo la fase continua y fluye hacia afuera, por el fondo. El líquido ligero entra a través de un distribuidor de tobera en el fondo, que lo dispersa hacia arriba en forma de rocío de gotas pequeñas. El líquido ligero se aglutina en la parte superior y fluye hacia afuera. En algunos casos, el líquido pesado se rocía hacia.abajo sobre la fase ligera continua que se va elevando.

Un tipo de torre más eficaz es una columna con empaques como anillos de Raschig o sillas de Berl, que promueven el aglutinamiento y la redispersión de las gotas a intervalos frecuentes a lo largo de la torre. En las referencias (Tl, P1) se pueden encontrar estudios detallados del funcionamiento y la construcción de torres empacadas.

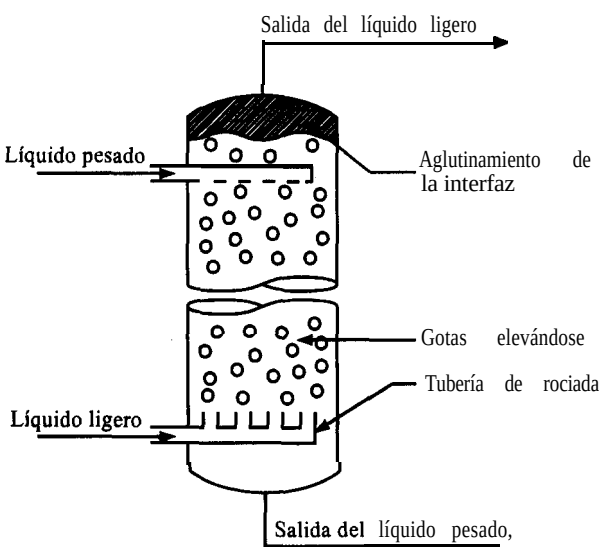


FIGURA 12.6-3. *Torre de extracción por rocio*

12.7 EXTRACCIÓN A CONTINUA CONTRACORRIENTE EN ETAPAS MÚLTIPLES

12.7A Introducción

En la sección 12.5 se usó un contacto de equilibrio en una sola etapa para transferir el soluto A de una fase líquida a otra. Para transferir más soluto se puede repetir el contacto en una sola etapa, mezclando la corriente de salida L_1 con disolvente nuevo V_2, como se muestra en la figura 12.5-6. De esta manera se logra un mayor porcentaje de extracción del soluto A. Sin embargo, este procedimiento desperdicia corriente de disolvente y además, da lugar a la formación de un producto A diluido en las corrientes de salida de extracto. Para usar menos disolvente y obtener una corriente de extracto de salida más concentrada, generalmente se usa el contacto a contracorriente en etapas múltiples.

Muchas de las ecuaciones fundamentales de la absorción de gases a contracorriente y de la rectificación, son las mismas o similares a las que se usan en la extracción a contracorriente. Debido a que las dos fases líquidas suelen ser altamente solubles entre sí, las relaciones de equilibrio en la extracción son más complicadas que en la absorción y en la destilación.

12.7B Extracción continua a contracorriente en etapas múltiples

1. Proceso a contracorriente y balance general. El flujo del proceso para este método de extracción es el mismo que se describió en la figura 10.3-2, y que se muestra en la figura 12.7-1. La corriente de alimentación que contiene el soluto A que se va a extraer, entra por un extremo del proceso y la corriente de disolvente entra por el otro. Las corrientes de extracto y de refinado fluyen a contracorriente de etapa a etapa, y los productos finales son la corriente de extracto V_1 que sale de la etapa 1, y la corriente de refinado L_N que sale de la etapa N.

Estableciendo un balance en todas las etapas N,

$$L_0 + V_{N+1} = L_N + V_1 = M \qquad \textbf{(12.7-1)}$$

donde M representa los kg totales/h(lb_m/h) y es una constante, L_0 es el flujo de alimentación de entrada en kg/h, V_{N+1} es el gasto de entrada del disolvente en kg/h, V_1 es la corriente de extracto de salida, y L_N es la corriente de refinado de salida. Llevando a cabo un balance general con respecto al componente C,

$$L_0 x_{C0} + V_{N+1} y_{CN+1} = L_N x_{CN} + V_1 y_{C1} = M x_{CM} \qquad \textbf{(12.7-2)}$$

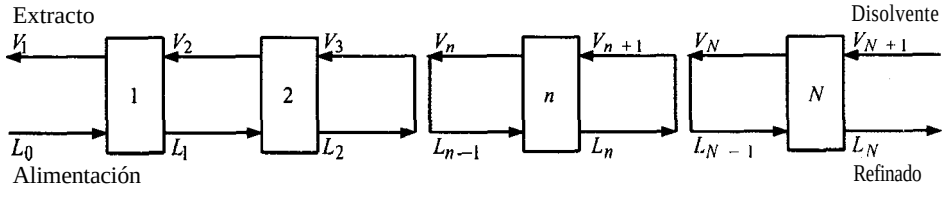


FIGURA 12.7-1. *Diagrama de flujo de un proceso continuo de extracción a contracorriente en etapas múltiples.*

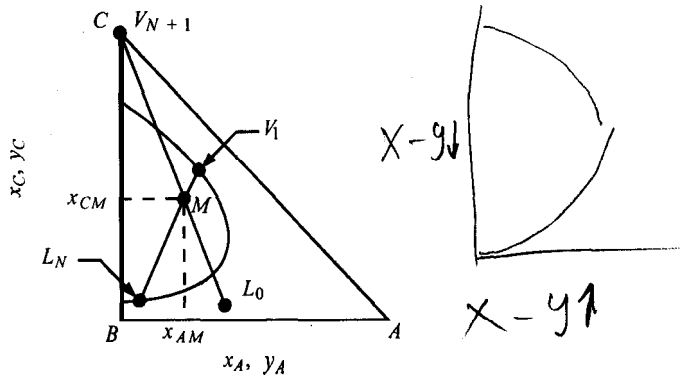


FIGURA 12.7-2. *Uso del punto de mezcla M para el balance total de materia en la extracción con disolvente a contracorriente.*

Combinando las ecuaciones (12.7-1) y (12.7-2) y reordenando,

$$x_{CM} = \frac{L_0 x_{C0} + V_{N+1} y_{CN+1}}{L_0 + V_{N+1}} = \frac{L_N x_{CN} + V_1 y_{C1}}{L_N + V_1} \tag{12.7-3}$$

Un balance similar con respecto al componente A, proporciona la expresión

$$x_{AM} = \frac{L_0 x_{A0} + V_{N+1} y_{AN+1}}{L_0 + V_{N+1}} = \frac{L_N x_{AN} + V_1 y_{A1}}{L_N + V_1} \tag{12.7-4}$$

Las ecuaciones (12.7-3) y (12.7-4) se pueden usar para calcular las coordenadas del punto M en el diagrama de fases, que relaciona las dos corrientes de entrada L_0 y V_{N+1} y las dos corrientes de salida, V_1 y L_N. Por lo general, se conocen los flujos y las composiciones de L_0 y V_{N+}, y la composición de salida x_{AN} deseada tiene un valor fijo. Al graficar los puntos L_0, V_{N+1} y M como se ilustra en la figura 12.7-2, deben quedar conectados por una recta. Entonces, L_N, M y V_1 quedan en una misma línea. Además, L_N y V_1 estarán situados en la envolvente de las fases, como se muestra en la figura. Estos balances también son válidos para lb_m y fracciones de masa, kg mol y fracciones mol, entre otros elementos.

EJEMPLO 12.7-1. Balance de materia para un proceso a contracorriente por etapas

Se emplea disolvente puro de éter isopropílico a un flujo de $V_{N+1} = 600$ kg/h para extraer una solución acuosa de $L_0 = 200$ kg/h, que contiene 30% en peso de ácido acético (A), a contracorriente en etapas múltiples. La concentración de salida deseada para el ácido acético en la fase acuosa es de 4%. Calcule las composiciones y las cantidades del extracto de éter V_1 y del refinado acuoso L_N. (Use los datos de equilibrio del Apéndice A.3.)

Solución: Los valores conocidos son $V_{N+1} = 600$ $y_{AN+1} = 0$, $y_{CN+1} = 1.0$, $L_0 = 200$, $x_{A0} = 0.30$, $x_{B0} = 0.70$, $x_{C0} = 0$ y $x_{AN} = 0.04$. De acuerdo con esto, se sitúan en la figura 12.7-3 los puntos V_{N+1} y L_0. Además, puesto que L_N está en el límite de las fases, se puede graficar con un valor de $x_{AN} = 0.04$. Para el punto de la mezcla M, sustituyendo en las ecuaciones (12.7-3) y (12.7-4),

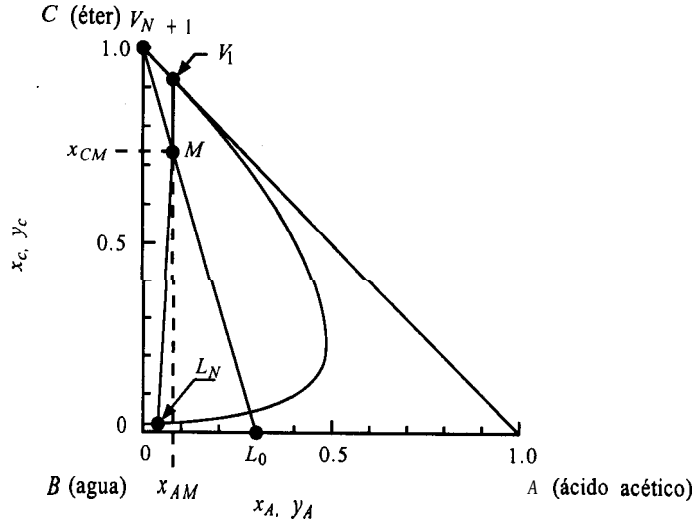


FIGURA 12.7-3. *Método para el balance total de materia del ejemplo 12.7-I.*

$$x_{CM} = \frac{L_0 x_{C0} + V_{N+1} y_{CN+1}}{L_0 + V_{N+1}} = \frac{200(0) + 600(1.0)}{200 + 600} = 0.75 \qquad (12.7\text{-}3)$$

$$x_{AM} = \frac{L_0 x_{A0} + V_{N+1} y_{AN+1}}{L_0 + V_{N+1}} = \frac{200(0.30) + 600(0)}{200 + 600} = 0.075 \qquad (12.7\text{-}4)$$

Se traza entonces el punto M en la figura 12.7-3 usando estas coordenadas. El punto V_1 se localiza trazando una línea desde L_N a través de M, que se prolonga hasta que interseca al límite de las fases. Esto proporciona los valores $y_{A1} = 0.08$, $y_{C1} = 0.90$. Para L_N se obtiene un valor de $x_{CN} = 0.017$. Sustituyendo en las ecuaciones (12.7-1) y (12.7-2) y despejando, $L_N = 136$ kg/h y $V_1 = 664$ kg/h.

2. Cálculos de etapa a etapa para la extracción a contracorriente. El siguiente paso después de establecer el balance general consiste en pasar de etapa a etapa para determinar las concentraciones en cada una de ellas y el numero total de etapas N necesario para llegar a L_N en la figura 12.7-1.

El balance total en la etapa 1 es

$$L_0 + V_2 = L_1 + V_1 \qquad (12.7\text{-}5)$$

Estableciendo un balance similar en la etapa n,

$$L_{n-1} + V_{n+1} = L_n + V_n \qquad (12.7\text{-}6)$$

Reordenando la ecuación (12.7-5) para obtener la diferencia A en flujos,

$$L_0 - V_1 = L_1 - V_2 = A \qquad (12.7\text{-}7)$$

Este valor de A en kg/h es constante para todas las etapas.

$$\Delta = L_0 - V_1 = L_n - V_{n+1} = L_N - V_{N+1} = \qquad (12.7\text{-}8)$$

Esto también es válido para un balance del componente A, B o C,

$$\Delta x_\Delta = L_0 x_0 - V_1 y_1 = L_n x_n - V_{n+1} y_{n+1} = L_N x_N - V_{N+1} y_{N+1} = \cdots \quad (12.7\text{-}9)$$

Combinando las ecuaciones (12-7-8) y (12.7-9) y despejando x_Δ

$$x_\Delta = \frac{L_0 x_0 - V_1 y_1}{L_0 - V_1} = \frac{L_n x_n - V_{n+1} y_{n+1}}{L_n - V_{n+1}} = \frac{L_N x_N - V_{N+1} y_{N+1}}{L_N - V_{N+1}} \quad (12.7\text{-}10)$$

donde x_Δ es la coordenada x del punto A.

Las ecuaciones (12.7-7) y (12.7-8) se pueden escribir como

$$L_0 = \mathrm{A} + V_1 \qquad L_n = \Delta + V_{n+1} \qquad L_N = \Delta + V_{N+1} \quad (12.7\text{-}11)$$

La ecuación (12.7-11) indica que L_0 está en una línea que pasa a través de A y V_1, L_n está en una línea que pasa a través de A y V_{n+}, y así sucesivamente. Esto significa que A es un punto común a todas las corrientes que se cruzan, como L_0 y V_1, L_n y V_{n+}, y L_N y V_{N+1}, etc. Las coordenadas para localizar este punto de operación A corresponden a $x_{C\Delta}$ y $x_{A\Delta}$ en la ecuación (12.7-10). Puesto que los puntos fínales V_{N+}, , L_N o V_1 y L_0 son valores conocidos, es posible calcular x_Δ y localizar el punto A. Siguiendo otro procedimiento, el punto A se determina por medios gráficos en la figura 12.7-4, en forma de intersección de las líneas $L_0 V_1$ y $L_N V_{N+1}$.

Para escalonar el número de etapas usando la ecuación (12.7-1 1), se empieza en el punto L_0 *y se traza* la línea L_0 A que localiza al punto V_1 en el límite de las fases. Después, una línea de unión a través de V_1 localiza el punto L_1, que está en equilibrio con V_1. Entonces, se traza la línea L_1 A con la que se obtiene V_2. Se traza después la línea V_2 L_2. Este procedimiento escalonado se repite hasta que se llega a la composición de refinado L_N desea&. Se obtiene así el número de etapas N necesario para llevar a cabo la extracción.

EJEMPLO 12.7-2. Número de etapas en una extracción a contracorriente

Se emplean 450 kg/h de éter isopropílico puro para extraeq una solución acuosa de 150 kg/h con 30% en peso de ácido acético (A) mediante un proceso a contracorriente en etapas múltiples. La concentración de salida del ácido en la fase acuosa es de 10% en peso. Calcule el número de etapas requeridas.

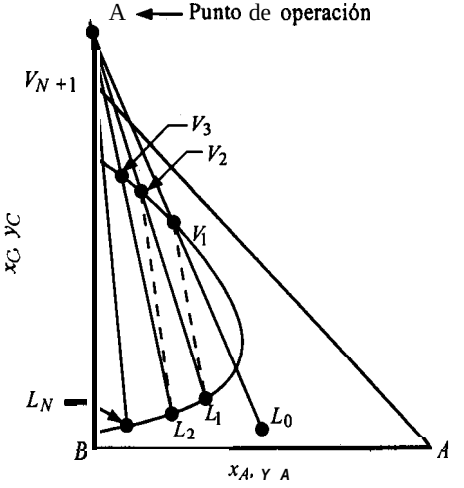


FIGURA 12.7-4. *Punto de operación* A *y número de etapas teóricas necesarias para una extracción a contracorriente.*

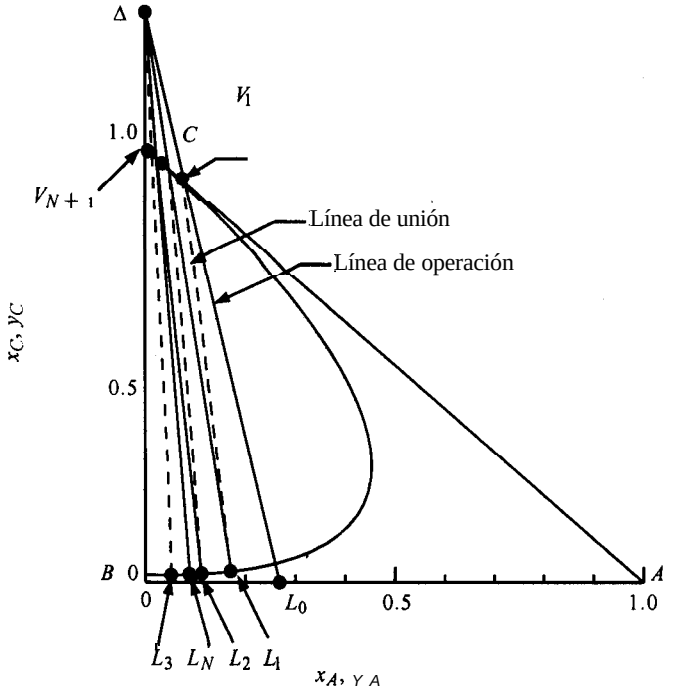


FIGURA 12.7-5. *Resolución gráfica para la extracción a contracorriente del ejemplo 12.7-2.*

Solución: Los valores conocidos son V_{N+} , = 450, $y_{AN+1} = 0$, $y_{CN+1} = 1.0$, $L_0 = 150$, $x_{A0} = 0.30$, $x_{B0} = 0.70$, $x_{C0} = 0$ y $x_{AN} = 0.10$. Se grafican los puntos V_{N+1}, L_0 y L_N, se como muestra en la figura 12.7-5. Para el punto de la mezcla M, sustituyendo en las ecuaciones (12.7-3) y (12.7-4), $x_{CM} = 0.75$ y $x_{AM} = 0.075$. Se grafica el punto M, y V_1 se localiza en la intersección de la línea $L_N M$ con el límite de fases, con lo que obtiene $y_{A1} = 0.072$ y $y_{C1} = 0.895$. No se muestra en la figura esta construcción. (Véasé en el ejemploo 12.7-1 la construcción de las líneas.)

Se trazan las líneas $L_0 V_1$ y $L_N V_{N+1}$ y la intersección es el punto de operación A como se muestra en la figura. Siguiendo otro procedimiento, se pueden calcular las coordenadas de operación A con base en la ecuación (12.7-10) para localizar el punto A. Empezando en L_0, se traza la línea L_0 A, que localiza el punto V_1. Entonces, una línea de unión a través de V_1 fija al punto L_1 en equilibrio con V_1. (Los datos de las líneas de unión se obtienen con una gráfica ampliada, como la que se muestra en la parte inferior de la figura (12.5-3). A continuación se traza la línea L_1 A que localiza a V_2. Una línea de unión a través de V_2 produce el punto L_2. Una línea L_2 A permite obtener V_3. Una línea de unión final proporciona el valor de L_3, que sobrepasa al valor deseado de L_N. Por consiguiente, se necesitan unas 2.5 etapas teóricas.

3. Cantidad mínima de disolvente. Si se selecciona una cantidad de disolvente V_{N+} , con un valor muy bajo se llegará a un caso límite en el cual una línea a través de A y una línea de unión son iguales. Entonces, para lograr la separación deseada se requerirá un número infinito de etapas. Así se logra la cantidad mínima de disolvente. No obstante, para la operación real se deberá usar una cantidad mayor de disolvente.

El procedimiento para obtener este mínimo es como sigue. Se traza una línea de unión a través del punto L_0 (Fig. 12.7-4) que interseque a la prolongación de $L_N V_{N+1}$. Se trazan otras líneas de unión

a la izquierda de esta línea, incluyendo una a través de L_N que interseque a la línea $L_N V_{N+1}$. La intersección de una línea de unión con la línea $L_N V_{N+}$, que esté más cerca de V_{N+1}, representa el punto Δ_{min}, esto es, la cantidad mínima de disolvente. La posición real de A que se usa deberá estar más cercana a V_{N+}, que a Δ_{min} para un número finito de etapas. Esto significa que se usará más disolvente. Por lo general, la línea de unión a través de L_0 representa el valor de Δ_{min}.

12.7C Extracción a contracorriente en etapas con líquidos inmiscibles

Si la corriente de disolvente V_{N+1} contiene los componentes A y C y la corriente de alimentación L_0 contiene A y B, y los componentes B y C son relativamente inmiscibles entre sí, los cálculos de las etapas resultan más fáciles. El soluto A está bastante diluido y se transfiere de L_0 a V_{N+1}.

En la figura 12.7-l) llevando a cabo un balance general de A con respecto a la totalidad del sistema, y después con respecto a las primeras n etapas,

$$L'\left(\frac{x_0}{1-x_0}\right)+V'\left(\frac{y_{N+1}}{1-y_{N+1}}\right)=L'\left(\frac{x_N}{1-x_N}\right)+V'\left(\frac{y_1}{1-y_1}\right) \qquad \textbf{(12.7-12)}$$

$$L'\left(\frac{x_0}{1-x_0}\right)+V'\left(\frac{y_{n+1}}{1-y_{n+1}}\right)=L'\left(\frac{x_n}{1-x_n}\right)+V'\left(\frac{y_1}{1-y_1}\right) \qquad (12.7\text{-}13)$$

donde L' = kg de B inerte B/h, V' = kg de C inerte C/h, y = fracción en masa de A en la corriente V, y x = fracción en masa de A en la corriente L. Esta ecuación (12.7-13) es una igualdad de línea de operación cuya pendiente $\cong L'/V'$. Si y y x están bastante diluidos, la línea será recta al graficarse en un diagrama xy.

El número de etapas se escalona como se indicó previamente para los casos de destilación y absorción.

Si la línea de equilibrio es bastante diluida, y como que la línea de operación es esencialmente recta, pueden usar las ecuaciones analíticas (10.3-21) a la (10.3-26) de la sección 10.3D para calcular el número de etapas.

EJEMPLO 12.7-3. Extración de nicotina con líquidos inmiscibles

Una solución de agua que entra a razón de 1 OO kg/h y que contiene 0.0 10 de fracción en peso de nicotina (A) en agua se extrae con una corriente de queroseno de 200 kg/h que contiene 0.0005 de fracción en peso de nicotina en una torre de etapas a contracorriente. El agua y el queroseno son esencialmente inmiscibles uno en otro. Se desea reducir la concentración del agua que sale a 0.0010 de fracción en peso de nicotina. Determine el número teórico de etapas necesario. Los datos de equilibrio son como sigue (C5), x es la fracción en peso de nicotina en la solución acuosa y y en el queroseno.

x	Y	x	Y
0.001010	0.000806	0.00746	0.00682
0.00246	0.001959	0.00988	0.00904
0.00500	0.00454	0.0202	0.0185

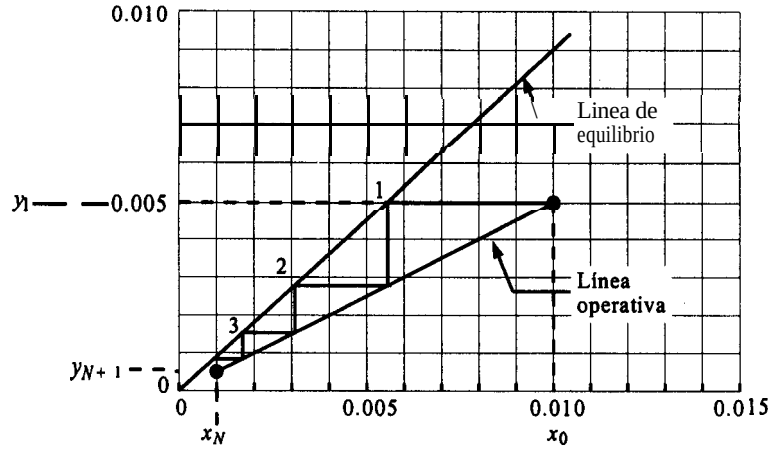


FIGURA 12.7-6. ***Solución para la extracción con líquidos inmiscibles. ejemplo 12.7-3.***

Solución: Los valores disponibles son L_0 = 100 kgfh, x_0 = 0.0010, V_N + , = 200 kg/h, y_{N+1} = 0.0005, x_N = 0.0010. Los fluidos inertes son

L' = L(l – x) = L_0 (1 – x_0) = 100(1 – 0.010) = 99.0 kg de agua/h

V' = V(1 -y)= V_{N+} , (1 – y_{N+1}) = 200(1 – 0.0005) = 199.9 kg de queroseno/h

Se efectúa un balance de todo el conjunto en A usando la ecuación (12.7-12) y se encuentra y_1 = 0.00497. Estos últimos puntos de la línea de operación están marcados en la figura 12.7-6. A partir de que estas soluciones están completamente diluidas, la linea es recta. También se muestra a línea de equilibrio. El número de etapas se escalona y se obtiene N= 3.8 etapas teóricas.

12.8 INTRODUCCIÓN Y EQUIPO PARA LIXIVIACIÓN LÍQUIDO-SÓLIDO

12.8A Proceso de lixiviación

1. Introducción. Muchas sustancias biológicas, así como compuestos inorgánicos y orgánicos, se encuentran como mezclas de diferentes componentes en un sólido. Para separar el soluto deseado o eliminar un soluto indeseable de la fase sólida, ésta se pone en contacto con una fase líquida. Ambas fases entran en contacto intimo y el soluto o los solutos se difunden desde el sólido a la fase líquida, lo que permite una separación de los componentes originales del sólido. Este proceso se llama *lixiviación líquido-sólido* o simplemente, *lixiviación.* La operación unitaria se puede considerar como una *extracción,* aunque el término también se refiere a la extracción líquido-líquido. Cuando la lixiviación tiene por objeto eliminar con agua un componente indeseable de un sólido, el proceso recibe el nombre de *lavado.*

2. Procesos de lixiviación para sustancias biológicas. En la industria de procesos biológicos y alimenticios, muchos productos se separan de su estructura natural original por medio de una livixiviación líquido-sólido. Un proceso importante es la lixiviación de azúcar de las remolacha con agua caliente. En la producción de aceites vegetales, se emplean disolventes orgánicos como hexano,

acetona y éter, para extraer aceite de cacahuate, soya, semillas de lino, semillas de ricino, semillas de girasol, semillas de algodón, harina, pasta de palo e hígado de hipogloso. En la industria farmacéutica se obtiene una gran diversidad de productos por lixiviación de raíces, hojas y tallos de plantas. En la producción de café "instantáneo" soluble, el café tostado y molido se somete a una lixiviación con agua pura. El té soluble se fabrica por lixiviación de hojas de té con agua. El tanino se extrae de las cortezas de arboles por lixiviación con agua.

3. Procesos de lixiviación para materiales inorgánicos y orgánicos. Los procesos de lixiviación son de uso común en las industria metalúrgica. Los metales útiles suelen encontrarse en mezclas con grandes cantidades de constituyentes indeseables, y la lixiviación permite extraerlos en forma de sales solubles. Las sales de cobre se disuelven o se lixivian de los minerales molidos que contienen otras sustancias por medio de soluciones de ácido sulfúrico o amoniacales. Las sales de cobalto y níquel se lixivian de sus minerales con mezclas de ácido sulfúrico-amoniaco-oxígeno. La lixiviación de oro a partir de sus minerales, se basa en el uso de una solución acuosa de cianuro de sodio. El hidróxido de sodio se lixivia de una suspensión de carbonato de calcio e hidróxido de sodio, que se prepara haciendo reaccionar Na_2CO_3 con $Ca(OH)_2$.

12.8B Preparación de los sólidos para la lixiviación

1. Materiales inorgánicos y orgánicos. El método de preparación del sólido depende en alto grado de la proporción del constituyente soluble presente, de su distribución en el material sólido original, de la naturaleza del sólido, que puede estar constituido por células vegetales o el material soluble estar totalmente rodeado por una matriz de materia insoluble, y del tamaño de partícula original.

Si la materia soluble está rodeada de una matriz de materia insoluble, el disolvente se debe difundir hacia el interior para ponerse en contacto y disolver el material soluble, y después difundirse hacia afuera. Esto ocurre en muchos procesos hidrometalúrgicos, en los que se lixivian sales metálicas de minerales métalicos. En estos casos se procede a una trituración y molienda previa de los materiales para aumentar la velocidad de lixiviación, pues de esta manera las porciones solubles quedan más accesibles a la acción del disolvente. Si la sustancia soluble está en solución sólida o ampliamente distribuida en la totalidad del sólido, la acción de lixiviación del disolvente forma canales pequeños. Esto hace que el paso de disolvente adicional resulte más fácil, por lo cual se puede prescindir de la molienda a tamaños muy pequeños. La molienda de las partículas es innecesaria cuando el material soluble está disuelto en una solución adherida al sólido. Entonces se puede emplear un simple lavado similar al de precipitados químicos.

2. Materiales animales y vegetales. Los materiales biológicos tienen estructura celular y los constituyentes solubles suelen estar dentro de las células. En ocasiones, la velocidad de lixiviación es bastante baja, debido a que las paredes celulares constituyen una resistencia adicional a la difusión. No obstante, es poco práctico moler los materiales biológicos a tamaño suficientemente pequeño para exponer el contenido de las células individuales. Las remolachas de azúcar se cortan en rebanadas delgadas cuneiformes para que durante la lixiviación sea más pequeña la distancia necesaria para que el disolvente acuoso se difunda y llegue a las células individuales. Las células de la remolacha se mantienen esencialmente intactas, por lo que el azúcar se difunde a través de las paredes celulares semipermeables, mientras los componentes albuminosos y coloidales indeseables no pueden pasar a través de ellas.

Para lixiviar productos farmacéuticos de hojas, tallos y raíces, el secado del material antes de la extracción ayuda a romper las paredes celulares. De esta manera, el disolvente ataca directamente al soluto. Las paredes celulares de las semillas de soya y de otros vegetales sufren bastantes rupturas

cuando la materia se reduce a un tamaño de aproximadamente 0.1 mm a 0.5 mm, por medio de un proceso de laminación para formar pequeñas escamas. Las células son de tamaño más pequeño, pero sus paredes se rompen y el aceite vegetal queda más accesible a la acción del disolvente.

12.8C Velocidad de lixiviación

1. Introducción y pasos generales. En la lixiviación de materiales solubles del interior de una partícula por acción de un disolvente, el proceso general consiste en los siguientes pasos: el disolvente se transfiere del volumen de solución a la superficie del sólido. Después, dicho disolvente penetra o se difunde en el sólido. El soluto se disuelve en el disolvente. Entonces, el soluto se difunde a través de la mezcla de sólido y disolvente hasta la superficie de la partícula. Finalmente, el soluto se transfiere a la solución general. Los numerosos fenómenos que se presentan en este proceso hacen poco práctico y casi imposible aplicar una teoría definida a la acción de lixiviación.

En general, la velocidad de transferencia del disolvente de la solución general hasta la superficie del sólido es bastante rápida, y la velocidad hacia el interior del sólido puede ser rápida o lenta. Sin embargo, en la mayoría de los casos éstas no son las etapas que limitan a velocidad del proceso total de lixiviación. La transferencia de disolventes suelen ocurrir al principio, cuando las partículas se ponen en contacto con el disolvente; aun así, la disolución del soluto en el disolvente en el interior del sólido puede ser un simple proceso físico de disolución o una verdadera reacción química que libera al soluto para la disolución. El conocimiento del proceso de disolución es bastante limitado y el mecanismo puede ser diferente en cada caso (K1).

La velocidad de difusión del soluto a través del sólido, y la del disolvente hasta la superficie del sólido suelen ser la resistencia que controla el proceso global de lixiviación y dependen de diversos factores. Si el sólido está constituido por una estructura inerte porosa, con el soluto y el disolvente localizados en los poros del sólido, la difusión a través del sólido poroso se puede describir como una difusividad efectiva. Se requieren entonces, la fracción de espacios huecos y la sinuosidad, según se estudió en la sección 6.5C para la difusión en sólidos porosos.

En sustancias biológicas o naturales hay complejidades adicionales debido ala presencia de células. En la lixiviación de rebanadas delgadas de remolacha de azúcar el proceso mecánico previo rompe, más o menos, una quinta parte de las células. Entonces la lixiviación del azúcar es similar a un proceso de lavado (Y 1). En las células restantes, el azúcar se difunde al exterior a través de las paredes celulares. El resultado neto de ambos procesos de transferencia no sigue una ley de difusión simple con difusividad efectiva constante.

En el caso de la soya, los granos enteros no se pueden lixiviar con eficacia.La trituración con rodillos para obtener escamas pequeñas de los granos rompe las paredes celulares, por lo que el disolvente penetra con mayor facilidad por acción capilar. La velocidad de difusión del soluto de aceite de soya desde las escamas de soya, impide una interpretación simple. Cierto método (02) para diseñar extractores a gran escala se basa en experimentos de laboratorio con escamas.

La resistencia a la transferencia de masa del soluto desde la superficie sólida hasta el disolvente general, suele ser bastante pequeña en comparación con la resistencia a la difusión dentro del propio sólido (01). Esto se ha demostrado en la lixiviación de soya, donde el grado de agitación del disolvente externo no produce efectos apreciables sobre la velocidad de extracción (O3,Y 1).

2. Rapidez de lixiviación cuando se *disuelve un sólido.* Cuando un material se disuelve de un sólido a la solución de disolvente, la velocidad de transferencia de masa desde la superficie sólida al líquido, suele ser el factor que controla la totalidad del proceso. En esencia, no hay resistencia en la fase sólida cuando se trata de materia pura, por lo que la ecuación para este caso se puede deducir como sigue

para un proceso por lotes. (Esta deducción también es aplicable al caso en que la difusión en el sólido es muy rápida en comparación con la difusión desde la partícula.)

La velocidad de transferencia de masa del soluto,4 que se está disolviendo en la solución de volumen V m^3 es

$$\frac{N_A}{A} = k_L (c_{AS} - c_A) \tag{12.8-1}$$

donde $\overline{N}_A$ son los kg/mol de A que se disuelven en la solución/s, A es el área superficial de las partículas en m^2, k_L es el coeficiente de transferencia de masa en m/s, c_{AS} es la solubilidad de saturación del soluto sólido A en la solución en kg/mol m^3, y c_A la concentración de A en la solución en el tiempo t s, en kg/mol m^3. Por medio de un balance de materia, la rapidez de acumulación de A en la solución es igual a la ecuación (12.81) multiplicada por el área A,

$$\frac{V\,dc,}{dt} = \overline{N}_A = Ak_L (c_{AS} - c_A) \tag{12.8-2}$$

Integrando desde $t = 0$ y $c_A = c_{A0}$ hasta $t = t$, y $c_A = c_A$,

$$\int_{c_{A0}}^{c_A} \frac{dc_A}{c_{AS} - c_A} = \frac{Ak,}{V} \int_{it=0}^{t} dt \tag{12.8-3}$$

$$\frac{c_{AS} - c_A}{c_{AS} - c_{A0}} = e^{-(k_L A/V)t} \tag{12.8-4}$$

La solución tiende de manera exponencial a condiciones de saturación. Con frecuencia, el área en la interfaz A aumenta durante la extracción si la superficie externa se vuelve muy irregular. Cuando la materia soluble constituye una alta proporción del sólido total, se puede presentar una desintegración de las partículas. En caso de que el sólido se disuelva por completo, el área de la interfaz variara notablemente, además, también variará el coeficiente de transferencia de masa.

Si las partículas son muy pequeñas, el coeficiente de transferencia de masa hacia la partícula en un sistema con agitación se puede predecir mediante las ecuaciones estudiadas en la sección 7.4. Para partículas más grandes, que son las más frecuentes en la lixiviación, la sección 7.4 y Blakebrough (B 1) proporcionan ecuaciones detalladas para predecir el coeficiente de transferencia de masa k_L en recipientes de mezclado con agitación.

3. Rapidez de lixiviación cuando controla la difusión en el sólido. En caso de que la difusión en estado no estacionario en el sólido sea la resistencia que controla el proceso de lixiviación del soluto con un disolvente externo, pueden ser útiles las siguientes aproximaciones. Si la difusividad promedio $D_{A\,\text{eff}}$ del soluto A *es* aproximadamente constante, entonces, para la extracción en un proceso por lotes, se pueden usar las ecuaciones de transferencia de masa en estado no estacionario que se estudiaron en la sección 7.1. Si la partícula es de tipo esférico, puede utilizarse la figura 5.3-13.

EJEMPLO 12.8-1. Pronóstico del tiempo de proceso en una lixiviación por lotes

Un sólido formado por partículas con diámetro promedio de 2.0 mm se somete a lixiviación en un aparato que opera por lotes usando un gran volumen de disolvente. La concentración del soluto A en el disolvente se mantiene aproximadamente constante. Se necesita un tiempo de 3. ll h para lixiviar el 80% del soluto disponible en el sólido. Si se supone que la difusión

en el sólido es el factor que controla, y que la difusividad efectiva es constante, calcule el tiempo necesario para la lixiviación, cuando el tamaño de las partículas se reduce a 1.5 mm.

Solución: Para una extracción del 80%, la fracción no extraída E_s es 0.20. Usando la figura 5.3-13 para una esfera, cuando E_s = 0.20, se obtiene un valor de $D_{A\ \text{eff}}t/a^2$ = 0.112, donde $D_{A\ \text{ef}}$ es la difusividad efectiva en mm^2/s, t es el tiempo en s, y a es el radio en mm. Para la fracción E_s, el valor de $D_{A\ \text{eff}}t/a^2$ es constante para cualquier tamaño. Por consiguiente,

$$t_2 = \frac{t_1 a_2^2}{a_1^2} \qquad \textbf{(12.8-5)}$$

donde t_2 es el tiempo para lixiviar una partícula de tamaño a_2. Al sustituir en la ecuación (12.8-5),

$$t_2 = (3.11)\frac{(1.5/2)^2}{(2.0/2)^2} = 1.75\text{h}$$

4. Métodos de operación en la livixiación. Existen varios métodos generales de operación para realizar la lixiviación en sólidos. Las operaciones se pueden llevar a cabo tanto en condiciones de estado no estacionario o por lotes, como continuas o en estado estacionario. También se pueden usar equipos de tipo continuo o por etapas, ya sea para la operación en estado estacionario o no estacionario.

En la lixiviación en estado no estacionario, uno de los métodos más comunes empleados en la industria mineral *es* la *lixiviación in situ*, donde se permite que el disolvente pase por el mineral por percolación. En otros casos, el licor de lixiviación se bombea sobre una pila de mineral triturado y se recolecta al nivel del suelo a medida que escurre de dicha pila. El cobre se lixivia por este procedimiento con soluciones de ácido sulfúrico, a partir de minerales de sulfuro.

Los sólidos triturados suelen lixiviarse por percolación a través de lechos sólidos, estacionarios en recipientes con fondos perforados, para permitir el drenaje del disolvente. Los sólidos no deben ser demasiado finos, pues habría una alta resistencia al flujo. Algunas veces se colocan varios tanques en serie, que constituyen una *batería de extracción*, y se agrega disolvente nuevo al sólido que está casi extraído. Los tanques pueden ser de tipo abierto o bien cerrado, en cuyo caso se llaman *difusores.* El disolvente fluye a través de los tanques en serie, y se extrae del tanque más recientemente cargado, lo que simula una operación continua a contracorriente. Después de que un tanque ha sido lixiviado por completo, se añade carga nueva al tanque del otro extremo, a través de tuberías múltiples, de manera que no hay necesidad de mover los tanques para la operación a contracorriente. Este procedimiento suele llamarse *sistema Shanks y* se usa con mucha frecuencia en la lixiviación de nitrato de sodio de . sus minerales, en la recuperación de taninos de cortezas y maderas, en la industria minera, en la industria del azúcar y en varias más.

En otros procesos, las partículas de sólido triturado se desplazan en forma continua por medio de transportadores de cangilones o con alimentadores de tornillo. El disolvente fluye a contracorriente al lecho móvil.

Los sólidos finamente molidos pueden lixiviarse en recipientes con agitación o en espesadores. El proceso puede ser de tipo de estado no estacionario por lotes, o bien, los recipientes se pueden colocar en serie para obtener un proceso a contracorriente por etapas.

12.8D Tipos de equipo para la lixiviación

1. Lixiviación en lechos fijos. Este equipo se usa en la industria del azúcar de remolacha, en la extracción de taninos de corteza curtiente, en la extracción de productos farmacéuticos de cortezas y semillas, y en otros procesos. En la figura 12.8-1 se muestra un extractor o difusor típico para azúcar de remolacha. La tapa se puede quitar para que sea posible introducir al lecho las rebanadas de remolacha, a las que se llama *cossettes.* El flujo para lixiviar el azúcar del lecho es agua de 344 K (71 "C) a 350 K (77 "C). La solución de azúcar lixiviada fluye hacia afuera por el fondo, y pasa al siguiente tanque de la serie. (En el sistema Shanks interviene una operación a contracorriente.) Las cubiertas de la tapa y el fondo son removibles, de manera que es posible extraer la remolacha ya lixiviada y añadir nueva carga. El proceso extrae un 95% del azúcar de la remolacha, para producir una solución de salida de aproximadamente 12% en peso.

2. Lixiviación con lechos móviles. Existen varios dispositivos para lixiviar a contracorriente en etapas, en los cuales el lecho o etapa es móvil en lugar de fijo. Estos procesos son útiles en la extracción de aceite a partir de semillas vegetales, como la de algodón, cacahuate, y soya. Por lo general, primero se procede a quitar la cáscara a la semillas, algunas veces se precocinan, generalmente se secan y después se trituran a escamas con rodillos. En ocasiones, se procede a una extracción preliminar de aceite por compresión. Los disolventes suelen ser productos derivados del petróleo, como el hexano. La solución final de disolvente y vegetal, que se llama *micela,* puede contener algunos sólidos finos en suspensión.

En la figura 12.8-2a se muestraundispositivo elevador de cangilones que constituye un lecho móvil totalmente cerrado. Este equipo se llama *extractor de Bollman.* En la parte superior derecha se introducen las escamas secas o los sólidos sobre un cangilón o cubeta perforada; a medida que los cangilones de la derecha descienden, el material del interior se lixivia con una solución diluida de aceite en disolvente llamada *semimicela.* Este líquido fluye hacia abajo por percolación a través de los cangilones móviles, y se recolecta en el fondo en forma de solución concentrada *o micela completa.* Los cangilones que se mueven hacia arriba en la parte izquierda, se someten a una lixiviación a contracorriente con disolvente recién preparado, que se rocía sobre el cangilón. Las escamas sólidas ya procesadas se vacían y se extraen de manera continua como se señala en la figura.

El *extractor de Hildebrandt* de la figura 12.8-2b consiste en tres transportadores de tomillos en forma de U. Los sólidos se cargan en la parte superior derecha, se transportan hacia abajo, a través de la zona inferior, y después, hacia arriba por el otro ramal. El disolvente fluye a contracorriente.

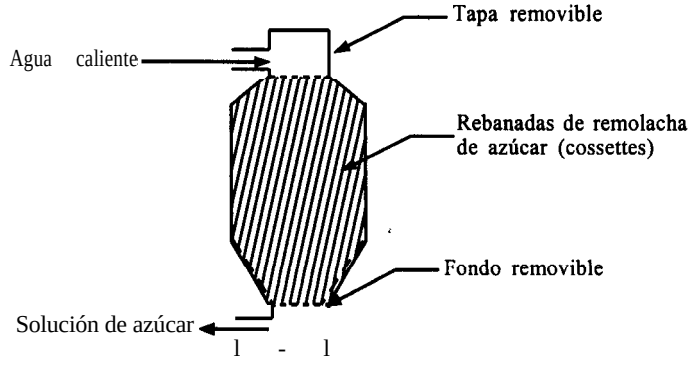


FIGURA 12.8-1. *Aparato típico de lecho fijo para la lixiviación de azúcar de remolacha.*

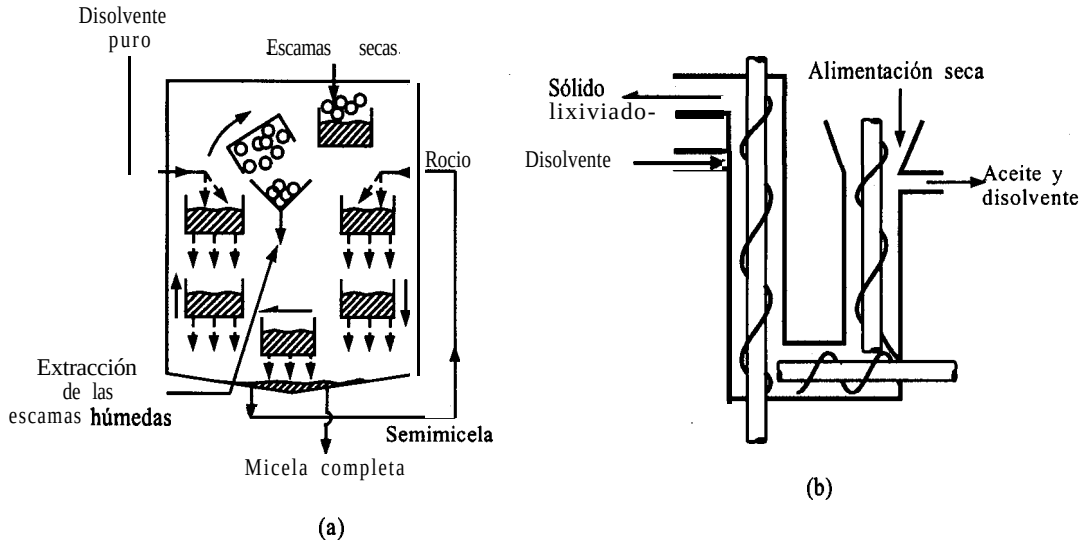


FIGURA 12.8-2. *Equipo para lixiviación con lecho móvil: a) extractor de cangilones tipo Bollman, b) extractor con transportador de tornillo tipo Hildebrandt.*

3. Lixiviación agitada del sólido. Cuando el sólido se puede moler hasta cerca de 200 mallas (0.074 mm), es posible mantenerlo en suspensión aplicándole agitación, y lograr una lixiviación continua a contracorriente, colocándo varios agitadores en serie con tanques de sedimentación o espesadores entre cada agitador.

Algunas veces, los propios espesadores se usan como combinación de contactor-agitador y sedimentador, como se muestra en la figura 12.8-3. En este sistema a contracorriente en etapas, el disolvente se añade al espesador de la primera etapa; entonces, el líquido transparente sedimentado sale de una etapa para fluir hacia la siguiente. La alimentación de sólidos entra en la última etapa, donde se pone en contacto con disolvente de la etapa anterior, para pasar al sedimentador. Los lentos raspadores giratorios desplazan el sólido hacia la descarga del fondo. Los sólidos que contienen todavía algo de

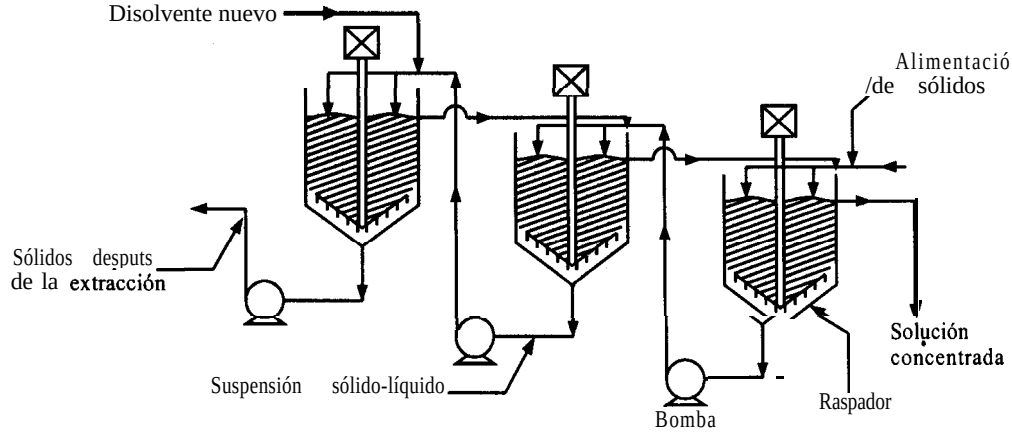


FIGURA 12.8-3. *Lixiviación a contracorriente usando espesadores.*

líquido, se bombean como suspensión hacia el siguiente tanque. Si el contacto es insuficiente se puede instalar un mezclador entre cada sedimentador.

12.9 RELACIONES DE EQUILIBRIO Y LIXIVIACIÓN EN UNA SOLA ETAPA

12.9A Relaciones de equilibrio en la lixiviación

1. Introducción. Para analizar una lixiviación en una sola etapa y en etapas a contracorriente se requieren, al igual que en la extracción líquido-líquido, una ecuación de línea de operación o relación de balance de materia y las relaciones de equilibrio entre ambas corrientes. Se supone que el sólido libre de soluto es insoluble; si hay suficiente disolvente presente para que todo el soluto del sólido de entrada pueda disolverse en el líquido, el equilibrio de la lixiviación se alcanza cuando se ha disuelto el soluto. Por tanto, todo el soluto se disuelve por completo en la primera etapa. En general, existe suficiente tiempo para que esto ocurra en la primera etapa.

También se supone que no hay adsorción del soluto en el sólido durante la lixiviación. Esto significa que la solución de la fase líquida que sale de una etapa es la misma que la que permanece con la matriz sólida en la suspensión sedimentada que abandona la etapa. No es posible (ni práctico) separar todo el líquido del sólido en el sedimentador de una etapa; por consiguiente, el sólido sedimentado que sale de una etapa siempre contiene algo de líquido en el cual hay presente soluto disuelto. La corriente sólido-líquido se llama *flujo inferior o corriente de la suspensión.* En consecuencia, la concentración de aceite o soluto en el líquido *o corriente de derrame,* es igual a la concentración del soluto en el líquido que acompaña ala suspensión o flujo inferior. Por tanto, en una gráfica *xy,* la línea de equilibrio se encuentra sobre la línea de 45°.

La cantidad de solución retenida con los sólidos en la porción de sedimentación de cada etapa, depende de la viscosidad y densidad del líquido en el cual está suspendido el sólido; a su vez, esto depende de la concentración de soluto en solución. Debido a lo anterior, se obtienen datos experimentales de la variación de cantidad y composición de la solución retenida en los sólidos en función de la composición del soluto. Estos datos se deben obtener en condiciones de concentraciones, tiempos y temperaturas, similares a las de los procesos para los cuales se va a realizar los cálculos de etapas.

2. Diagramas de equilibrio para el lixiviado. Los datos de equilibrio se pueden graficar en un diagrama rectangular como fracciones de peso de los tres componentes: Soluto (*A*), sólido inerte o lixiviado (*B*) y disolvente (*C*). Las dos fases son la de derrame (líquido) y la de flujo inferior (suspensión). Este método se estudia en las referencias (B2). Sin embargo, usaremos otro sistema coveniente para graficar los datos de equilibrio, similar al método analizado para las gráficas entalpía-concentración de la sección 11.6.

La concentración del sólido insoluble o inerte *B* en la mezcla de la solución o en la mezcla de la suspensión, se expresa en unidades de kg (lb,),

$$N = \frac{\text{kg de } B}{\text{kg de } A + \text{kg de C}} = \frac{\text{kg de sólido}}{\text{kg de solución}} = \frac{\text{lb de sólido}}{\text{lb de solución}} \qquad \textbf{(12.9-1)}$$

Hay un valor de N para el derrame en el que N = 0 y, en el caso del flujo inferior, N tendrá valores diferentes que dependerán de la concentración del soluto en el líquido. Las composiciones del soluto A en el líquido se expresan como fracciones en peso:

$$x_A = \frac{\text{kg de } A}{\text{kg de } A + \text{kg C}} = \frac{\text{kg de soluto}}{\text{kg de solución}} \quad \text{(líquido de derrame)} \qquad \textbf{(12.9-2)}$$

$$y_A = \frac{kg\ de\ A}{\text{kg de } A + \text{kg C}} = \frac{\text{kg de soluto}}{\text{kg de solución}} \quad \text{(líquido en la suspensión)} \qquad (12.9\text{-}3)$$

donde x_A es la fracción en peso del soluto *A* en el líquido de derrame, y y_A es la fracción en peso de *A* libre de sólido *B* en el líquido asociado con la suspensión o flujo inferior. Para alimentación del sólido de entrada que se va a lixiviar, N es kg de sólido inerte/kg de soluto *A*, *y* y_A = 1.0. Para la entrada del disolvente puro N = 0 y x_A = 0.

En la figura 12.9-1a se muestra un diagrama de equilibrio típico, en el que el soluto *A es* infinitamente soluble en el disolvente C, lo cual ocurre en el caso del aceite de soya (A)-sólido de harina de soya inerte (B)-disolvente hexano (*C*). La curva superior de N contra y_A para el flujo inferior de suspensión representa al sólido separado en condiciones experimentales similares al proceso real por etapas. La línea inferior de N contra x_A donde N = 0 en el eje, representa la composición del líquido de derrame del cual se ha extraído todo el sólido. En algunos casos, el líquido de derrame puede contener cantidades pequeñas de sólido. Las líneas de unión son verticales, y en un diagrama *xy*, la línea de equilibrio es $y_A = x_A$ en la línea de 45°. En la figura 12.9-1b, las líneas de unión no son verticales, lo que puede ser resultado de un tiempo de contacto insuficiente, causando una disolución incompleta del soluto; de una adsorción del soluto *A* en el sólido; o de que el soluto sea soluble en el sólido *B*.

Si la línea del flujo inferior de N contra y es recta y horizontal, la cantidad de líquido asociado con el sólido en la suspensión es constante para cualquier concentración. Esto significa que la velocidad de líquido del flujo inferior será constante en todas las etapas, y lo mismo sucederá con la corriente de derrame. Algunas veces, la práctica se aproxima a este caso especial.

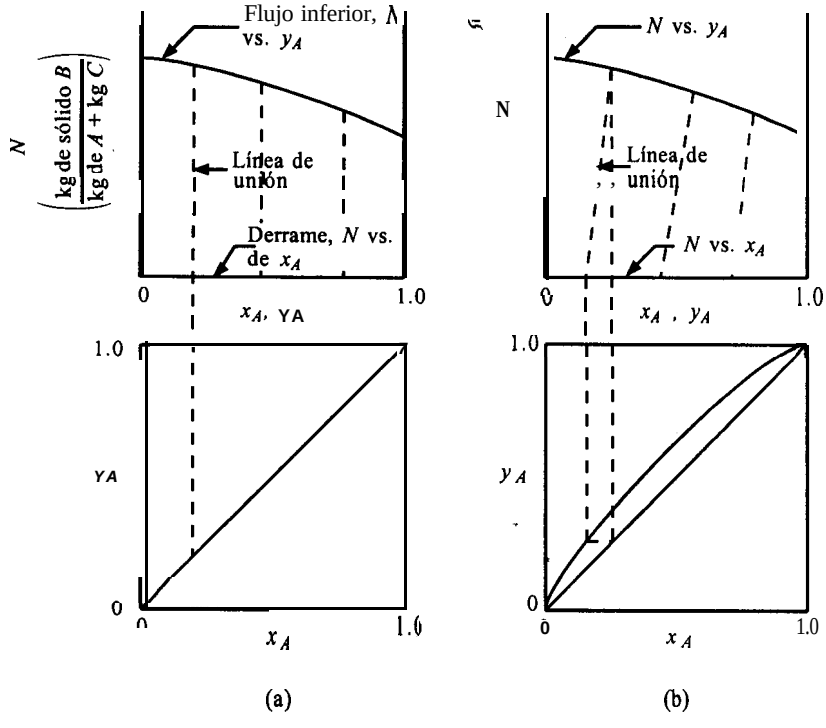


FIGURA 12.9-I. *Diversos diagramas de equilibrio típicos: a) caso de líneas de unión verticales y* $y_A = x_A$, *b) caso en el que, para las líneas de unión,* $y_A \neq x_A$

12.9B Lixiviación en una sola etapa

En la figura 12.9-2a se muestra un proceso de lixiviación en una sola etapa, donde V es kg/h (lb_m/h) de solución de derrame con una composición x_A, y L es kg/h de líquido en la suspensión, con una composición y_A basada en cierto flujo de B kg/h de sólido seco y libre de soluto. Las ecuaciones del balance de materiales son casi idénticas a las ecuaciones (12.512) a la (12.5-14) para una extracción líquido–líquido en una sola etapa y corresponden a las siguientes expresiones para un balance total de la solución (soluto A + disolvente C), un balance de componentes con respecto a A y con respecto a B, respectivamente:

$$L_0 + V_2 = L_1 + V_1 = M \tag{12.9-4}$$

$$L_0 y_{A0} + V_2 x_{A2} = L_1 y_{A1} + V_1 x_{A1} = M x_{AM} \tag{12.9-5}$$

$$B = N_0 L_0 + 0 = N_1 L_1 + 0 = N_M M \tag{12.5-6}$$

donde M es la velocidad total de flujo en kg de $A + C$/h, y x_{AM} y N_M son las coordenadas de este punto M. No se necesita un balance con respecto a C, pues $x_A + x_C = 1.0$ y $y_A + y_C = 1.0$. Como se demostró con anterioridad, $L_1 MV_1$ debe formar una recta, lo mismo que $L_0 MV_2$. Este es el caso de la figura 12.9-2b. Además, L_1 y V_1 deben estar situados en una línea de unión vertical donde el punto M es la intersección de ambas líneas. Si la entrada L_0 representa la alimentación sólida nueva que se va a lixiviar y que no contiene disolvente C, estará localizada por encima de la línea de N contra y en la figura 12.9-2b.

EJEMPLO 12.9-1. Lixiviación de soya en escamas en una sola etapa

En la lixiviación en una sola etapa de aceite de soya extraído de escama de soya con hexano, 1 OO kg de soya que contienen 20% de aceite en peso se tratan con 1 OO kg de hexano. El valor de N para la corriente inferior de suspensión es esencialmente constante e igual a 1.5 kg de sólido insoluble/kg de solución retenida. Calcule las cantidades y las composiciones de la corriente de derrame V_1 y de la suspensión L_1 que salen de la etapa.

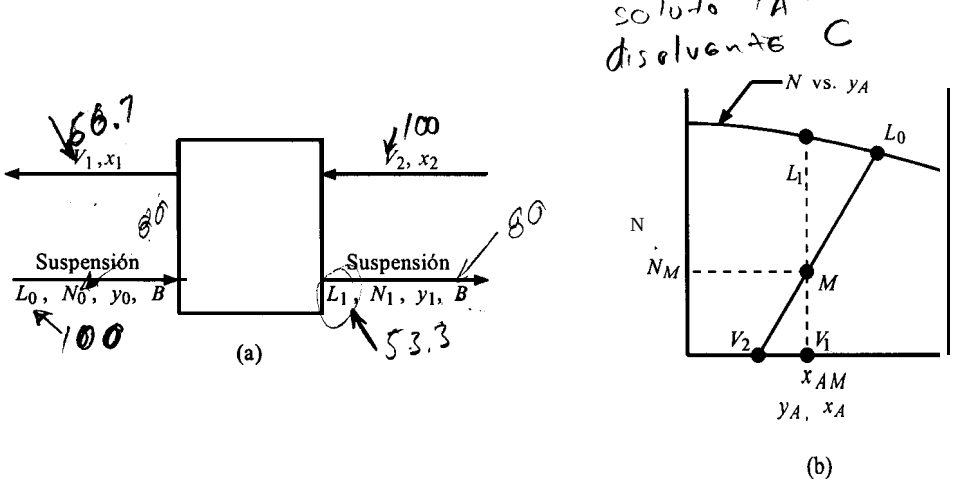


FIGURA 12.9-2. *Flujo del proceso y balance de materia para lixiviación en una sola etapa: a) flujo del proceso, b) balance de materia.*

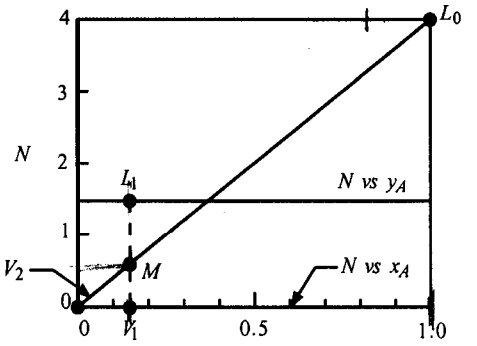


FIGURA 12.9-3. *Solución gráfica de la lixiviación en una sola etapa del ejemplo 12.9-I*

Solución: El diagrama de flujo del proceso es igual que el de la figura 12.9-2a. Las variables del proceso de valor conocido son:

El flujo de entrada de disolvente V_2 = 100 kg, $x_{A2} = 0$, x_{C2} = 1.0. Paya la corriente de entrada de la suspensión, $B = 100(1.0 - 0.2) = 80$ kg de sólido insoluble, $L_0 = 100(1.O - 0.8) = 20$ kg A, N_0 = 80/20 = 4.0 kg sólido/kg solución, y_{A0} = 1 .O.

Para calcular la ubicación de M, sustituyendo en las ecuaciones (12.9-4), (12.9-5) y (12.9-6) y despejando,

$$L_0 + V_2 = 20 + 100 = 120 \text{ kg} = M$$

$$L_0 y_{A0} + V_2 x_{A2} = 20(1.0) + 100(0) = 120 x_{AM}$$

Por consiguiente, $x_{AM} = 0.167$.

$$B = N_0 L_0 = 4.0(20) = 80 = N_M(120)$$

$$N_M = 0.667$$

En la figura 12.9-3 se grafica el punto M junto con V_2 y L_0. Se traza la línea de unión vertical localizando los puntos L_1 y V_1 en equilibrio entre sí. Entonces, $N_1 = 1.5$, $y_{A1} = 0.167$, x_{A1} = 0.167. Sustituyendo en (12.9-4) y (12.9-6) y despejando o usando la regla del brazo de la palanca, L_1 = 53.3 kg y V_1 = 66. 7 kg.

12.10 LIXIVIACIÓN A CONTRACORRIENTE EN ETAPAS MÚLTIPLES

12.10A Introducción y línea de operación para lixiviación a contracorriente

En la figura 12.10-l se muestra el flujo del proceso de lixiviación a contracorriente en etapas múltiples, que es similar al de la extracción líquido-líquido de la figura 12.7-1. Las etapas ideales se numeran en la dirección de la corriente de sólidos o flujo inferior. La fase disolvente (C)-soluto (A) o fase V, representa la fase líquida de derrame continuo de una etapa a otra a contracorriente con la fase sólida y que disuelve soluto al recorrer el sistema. La fase de suspensión L constituida por sólidos inertes (B) y una fase líquida de A y C, representa el flujo inferior continuo de una etapa a otra. La composición de la fase V se denota como x y la de L como y, a la inversa del caso de extracción líquido-líquido.

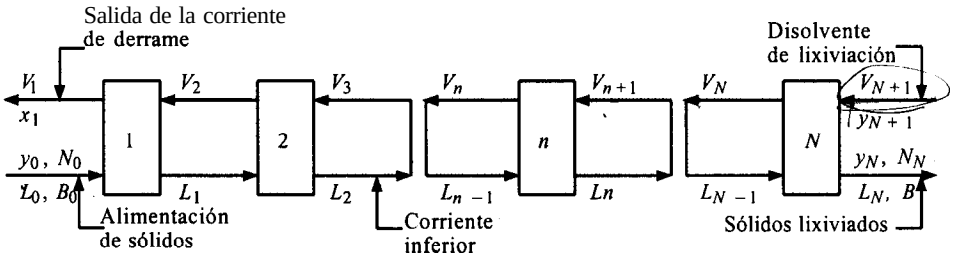


FIGURA 12.10-l. *Flujo del proceso para lixiviación a contracorriente en etapas múltiples.*

Se supone que el sólido B es insoluble y que no se pierde en la fase líquida V. La velocidad de flujo de los sólidos es constante a lo largo de toda la cascada de etapas. Como en el caso de la lixiviación en una sola etapa, Ves kg/h (lb_m/ h) de solución de derrame y L es kg/h de solución líquida retenida por el sólido en la suspensión.

Para deducir la ecuación de la línea de operación, se procede a un balance general y a un balance de componentes sobre el soluto A en las primeras n etapas,

$$V_{n+1} + L_0 = V_1 + L_n \tag{12.10-l}$$

$$V_{n+1}x_{n+1} + L_0y_0 = V_1x_1 + L_ny_n \tag{12.10-2}$$

Despejando x_{n+1}, y eliminando V_{n+1},

$$x_{n+1} = \frac{1}{1+(V_1 - L_0)/L_n}y_n + \frac{V_1x_1 - L_0x_0}{L_n + V_1 - L_0} \tag{12.10-3}$$

Al graficar en un sistema xy, la línea de operación, ecuación (12.10-3), pasa a través de los puntos terminales x_1, y_0 y x_{n+1}, y_N.

Durante el proceso de lixiviación, si la viscosidad y la densidad de la solución cambian de manera apreciable con la concentración del soluto (A), los sólidos de las etapas más cercanas a la alimentación del sólido, donde las concentraciones de soluto son altas, pueden retener más solución líquida que los sólidos de las etapas posteriores, donde el soluto está más diluido. Entonces, L_n, o sea, el líquido retenido en el flujo inferior de sólidos, será variable y la pendiente de la ecuación (12.10-3) variará de etapa a etapa. Esta condición de flujo inferior variable es la primera que se considera. (El flujo de derrame también variará.) Si la cantidad de solución L_n retenida por el sólido es constante e independiente de la concentración, entonces, habrá un flujo inferior constante, lo que ayuda a simplificar los cálculos de etapa a etapa. Éste es el segundo caso que se estudiará.

12.10B Flujo inferior variable en la lixiviación a contracorriente en etapas múltiples

Los métodos de esta sección son muy similares a los de en la sección 12.7B para extracción con disolvente a contracorriente donde las velocidades de flujo L y V varían de etapa a etapa. Efectuando un balance general de la solución total (soluto A + disolvente C) del proceso de la figura 12.10-l

$$L_0 + V_{N+1} = L_N + V_1 = M \tag{12.10-4}$$

donde M es la velocidad total de flujo de la mezcla en kg $A + C$/h. A continuación se establece un balance para componente A:

$$L_0 y_{A0} + V_{N+1} x_{AN+1} = L_N y_{AN} + V_1 x_{A1} = M x_{AM} \quad (12.10\text{-}5)$$

Procediendo a un balance total de sólidos con respecto a B,

$$B = N_0 L_0 = N_N L_N = N_M M \quad (12.10\text{-}6)$$

donde N_M y x_{AM} son las coordenadas del punto Mde la figura 12.10-2, como el diagrama de operación del proceso. Como se demostró con anterioridad, $L_0\ MV_{N+1}$ y $V_1\ ML_N$ deben formar rectas. Por lo general, se conocen los flujos y las composiciones de L_0 y V_{N+1}, luego las condiciones fijarán el valor de la concentración de salida y_{AN}. Entonces, las coordenadas N_M y x_{AM} se pueden calcular con las ecuaciones (12.10-4) a la (12.10-6) para graficar el punto M. De acuerdo con esto, L_N, M y V_1 deben formar una recta como se muestra en la figura 12.10-2.

En la figura 12.10-2, para ir de etapa en etapa es necesario deducir la ecuación de la línea de operación. Estableciendo un balance total en la etapa 1 y después, en la etapa n,

$$L_0 + V_2 = L_1 + V_1 \quad (12.10\text{-}7)$$

$$L_{n-1} + V_{n+1} = L_n + V_n \quad (12.10\text{-}8)$$

Reordenando la ecuación (12.10-7) para los flujos de diferencia A en kg/h,

$$L_0 - V_1 = L_1 - V_2 = \mathrm{A} \quad (12.10\text{-}9)$$

Este valor de A es constante y válido también para la ecuación (12.10-8) reordenada para todas las etapas:

$$\Delta = L_0 - V_1 = L_n - V_{n+1} = L_N - V_{n+1} = \cdots \quad (12.10\text{-}10)$$

También se puede efectuar para un balance del soluto A, como sigue

$$x_{A\Delta} = \frac{L_0 y_{A0} - V_1 x_{A1}}{L_0 - V_1} = \frac{L_N y_{AN} - V_{N+1} x_{AN+1}}{L_N - V_{N+1}} \quad (12.10\text{-}11)$$

donde $x_{A\Delta}$ es la coordenada x del punto de operación A. Un balance de sólidos nos da

$$N_\Delta = \frac{\mathrm{B}}{L_0 - V_1} = \frac{N_0 L_0}{L_0 - V_1} \quad (12.10\text{-}12)$$

donde N_Δ es la coordenada N del punto de operación A.

Como se indicó en la sección 12.7B, A es el punto de operación, que se localiza gráficamente en la figura 12.10-2 como la intersección de las líneas $L_0 V_1$ y $L_N V_{N+1}$. La ecuación (12.10-10) indica que V_1 forma una línea con L_0 y A, V_2 otra con L_1 y A, V_{n+1} con L_n y Δ, y así sucesivamente.

Para determinar el número de etapas por métodos gráficos se empieza en L_0 y se traza la línea L_0 A para localizar V_1. Una línea de unión a través de V_1 localiza L_1. Se traza la línea L_1 A para obtener V_2. Una línea de unión produce L_2. El proceso se continúa hasta llegar al valor deseado de L_N. En la figura 12.10-2 se requieren aproximadamente 3.5 etapas.

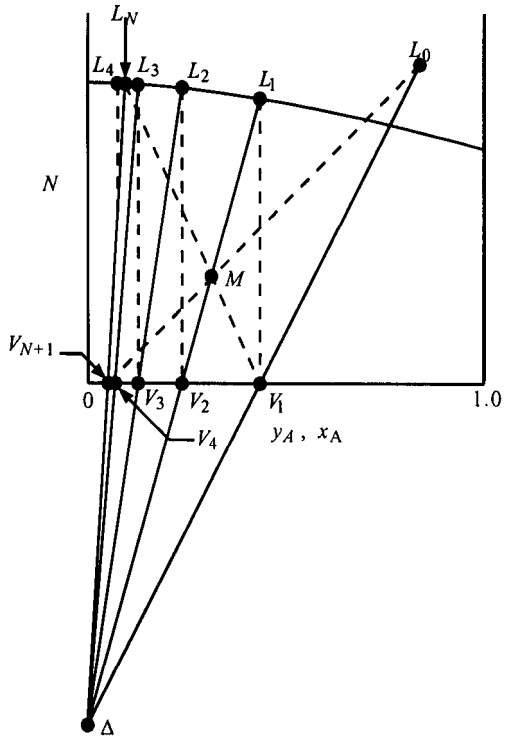


FIGURA 12.1 O-2. *Número de etapas para lixiviación a contracorriente en etapas múltiples.*

EJEMPLO 12.10-I. Lixiviación de aceite de harina a contracorriente

Se desea usar un sistema continuo a contracorriente y en etapas múltiples para lixiviar aceite de harina usando benceno como disolvente (B3). En el proceso se van a tratar 2000 kg/h de harina sólida inerte (B), que contienen 800 kg de aceite (A) con 50 kg de benceno (C). El flujo de entrada por hora de mezcla disolvente nueva contiene 13 10 kg de benceno y 20 kg de acite. Los sólidos lixiviados deben contener 120 kg de aceite. Experimentos de sedimentación similares al proceso real en el extractor indican que la solución retenida depende de la concentración del aceite en solución. A continuación, se muestran datos tabulados (B3) de N kg de sólido inerte, B/kg de solución y y_A kg de aceite A/kg de solución.

N	y_A	N	y_A
2.00	0	1.82	0.4
1.98	0.1	1.75	0.5
1.94	0.2	1.68	0.6
1.89	0.3	1.61	0.7

Calcule las cantidades y las concentraciones de las corrientes que salen del proceso y el número de etapas requeridas.

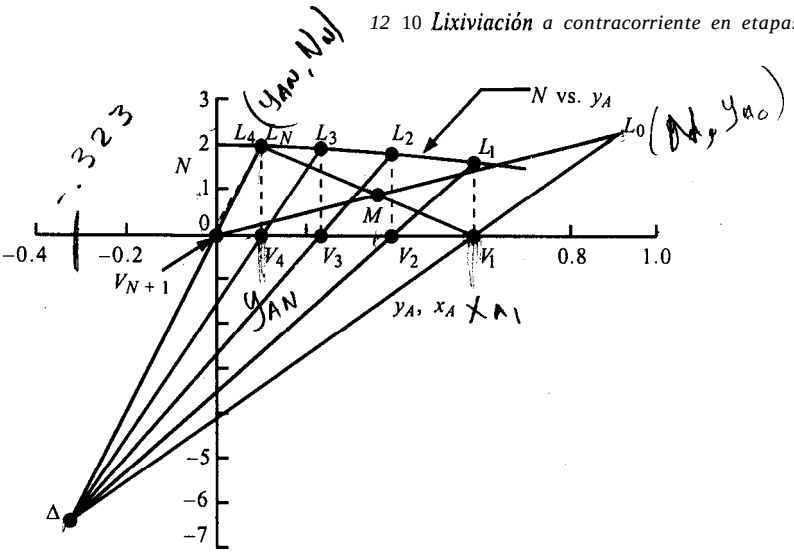


FIGURA 12.10-3. *Construcción gráfica del nimero de etapas para el ejemplo 12.10-I.*

Solución: Los datos de flujo inferior de la tabla se grafican en la figura 12.1 O-3 como N contra y_A. Para la solución de entrada con el sólido sin tratar, L_0 = 800 + 50 = 858 kg/h, y_{A0} = 800/(800 + 50) = 0.941, B = 2000 kg/h, N_0 = 2000/(800 + 50) = 2.36. Para la entrada del disolvente de lixiviación, V_{N+1} = 1310 + 20 = 1330 kg/h y x_{AN+1} = 20/1330 = 0.015. Se grafican los puntos V_{N+}, y L_0.

El punto L_N queda situado en la línea de N contra y_A de la figura 12.10-3. Además, para este punto, la relación N_N/y_{AN} = (kg de sólido/kg en solución)/(kg de aceite/kg de solución) = kg de sólido/kg de aceite = 2000/120 = 16.67. Con esto, se traza una línea punteada a través del origen y_A = 0 y N = 0, con pendiente de 16.67 y que intereseque a la línea de N contra y_A, en L_N. Las coordenadas de L_N en esta intersección son N_N = 1.95 kg de sólido/kg de solución y y_{AN} = 0.118 kg aceite kg de aceite/kg de solución.

Llevando a cabo un balance total por sustitución en la ecuación (12.10-4) para determinar el punto M,

$$L_0 + V_{N+} = 850 + 1330 = 2180 \text{ kg/h} = M$$

Sustituyendo en la ecuación (12.10-5) y despejando,

$$L_0\, y_{A0} + V_{N+1}\, x_{AN+1} = 850\ (0.941) + 1330\ (0.015) = 2180\, x_{AM}$$

$$x_{AM} = 0.376$$

Sustituyendo en la ecuación (12.10-6) y despejando,

$$B = 2000 = N_M M = N_M\,(2180) \qquad N_M = 0.918$$

Se grafica el punto M en la figura 12.10-3 con las coordenadas x_{AM} = 0.376 y N_M = 0.918. Se traza la línea $V_{N+1} M\ L_0$ y después la línea $L_N M$, que interseca a la abscisa en el punto V_1, donde x_{A1} = 0.600.

Las cantidades de las corrientes V_1 y L_N se calculan sustituyendo en las ecuaciones (12.10-4) ala (12.10-5) y resolviéndolas simultáneamente:

$$L_N + V_1 = M = 2180$$

$$L_N\, y_{AN} + V_1 x_{A1} = \text{LN(O.118)} + V_1(0.600) = 2180\ (0.376)$$

Por tanto, L_N = 10 16 kg solución/h en la corriente de flujo inferior de salida, y V_1 = 1164 kg solución/h en la corriente de derrame de salida. Estas cantidades también se pueden calcular usando la regla del brazo de palanca.

El punto de operación A se obtiene en la intersección de las líneas L_0V_1 y $L_N V_{N+}$, en la figura 12.10-3, y sus coordenadas también se pueden calcular con las ecuaciones (12.1 0-ll) y (12.1 O-12). Las etapas se escalonan con el procedimiento que se muestra, donde la cuarta etapa para L_4 sobrepasa ligeramente a la deseada L_N. Por consiguiente, se necesitan unas 3.9 etapas.

12.10C Flujo inferior constante en la lixiviación a contracorriente en etapas múltiples

En este caso, el líquido L_n retenido en los sólidos del flujo inferior es constante de etapa a etapa. Esto significa que una gráfica de N contra de y_A es una recta horizontal y que N es constante. De esta forma, la ecuación (12.10-3) de la línea de operación, es una recta cuando se grafica en forma de y_A contra x_A. En el mismo diagrama se puede graficar la línea de equilibrio. En muchos casos, la línea de equilibrio también puede ser recta con $y_A = x_A$. A la primera etapa se le debe dar tratamiento especial, pues L_0 suele ser diferente de $L_{,,}$ puesto que contiene poco o ningún disolvente. Para obtener L_1 y V_2 se procede a un balance separado de material y de equilibrio con respecto a'la etapa 1 (véase la Fig. 12.10-l). Entonces, se puede usar la línea de operación recta y aplicar el método de McCabe-Thiele para escalonar el número de etapas.

Puesto que este procedimiento para flujo inferior constante requiere casi tantos cálculos como el caso general de flujo inferior variable, se puede usar el procedimiento general de flujo inferior constante empleando simplemente una línea horizontal de N contra y_A en la figura 12.1 O-2 y escalonando las etapas con el punto A.

12.11 INTRODUCCIÓN Y EQUIPO PARA CRISTALIZACIÓN

12.11A Cristalización y tipos de cristales

1. Introducción. En este capítulo y en los precedentes se han estudiado procesos de separación para sistemas gas-líquido y líquido-líquido. Además, se ha estudiado también el proceso de separación de lixiviación para sistemas sólido-líquido. La cristalización también es un proceso de separación sólido-líquido en el que hay transferencia de masa de un soluto de la solución líquida a una fase cristalina sólida pura. Un ejemplo importante es la producción de sacarosa de azúcar de remolacha, donde la sacarosa se cristaliza de una solución acuosa.

La *cristalización* es un proceso donde se forman partículas sólidas a partir de una fase homogénea. Este proceso puede ser la congelación del agua para formar hielo, la formación de partículas de nieve a partir de un vapor, la formación de partículas sólidas en un material fundido o la formación de cristales sólidos en el seno de una solución líquida. El último proceso mencionado, la cristalización en una solución, es el de mayor importancia comercial y será el tema de esta sección. En la cristalización la solución se concentra y casi siempre se enfría hasta que la concentración del soluto es superior a su solubilidad a dicha temperatura. Entonces, el soluto sale de la solución formando cristales casi puros.

En las cristalizaciones comerciales no sólo interesa el rendimiento y la pureza de los cristales, sino también el tamaño y forma de los mismos. Casi siempre se desea que los cristales tengan tamaño uniforme. La uniformidad del tamaño es indispensable para evitar apelmazamientos en el empaque, para facilitar la descarga, el lavado y el filtrado yparaun comportamiento uniforme en su uso. Algunas veces,

los usuarios solicitan cristales grandes aun cuando los pequeños puedan ser igualmente útiles. Además, en ocasiones solicitan ciertas formas geométricas, como agujas en lugar de cubos.

2. Tipos de geometrías cristalinas. Un cristal se puede definir como un sólido formado por átomos, iones o moléculas, que guardan una distribución ordenada y repetitiva. Es una de las formas de la materia más altamente organizadas. Los átomos, iones o moléculas están situados en redes tridimensionales o cristalinas. Las distancias interatómicas en un cristal entre estos planos imaginarios o redes cristalinas, así como los ángulos entre estos planos, se miden por medio de difracción de rayos X. El modelo o distribución de la red cristalina se repite en todas direcciones.

Los cristales se muestran como poliedros de caras planas y vértices agudos. Los tamaños relativos de las caras y de los bordes de diferentes cristales de un mismo material pueden diferir bastante. Sin embargo, los ángulos entre las caras equivalentes de todos los cristales de un mismo material, son siempre iguales y característicos del mismo. De esta forma, los cristales se clasifican con base en los ángulos interfaciales.

Existen siete clases de cristales, dependiendo de la distribución de los ejes a los que se refieren los ángulos:

1. Sistema cúbico. Tres ejes iguales que forman ángulos rectos entre sí.
2. Sistema tetragonal. Tres ejes que forman ángulos rectos entre sí, con uno de los ejes más largo que los otros dos.
3. Sistema ortorrómbico. Tres ejes a ángulos rectos entre sí, todos de tamaño diferente.
4. Sistema hexagonal. Tres ejes iguales en un plano formando ángulos de 60” entre sí y un cuarto eje formando un ángulo recto con este plano y ‘no necesariamente de la misma longitud
5. Sistema monoclínico. Tres ejes desiguales, dos a ángulos rectos en un plano y el tercero formando cierto ángulo con dicho plano.
6. Sistema triclínico. Tres ejes desiguales que forman ángulos desiguales entre sí que no son de 30°, 60” ni de 90”.
7. Sistema trigonal. Tres ejes iguales con la misma inclinación.

El desarrollo relativo de las diferentes caras de un cristal puede diferir en la cristalización de un soluto. El cloruro de sodio cristaliza de soluciones acuosas únicamente con caras cúbicas. En otro caso, si el cloruro de sodio cristaliza de una solución acuosa que contenga una ligera impureza, los cristales tendrán caras octaédricas. Ambos tipos de cristales pertenecen al sistema cúbico, pero difieren en su hábito cristalográfico. La cristalización general en laminillas o agujas no tiene relación con el hábito cristalográfico ni con el sistema de cristalización; por lo general depende de las condiciones del proceso en el que crecen los cristales.

12.11B Solubilidad de equilibrio en la cristalización

El equilibrio en la cristalización se alcanza cuando la solución o licor madre está saturado. Esto se representa mediante una *curva de solubilidad.* La solubilidad depende principalmente de la temperatura, mientras que la presión tiene un efecto despreciable sobre ella. Los datos se expresan en forma de curvas en las que se grafica la solubilidad en unidades convenientes en función de la temperatura. Muchos manuales de química (P1) incluyen tablas de solubilidad. En la figura 8. l-l se incluyen las curvas de solubilidad de algunas sales típicas. En general, la solubilidad de la mayoría de las sales aumenta ligera o notablemente al aumentar la temperatura.

En la figura 8. l-l se indica un tipo de curva muy común, que corresponde al KNO_3, y en la cual la solubilidad aumenta de manera notable al elevar la temperatura sin formar hidratos. La fase sólida en la totalidad del intervalo de temperaturas es KNO_3. La solubilidad del NaCl se caracteriza por el efecto mínimo de la temperatura. En gráficas de solubilidad, los datos se suelen presentar como partes en peso de material anhidro por 100 partes en peso de disolvente total (agua, casi siempre.)

En la figura 12.1 l-l se muestra la curva de solubilidad del tiosulfato de sodio, $Na_2S_2O_3$. Su solubilidad aumenta con rapidez al elevarse la temperatura, pero la curva muestra diversos puntos de transición que indican la presencia de hidratos. La fase estable hasta 48.2 °C es el pentahidrato, $Na_2S_2O_3 \cdot 5H_2O$, lo que significa que a concentraciones superiores a la línea de solubilidad (hasta 48.2 "C), el cristal sólido que se forma es $Na_2S_2O_3 \cdot 5H_2O$. A concentraciones inferiores a las de la línea de solubilidad, sólo existe una solución. Desde 48.2 hasta más o menos 65 °C, la fase estable es $Na_2S_2O_3 \cdot 2H_2O$. Entre 65 y 70 °C hay un semihidrato y la sal anhidra es la fase estable por encima de *70* °C.

12.11C Rendimientos y balances de materia y de calor en la cristalización

1. Rendimientos y balances de materia en la cristalización. En la mayoría de los procesos industriales de cristalización, la solución (licor madre) y los cristales sólidos están en contacto durante el tiempo necesario para alcanzar un equilibrio. Por consiguiente, el licor madre se encuentra saturado a la temperatura final del proceso y puede determinarse la concentración final del soluto en la solución a partir de la curva de solubilidad. Entonces, el rendimiento de cristales de un proceso de cristalización se puede calcular con sólo conocer la concentración inicial del soluto, la temperatura final y la solubilidad a esa temperatura.

En algunas cristalizaciones comerciales, la velocidad de crecimiento de los cristales es bastante baja, debido a alta viscosidad de la solución o a superficies pequeñas de los cristales expuestos a la solución. Por tanto, aún puede haber sobresaturación, lo que da lugar a un rendimiento de cristales menor que el calculado.

Los balances de material se efectúan mediante cálculos bastante simples cuando los cristales de soluto son anhidros. Se procede entonces a balances simples de agua y soluto. Cuando los cristales están hidratados, parte del agua de la solución se une a los cristales hidratados.

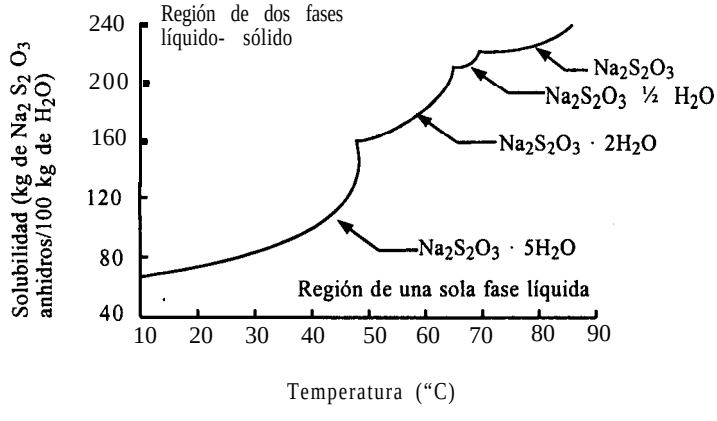


FIGURA 12.1 l-1. *Solubilidad del tiosulfato de sodio.* $Na_2S_2O_3$ *en agua.*

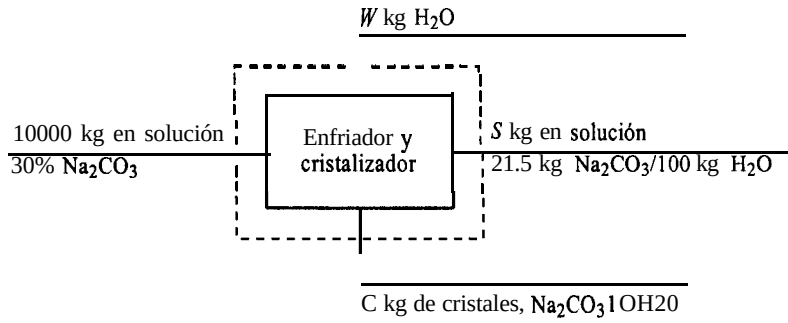


FIGURA 12.1 1-2. *Flujo del proceso de cristalización del ejemplo 12.1 l-1.*

EJEMPLO 12.11-1. Rendimento de un proceso de cristalización

Una solución salina que pesa 10000 kg y que tiene 30% en peso de Na_2CO_3, se enfría hasta 293 K (20°C). La sal cristaliza como decahidrato. ¿Cuál será el rendimiento de cristales de $Na_2CO_3 \cdot 10H_2O$ si la solubilidad es 21.5 kg de Na_2CO_3 anhidro/100 kg de agua total? Proceda a los cálculos para los siguientes casos:

a) Suponga que no se evapora agua
b) Suponga que el 3% del peso total de la solución se pierde por evaporación del agua durante el enfriamiento.

Solución: Los pesos moleculares son 106.0 para el Na_2CO_3, 180.2 para $10H_2O$ y 286.2 para $Na_2CO_3 \cdot 10H_2O$. En la figura 12.1 l-2 se muestra el diagrama de flujo del proceso, siendo W kg de H_2O evaporada, S kg de solución (licor madre) y C kg de cristales de $Na_2CO_3 \cdot 10H_2O$. Efectuando un balance de material con respecto al rectángulo de líneas punteadas para el agua en el inciso a), donde $W = 0$,

$$0.70(10000) = \frac{100}{100 + 21.5}(S) + \frac{180.2}{286.2}(C) + 0 \qquad (12.11\text{-}1)$$

donde (180.2)/(286.2) es la fracción en peso del agua en los cristales. Llevando a cabo un balance para el Na_2CO_3

$$0.30(10000) = \frac{21.5}{100 + 21.5}(S) + \frac{106.0}{286.2}(C) + 0 \qquad \mathbf{(12.11\text{-}2)}$$

Resolviendo de forma simultanea las dos ecuaciones, C = 6370 kg de cristales de $Na_2CO_3 \cdot 10H_2O$ y S = 3630 kg de solución.

Para b), $W = 0.03(10000)$ = 300 kg H_2O. La ecuación (12.11-1) se transforma en

$$0.70(10000) \frac{100}{100 + 21.5}(S) + \frac{180.2}{286.2}(C) + 300 \qquad (12.11\text{-}3)$$

La ecuación (12.11-2) no cambia, pues no hay sal en la corriente W. Resolviendo simultáneamente las ecuaciones (12.1 l-2) y (12.1 1-3), C = 6630 kg de cristales de $Na_2CO_3 \cdot 10H_2O$ y S = 3070 kg de solución.

2. Efectos térmicos y balances de calor en la cristalización. Cuando se disuelve un compuesto cuya solubilidad aumenta al elevarse la temperatura, se presenta una absorción de calor llamada *calor de disolución.* Cuando la solubilidad del compuesto disminuye al aumentar la temperatura, su disolución va acompañada de un desprendimiento de calor. En el caso de compuestos cuya solubilidad no cambia con la temperatura, no hay desprendimiento ni absorción de calor. La mayoría de los valores de calor de disolución se expresan como variación de entalpía en kJ/kg mol (kcal/g mol) de soluto, en la disolución de 1 kg mol del sólido en una gran cantidad de disolvente que equivale, en esencia, a una dilución infinita.

En la cristalización ocurre lo contrario de la disolución. En el equilibrio, el calor de cristalización es igual alnegativodelcalorde disoluciónalamismaconcentracióndelasolución. Si elcalorde dilucióndelasolución saturada hasta dilución infinita es pequeño y se puede despreciar, se usa entonces el negativo del calor de disolución a dilución infinita como calor de cristalización. En muchos materiales, este calor de dilución es pequeño en comparación con el calor de disolución, por lo que esta aproximación resulta bastante cercana a la realidad. Las referencias (P1 , N1) contienen datos de calores de disolución.

El método más satisfactorio para el cálculo de los efectos térmicos durante un proceso de cristalización probablemente sea el que se basa en el uso de las gráficas de entalpía-concentración de soluciones con las diversas fases sólidas presentes en el sistema. No obstante, hay muy pocas gráficas de este tipo disponibles, entre ellas: cloruro de calcio-agua (H 1), sulfato de magnesio-agua (P2) y sulfato ferroso-agua (K2). Cuando se dispone de la gráfica, se aplica el siguiente procedimiento: se lee en la gráfica la entalpía H_1 de la solución de entrada a la temperatura inicial, donde H_1 se da en kJ (btu) para la alimentación total. La entalpía H_2 de la mezcla final de cristales y licor madre a la temperatura final también se lee en la gráfica. Si hay algo de evaporación, la entalpía H_v del vapor de agua se obtiene de las tablas de vapor. Entonces, el calor total absorbido q en KJ es

$$q = (H_2 + H_V) - H_1 \qquad (12.11\text{-}4)$$

Si q es positivo, es necesario añadir calor al sistema. Si es negativo, se desprende calor.

EJEMPLO 12.11-2. Balance de calor en una cristalización

Una solución de alimentación de 2268 kg a 327.6 K (54.4 °C), que contiene 48.2 kg de $MgSO_4$ /100 kg de agua total, se enfría hasta 293.2 K (20 "C) para extraer cristales de $MgSO_4 \cdot 7H_2O$. Lasolubilidaddelasalesde 35.5 kg de $MgSO_4$/100 kgdeaguatotal(P1). La capacidad calorífica promedio de la solución de alimentación se puede suponer igual a 2.93 kJ/kg · K (H1). El calor de disolución a 291.2 K (18 "C) es -13.31×10^3 kJ /kg mol de $MgSO_4 \cdot 7H_2O$ (P1). Calcule el rendimiento de cristales y determine el calor total absorbido q, por medio de un balance de calor, suponiendo que no se vaporiza agua.

Solución: Llevando a cabo un balance de aguay un balance de $MgSO_4$, y con ecuaciones similares a las (12.11-1) y (12.11-2) del ejemplo 12.11-1, $C = 616.9$ kg $MgSO_4 \cdot 7H_2O$ en cristales y S = 1651.1 kg de solución.

Para el balance de calor se usará una temperatura base de 293.2 K (20 "C). El peso molecular del $MgSO_4 \cdot 7H_2O$ es 246.49. La entalpía de la alimentación, H_1 es

$$H_1 = 2268(327.6 - 293.2)\,(2.93) = 228600 \text{ kJ}$$

El calor de disolución es -(13.3 1 $\times 10^3$)/246.49 = -54.0 kJ/kg de cristales. Entonces, el calor de cristalización es - (-54.0) = + 54.0 kJ/kg de cristales, o 54.0 (616.9) = 33312 kJ. Se supone que el valor a 291.2 K es igual al valor a 293.2 K. El calor total absorbido, q, es

$$q = -228600 - 33312 = -261912 \text{ kJ} \ (-248240 \text{ btu})$$

Puesto que q es negativo, se desprende calor, el cual es necesario extraer.

12.11D Equipo para la cristalización

1. Introducción y clasificación de los cristalizadores. Los cristalizadores se clasifican en cuanto a Su operación en continuos y por lotes. La operación por lotes se utiliza en aplicaciones especiales; la operación continua de los cristalizadores es el sistema más usual.

La cristalización no puede ocurrir sin una ***sobresaturación.*** Una de las principales funciones de cualquier cristalizador es la de causar la formación de una solución sobresaturada. Los equipos de cristalización pueden clasificarse con base en el método empleado para producir las sobresaturación como sigue: 1) sobresaturación producida por enfriamiento de la solución con evaporación despreciable (cristalizadores de tanque y por lotes); 2) sobresaturación producida por evaporación del disolvente con poco enfriamiento o sin enfriamiento-evaporadores-cristalizadores o evaporadores cristalizantes; 3) sobresaturación por combinación de enfriamiento y evaporación en evaporadores adiabáticos (cristalizadores al vacío).

En cristalizadores que producen sobresaturación por enfriamiento, las sustancias deben tener una curva de solubilidad que disminuya de manera apreciable con la temperatura. Muchas sustancias se comportan de esta manera, por lo que este método es bastante común. Cuando la curva de solubilidad cambia poco con la temperatura, como en el caso de la sal común, casi siempre se evapora disolvente para producir la sobresaturación. Algunas veces también se aplica una evaporación con cierto grado de enfriamiento. En el método de enfriamiento adiabático al vacío, una solución caliente se somete al vacío para que el disolvente se evapore de manera repentina y la solución se enfríe adiabáticamente. Este método para provocar sobresaturación es el más importante para producción a gran escala.

Otro método de clasificación (P1) para cristalizadores, agrupa las unidades de acuerdo con el método para mantener en suspensión los cristales. Entre ellos pueden citarse los cristalizadores donde la suspensión se agita en un tanque, se hace circular por medio de un intercambiador de calor o en un intercambiador con raspadores de superficie.

Una diferencia importante en muchos cristalizadores comerciales es la manera en que el líquido sobresaturado está en contacto con los cristales en crecimiento. En el ***método de circulación de magma,*** la totalidad del magma de cristales y el líquido sobresaturado circulan a través de las etapas de sobresaturación y cristalización sin separar el sólido y el líquido en dos corrientes. La cristalización y la sobresaturación se verifican simultáneamente en presencia de los cristales. En el segundo sistema, llamado ***método de circulación de líquido,*** una corriente separada de líquido sobresaturado se hace pasar a través de un lecho fluidizado donde crecen los cristales y se forman otros nuevos por nucleación. Después, el líquido saturado se hace pasar a través de una zona de evaporación o enfriamiento para volver a producir una sobresaturación y se recircula.

2. Cristalizadores de tanque. La cristalización en tanques (un método antiguo que todavía se usa en casos especiales) consiste en enfriar soluciones saturadas en tanques abiertos. Después de cierto tiempo, se drena el licor madre y se extraen los cristales. En este método es difícil controlar la nucleación y el tamaño de los cristales. Además, los cristales contienen cantidades considerables del licor madre y, por otra parte, los costos de mano de obra son elevados. En algunos casos, el tanque se enfría por medio de serpentines o chaquetas y se usa un agitador para lograr una mejor velocidad de transferencia de calor; sin embargo, puede haber acumulación de cristales en las superficies de estos dispositivos. Este tipo de equipo tiene aplicaciones limitadas y algunas veces se usa para la manufactura de productos químicos de alto valor y derivados farmacéuticos.

3. Cristalizadores con raspadores de superficie. Un tipo de cristalizador con raspadores de superficie es el de Swenson-Walker, que consiste en una artesa abierta de 0.6 m de ancho con fondo semicircular y chaqueta de enfriamiento en el exterior. La rotación a baja velocidad de un agitador en espiral mantiene los cristales en suspensión. Las aspas pasan cerca de las paredes y rompen los depósitos que se forman en la superficie de enfriamiento. Por lo general, el producto tiene una distribución de tamaños de cristal bastante amplia.

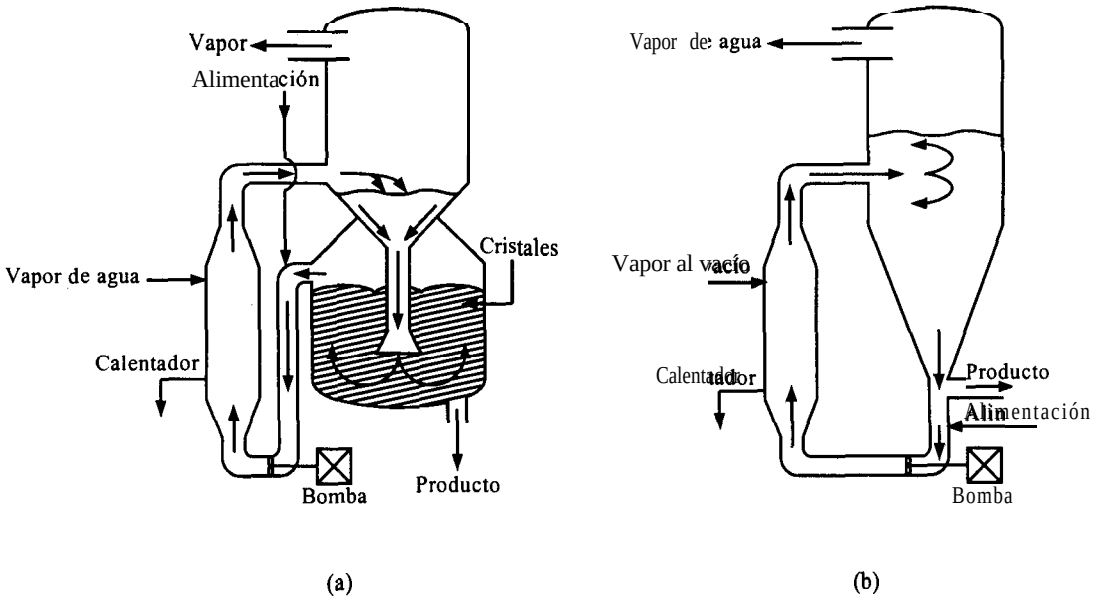


FIGURA 12.1 l-3. *Tipos de cristalizadores: a) evaporador-cristalizador con circulación de liquido, b) cristalizador al vacío con circulación de magma.*

En el cristalizador de tubo doble con raspadores, el agua de enfriamiento pasa por el espacio anular. Un agitador modemo adaptado con raspadores de resorte que limpian la pared y proporcionan un buen coeficiente de transferencia de calor. Este modelo se llama *votator* y se usa en la cristalización de mantecado y para la plastificación de margarina. En la figura 4.13-2 se muestra un diagrama de este equipo.

4. *Evaporador-cristalizador con circulación de líquido.* En la combinación de evaporador-cristalizador que se muestra en la figura 12.11-3a , la sobresaturación se produce por evaporación. El líquido circulante se extrae por la bomba de tornillo hacia el interior del tubo del calentador por condensación de vapor de agua. El líquido caliente fluye después hacia el espacio del vapor donde se produce una vaporización repentina que causa sobresaturación. El vapor de salida se condensa, el líquido sobresaturado fluye hacia el tubo de bajada y después asciende a través del lecho de cristales fluidizados y agitados, que de esta manera crecen. El líquido saturado de salida vuelve al calentador como corriente de recirculación, donde se une a la alimentación de entrada. Los cristales grandes se sedimentan y el producto se extrae como suspensión de cristales y licor madre. Este modelo se llama también *cristalizador de Oslo.*

5. *Cristalizador al vacío con circulación de magma.* En el cristalizador al vacío con circulación de magma que se muestra en la figura 12.1 1-3b, el magma o suspensión de cristales circula por fuera del cuerpo principal del aparato por medio de un tubo de circulación o bomba en espiral. El magma fluye a través de un calentador, donde su temperatura se eleva de 2 a 6 K. Entonces, el licor calentado se mezcla con la suspensión del cuerpo principal y se produce una ebullición en la superficie del líquido, misma que causa sobresaturación en el líquido arremolinado cerca de la superficie, provocando depósitos en los cristales suspendidos de esta zona, que salen por la tubería de circulación, mientras los vapores salen por la parte superior. El vacío se produce con un eyector de chorro de vapor.

12.12 TEORÍA DE LA CRISTALIZACIÓN

12.12A Introducción y teorías de la nucleación

1. Introducción. Cuando se presenta cristalización en una mezcla homogénea, se forma una nueva fase sólida. El conocimiento de los mecanismos de formación de los cristales y su posterior crecimiento resulta muy útil en el diseño y la operación de los cristalizadores, y diversos trabajos experimentales y teóricos ayudan a comprender mejor la cristalización. No obstante, las diferencias entre el comportamiento estimado y el real en los cristalizadores comerciales todavía son bastante grandes en algunos casos.

Se considera que el proceso total de cristalización en una solución sobresaturada consta de las etapas básicas de formación de núcleos (nucleación) y crecimiento de los cristales. Cuando la solución está libre de todo tipo de sólidos, ya sean extraños o del propio material que cristaliza, entonces se requiere formación de núcleos antes de que los cristales puedan crecer. Durante su crecimiento se pueden formar otros nuevos. La fuerza impulsora para la nucleación y el crecimiento es la sobresaturación. Estos dos procesos solo se verifican en disoluciones sobresaturadas.

2. Teorías de la nucleación. La *nucleación primaria* es el resultado de fluctuaciones rápidas y localizadas a escala molecular en una fase homogénea. Las partículas o moléculas del soluto entran en contacto y forman aglomeraciones; algunas de éstas adicionan más moléculas de soluto y comienzan a crecer, mientras que otras se desprenden y vuelven a su situación de moléculas individuales. El crecimiento de las aglomeraciones las transforma en cristales que continúan absorbiendo moléculas de soluto de la solución.

Este tipo de nucleación se llama *nucleación homogénea o primaria.* Cuanto mayor es el cristal, menor es su solubilidad. La solubilidad de los cristales pequeños del orden de micrómetros es mayor que la de los cristales grandes. Los datos comunes de solubilidad se refieren a cristales grandes. Por consiguiente, un cristal pequeño puede estar en equilibrio en una solución sobresaturada. Si también está presente un cristal grande, éste crecerá y el pequeño se disolverá. El efecto del tamaño de las partículas es un factor importante en lanucleación. En la cristalización de magmas también hay un cierto grado de nucleación primaria.

Una de las primeras explicaciones cualitativas de la cristalización postulada por Miers, propone la formación de núcleos y de cristales en una solución sin sembrar. Esta teoría se ilustra en la figura 12.12- 1, donde la línea *AB* corresponde a la curva normal de solubilidad. Cuando se enfría una muestra de la solución desde el punto *a,* primero tiene que cruzar la curva de solubilidad. La muestra no cristalizará hasta superenfiiarse en algún punto *b,* donde se inicia la cristalización y la concentración disminuye

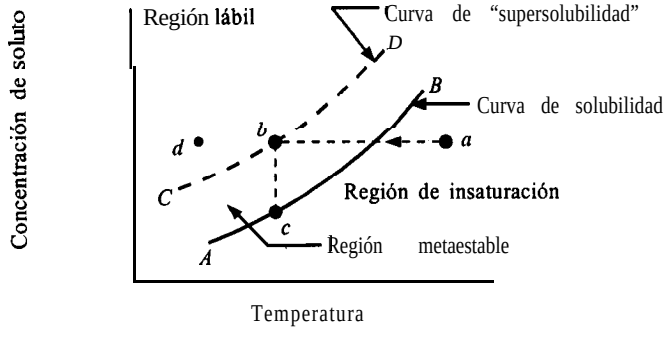


FIGURA 12.12-l. *Explicación cualitativa de Miers del proceso de cristalización: curva de solubilidad (AB) y curva de "supersolubilidad" (CD).*

hasta el punto c si no continúa el enfriamiento. La curva *CD,* llamada *curva de supersolubilidad,* representa el límite en el que la formación de núcleos empieza de manera espontánea y, por tanto, en el que se puede iniciar la cristalización. Cualquier cristal de la región metastable tendrá crecimiento. La tendencia actual considera a la curva de supersolubilidad como una zona donde la velocidad de nucleación aumenta con gran rapidez. Sin embargo, el gran valor de la explicación de Miers radica en que postula que, cuanto mayor es el grado de sobresaturación más grandes son las posiblidades de formación de núcleos.

La *nucleación secundaria o de contacto,* que es el método de nucleación más efectivo, se presenta cuando los cristales chocan entre sí, con las aspas del mezclador, o con las paredes de la tubería o del recipiente de proceso. Es claro que esta nucleación depende de la intensidad de la agitación, pues se presenta a sobresaturación baja, donde la velocidad de crecimiento de los cristales tiene un valor óptimo para un buen tamaño de los mismos. Diversos experimentos han demostrado la existencia de este tipo de cristalización y también la han verficado en forma aislada. Es el método de nucleación más efectivo y común en la cristalización de magmas. Se desconocen los mecanismos precisos de la nucleación de contacto y no se dispone de una teoría para predecir las velocidades.

12.12B Velocidad de crecimiento de cristales y la ley AL

1. Velocidad de crecimiento de cristales y coeficientes de crecimiento. La velocidad de crecimiento de una cara cristalina es la distancia de desplazamiento por unidad de tiempo en dirección perpendicular a dicha cara. El crecimiento de cristales es un proceso de superposición de capas, y puesto que sólo se puede verificar en la superficie exterior de la cara cristalina, el soluto debe ser transportado desde la solución general hasta dicha superficie. Las moléculas de soluto llegan a la superficie por difusión a través de la fase líquida. Se aplica entonces el coeficiente normal de transferencia de masa k_y. En la superficie cristalina se debe considerar la resistencia a la integración de las moléculas en la red espacial. Esta reacción en la superficie se verifica a velocidad finita y la totalidad del proceso consta de dos resistencias en serie. La solución debe estar sobresaturada para que tengan lugar las etapas de difusión y reacción en la interfaz.

La ecuación para la transferencia de la masa del soluto A, desde la solución general con concentración de sobresaturación en términos de fracción mol de A igual a y_A, hasta la superficie del cristal, donde la concentración es y'_A, es

$$\frac{\overline{N}_A}{A_i} = k_y(y_A - y'_A) \qquad \textbf{(12.12-1)}$$

donde k_y es el coeficiente de transferencia de masa en kg mol/s · m^2 · fracción mol, $\overline{N}_A$ es la velocidad en kg mol A/s y A_i es el área de la superficie i en m^2. Suponiendo que la velocidad de reacción en la superficie cristalina también depende de la diferencia de concentraciones

$$\frac{\overline{N}_A}{A_i} = k_s(y'_A - y_{Ae}) \qquad \textbf{(12.12-2)}$$

donde k_s *es* un coeficiente de la reacción superficial en kg mol/s · m^2 · fracción mol y y_{Ae} es la concentración de saturación. Combinando las ecuaciones (12.12-1) y (12.12-2).

$$\frac{\overline{N}_A}{A_i} = \frac{y_A - y_{Ae}}{1/k_y + 1/k_s} = K(y_A - y_{Ae}) \qquad \textbf{(12.12-3)}$$

donde K *es* el coeficiente total de transferencia.

El coeficiente de transferencia de masa k_y se puede predecir con los métodos analizados en la sección 7.4 para coeficientes convectivos de transferencia de masa. Es aplicable la correlación para transferencia de masa a través de lechos fijos y fluidizados. En ella se usa la velocidad obtenida a partir de la velocidad terminal de sedimentación de las partículas, o bien la velocidad de la solución con respecto a los cristales en suspensión. También se necesita para la predicción el número de Schmidt de la solución saturada..

Cuando el coeficiente de transferencia de masa k_y es muy grande, la reacción superficial es el factor que controla y $1/k_y$ es despreciable. Por otra parte, cuando el coeficiente de transferencia de masa es muy pequeño, el factor que controla es la resistencia a la difusión. Hay diversos datos publicados (B4, H2,P3,V1) de coeficientes de reacción superficial y coeficientes totales de transferencia. Una gran parte de la información publicada no es directamente aplicable, pues las condiciones de las medición son muy diferentes a las de un cristalizador comercial. Además, es difícil determinar las velocidades y el nivel de sobresaturación de un sistema, pues varian con la posición del magma circulante en el cristalizador.

2. La ley AL de crecimiento de los cristales. McCabe (M1) demostró que todos los cristales geométricamente similares de un mismo material en una misma solución crecen a la misma velocidad. El crecimiento se mide como el aumento de longitud ΔL, en mm, de la dimensión lineal de un cristal. Este aumento de longitud se refiere a las distancias equivalentes desde el punto de vista geométrico de todos los cristales. El aumento es independiente del tamaño inicial de los cristales originales, siempre y cuando todos ellos estén sujetos a las mismas condiciones del medio circundante. Esta ley se deriva de la ecuación (12.12-3) en la que el coeficiente total de transferencia es igual para todas las caras de los cristales.

Matemáticamente esto equivale a

$$\frac{\Delta L}{At} = G \qquad \textbf{(12.12-4)}$$

donde At es el tiempo en horas y la velocidad de crecimiento G es constante en mm/h. De esta forma, si D_1 es la dimensión lineal de cierto cristal al tiempo t_1 y D_2 corresponde al tiempo t_2,

$$AL = D_2 - D_1 = G(t_2 - t_1) \qquad \textbf{(12.12-5)}$$

El crecimiento total $(D_2 - D_1)$ o ΔL es el mismo para todos los cristales.

La ley AL falla cuando los cristales reciben tratamientos diferentes según su tamaño. Se ha comprobado para muchos materiales, en especial cuando los cristales son inferiores a la malla 50 (0.3 mm). Aun cuando esta ley no es aplicable a todos los casos, es bastante precisa en muchas situaciones.

12.12C Distribución de tamaños de partícula en los cristales

Un factor de gran importancia en el diseño de equipo de cristalización es esperada la distribución de los tamaños de partícula de los cristales obtenidos. Por lo general, los cristales secos se tamizan para determinar los tamaños de las partículas y se registra el porcentaje retenido en cada uno de los tamaños de malla. Las mallas o tamices que se usan son los estándares de Tyler, cuyas aberturas de hilos en milímetros se muestran en el Apéndice AS.

Los datos se grafican como diámetros de partícula (abertura de la malla del tamiz) en milímetros en función del porcentaje acumulado en cada tamaño, usando un papel de probabilidad aritmética. En la figura 12.12-2 se muestran los datos para partículas de urea en un cristalizador típico (B5). Muchos de estos datos producen una línea casi recta en gran parte de la gráfica.

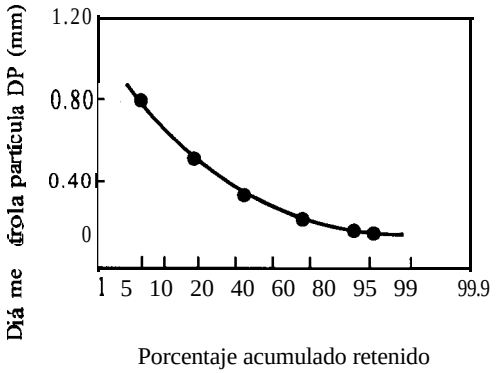


FIGURA 12.12-2. *Distribución típica de los tamaños de partida de un cristalizador. [Tomado de R. C. Bennett y M. Van Buren. Chem. Eng. Progr. Symp., 65 (95). 46 (1969).]*

Un parámetro comúnmente usado para caracterizar la distribución de tamaños es el coeficiente de variación, CV, en forma de porcentaje.

$$CV = 100\ \frac{DP_{16\%} - DP_{84\%}}{2DP_{50\%}} \qquad (12.12\text{-}6)$$

donde $DP_{16\%}$ es el diámetro de la partícula con un 16% retenido. Al expresar el coeficiente de variación y el diámetro medio de las partículas, se obtiene una descripción de la distribución de los tamaños si la línea es más o menos recta entre 90 y 10%. Para un producto extraído de un cristalizador con suspensión mezclada, el valor de CV alcanza un 50% (R1). En un sistema de suspensión mezclada, el cristalizador se encuentra en estado estacionario y contiene magma mezclado con buena suspensión sin clasificación del producto y sin entrada de sólidos en la alimentación.

12.12D Modelos de cristalizadores

Para analizar los datos de un cristalizador de suspensión mezclada, se necesita una teoría general que combine los efectos de la velocidad de nucleación, la velocidad de crecimiento y el balance de materia. Se han logrado bastantes avances a respecto y Randolph, Larson y colaboradores (R1 , R2, R3, M2, S2, P1, P3, C2) han investigado un modelo idealizado. Sus ecuaciones son bastante complicadas, pero permiten determinar algunos factores fundamentales de las velocidades de nucleación y crecimiento a partir de datos experimentales.

Primero, se obtiene una muestra del producto cristalino del cristalizador real y se procede a un análisis de tamaños con tamices; también se requieren los datos de densidad de la suspensión y tiempo de retención en el cristalizador. Transformando el análisis de tamaños a densidad de población de cristales de diferentes tamaños y graticando los datos, se obtiene la velocidad de nucleación y la velocidad de crecimiento en mm/h, para las condiciones reales del cristalizador. Entonces se llevan a cabo experimentos para determinar las consecuencias de las variables de operación sobre las velocidades de nucleación y crecimiento. En las referencias (P1) se incluye un cálculo típico usando este método. Se ha desarrollado (B6) un modelo de nucleación por contacto para el diseño de cristalizadores de magma, basado en experimentos de nucleación por contacto de partículas individuales. (C4, M3). Larson (L2, P1) da ejemplos de diseño de sistemas de cristalización.

PROBLEMAS

12.1-1. ***Isoterma de equilibrio para la adsorción de glucosa.*** Los datos de la isoterma de equilibrio para la adsorción de glucosa de una solución acuosa empleando alúmina activada son como sigue (H3):

c(g/c m^3)	0.0040	0.0087	0.019	0.027	0.094	0.195
q (g de soluto/g de alúmina)	0.026	0.053	0.075	0.082	0.123	0.129

Determine la isoterma que concuerda con los datos y proporcione las constantes de la ecuación usando las unidades dadas.

Respuesta: Isoterma de Langmuir, $q = 0.145\ c/(0.0174 + c)$

12.2-1. ***Adsorción por lotes de solución de fenol.*** Una solución de agua residual que tiene un volumen de 2.5 m^3 contiene 0.25 kg de fenol/m^3 de solución. Esta solución se mezcla completamente en un proceso por lotes con 3.0 kg de carbón granular activado hasta que se alcanza el equilibrio. Utilice la isoterma del ejemplo 12.2-l y calcule los valores finales de equilibrio y el porcentaje de fenol extraído.

12.3-1. ***Aumento de escala de los datos de la columna piloto de adsorción.*** Utilice el tiempo de punto de ruptura y otros resultados del ejemplo 12.3-1 para hacer lo siguiente:

a) El tiempo de punto de ruptura para una nueva columna debe ser de 8.5 h. Calcule la nueva longitud total de la columna que se requiere, el diámetro de la columna y la fracción de la capacidad total usada hasta el punto de ruptura. La tasa de flujo debe permanecer constante a 754 cm^3/s.

b) Utilice las mismas condiciones que en el inciso a), pero la tasa de flujo debe aumentar a 2000 cm^3/s.

Respuesta: a) $H_T = 27.2$ cm, 0.849 fracción; b) $D = 6.52$ cm

12.3-2. ***Secado de nitrógeno y aumento de escala de la columna.*** Mediante cribas moleculares se elimina vapor de agua del nitrógeno gaseoso en un lecho empacado (C3) a 28.3 "C. La altura de la columna es de 0.268 m, y la densidad general del lecho sólido es de 7 12.8 kg/m^3. La concentración inicial del agua en el sólido es de 0.0 1 kg de aguaikg de sólido y la velocidad de masa del nitrógeno gaseoso es de 4052 kg/m^2 . h.
La concentración inicial de agua en el gas es $c_o = 926 \times 10^{-6}$ kg de aguaikg de nitrógeno. Los datos del punto de penetración son los siguientes.

t (h)	0	9	9.2	9.6	10	10.4
c (kg H_2O/kg $N_2 \times 10^6$)	<0.6	0.6	2.6	21	91	235
t (h)	10.8	11.25	11.5	12.0	12.5	12.8
c (kg H_2O/kg $N_2 \times 10^6$)	418	630	717	855	906	926

Se desea un valor de $c/c_o = 0.02$ en el punto de ruptura. Haga lo que sigue:

a) Determine el tiempo del punto de ruptura, la fracción de la capacidad total usada hasta el punto de ruptura, la longitud del lecho no usado y la capacidad de carga de saturación del sólido.

b) Para la longitud de columna propuesta, $H_T = 0.40$ m, calcule el tiempo del punto de ruptura y la fracción de la capacidad total usada.

Respuesta: a) $t_b = 9.58$ h, fracción usada = 0.878

12.4-1. ***Aumento de escala de una columna de intercambio iónico.*** En un proceso de intercambio iónico se utiliza una resina para eliminar iones de cobre de una solución acuosa que se lleva a cabo en una columna de 1.0 pulg de diámetro y 1.2 pie de alto. La tasa de flujo es de

1.5 gph y el punto de ruptura ocurre a los 7.0 min. Al integrar la curva de avance se obtuvo una relación entre la capacidad utilizable y la capacidad total del 0.60. Diseñe una nueva torre de 3.0 pies de alto y que opere a 4.5 gph. Calcule el nuevo tamaño de la torre y el tiempo de punto de ruptura.

Respuesta: t_b = 24.5 min, D = 1.732 pulg

12.4-2. ***Altura de la torre en el intercambio iónico.*** En una corrida determinada con una tasa de flujo de 0.2 m^3/h en una torre de intercambio iónico con una columna de 0.40 m de alto, el punto de ruptura ocurrió a los 8.0 min. La relación entre de la capacidad utilizable y la capacidad total en equilibrio es de 0.65. ¿Cuál es la altura de una columna semejante que opere 13.0 min hasta el punto de ruptura a la misma tasa de flujo?

12.4-3. Intercambio iónico de cobre en una columna. Una columna de intercambio iónico que contiene 99.3 g de amberlita como resina de intercambio iónico se usa para eliminar el Cu^{2+} de una solución donde c_o = 0.18 M $CuSO_4$. La altura de la torre = 30.5 cm y el diámetro = 2.59 cm. La tasa de flujo es de 1.37 cm^3 de solución/s a la torre. Los datos del punto de penetración se muestran en seguida

t (s)	420	480	510	540	600	660
c (g mol Cu/L)	0	0.0033	0.0075	0.0157	0.0527	0.1063
t (s)	720	780	810	870	900	
c (g mol Cu/L)	0.1433	0.1634	0.1722	0.1763	0.180	

La concentración deseada en el punto de ruptura es c/c_o = 0.010. Determine el tiempo de ruptura, la fracción de la capacidad total usada hasta el punto de ruptura, la longitud del lecho no usado y la capacidad de carga de saturación del sólido.

12.5-1. ***Composición de dos fases líquidas en equilibrio.*** Una mezcla que pesa 200 kg y que contiene 50 kg de éter isopropílico, 20 kg de ácido acético y 130 kg de agua, alcanza su equilibrio en un mezclador-sedimentador y después se separan las fases. Determine la cantidad y composición de las capas de refinado y de extracto. Use los datos de equilibrio del Apéndice A.3.

12.5-2. ***Extracción en una sola etapa.*** Se lleva a cabo la extracción en una sola etapa en la cual 400 kg de una solución que contiene 35% en peso de ácido acético en agua se pone en contacto con 400 kg de éter isopropílico puro. Calcule la cantidad y la composición de las capas de refinado y de extracto. Proceda a la determinación con métodos algebraicos y también con la regla de la palanca. ¿Qué porcentaje de ácido acético se extrae? Use los datos de equilibrio del Apéndice A.3.

Respuesta: L_1 = 358 kg, x_{B1} = 0.715, x_{C1} = 0.03, V_1 = 442 kg, y_{A1} = 0.11, y_{C1} = 0.86, 34.7% extraído

12.5-3. ***Extracción en una sola etapa de composición desconocida.*** Una mezcla de alimentación que pesa 200 kg y con proporciones desconocidas de agua, ácido acético y éter isopropílico, se pone en contacto en una sola etapa con 280 kg de una mezcla que contiene 40% en peso de ácido acético, 10% en peso de agua y 50% en peso de éter isopropílico. La capa refinada resultante pesa 320 kg y contiene 29.5% en peso de ácido acético, 66.5% en peso de agua y 4.0% en peso de éter isopropílico. Determine la composición original de la mezcla de alimentación y la composición de la capa de extracto resultante. Use los datos de equilibrio del Apéndice A.3.

Respuesta: x_{A0} = 0.030, x_{B0} = 0.955, y_{A1} = 0.15

12.5-4. ***Extracción de acetona en una sola etapa.*** Una mezcla que pesa 1000 kg contiene 23.5% en peso de acetona y 76.5% en peso de agua y se va a extraer con 500 kg de metil-isobutil-cetona en una sola etapa. Determine la cantidad y la composición de las fases de refinado y de extracto. Use los datos de equilibrio del Apéndice A.3.

12.7-1. ***Extracción en etapas múltiples con disolvente nuevo en cada etapa.*** Se va a usar agua pura para extraer ácido acético de 400 kg de solución de alimentación que contiene 25% en peso de ácido acético en éter isopropílico. Use los datos de equilibrio del Apéndice A.3.

a) Si se usan 400 kg de agua, calcule el porcentaje de recuperación en la solución acuosa en un proceso de una sola etapa.

b) Si se usa un sistema de etapas múltiples alimentando 100 kg de agua pura en cada etapa, calcule el porcentaje total de recuperación del ácido en el agua total de salida. (Sugerencia: Primero, calcule las corrientes de salida de refinado y extracto para la primera etapa, usando 400 kg de solución de alimentación y 100 kg de agua. Para la segunda etapa, la fase orgánica de salida de la primera etapa entra en contacto con 100 kg de agua. Para la tercera etapa, la fase orgánica de salida de la segunda etapa se pone en contacto con 100 kg de agua, y así sucesivamente.)

12.7-2. ***Balance general en una extracción a contracorriente en etapas.*** Una alimentación acuosa de 200 kg/h que contiene 25% en peso de ácido acético, se extrae con éter isopropílico puro a velocidad de 600 kg/h en un sistema a contracorriente de etapas múltiples. La concentración de salida del ácido en la fase acuosa debe tener 3.0% de ácido acético en peso. Calcule la composición de las corrientes de refinado y de extracto, con los datos de equilibrio del Apéndice A.3.

12.7-3. ***Disolvente mínimo y extracción de acetona a contracorriente.*** Una alimentación acuosa de 1000 kg/h que contiene 23.5% en peso de acetona y 76.5% en peso de agua se extrae en un sistema a contracorriente de etapas múltiples usando metil-isobutil-cetona pura a 298-299 K. El refinado acuoso de salida debe contener 2.5% de acetona en peso. Use los datos de equilibrio del Apéndice A.3.

a) Calcule el mínimo de disolvente que se puede usar. [Sugerencia: En este caso, la línea de enlace a través de la alimentación L_0 representa la condición de velocidad mínima de flujo del disolvente. Esto permite obtener $V_{1\ \text{mín}}$. Entonces, al trazar las líneas $L_N V_{1\ \text{mín}}$ y $L_0 V_{N+1}$, se obtienen los valores del punto de mezcla $M_{\text{mín}}$ y de la coordenada $x_{AM\ \text{mín}}$. Use la ecuación (12.7-4) y determine el valor de $V_{N+1\ \text{mín}}$, que es el valor mínimo de la velocidad de flujo de disolvente V_{N+1}.]

b) Usando una velocidad de flujo de disolvente 1.5 veces mayor que el mínimo, calcule el numero de etapa teóricas.

12.7-4. ***Extracción de ácido acético a contracorriente y mínimo de disolvente.*** Una alimentación de solución acuosa de 1000 kg/h de ácido acético al 30.0% en peso se va a extraer en un proceso a contracorriente de etapas múltiples con éter isopropílico puro, para reducir la concentración del ácido a 2.0% en peso en el refinado final. Use los datos de equilibrio del Apéndice A.3.

a) Calcule la velocidad mínima de flujo de disolvente que se puede usar. (Sugerencia: Véase el método del problema 12.7-3.)

b) Determine el número de etapas teóricas necesarias cuando se usan 2500 kg/h de disolvente. (*Nota:* Puede ser necesario volver a graficar en una escala más amplia las concentraciones del extremo diluido.)

Respuesta: a) Velocidad mínima de flujo del disolvente V_{N+} , = 1630 kg/h; b) 7.5 etapas

12.7-5. ***Número de etapas en una extracción a contracorriente.*** Repita el ejemplo 12.7-2 pero usando una concentración de salida del ácido en la fase acuosa de 4.0% en peso.

12.7-6. ***Extracción con disolventes inmiscibles.*** Una solución acuosa de 1000 kg/h que contiene 1.5% en peso de nicotina se desprende con una corriente de queroseno de 2000 kg/h que contiene 0.05% en peso de nicotina en una torre a contracorriente en etapas. El agua de salida contiene sólo 10% de la nicotina original, es decir, se elimina el 90%. Emplee los datos de equilibrio del ejemplo 12.7-3. Calcule el número de etapas teóricas necesarias.

Respuesta: 3.7 etapas

12.7-7. ***Ecuación analítica para el número de etapas.*** El ejemplo 12.7-3 proporciona datos de extracción de nicotina del agua mediante queroseno, en donde los dos disolventes son inmiscibles. Se necesitaron 3.8 etapas teóricas. Emplee las ecuaciones analíticas (10.3-21) a la (10.3-26) para calcular el número de etapas teóricas y compárelo con el valor obtenido gráficamente.

12.7-8. ***Velocidad mínima del disolvente con disolventes inmiscibles.*** Determine la velocidad mínima del queroseno disolvente para efectuar la extracción deseada en el ejemplo 12.7-3. Empleando 1.25 veces la velocidad mínima, determine las etapas teóricas necesarias de forma gráfica y también usando las ecuaciones (10.3-21) a la (10.3-26).

12.7-9. ***Eliminación de nicotina del queroseno.*** Un flujo de queroseno de 100 kg/h contiene 1.4% en peso de nicotina que se elimina con agua pura en una torre a contracorriente de etapas múltiples. Se desea eliminar el 90% de la nicotina. Usando una velocidad de agua de 1.50 veces el mínimo, determine el número de etapas necesarias. (Emplee los datos de equilibrio del ejemplo 12.7-3).

12.8-1. ***Difusividad efectiva en la lixiviación de partículas.*** En el ejemplo 12.8-1, se requiere un tiempo de lixiviación de la partícula sólida de 3. ll h para extraer el 80% del soluto. Haga los cálculos siguientes:

a) Empleando los datos experimentales, calcule la difusividad efectiva, $D_{A\ \text{eff}}$.

b) Pronostique el tiempo para extraer por lixiviación el 90% del soluto de la partícula de *2.0* mm.

Respuesta: $D_{A\ \text{eff}} = 1.0 \times 10^{-5}$ mm²/s; b) $t = 5.00$ h

12.9-1. ***Lixiviación de aciete de soya en una sola etapa.*** Repita el ejemplo 12.9-1 para extracción de aceite de soya en una sola etapa. Los 100 kg de frijol de soya contienen 22% de aceite en peso y se añaden 80 kg de disolvente, con 3% de aceite de soya en peso.

Respuesta: $L_1 = 52.0$ kg, $y_{A1} = 0.239$, $V_1 = 50.0$ kg, $x_{A1} = 0.239$, $N_1 = 1.5$

12.9-2. Lixiviación de una suspensión de soya en una sola etapa. Una suspensión de soya en escamas que pesa un total de 100 kg, contiene 75 kg de sólidos inertes y 25 kg de solución con 10% en peso de aceite y 90% en peso de disolvente hexano. La suspensión entra en contacto con 100 kg de hexano puro en una sola etapa, de manera que el valor de N para el flujo inferior de salida es 1.5 kg de sólidos insolubles/kg de solución retenida. Calcule la cantidad y la composición del flujo de derrame V_1 y del flujo inferior L_1 que sale de la etapa.

12.10-l. ***Flujo inferior constante en fa lixiviación de aceite de harina.*** Use las mismas condiciones del ejemplo 12.10-1, pero suponga un flujo inferior constante de N = 1.85 kg sólido/kg de solución. Calcule los flujos y composiciones de salida y el número de etapas requeridas. Compare con el ejercicio 12.10-l.

Respuesta: $y_{AN} = 0.111$, $x_{A1} = 0.623$, 4.3 etapas

12.10-2. ***Efecto de un menor flujo de disolvente en la lixiviación de aceite de harina.*** Use las mismas condiciones del ejemplo 12.10-l disminuyendo un 10% la velocidad de flujo de entrada de la mezcla de disolvente hasta 1179 kg de benceno y 18 kg de aceite. Calcule el número de etapas requeridas.

12.10-3. ***Lavado de minerales a contracorriente en etapas múltiples.*** Un mineral tratado que contiene ganga sólida inerte y sulfato de cobre se va a lixiviar en un extractor a contracorriente de etapas múltiples, usando agua pura para extraer el $CuSO_4$. La velocidad de carga de sólidos por hora consiste en 10000 kg de ganga inerte (B), 1200 kg de $CuSO_4$ (soluto A), y 400 kg de agua (C). La solución de lavado de salida debe contener 92% de agua en peso y 8% de $CuSO_4$ en peso. Se desea recuperar un total de 95% de $CuSO_4$ del mineral de entrada. El flujo inferior es constante e igual a 0.5 kg de ganga inerte/kg de solución acuosa. Calcule el número de etapas requeridas.

12.104 ***Lixiviación a contracorriente en etapas múltiples de hígados de hipogloso. Se*** desea lixiviar hígados frescos de hipogloso que contienen 25.7% de aceite en peso, con éter etílico puro, para extraer el 95% del aceite, usando un proceso a contracorriente y de etapas múltiples. La velocidad de alimentación es de 1000 kg de hígado fresco por hora. La solución de derrame de salida de todo el proceso debe contener 70% de aceite en peso. La retención de solución por los sólidos inertes (hígado libre de aceite) de hígado varía como sigue (Cl), donde N es kg de sólido inerteikg de solución retenida y y_A es kg aceite/kg de solución:

N	y_A	N	y_A
4.88	0	1.67	0.6
3.50	0.2	1.39	0.81
2.47	0.4		

Calcule la cantidad y composición de la corriente de salida y el número total de etapas teóricas.

12.10-5. ***Lixiviación a contracorriente de suya en escamas. Se*** van a lixiviar escamas de soya que contienen 22% de aceite en peso, por un proceso a contracorriente y de etapas múltiples, hasta reducir el contenido de aceite a 0.8 kg de aceite/100 kg de sólido inerte, usando hexano puro. Se emplean 1000 kg de hexano por cada 1000 kg de soya. Diversos experimentos (S1) muestran la siguiente retención de solución con los sólidos en el flujo inferior, donde N es kg de sólido inerte/kg de disolución y y_A es la fracción en peso del aceite en solución:

N	y_A
1.73	0
1.52	0.20
1.43	0.30

Calcule los flujos, composiciones y el número total de etapas téoricas necesarias.

12.11-1. ***Cristalización de Ba $(NO_3)_2$.*** Una solución caliente de $Ba(NO_3)_2$ que procede de un evaporador contiene 30.6 kg de $Ba(NO_3)_2$/100 kg H_2O y pasa a un cristalizador donde se enfría y cristaliza nitrato de bario. El enfriamiento produce una evaporación del 10% del agua presente en la solución original. Calcule lo siguiente para una alimentación de 100 kg totales de solución:

a) El rendimiento de cristales cuando la solución se enfría a 290 K (17 “C) si la solubilidad es de 8.6 kg $Ba(NO_3)_2$/100 kg de agua.

b) El rendimiento al enfriara 283 K, donde la solubilidad es 7.0 kg $Ba(NO_3)_2$/100 kg de agua.

Respuesta: a) 17.47 kg de cristales de $Ba(NO_3)_2$

12.11-2. ***Disolución y cristalización subsecuente.*** Un lote de 1000 kg de KC 1 se disuelve en suficiente agua para obtener una solución saturada a 363 K, que contiene 35% de KC1 en peso. La solución se enfría a 293 K, y donde la solubilidad es de 25.4% en peso.

a) ¿Cuál es el peso de agua que se requiere para la solución y qué peso de cristales se obtiene?

b) ¿Cuál es el peso de cristales que se obtiene suponiendo que se evapora un 5% del agua original al enfriar la solución?

Respuesta: a) 1857 kg de agua, 368 kg de cristales; b) 399 kg de cristales.

12.11-3. ***Cristalización de $MgSO_4 \cdot 7H_2O$.*** Una disolución caliente que contiene 1000 kg de $MgSO_4$ en agua a concentración del 30% en peso se enfría a 288.8 K, y se precipitan cristales de $MgSO_4 \cdot 7H_2O$. La solubilidad a 288.8 K es de 24.5% en peso de $MgSO_4$ anhidro en la solución. Calcule el rendimiento de cristales cuando un 5% del agua original del sistema se evapora a causa del enfriamiento.

12.114. ***Balance de calor en la cristalización.*** Una corriente de alimentación a 10000 lb_m y 130 °F, que contiene 47.0 lb de $FeSO_4$/100 lb de agua total, se enfria a 80 °F, para extraer cristales de $FeSO_4 \cdot 7H_2O$. La solubilidad de la sal es 30.5 lb de $FeSO_4$/100 lb de agua total (P1). La capacidad calorifica promedio de la corriente de alimentación es de 0.70 btu/ lb_m . "F. El calor de disolución a 18 °C es -4.4 kcal/g mol (-18.4 kJ/g mol) de $FeSO_4 \cdot 7H_2O$ (P1). Calcule el rendimiento de cristales y establezca el balance de calor. Suponga que no se vaporiza agua.

Respuesta: 2750 lb_m de cristales de $FeSO_4 \cdot 7H_2O$, q = -428300 btu (-451900 kJ)

12.115. ***Efecto de la temperatura sobre el rendimiento y balance de calor en la cristalización.*** Empleando las condiciones del ejercicio 12.11-2 pero enfriando la solución a 283.2 K (50 "F), la solubilidad es de 30.9 kg $MgSO_4$/100 kg de agua total (P1). Calcule el efecto sobre el rendimiento y el calor absorbido a 283.2 K en lugar de a 293.2 K para la cristalización.

REFERENCIAS

(B1) **Blakebrough,** *N. Biochemical and Biological Engineering Science,* Vol. 1, Nueva York: Academic Press, Inc., 1968.

(B2) **Badger, W. L. y Banchero, J. T.** *Introduction to Chemical Engineering,* Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1955.

(B3) **Badger, W. L. y McCabe, W. L.** *Elements of Chemical Engineering,* Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1936.

(B4) **Buckley, H. E.** *Crystal Growth,* Nueva York: John Wiley & Sons, Inc., 1951.

(B5) **Bennett, R.** *C. y* **Van Buren, M.** *Chemical Eng. Progr. Symp.,* **65**(95), *46* (1969).

(B6) **Bennett, R. C., Fieldelman, H. y Randolph, A. D.** *Chem. Eng. Progr., 69* (7), *86* (1972).

(B7) **Belter,** P. A., **Cussler,** E. L. *y* Hu, W. *S. Bioseparations,* Nueva York: John Wiley & Sons, Inc., 1988.

(C1) **Charm,** *S.* E. *The Fundamentals of Food Engineering,* 2a. ed. Westport, Conn.: Ari Publishing Co., Inc., 1971.

(C2) Crystallization from Solutions and Melts, *Chem. Eng. Progr. Symp., 65* (95), (1969).

(C3) **Collins, J.** J. *Chem. Eng. Progr. Symp. Series, 63* (74), 31 (1967).

(C4) **Clontz, N. A. y** McCabe, W. L. *A. I. Ch. E. Symp. Ser. No. 110, 67, 6* (1971).

(C5) **Claffey, J. B., Badgett, C. O., Skalamera, C. D. y Phillips, G. W.** *Ind. Eng. Chem.,* 42, 166 (1950).

(C6) **Cusack, R. W. y Karr, A. E.** *Chem. Eng., 98* (4), 112 (1991).

(C7) **Cusack, R. W., Fremeaux, P. y Glatz, D.** *Chem. Eng., 98* (2), *66* (1991).

(C8) **Cusack, R. W. y Fremeaux, P.** *Chem. Eng., 98* (3), 132 (1991).

(H1) **Hougen, 0. A., Watson, K. M. y Ragatz, R. A.** *Chemical Process Principles, Parte I,* 2a. ed., Nueva York: John Wiley & Sons, Inc., 1954.

(H2) **Hixson, A. W. y** Knox, K. L. *Znd. Eng. Chem., 43,* 2144, (1951).

(H3) Hu **M. C.,** Haering, **E. R. y Geankoplis, C. J.** *Chem. Eng. Sci., 40* 2241 (1985).

(K1) **Karnofsky,** *G.* J. *Am. Oil Chemist's Soc; 26, 564,* (1949).

(K2) **Kobe, K. A. y Couch, E. J.,** *Jr. Ind. Eng. Chem., 46, 377,* (1954).

(K3) **KARR, A.** E. y Lo, T. C., *Proc. Znt. Solv. Ext. Conf. (ISEC),* 1, 299 (1971).
(L1) LUKCHIS, **G. M.** *Chem., Eng. 80,* 11 de junio, 1 ll (1973).
(L2) LARSON, M. A. *Chem., Eng.* 85, 13 de febrero, 90 (1978).
(L3) **LO, T. C. y KARR, A. E.,** *I. E. C. Proc. Des. Der;* ll. (4), 495 (1972).
(M1) **MICHAELS, A. S.** *Znd. Eng., Chem., 44 (8)* (1922) (1952).
(M2) **MURRAY, D. C. y** LARSON, **M. A.,** *A. I. Ch. E. J.,* ll, 728, (1965).
(M3) MCCABE, **W. L. SMITH, J. C. y** HARRIOTT, **P.** *Unit Operation of Chemical Engineering,* 4a. ed. Nueva York: McGraw-Hill Book Company, (1985).
(N1) **NATIONAL RESEARCH COUNCIL,** *Znternational Critica1 Tables,* Vol. 5, Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1929.
(O1) **OSBURN, J. Q. y KATZ, D.** L. *Trans. A. I. Ch. E., 40, 5* ll (1944).
(O2) **OTHMER, D. F. y JAATINEN, W. A.** *Znd. Eng., Chem.,* 51, 543 (1959).
(O3) **OTHMER, D. F. y AGARWAL, J. C.** *Znd. Eng., Chem.,* 51, 372 (1955).
(P1) **PERRY, R. H. y GREEN, D.** *Perry's Chemical Engineers' Handbook,* 6a. ed., Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1984.
(P2) **PERRY,** J. H. *Chemical Engineers' Handbook,* 4a. ed., Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1963.
(P3) **PERRY, R. H. y** CHILTON, *C.* **H.** *Chemical Engineers' Handbook,* 5a. ed., Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1973.
(R1) **RANDOLPH, A. D. y** LARSON, **M. A.** *Theory of Particulate Systems,* Nueva York: Academic Press, Inc., 1971.
(R2) **RANDOLPH,** A. D. **y** LARSON, M. A. *A. I. Ch. E. J., 8, 639,* (1962).
(R3) **RANDOLPH,** A. D. *A. I. Ch. E. J.,* ll, 424 (1965).
(R4) **ROUSSEAU, R. W.** (Ed.) *Handbook of Separation Process Technology,* Nueva York: John Wiley Sons, Inc., 1987.
(R5) REYNOLDS, T. D. *Unit Operations and Processes in Envirnmental Engineering,* Boston: PWS Publishers, 1982.
(R6) RUTHVEN, **D. M.** *Principles of Adsorption and Adsorption Processes,* Nueva York: John Wiley & Sons, Inc., 1984.
(S1) **SMITH,** *C.* T. *J. Am. Oil Chemists' Soc; 28, 274* (1951).
(S2) **SAEMAN, W. C.** *A. I. Ch. E. J., 2,* 107 (1956).
(T1) **TREYBAL, R. E.** *Mass Transfer Operations,* 3a. ed., Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1980.
(V1) **VAN HOOK, A.** *Crystallization, Theory and Practice,* Nueva York: John Wiley & Sons, Inc., 1951.
(Y1) **YANG, H. H. y BRIER, J. C.** *A. I. Ch. E. J., 4, 453* (1958).

CAPÍTULO 13

Procesos de separación a través de una membrana

13.1 INTRODUCCIÓN Y TIPOS DE PROCESOS DE SEPARACIÓN A TRAVÉS DE LAS MEMBRANAS

13.1A Introducción

Las separaciones por medio de membranas se están volviendo ca& vez mas importantes en las industrias de proceso. En esta operación unitaria relativamente nueva, la membrana actúa como una barrera semipermeable y la separación ocurre porque la membrana controla la cantidad de movimiento de varias moléculas entre dos fases líquidas, dos fases gaseosas o una fase líquida y una gaseosa. Las dos fases fluidas suelen ser miscibles y la barrera de la membrana impide el flujo hidrodinámico normal. En seguida se analiza la clasificación de los principales tipos de separación a través de la membrana.

13.1B Clasificación de los procesos con membranas

1. Difusión de gas en un sólido poroso. En este caso, una fase gaseosa está presente en ambos lados de la membrana, que es un sólido microporoso. Las velocidades de difusión molecular de las numerosas moléculas de gas dependen del tamaño de los poros y de los pesos moleculares. Este tipo de difusión en la región molecular, de transición y de Knudsen se analizó con detalle en la sección 7.6.

2. Permeación de gas a través de una membrana. En este proceso, la membrana generalmente es un polímero como caucho, poliamida u otro, y no es un sólido poroso. El gas soluto primero se disuelve en la membrana y luego se difunde en el sólido hacia la otra fase gaseosa. Esto se estudió a fondo en la sección 6.5 para los solutos que siguen la ley de Fick y se vuelve a considerar en la sección 13.3 para el caso en que haya resistencias presentes. Algunos ejemplos son la difusión de hidrógeno a través de caucho y el helio que se separa de gas natural por permeación a través de un ‘polímero de fluorocarbono. La separación de una mezcla gaseosa ocurre porque cada tipo de molécula se difunde a una rapidez diferente a través de la membrana.

3. Permeación de un líquido o diálisis. En este caso los solutos pequeños de una fase líquida se difunden fácilmente debido a las diferencias de concentración a través de una membrana porosa hacia

la segunda fase líquida (o fase gaseosa). El paso de las moléculas grandes a través de la membrana es más difícil. Este proceso de membrana se ha aplicado en separaciones de procesos químicos como en la separación del H_2SO_4 de los sulfatos de níquel y cobre en solución acuosa, en el procesamiento de alimentos y en los riñones artificiales, y se estudia en detalle en la sección 13.2. En la electrodiálisis, la separación de iones ocurre al imponer una diferencia de fem (fuerza electromotriz) a través de la membrana.

4. ósmosis inversa. Entre la solución de soluto y disolvente y un disolvente puro se coloca una membrana que impide el paso del soluto de bajo peso molecular. El disolvente se difunde hacia la solución por ósmosis. En la ósmosis inversa se impone una diferencia de presión inversa que ocasiona que el flujo del disolvente se invierta como en la desalinización del agua de mar. Este proceso también se usa para separar otros solutos de bajo peso molecular, como sales, azucares y ácidos simples de un disolvente (generalmente agua). Este proceso se analiza en detalle en las secciones 13.9 y 13.10.

5. Proceso de membrana de ultrafiltración. En este proceso se utiliza la presión para lograr una separación de moléculas mediante una membrana polimérica semipermeable (M2). La membrana distingue los diferentes tamaños moleculares, formas o estructuras químicas y separa los solutos de peso molecular relativamente alto, como proteínas, polímeros, materiales coloidales como minerales, etc. La presión osmótica suele ser despreciable debido a los altos pesos moleculares. Esto se analiza en la sección 13.11.

6. Cromatografía por permeación en gel. El gel poroso retarda la difusión de los solutos de alto peso molecular. La fuerza impulsora es la concentración. Este proceso es sumamente útil para analizar soluciones químicas complejas y purificar componentes muy especializados o valiosos.

13.2 PROCESOS DE MEMBRANA DE PERMEACIÓN DE LÍQUIDOS 0 DIÁLISIS

13.2A Resistencias en serie en los procesos de membrana

En los procesos de membrana con líquidos, las moléculas de soluto primero deben transportarse o difundirse a través de la película líquida de la primera fase líquida de un lado de la membrana solida, a través de la membrana misma, y luego a través de la película de la segunda fase líquida. Esto se muestra en la figura1 3.2-1a, donde c_1 es la concentración de la fase líquida general del soluto A que se difunde en kg mol A/m^3, c_{1i} es la concentración de A en el fluido justo adyacente al sólido y c_{1iS} es la concentración de A en la superficie del sólido y esta en equilibrio con C_{1i}. Los coeficientes de transferencia de masa son k_{c1} y k_{c2} en m/s. El coeficiente de distribución de equilibrio K' se define como

$$K' = \frac{c_S}{c_L} = \frac{c_{1iS}}{c_{1i}} = \frac{c_{2iS}}{c_{2i}} \qquad \textbf{(13.2-1)}$$

Nótese que K' es el inverso del valor de K definido en la ecuación (7.1-16).

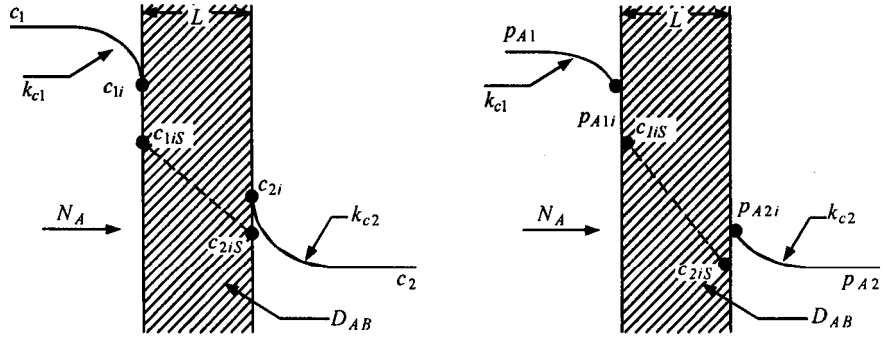


FIGURA *13.2-I.* ***Perfiles de concentración*** *para procesos de membrana: a) dos películas liquidas y un sólido. b) dos películas gaseosas y un sólido.*

Las ecuaciones de flujo específico a través de cada fase son todas iguales entre sí en estado estacionario y son como sigue:

$$N_A = k_{c1}(c_1 - c_{1i}) = \frac{D_{AB}}{L}(c_{1iS} - c_{2iS}) = k_{c2}(c_{2i} - c_2) \qquad \textbf{(13.2-2)}$$

Al sustituir $c_{1iS} = K'c_{1i}$ y $c_{2iS} = K'c_{2i}$ en la ecuación (13.2-2),

$$N_A = k_{c1}(c_1 - c_{1i}) = \frac{D_{AB}K'}{L}(c_{1i} - c_{2i}) = p_M(c_{1i} - c_{2i}) = k_{c2}(c_{2i} - c_2) \qquad \textbf{(13.2-3)}$$

$$p_M = \frac{D_{AB}K'}{L} \qquad (13.2\text{-}4)$$

donde p_M es la permeabilidad en el sólido en m/s, L es el grosor en m y D_{AB} es la difusividad de A en el sólido en m^2/s. Obsérvese que la permeabilidad p_M de la ecuación (13.2-4) es diferente de la permeabilidad P_M definida en la ecuación (6.5-9). Además, el valor de p_M es inversamente proporcional al grosor L. En lugar de determinar D_{AB} y K' en dos experimentos separados, es más conveniente determinar p_M en un experimento de difusión independiente. Si se despeja en cada una de las partes de la ecuación (13.2-3) la diferencia de concentración,

$$c_1 - c_{1i} = \frac{N_A}{k_{c1}} \quad c_{1i} - c_{2i} = \frac{N_A}{p_M} \quad c_{2i} - c_2 = \frac{N_A}{k_{c2}} \qquad (13.2\text{-}5)$$

Al sumar las ecuaciones, las concentraciones internas c_{1i} y c_{2i} se cancelan y la ecuación final es

$$N_A = \frac{c_1 - c_2}{1/k_{c1} + 1/p_M + 1/k_{c2}} \qquad (13.2\text{-}6)$$

En algunos casos, las resistencias en las dos películas líquidas son muy pequeñas comparadas con la resistencia de la membrana, que controla la velocidad de permeación.

EJEMPLO 13.2-1. Difusión de membrana y resistencias de las películas líquidas
Un líquido que contiene el soluto *A* diluido a concentración $c_1 = 3 \times 10^{-2}$ kg mol/m^3 está fluyendo rápidamente a través de una membrana cuyo grosor es $L = 3.0 \times 10^{-5}$ m. El coeficiente de distribución $K' = 1.5$ y $D_{AB} = 7.0 \times 10^{-11}$ m^2/s en la membrana. El soluto se difunde a través de la membrana y su concentración en el otro lado es $c_2 = 0.50 \times 10^{-2}$ kg mol/m^3. El coeficiente de transferencia de masa k_{c1} es grande y se puede considerar como infinito, mientras que $k_{c2} = 2.02 \times 10^{-5}$ m/s.

a) Deduzca la ecuación para calcular el flujo específico N_A en estado estacionario y haga un perfil de concentraciones.
b) Calcule el flujo específico y las concentraciones en las interfaces de la membrana.

Solución: El esquema para el inciso a) se muestra en la figura (13.2-2). Nótese que el perfil de concentración en el lado izquierdo es plano ($k_{c1} = \infty$) y $c_1 = c_{1i}$. La deducción es igual que para la ecuación (13.2-6), pero $1/k_{c1} = 0$ para dar

$$N_A = \frac{c_1 - c_2}{1/p_M + 1/k_{c2}} \tag{13.2-7}$$

Para el inciso b), a fin de calcular el flujo usando las ecuaciones (13.2-4) y (13.2-7),

$$p_M = \frac{D_{AB}K'}{L} = \frac{7.0 \times 10^{-11}\,(1.5)}{3.0 \times 10^{-5}} = 3.5 \times 10^{-6} \text{ m/s}$$

$$N_A = \frac{c_1 - c_2}{1/p_M + 1/k_{c2}} = \frac{3.0 \times 10^{-2} - 0.5 \times 10^{-2}}{1/3.5 \times 10^{-6} + 1/2.02 \times 10^{-5}}$$

$$= 7.458 \times 10^{-8} \text{ kg mol/s} \cdot \text{m}^2$$

Para calcular c_{2i},

$$N_A = 7.458 \times 10^{-8} = k_{c2}(c_{2i} - c_2) = 2.02 \times 10^{-5}\,(c_{2i} - 0.5 \times 10^{-2})$$

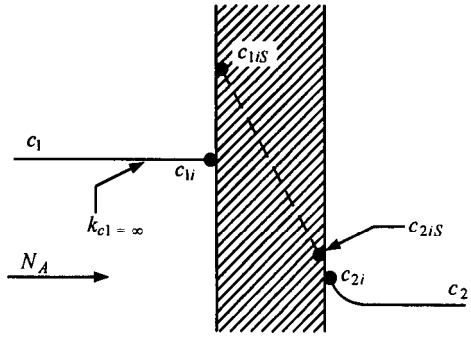


FIGURA 13.2-2. *Concentraciones del ejemplo 3.2-1*

Al resolver, c_{2i} = 0.869 x 10^{-2} kg mol/m^3. Además, utilizando la ecuación (13.2-l),

$$K' = 1.5 = \frac{c_{2iS}}{c_{2i}} = \frac{c_{2iS}}{0.869 \times 10^{-2}}$$

Después de resolver, c_{2iS} = 1.304 x 10^{-2} kg mol/m^3.

13.2B Procesos de diálisis

En la diálisis se emplea una membrana semipermeable para separar las especies gracias a sus diferentes velocidades de difusión a través de ella. La solución de alimentación o dializado, que contiene los solutos que se van a separar, fluye en un lado de la membrana y el disolvente o corriente del producto que se difunde, en el otro lado. Parte del disolvente también se puede difundir a través de la membrana en sentido opuesto, lo que reduce el rendimiento porque se diluye el dializado.

En la práctica se acostumbra separar especies que difieren apreciablemente en **tamaño,** y que tienen una diferencia razonablemente grande de velocidades de difusión. Los flujos de soluto dependen del gradiente de concentraciones en la membrana, por lo que la diálisis se caracteriza por bajos flujos, en comparación con otros procesos de membrana como la ósmosis inversa y la **ultrafiltración,** que son procesos de membrana que dependen de la presión aplicada,

En general, la diálisis se utiliza con soluciones acuosas en ambos lados de la membrana. Las resistencias de película pueden ser apreciables en comparación con la resistencia de la membrana. Entre las aplicaciones se incluyen la recuperación del hidróxido de sodio en el procesamiento de celulosa, la recuperación de ácidos de los licores metalúrgicos, la extracción de productos de una solución de cultivo en fermentación, la desalazón de los sólidos del suero de los quesos y la reducción del contenido de alcohol de la cerveza. En la industria farmacéutica tiene diversas aplicaciones en pequeña escala.

13.2C Tipos de equipo para la diálisis

En los procesos líquidos a través de una membrana se usan varios tipos de configuraciones geométricas. Un tipo común es similar a un filtro prensa en el que la membrana es una placa plana. Se colocan membranas sólidas verticales entre marcos alternados de alimentación de licor y de disolvente, y el licor que se va a dializar se alimenta hacia el fondo y el disolvente hacia la parte superior de estos marcos. El dializado y el producto que se difunde se extraen a través de canales ubicados en la parte superior y en el fondo de los marcos, respectivamente. El tipo más importante consta de muchos tubos pequeños o fibras huecas muy finas dispuestas en manojos como un **intercambiador** de calor. Este tipo de unidad tiene una relación muy elevada de área de la membrana respecto al volumen de la unidad.

13.2D Hemodiálisis y riñón artificial

Un importante ejemplo de los procesos de permeación de líquidos es la diálisis con un riñón artificial en el campo biomédico. En esta aplicación para purificar la sangre humana, los principales solutos que se eliminan son los pequeños como urea, ácido úrico, creatinina, fosfatos y cantidades excedentes de cloruros. La membrana típica que se usa es un celofán de cerca de 0.025 mm de espesor, que permite que los solutos pequeños se difundan, pero retiene a las grandes proteínas de la sangre. Durante la hemodiálisis, la sangre se hace pasar por un lado de la membrana mientras un

fluido dializante acuoso fluye por el otro lado. Los solutos como urea, ácido úrico, NaCl y otros, que se encuentran en la sangre en elevadas concentraciones, se difunden a través de la membrana hacia la solución acuosa dializante, que contiene ciertas concentraciones de solutos como sales de potasio etc., para asegurar que las concentraciones en la sangre no desciendan más allá de ciertos niveles. En una configuración, las membranas se apilan en forma de capa múltiple y la sangre fluye por un lado de la membrana en un canal estrecho y el fluido dializante, por el otro lado en canales alternos.

EJEMPLO 13.2-2. Diálisis para eliminar urea de la sangre

Calcule el flujo específico y la velocidad de eliminación de la urea en estado estacionario en g/h de la sangre en un dializador de membrana de cuprofano (celofán) a 37 "C. La membrana mide 0.025 mm de grueso y tiene un área de 2.0 m^2. El coeficiente de transferencia de masa en el lado de la sangre se calcula como k_{c1} = 1.25 x 10^{-5} m/s y el del lado acuoso es 3.33 x 1 0^{-5} m/s. La permeabilidad de la membrana es de 8.73 x 1 0^{-6} m/s (B2). La concentración de urea en la sangre es de 0.02 g urea/100 mL y la del fluido dializante se puede considerar como 0.

Solución: La concentración $c_1 = 0.02/100 = 2.0 \times 10^{-4}$ g/mL = 200 g/m^3 y $c_2 = 0$. Al sustituir en la ecuación (13.2-6),

$$N_A = \frac{c_1 - c_2}{1/k_{c1} + \text{llp,} + 1/k_{c2}}$$

$$= \frac{\textbf{200-O}}{1/1.25 \times 10^{-5} + 1/8.73 \times 10^{-6} + 1/3.33 \times 10^{-5}}$$

$$= 8.91 \times 10^{-4} \text{ g/s} \cdot \text{m}^2$$

Para un tiempo de 1 h y un área de 2.0 m^2,

velocidad de eliminación = 8.91 x 10^{-4} (3600)(2.0) = 6.42 g urea/h

13.3 PROCESOS A TRAVÉS DE UNA MEMBRANA PARA PERMEACIÓN DE GASES

13.3A Resistencias en serie para procesos con membrana

En los procesos a través de una membrana que emplean dos fases gaseosas y una membrana sólida, se pueden escribir ecuaciones semejantes para el caso mostrado en la figura 13.2-1b. La relación de equilibrio entre las fases sólida y gaseosa es

$$H = \frac{S}{22.414} = \frac{c_s}{p_A} = \frac{c_{1iS} - c_{2iS}}{p_{A1i} - p_{A2i}} \qquad \textbf{(13.3-1)}$$

donde S es la solubilidad de A en m^3 (TPE)/atm · m^3 de sólido, como se muestra en la ecuación (6.5-5), y *Hes* la relación de equilibrio en kg mol/m^3 · atm. Ésta es semejante a la ley de Henry. Las ecuaciones de flujo específico en cada fase son como sigue:

$$N_A = \frac{k_{c1}}{RT}(p_{A1} - p_{A1i}) = \frac{D_{AB}}{L}(c_{1iS} - c_{2iS})$$
$$= \frac{D_{AB}H}{L}(p_{A1i} - p_{A2i})$$
$$= \frac{k_{c2}}{RT}(p_{A2i} - p_{A2}) \qquad (13.2\text{-}2)$$

La permeabilidad P_m en kg mol/s · m · atm es

$$P_m = D_{AB}H = \frac{D_{AB}S}{22.414} \qquad (13.3\text{-}3)$$

Obsérvese que P_m difiere del valor de P_M que se definió en la ecuación (6.5-9) como $D_{AB}S$. Si eliminamos las concentraciones en la interfaz como antes,

$$N_A = \frac{p_{A1} - p_{A2}}{1/(k_{c1}/RT) + 1/(P_m/L) + 1/(k_{c2}/RT)} \qquad (13.3\text{-}4)$$

Si en el lado izquierdo de la membrana hay *A* puro (p_{A1}), no habrá resistencia a la difusión en la fase gaseosa y k_{c1} se puede considerar infinito. Nótese que $k_{G1} = k_{c1}/RT$.

Un ejemplo de la permeación de gas a través de una membrana es el uso de una membrana polimérica como oxigenador en lamáquina cardiopuhnonarpara oxigenar la sangre. En esta aplicación biomédica hay O_2 puro en un lado de una membrana delgada y sangre en el otro. El oxígeno se difunde a través de la membrana hacia la sangre y el CO_2 se difunde en sentido inverso hacia la corriente de gas.

13.3B Tipos de membranas y permeabilidades para la separación de gases

1. Tipos de membranas. Las primeras membranas eran de uso limitado debido a su baja selectividad para separar dos gases y a los flujos de permeación muy bajos. Este problema de bajo flujo se debía al hecho de que las membranas eran relativamente gruesas (1 mil o 1/1000 de pulgada o mayores) para evitar los diminutos hoyos que reducían la separación permitiendo el flujo viscoso o de Knudsen de la alimentación. El desarrollo de polímeros de silicón (de 1 mil de grosor) aumentó la permeabilidad por factores de 10 a 20, aproximadamente.

Algunas membranas asimétricas modernas incluyen una piel muy delgada pero densa en un lado de la membrana sostenida por una subestructura porosa (R1). La piel densa tiene un espesor de cerca de 1000 Ay el soporte poroso lo tiene de cerca de 25 a 100 μm. El aumento de flujo de estas membranas es miles de veces mayor que el de las membranas originales de 1 mil de ancho. Algunos materiales comunes de las membranas actuales son una combinación de polisulfona recubierta con caucho de silicón, acetato de celulosa y acetatos modificados de celulosa, poliamidas aromáticas o polimidas aromáticas y copolímeros de silicón-policarbonato en un soporte poroso.

2. Permeabilidad de las membranas. La predicción exacta de la permeabilidad de los gases a través de las membranas no es posible en general, y se necesitan valores experimentales. Los datos experimentales para ciertos gases comunes en algunas membranas típicas se dan en la tabla 13.3-1.

Nótese que existen grandes diferencias entre las permeabilidades de varios gases en una membrana dada. El caucho de silicón exhibe permeabilidades muy altas para los gases de la tabla.

TABLA 13.3-1 *Permeabilidades de diversos gases en las membranas*

Material	*Temp.* (°C)	*Permeabilidad,* P'_A, $\frac{cm^3(STP) \cdot cm}{s \cdot cm^2 \cdot cm\ Hg} \times 10^{10}$ *He*	H_2	CH_4	CO_2	O_2	N_2	*Ref.*
Caucho de silicón	25	300	550	800	2700	500	250	(S2)
Caucho natural	25	31	49	30	131	24	8.1	(S2)
Policarbonato (Lexan)	25-30	15	12		56,10	1.4		(S2)
Nylon 66	25	1.0			0.17	0.034	0.008	(S2)
Poliéster (Permasep)			1.65	0.035	0.31		0.03 1	(H1)
Copolímero de silicón y policarbonato (57% de silicón)	25		210		970	160	70	(W2)
Teflón FEP	30	62		1.4			2.5	(S1)
Etil celulosa	30	35.7	49.2	7.47	47.5	11.2	3.29	(W3)
Poliestireno	30	40.8	56.0	2.72	23.3	7.47	2.55	(W3)

Para el efecto de la temperatura *Ten* K, el $\ln P'_A$ es aproximadamente una función lineal de $1/T$ y aumenta con *T*. Sin embargo, la operación a altas temperaturas a menudo degrada las membranas. En una mezcla de gases, con frecuencia ocurren reducciones de la permeabilidad de un componente individual de hasta el 10%. En algunos casos se han observado reducciones mucho mayores (R1). Por consiguiente, cuando se use una mezcla de gases se deben obtener datos experimentales para determinar si existe alguna interacción entre ellos. La presencia de vapor de agua ejerce efectos similares sobre las permeabilidades, y también es capaz de dañar las membranas.

13.3C Tipos de equipo para los procesos con membrana para permeación de gases

1. Membranas planas. Las membranas planas se usan principalmente de forma experimental para caracterizar la permeabilidad de la membrana. Los módulos son fáciles de fabricar y usar y las áreas de las membranas están bien definidas. En algunos casos los módulos se apilan juntos como una multicapa o como un filtro prensa de plato y marco. El principal inconveniente de este tipo de membrana es que el área de membrana por volumen separador unitario es muy pequeña.

Se usan pequeñas membranas planas comerciales para producir aire enriquecido con oxígeno para aplicaciones médicas individuales.

2. Membranas enrolladas en espiral. Esta configuración conserva la sencillez de fabricación de las membranas planas pero aumenta marcadamente el área de membrana por volumen de separador unitario hasta más de 100 pie^2/pie^3 (328 m^2/m^3) y al mismo tiempo disminuyen las caídas de presión (R1). El ensamble es una superposición de cuatro hojas envueltas alrededor de un centro formado por un tubo colector perforado. Las cuatro hojas constan de una hoja superior que es una rejilla

separadora abierta para el canal de alimentación, una membrana, un refuerzo de fieltro poroso para el canal de la sustancia per-meada y otra membrana, como se muestra en la figura 13.3-l. El elemento enrollado en espiral mide de 100 a 200 mm de diámetro y de 1 a 1.5 m de largo en la dirección axial. Las hojas planas antes de enrollarse miden aproximadamente de 1 a 1.5 m por 2 a 2.5 m. El espacio entre las membranas (rejilla abierta para la alimentación) es de aproximadamente 1 mm y el grosor del refuerzo poroso (para la sustancia permeada) es de alrededor de 0.2 mm.

El elemento enrollado en espiral completo se localiza dentro de una envoltura metálica. El gas de alimentación entra por el extremo izquierdo de la envoltura al canal de alimentación y fluye por él en sentido axial de la espiral hacia el extremo derecho del dispositivo (Fig. 13.3-1). Luego el gas residual sale de la envoltura en ese punto. La corriente del canal de alimentación se permea perpendicularmente a través de la membrana. Esta sustancia permeada fluye luego a través del canal en una dirección perpendicular a la corriente de alimentación hacia el tubo colector perforado, donde sale del aparato por un extremo. Esto se ilustra en la figura 13.3-2, donde se muestran las trayectorias del flujo de gas local para un pequeño elemento del dispositivo.

3. Membranas de fibras huecas. Estas membranas tienen forma de fibras huecas de diámetro diminuto. El diámetro interior de estas fibras es de 100 a 500 μm y exterior de 200 a 1000 μm, con una longitud de hasta 3 a 5 m. El módulo se parece aun intercambiador de calor de coraza y tubos. Miles de finos tubos están unidos en los extremos y forman una hoja de tubos rodeada de una envoltura metálica, con diámetro de 0.1 a 0.2 m, de modo que el área de la membrana por volumen unitario es de más de 10000 m^2/m^3, como se ve en la figura 13.3-3.

Comúnmente, la alimentación a alta presión entra por el lado de la envoltura por un extremo y sale por el otro. Las fibras huecas están cerradas por un extremo de los manojos de tubos. El gas permeado dentro de las fibras fluye a contracorriente respecto al flujo del lado de la envoltura y se colecta en una cámara donde terminan los extremos abiertos de las fibras. Después, la sustancia permeada sale del dispositivo.

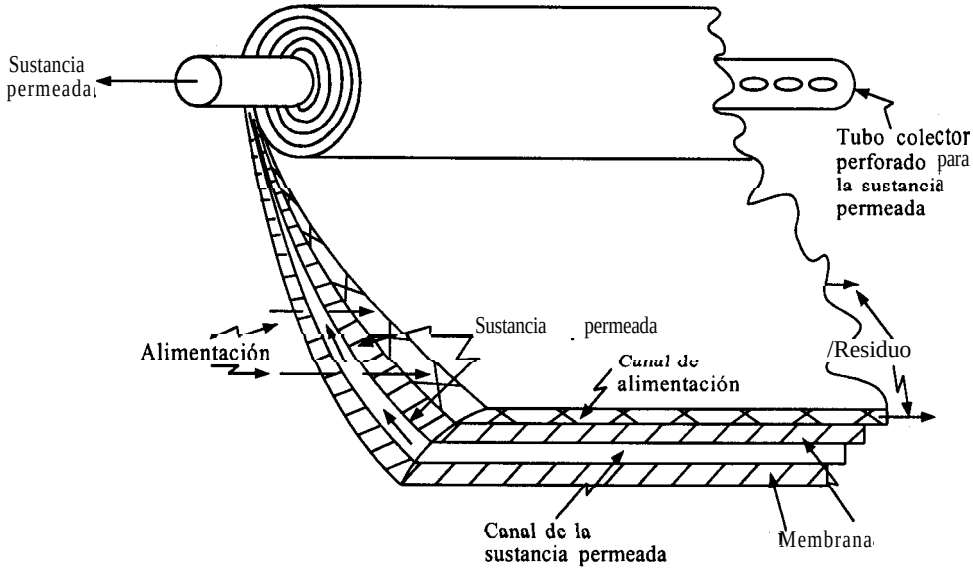


FIGURA 13.3-1. ***Elementos enrollados en espiral y ensamble.*** [Tomado de R. 1. Berry, Chem. Eng., 88 (13 de julio), 63 (1981). Con autorización.]

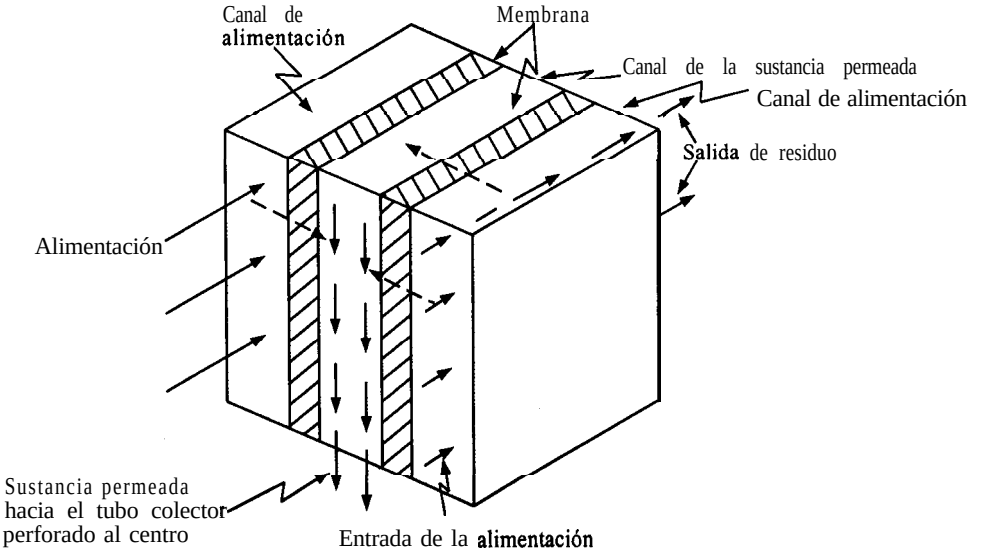


FIGURA 13.3-2. *Trayectorias locales de flujo del gas para el separador enrollado en espiral K.*

13.3D Introducción a los tipos de flujo en la permeación de gases

1. Tipos de flujo y gradientes de difusión. En un proceso a través de membrana, el gas de alimentación a alta presión se suministra en un lado de la membrana y la sustancia permea de forma perpendicular. La sustancia permeada sale normal a la membrana, y se acumula en el lado de baja presión. Debido al altísimo coeficiente de difusión de los gases, los gradientes de concentración en la fase gaseosa en la dirección normal a la superficie de la membrana son bastante pequeños, por lo que las resistencias de la película del gas comparadas con la resistencia de la membrana se pueden

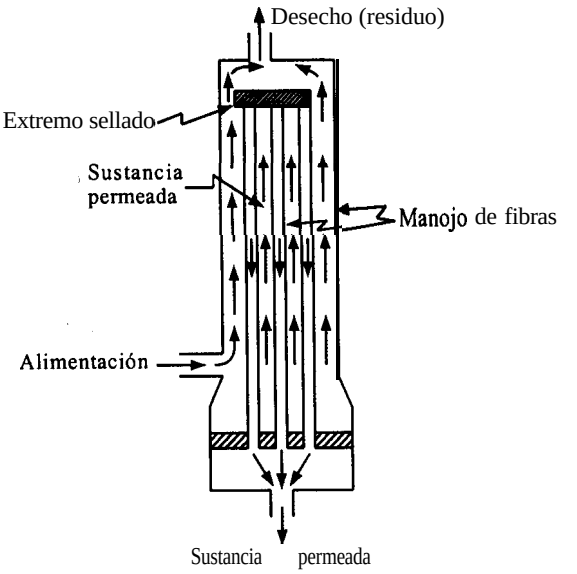


FIGURA 13.3-3. *Ensamble del separador de fibras huecas.*

despreciar. Esto significa que la concentración en la fase gaseosa en un sentido perpendicular a la membrana es esencialmente uniforme, ya sea que la corriente de gas fluya en paralelo a la superficie 0 no fluya.

Si la corriente de gas fluye de forma paralela a la membrana con flujo esencialmente obstruido, se forma un gradiente de concentración en esa dirección. Por tanto, pueden ocurrir varios casos en la operación de un módulo de membrana. El lado de la sustancia permeada de la membrana se puede manejar de manera que la fase esté completamente mezclada (concentración uniforme) o la fase esté en flujo obstruido. El lado de alimentación a alta presión también se puede mezclar completamente o tener flujo obstruido. El flujo a contracorriente o en paralelo se puede usar cuando los dos lados tienen flujo obstruido. En consecuencia, se pueden deducir diferentes modelos teóricos para esos distintos tipos de operación, como se indica en las secciones 13.4 a 13.7.

2. Supuestos que se usan y patrones de flujo ideal. Al deducir modelos teóricos para la separación de gases por medio de membranas, generalmente se suponen condiciones isotérmicas y caídas despreciables de presión en la corriente de alimentación y en la corriente de la sustancia permeada. También se supone que los efectos de la presión total o de la composición del gas son despreciables y que la permeabilidad de cada componente es constante (es decir, no hay interacciones entre los diferentes componentes).

Puesto que hay varios patrones de flujo ideales, los tipos más importantes se resumen en la figura 13.3-4. En la figura 13.3-4a se supone una mezcla completa para la cámara de alimentación y la cámara de la sustancia permeada. Del mismo modo que en un tanque continuamente agitado, el desecho o residuo y el producto o las composiciones del material permeado son iguales a sus composiciones uniformes respectivas en las cámaras.

En la figura 13.3-4b se muestra un patrón ideal de flujo cruzado, donde la corriente de alimentación tiene flujo obstruido y la sustancia permeada fluye en una dirección normal que se aleja de la membrana sin mezclarse. Como la composición de la alimentación varía a lo largo de su trayectoria de flujo, la concentración local de la sustancia per-meada también varía a lo largo de la trayectoria de la membrana.

En la figura 13.3-4c, tanto la corriente de alimentación como la corriente de la sustancia permeada tienen flujo obstruido a contracorriente uno de otro. La composición de cada corriente varía a lo largo de su trayectoriade flujo. El flujo en paralelo de las corrientes de alimentación y de la sustanciapermeada se muestra en la figura 13.3-4d.

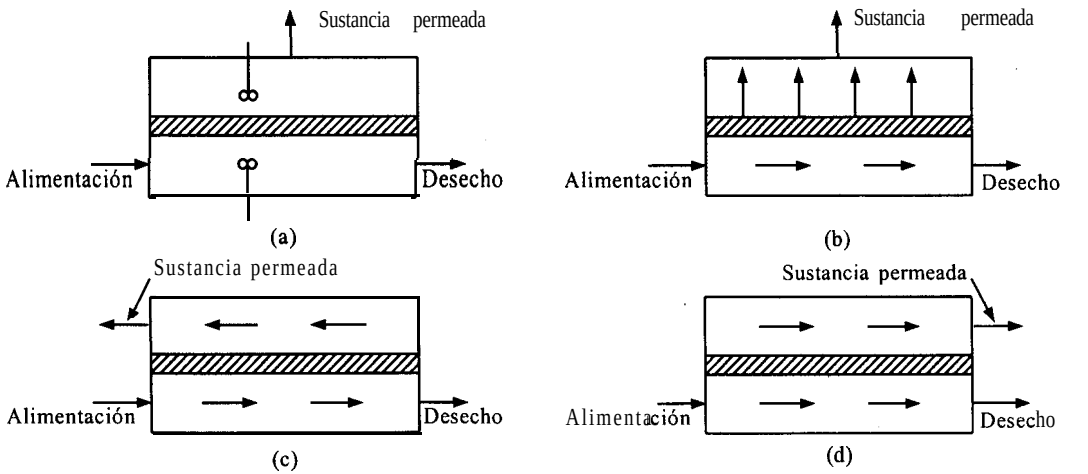


FIGURA 13.3-4. *Patrones de flujo ideal en un separador de membrana para gases: a) mezcla completa. b) flujo cruzado, c) flujo a contracorriente, d) flujo en paralelo.*

13.4 MODELO DE MEZCLA COMPLETA PARA LA SEPARACIÓN DE GASES POR MEDIO DE MEMBRANAS

13.4A Ecuaciones básicas empleadas

En la figura 13.4-1 se muestra un detallado diagrama de flujo de proceso para la mezcla completa. Cuando un elemento separador se opera con una baja recuperación (es decir, cuando el flujo de la sustancia permeada es una pequeña fracción de la alimentación entrante), existe un cambio mínimo en la composición. Entonces los resultados obtenidos al usar el modelo de mezcla completa proporcionan estimados razonables de la pureza de la sustancia permeada. Este caso fue deducido por Weller y Steiner (W4).

El balance global de materia (Fig. 13.4-l) es como sigue:

$$q_f = q_o + q_p \tag{13.4-1}$$

donde q_f es el flujo de alimentación total en cm^3 (TPE)/s; q_o es el flujo del desecho de salida, en cm^3 (TPE)/s y q_p es el flujo de la sustancia permeada de salida en cm^3 (TPE)/s. El corte o fracción de sustancia permeada de alimentación, θ, es

$$\theta = \frac{q_p}{q_f} \tag{13.4-2}$$

La velocidad de difusión o permeación de la especie *A* (en un binario de *A* y *B)* se da en seguida mediante una ecuación semejante a la (6.5-8), pero que usa cm^3 (TPE)/s como velocidad de permeación en vez del flujo específico en kg $mol/s \cdot cm^2$.

$$\frac{q_A}{A_m} = \frac{q_p y_p}{A_m} = \left(\frac{P'_A}{t}\right)(p_h x_o - p_l y_p) \tag{13.4-3}$$

donde P'_A es la permeabilidad de *A* en la membrana, en cm^3 (TPE) $\cdot$ cm/(s $\cdot$ cm^2 $\cdot$ cm Hg); q_A es el flujo de *A* en la sustancia permeada, en cm^3 (TPE)/s; A_m es el área de la membrana, en cm^2; *t* es el espesor de la membrana, en cm; p_h es la presión total del lado (alimentación) a alta presión, en cm Hg; p_l es la presión total en el lado de la sustancia permeada o de baja presión, en cm Hg; x_o es la fracción molar de *A* en el lado del desecho; x_f es la fracción molar de *A* en la alimentación, y y_p es la fracción molar de *A* en la sustancia per-meada. Nótese que $p_h x_o$ es la presión parcial de *A* en la fase gaseosa de desecho.

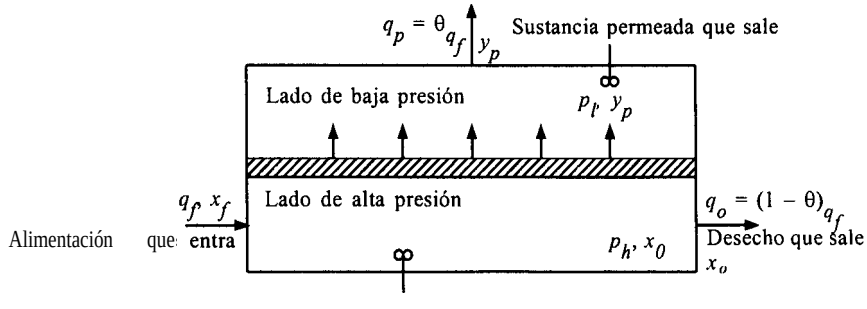


FIGURA *13.4-l. Flujo de proceso para el caso de mezcla completa.*

Para el componente *B* se puede escribir una ecuación semejante.

$$\frac{q_B}{A_m} = \frac{q_p(1-y_p)}{A_m} = \left(\frac{P'_B}{t}\right)[p_h(1-x_o) - p_l(1-y_p)] \qquad \textbf{(13.4-4)}$$

donde P'_B es la permeabilidad de *B*, en cm^3 (TPE) . cm/(s . cm^2 . cm Hg). Si se divide la ecuación (13.4-3) entre la (13.4-4),

$$\frac{y_p}{1-Yp} = \frac{\alpha^*[x_o - (p_l/p_h)y_p]}{(1-x_o) - (p_l/p_h)(1-y_p)} \qquad \textit{(13.4-5)}$$

Esta ecuación relaciona y_p, la composición de la sustancia permeada, con x,, la composición del desecho, y el factor de separación ideal α^* se define como

$$\alpha^* = \frac{P'_A}{P'_B} \qquad \textbf{(13.4-6)}$$

Si se hace un balance global de materia sobre el componente *A*,

$$q_f x_f = q_o x_o + q_p Yp \qquad \textbf{(13.4-7)}$$

Al dividir entre q_f y despejar la composición del desecho de salida,

$$x_o = \frac{x_f - \theta\, y_p}{(1-\theta)} \quad \text{o} \quad y_p = \frac{x_f - x_o(1-\theta)}{\theta} \qquad \textbf{(13.4-8)}$$

Si se sustituye $q_p = \theta q_f$ de la ecuación (13.4-2) en la ecuación (13.4-3) y se despeja el área de la membrana, A_m,

$$A_m = \frac{\theta q_f y_p}{(P'_A/t)(p_h x_o - p_l y_p)} \qquad \textbf{(13.4-9)}$$

13.4B Resolución de ecuaciones para el diseño en el caso de mezcla completa

Para el diseño de un sistema existen siete variables en el modelo de mezcla completa (H1), x_f, x_o, y_p, θ, α^*, p_l/p_h Y A_m, de las cuales cuatro son independientes. Aquí se consideran dos casos que ocurren con frecuencia.

Caso 1. Éste es el caso más simple, en el que se dan x_f, x,, α^* y p_l/p_h mientras que y_p, θ y A_m se determinan resolviendo las ecuaciones. Al utilizar la fórmula cuadrática, la ecuación (13.4-5) se resuelve para la composición de la sustancia permeada y_p en términos de x,.

$$Yp = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \textbf{(13.4-10)}$$

donde

$$a = 1 - \alpha^*$$

$$b = \frac{p_h}{p_l}(1 - x_o) - 1 + \alpha^* \frac{p_h}{p_l} x_o + \alpha^*$$

$$c = -\alpha^* \frac{p_h}{p_l} x_o$$

Por consiguiente, para resolver este caso, primero se calcula y_p usando la ecuación (13.4-10). Después se calculan la fracción de alimentación per-meada, θ, por medio de la ecuación (13.4-8), y el área de la membrana, A_m, por medio de la ecuación (13.4-9).

EJEMPLO 13.4-l. Diseño de una unidad de membrana para mezcla completa
Se va a usar una membrana para separar una mezcla gaseosa de A y B *cuyo* flujo de alimentación es q_f = 1 x 10^4 cm^3 (TPE)/s y la composición de alimentación de A es x_f = 0.50 de fracción mol. La composición deseada del desecho es x_o = 0.25. El espesor de la membrana es t = 2.54 x 1 0^{-3} cm, la presión del lado de la alimentación es p_h = 80 cm Hg y la del lado de la solución permeada es p_l = 20 cm Hg. Las permeabilidades son P'_A = 50 x 10^{-10} cm^3 (TPE) • cm/(s • cm^2 • cm Hg) y P'_B = 5 x 10^{-10}. Suponiendo el modelo de mezcla completa, calcule la composición de la solución permeada, y_p, la fracción permeada, θ, y el área de la membrana, A_m.

Solución: Al sustituir en la ecuación (13.4-6),

$$\alpha^* = \frac{P'_A}{P'_B} = \frac{50 \times 10^{-10}}{(5 \times 10^{-10})} = 10$$

Si se utiliza láecuación (13.4-10),

$$a = 1 - \alpha^* = 1 - 10 = -9$$

$$b = \frac{p_h}{p_l}(1 - x_o) - 1 + \alpha^* \frac{p_h}{p_l} x_o + \alpha^*$$

$$= \frac{80}{20}(1 - 0.25) - 1 + 10\left(\frac{80}{20}\right)0.25) + 10 = 22.0$$

$$c = \alpha^* \frac{p_h}{p_l} x_o = -10\left(\frac{80}{20}\right)(0.25) = -10$$

$$Yp = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-22.0 + \sqrt{(22.0)^2 - 4(-9)(-10)}}{2(-9)} = 0\ 604$$

Al utilizar la ecuación de balance de materia (13.4-8),

$$x_0 = \frac{x_f - \theta y_p}{1\text{-}e}, \qquad 0.25 = \frac{0.50 - \theta\ (0.604)}{1 - \theta}$$

Cuando se resuelve, $\theta = 0.706$. Además, si se utiliza la ecuación (13.4-9),

$$A_m = \frac{\theta q_f y_p}{(P'_A/t)\ (p_h x_o - p_l y_p)}$$

$$= \frac{0.706(1 \times 10^4)(0.604)}{[50 \times 10^{-10} / (2.54 \times 10^{-3})](80 \times 0.25 - 20 \times 0.604)}$$

$$= 2.735 \times 10^8\ \text{cm}^2\ (2.735 \times 10^4\ \text{m}^2)$$

Caso 2. En este caso, se dan x_f, θ, a^* y p_l/p_h y y_p, x_o y A_m debe determinar. En la ecuación (13.4-5) no se puede despejar y_p porque x_o no se conoce. Por lo tanto, x_o de la ecuación (13.4-8) se sustituye en la (13.4-5) y en la ecuación resultante se despeja y_p utilizando la ecuación cuadrática, con lo que se obtiene

$$y_p = \frac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4a_1c_1}}{2a_1} \qquad \text{‘(13.4-11)}$$

donde

$$a_1 = \theta + \frac{p_l}{p_h} - \frac{p_l}{p_h}\theta - \alpha^*\theta - \alpha^* \frac{p_l}{p_h} + \alpha^* \frac{p_l}{p_h}\theta$$

$$b_1 = 1 - \theta - x_f - \frac{p_l}{p_h} + \frac{p_l}{p_h}\theta + \alpha^*\theta + \alpha^* \frac{p_l}{p_h} - \alpha^* \frac{p_l}{p_h}\theta + \alpha^* x_f$$

$$c_1 = -\alpha^* x_f$$

Después de despejar y_p, el valor de x_o se calcula a partir de la ecuación (13.4-8) y el de A_m a partir de la ecuación (13.4-9).

EJEMPLO 13.4-2. Diseño de membrana para la separación de aire

Se desea determinar el área de membrana necesaria para separar una corriente de aire utilizando una membrana de 1 mil de ancho con una permeabilidad al oxígeno de P'_A = 500 x 10^{-10} cm^3 (TPE) . cm/(s . cm^2 . cm Hg). Se usará un α^* = 10 para la permeabilidad al oxígeno dividida entre la permeabilidad al nitrógeno (S6). La alimentación es q_f = 1 x 10^6 cm^3 (TPE)/s y el corte de la tracción, θ = 0.20. Las presiones que se van a usar son p_h = 190 cm Hg y p_l = 19 cm Hg. Otra vez, suponiendo el modelo de mezcla completa, calcule la composición de la solución permeada, la composición del desecho y el área.

Solución: Aplicando la ecuación (13.4-11) para una composición de alimentación de x_f = 0.209,

$$a_1 = \theta + \frac{p_l}{p_h} - \frac{p_l}{p_h}\theta - \alpha^*\theta - \alpha^*\frac{p_l}{p_h} + \alpha^*\frac{p_l}{p_h}\theta$$

$$= 0.2 + \frac{19}{190} - \frac{19}{190}(0.2) - 10(0.2) - 10\frac{(19)}{190} + 10\left(\frac{19}{190}\right)(0.2) = -2.52$$

$$b_1 = 1 - \theta - x_f - \frac{p_l}{p_h} + \frac{p_l}{p_h}\theta + \alpha^*\theta + \alpha^*\frac{p_l}{p_h} - \alpha^*\frac{p_l}{p_h}\theta + \alpha^* x_f$$

$$= 1 - 0.2 - 0.209 - \frac{19}{190} + g(O.2) + 10(0.2)$$

$$+ 10\left(\frac{19}{190}\right) - 10\left(\frac{19}{190}\right)(0.2)$$

$$+ 10(0.209) = 5.401$$

$$c_1 = -\alpha^* x_f = -10(0.209) = -2.09$$

$$Yp = \frac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 \quad 4a_1c_1}}{2a_1}$$

$$= \frac{-5.401 + \sqrt{(5.401)^2 - 4(-2.52)(-2.09)}}{2(-2.52)}$$

$$= 0.5067$$

Al sustituir en la ecuación (13.4-8),

$$x_o = \frac{x_f - \theta y_p}{(1-\theta)} = \frac{0.209 \quad 0.2(0.5067)}{(1 - 0.2)} = 01346$$

Por último, si se utiliza la ecuación (13.4-g) para encontrar el área,

$$A_m = \frac{\theta q_f y_p}{(P'_A/t)(p_h x_o - p_l y_p)}$$

$$= \frac{0.2(1 \times 10^6)(0.5067)}{(500 \times 10^{-10}/2.54 \times 10^{-3})(190 \times 0.1346 - 19 \times 0.5067)}$$

$$= 3.228 \times 10^8 \text{ cm}^2$$

13.4C Concentración mínima de la corriente de desecho

Si toda la alimentación está per-meada, $\theta = 1$ y la composición de la alimentación $x_f = y_p$. Para todos los valores de $\theta < 1$, la composición de la solución permeada es $y_p > x_f$ (H 1). Al sustituir el valor $x_f = y_p$ en la ecuación (13.4-5) y al resolver, la composición mínima del desecho x_{oM} para un valor dado x_f se obtiene como

$$x_{oM} = \frac{\left[1 + (\alpha^* - 1)\frac{p_l}{p_h}(1 - x_f)\right]}{\alpha^*(1 - x_f) + x_f} \qquad \textbf{(13.4-12)}$$

Por tanto, una alimentación con una concentración x_f no se puede empobrecer más allá de un valor de x_{oM} aun con un área de membrana infinitamente grande en un sistema completamente mezclado. Para separar más allá de este valor límite se deberá usar un sistema tipo cascada. Sin embargo, se podría usar una unidad sencilla que no estuviera completamente mezclada sino que se diseñara para flujo obstruido.

EJEMPLO 13.4-3. Efecto de la composición de la alimentación sobre la concentración mínima del desecho

Calcule la concentración mínima del desecho para el ejemplo 13.4- 1 donde la concentración de la alimentación es $x_f = 0.50$. Además, ¿cuál es el efecto de elevar la pureza de la alimentación a $x_f = 0.65$?

Solución: Al sustituir $x_f = 0.50$ en la ecuación (13.4-12),

$$x_{oM} = \frac{x_f\left[1 + (\alpha^* - 1)\frac{p_l}{p_h}(1 - x_f)\right]}{\alpha^*(1 - x_f) + x_f}$$

$$= \frac{0.50\left[1 + (10 - 1)\left(\frac{20}{80}\right)(1 - 0.50)\right]}{10(1 - 0.50) + 0.50}$$

$$= 0.1932$$

Para una $x_f = 0.65$,

$$x_{oM} = \frac{0.65\left[1 + (10 - 1)\left(\frac{20}{80}\right)(1 - 0.65)\right]}{10(1 - 0.65) + 0.65} = 0.2780$$

13.5 MODELO DE MEZCLA COMPLETA PARA MEZCLAS DE MULTICOMPONENTES

13.5A Deducción de ecuaciones

Cuando están presentes las mezclas de multicomponentes, el método iterativo de Stem, et al. (S1) es sumamente útil. Este método se deducirá para una mezcla ternaria de los componentes *A, B* y C. El diagrama de flujo de proceso es igual que el de la figura 13.4-1, donde la composición de la alimentación x_f es x_{fA}, x_{fB} y x_{fC}. Los valores conocidos son

$$x_{fA},\ x_{fB},\ x_{fC};\ q_f,\ \theta;\ p_h,\ p_l;\ P'_A,\ P'_B,\ P'_C;\ \text{y}\ t$$

Los valores desconocidos que deben determinarse son

$$y_{pA},\ y_{pB},\ y_{pC};\ x_{oA},\ x_{oB},\ x_{oC};\ q_p \text{ o } q_o;\ \text{Y}\ A_m$$

Estas ocho incógnitas se pueden obtener resolviendo un conjunto de ocho ecuaciones simultáneas mediante el método de iteración. Para los componentes *A, B* y C, éstas son tres ecuaciones de la velocidad de permeación semejantes a la ecuación (13.4-3):

$$q_p y_{pA} = \frac{P'_A}{t} A_m (p_h x_{oA} - p_l y_{pA}) \tag{13.5-1}$$

$$q_p y_{pB} = \frac{P'_B}{t} A_m (p_h x_{oB} - p_l y_{pB}) \tag{13.5-2}$$

$$q_p y_{pC} = \frac{P'_C}{t} A_m (p_h x_{oC} - p_l y_{pC}) \tag{13.5-3}$$

Las tres ecuaciones de balance de material parecidas a la ecuación (13.4-8) se escriben para los componentes *A, B y C.*

$$x_{oA} = \frac{1}{1 - \theta} x_{fA} - \frac{\theta}{1 - \theta} y_{pA} \tag{13.5-4}$$

$$x_{oB} = \frac{1}{1 - \theta} x_{fB} - \frac{\theta}{1 - \theta} y_{pB} \tag{13.5-5}$$

$$x_{oC} = \frac{1}{1 - \theta} x_{fC} - \frac{\theta}{1 - \theta} y_{pC} \tag{13.5-6}$$

Además, dos ecuaciones finales se pueden escribir como

$$\sum_n y_{pn} = y_{pA} + y_{pB} + y_{pC} = 1.0 \tag{13.5-7}$$

$$\sum_i x_{on} = x_{oA} + x_{oB} + x_{oC} = 1.0 \tag{13.543}$$

Al sustituir x_{oA} de la ecuación (13.5-4) en la (13.5-1) y al despejar A_m,

$$A_m = \frac{q_p y_{pA} t}{P'_A \left[\frac{p_h}{1-\theta}(x_{fA} - \theta y_{pA}) - p_l y_{pA} \right]} \tag{13.5-9}$$

Para el componente *B,* la ecuación (13.5-5) se sustituye en la (13.5-2) y resulta

$$A_m = \frac{q_p y_{pB} t}{P'_B \left[\frac{p_h}{1-\theta}(x_{fB} - \theta y_{pB}) - p_l y_{pB} \right]} \tag{13.5-10}$$

Al reordenar la ecuación (13.5-10) y al despejar y_{pB},

$$y_{pB} = \frac{p_h x_{fB}/(1-\theta)}{q_p t/(P'_B A_m) + \theta p_h/(1-\theta) + p_l} \tag{13.5-11}$$

De la misma manera, la ecuación (13.5-12) se deduce para y_{pC}.

$$y_{pC} = \frac{p_h x_{fC}/(1-\theta)}{q_p t/(P'_C A_m) + \theta p_h/(1-\theta) + p_l} \tag{13.5-12}$$

13.5B Procedimiento de solución por iteración para mezclas de multicomponentes

El siguiente procedimiento iterativo o de prueba y error se puede utilizar para resolver las ecuaciones anteriores.

1. Se supone un valor de y_{pA} donde $y_{pA} > x_{fA}$.
2. Se calcula q_p utilizando la ecuación (13.4-2) y el valor conocido de θ.
3. Se calcula el área de la membrana a partir de la ecuación (13.5-3).
4. Los valores de y_{pB} y y_{pC} se calculan a partir de las ecuaciones (13.5-11) y (13.5-12).
5. La suma $\Sigma_n y_{pn}$ se calcula usando la ecuación (13.5-7). Si esta suma no es igual a 1.0, se repiten los pasos 1 a 5 hasta que la suma sea 1.0.
6. Finalmente, x_{oA}, x_{oB} y x_{oC} se calculan a partir de las ecuaciones (13.5-4), (13.5-5) y (13.5-6).

EJEMPLO 13.5-1. Diseño de una unidad de membrana para una mezcla de multicomponentes

Una mezcla gaseosa de multicomponentes que tiene una composición de x_{fA} = 0.25, x_{fB} = 0.55 y x_{fC} = 0.20 se va a separar por medio de una membrana cuyo grosor es de 2.54 x 10^{-3} cm, utilizando el modelo de mezcla completa. El flujo de alimentación es de 1 .O x 1 0^4 cm^3 (TPE)/s y las permeabilidades son P'_A = 200 x 10^{-10} cm^3(TPE) · cm/(s · cm^2 · cm Hg), P'_B = 50 x 10^{-10} y P'_C = 25 x 10^{-10}. La presión en el lado de la alimentación es de 300 cm Hg y de 30 cm Hg en el lado de la solución per-meada. La fracción permeada será de 0.25. Calcule la composición de la solución permeada, la composición del desecho y el área de la membrana utilizando el modelo de mezcla completa.

Solución: De acuerdo con el procedimiento de iteración, se supone un valor de y_{pA} = 0.50. Al sustituir en la ecuación (13.4-2) para el paso 2,

$$q_p = \theta q_f = 0.25 \text{ x } 1.0 \text{ x } 10^4 = 0.25 \text{ x } 10^4 \text{ cm}^3 \text{ (TPE)/s}$$

Al utilizar la ecuación (13.5-9), el área de la membrana para el paso 3 es

$$A_m = \frac{q_p y_{pA} t}{P'_A \left[\frac{p_h}{1-\theta}(x_{fA} - \theta y_{pA}) - p_l y_{pA} \right]}$$

$$= \frac{0.25 \text{ x } 10^4 (0.50)(2.54 \text{ x } 10^{-3})}{200 \text{ x } 10^{-10}} \Big/ \left[\frac{300}{1-0.25}(0.25 - 0.25 \text{ x } 0.50) - 30(0.50) \right]$$

$$= 4.536 \text{ x } 10^6 \text{ cm}^2$$

De acuerdo con el paso 4, los valores y_{pB} y y_{pC} se calculan mediante las ecuaciones (13.5-11) y (13.5-12).

$$y_{pB} = \frac{p_h x_{fB}/(1-\theta)}{q_p t/(P'_B A_m) + \theta p_h/(1-\theta) + p_l}$$

$$= \frac{300 \text{ x } 0.55/(1 - 0.25)}{0.25 \text{ x } 10^4 \text{ x } 2.54 \text{ x } 10^{-3}/(50 \text{ x } 10^{-10} \text{ x } 4.536 \text{ x } 10^6) + 0.25 \text{ x } 300/(1 - 025) + 30}$$

$$= 0.5366$$

$$y_{pC} = \frac{p_h x_{fC}/(1-\theta)}{q_p t/(P'_C A_m) + \theta p_h/(1-\theta) + p_l}$$

$$= \frac{300 \text{ x } 0.20 / (1 - 0.25)}{0.25 \text{ x } 10^4 \text{ x } 2.54 \text{ x } 10^{-3} / (25 \text{ x } 10^{-10} \text{ x } 4.536 \text{ x } 10^6) + 0.25 \text{ x } 300/(1 - 025) + 30}$$

$$= 0.1159$$

Al sustituir en la ecuación (13.5-7),

$$\sum_n y_{pn} = y_{pA} + y_{pB} + y_{pC} = 0.5000 + 0.5366 + 0.1159 = 1.1525$$

Para la segunda iteración, si se supone que $y_{pA} = 0.45$, se calculan los siguientes valores:

$$A_m = 3.546 \text{ x } 10^6 \text{ cm}^2 \qquad y_{pB} = 0.4410 \qquad y_{pC} = 0.0922$$

$$\sum_n y_{pn} = 0.9832$$

Los valores finales de la iteración son $A_m = 3.536 \text{ x } 10^6 \text{ cm}^2$; $y_{pA} = 0.4555$, $y_{pB} = 0.4502$ y $y_{pC} = 0.0943$. Al sustituir en las ecuaciones (13.5-4), (13.5-5) y (13.5-6),

$$x_{oA} = \frac{1}{1-\theta} x_{fA} - \frac{\theta}{1-\theta} y_{pA} = \frac{1}{1 - 0.25}(0.25)$$

$$= \frac{0.25}{1 - 0.25}(0.4555) = 0.1815$$

$$x_{oB} = \frac{1}{1-\theta} x_{fB} - \frac{\theta}{1-\theta} y_{pB} = \frac{1}{1-0.25}(0.55)$$

$$- \frac{0.25}{1 - 0.25}(0.4502) = 0.5833$$

$$x_{oC} = \frac{1}{1-\theta} x_{fC} - \frac{\theta}{1-\theta} y_{pC} = \frac{1}{1-0.25}(0.20)$$

$$- \frac{1}{1 - 0.25}(0.0943) = 0.2352$$

13.6 MODELO DE FLUJO CRUZADO PARA LA SEPARACIÓN DE GASES POR MEMBRANAS

13.6A Deducción de las ecuaciones básicas

En la figura 13.6-1 se muestra un diagrama de flujo detallado para el modelo de flujo cruzado deducido por Weller y Steiner (W3, W4). En este caso la velocidad longitudinal de la corriente de

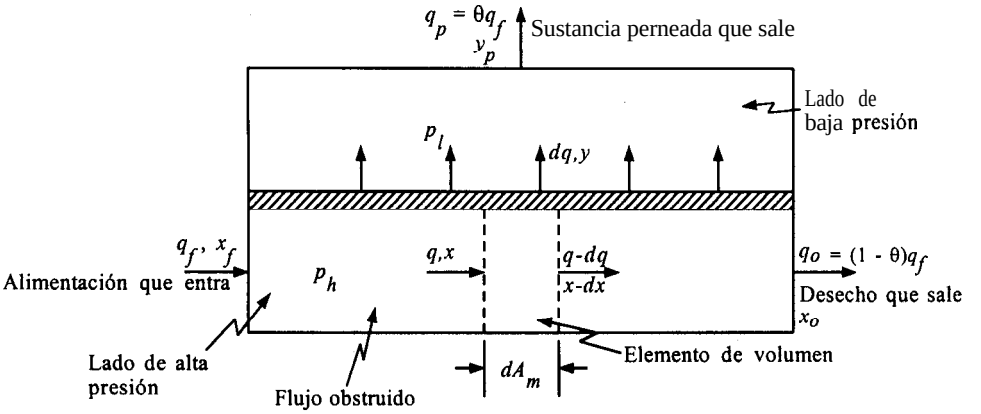


FIGURA 13.6-1. *Diagrama de flujo de proceso para el modelo de jlujo cruzado*

alta presión o de desecho es lo bastante grande como para que esta corriente de gas tenga flujo obstruido y fluya de forma paralela a la membrana. Del lado de la baja presión, la corriente de la sustancia permeada casi es atraída al vacío, de modo que el flujo es esencialmente perpendicular a la membrana.

Este modelo supone que no hay mezcla en el lado de la sustancia permeada y tampoco en el lado de alta presión. Por tanto, la composición de la sustancia permeada en cualquier punto a lo largo de la membrana está determinada por las velocidades relativas de permeación de los componentes de la alimentación en ese punto. Este patrón de flujo cruzado se aproxima al que hay en un separador real de membrana enroscada en espiral (Fig. 13.3-1), el cual tiene una membrana asimétrica de flujo alto que descansa en un soporte de fieltro poroso (P2, R1).

Si se consulta la figura 13.6-1, la velocidad de permeación local sobre el área de membrana diferencial dA_m en cualquier punto de la etapa es

$$-ydq = \frac{P'_A}{t}[p_h x - p_l y]dA_m \qquad \textbf{(13.6-1)}$$

$$-(1-y)dq = \frac{P'_B}{t}[p_h(1-x) - p_l(1-y)]dA_m \qquad (13.6\text{-}2)$$

donde dq es la velocidad de flujo total que permea a través del área dA_m. Al dividir la ecuación (13.6-1) entre la (13.6-2) se obtiene

$$\frac{y}{1-y} = \frac{\alpha^*[x - (p_l/p_h)y]}{(1-x) - (p_l/p_h)(1-y)} \qquad (13.6\text{-}3)$$

Esta ecuación relaciona la composición de la sustancia per-meada con la composición del desecho x en un punto a lo largo de la trayectoria, y es semejante a la ecuación (13.4-5) para la mezcla completa. Hwang y Kammermeyer (H1) obtuvieron un programa de computadora para la solución del sistema anterior de ecuaciones diferenciales por métodos numéricos.

Weller y Steiner (W3, W4) utilizaron algunas transformaciones ingeniosas y obtuvieron una solución analítica de las tres ecuaciones, como sigue:

$$\frac{(1-\theta^*)(1-x)}{(1-x_f)} = \left(\frac{u_f - E/D}{u - E/D}\right)^R \left(\frac{u_f - \alpha^* + F}{u - \alpha^* + F}\right)^S \left(\frac{u_f - F}{u - F}\right)^T \tag{13.6-4}$$

donde

$$\theta^* = 1 - \frac{q}{q_f}$$

$$i = \frac{x}{1-x}$$

$$u = -Di + (D^2 i^2 + 2Ei + F^2)^{0.5}$$

$$D = 0.5\left[\frac{(1-\alpha^*)p_l}{p_h} + \alpha^*\right]$$

$$E = \frac{\alpha^*}{2} - DF$$

$$F = -0.5\left[\frac{(1-\alpha^*)p_l}{p_h} - 1\right]$$

$$R = \frac{1}{2D-1}$$

$$S = \frac{\alpha^*(D-1) + F}{(2D-1)(\alpha^*/2 - F)}$$

$$T = \frac{1}{1 - D - (E/F)}$$

El término u_f es el valor de u en $i = i_f = x_f/(1 - x_f)$. El valor de θ^* es la fracción per-meada hasta el valor de x de la figura 13.6-l. En la salida, donde $x = x_o$, el valor de θ^* es igual a θ, la fracción total per-meada. La composición de la corriente de la sustancia permeada de salida es y_p y se calcula a partir del balance global de materia, ecuación (13.4-8).

El área total de la membrana fue calculada por Weller y Steiner (W3, W4) usando algunas transformaciones adicionales de las ecuaciones (13.6-1) a (13.6-3) para obtener

$$A_m = \frac{tq_f}{p_h P'_B} \int_{io}^{if} \frac{(1-\theta^*)(1-x)\,di}{(f_i - i)\left[\frac{1}{1+i} - \frac{p_l}{p_h}\left(\frac{1}{1+f_i}\right)\right]} \tag{13.6-5}$$

donde

$$f_i = (Di - F) + (D^2 i^2 + 2Ei + F^2)^{0.5}$$

Los valores de θ^* en la integral se pueden obtener a partir de la ecuación (13.6-4). La integral se puede calcular numéricamente. El término i_f es el valor de i en la alimentación x_f e i_o es el valor de i en la salida x_o. Una aproximación rápida del área sin usar la integración numérica está disponible gracias a Weller y Steiner (W3), y tiene un error máximo de cerca del 20%.

13.6B Procedimiento para el diseño en el caso de flujo cruzado

En el diseño del modelo de mezcla completa hay siete variables, y dos de los casos más comunes se analizaron en la sección 13.4B. Del mismo modo, para el modelo de flujo cruzado ocurren estos dos mismos casos comunes.

Caso 1. Los valores de x_f, x_o, α^* y p_l/p_h se dan como datos y y_p, θ y A_m se deben determinar. Los valores de θ^* o θ se pueden calcular directamente a partir de la ecuación (13.6-4), puesto que todos los otros valores de esta ecuación se conocen. Entonces, y_p se calcula mediante la ecuación (13.4-8). Para calcular el área A_m, una serie de valores de x menores que la alimentación x_f y mayores que la salida del desecho x_o se sustituyen en la ecuación (13.6-4) para dar una serie de valores de θ^*. Estos valores se usan entonces para integrar numérica o gráficamente la ecuación (13.6-5) a fin de obtener el área A_m.

Caso 2. En este caso los valores de x_f, θ, α^* y p_l/p_h se dan y y_p, x_o y A_m se deben determinar. Esto se hace por prueba y error, y los valores de x_o se sustituyen en la ecuación (13.6-4) para resolver la ecuación. El área de la membrana se calcula como en el caso 1.

EJEMPLO 13.6-1. Diseño de una unidad de membrana usando el flujo cruzado

En este ejemplo se usaran las mismas condiciones para la separación de una corriente de aire que se dieron en el ejemplo 13.4-2 para una mezcla completa. Las corrientes de flujo del proceso estarán en flujo cruzado. Los valores dados son x_f = 0.209, θ = 0.20, α^* = 10, p_h = 190 cm Hg, p_l = 19 cm Hg, $q_f = 1 \times 10^6$ cm^3(TPE)/s, $P'_A = 500 \times 10^{-10}$ cm^3(TPE) · cm/(s · cm^2 · cm Hg) y $t = 2.54 \times 10^{-3}$ cm. Haga lo siguiente:

a) Calcule y_p, x_o y A_m.

b) Compare los resultados con el ejemplo 13.4-2.

Solución: Dado que éste es el mismo caso que el 2, se usará un valor de x_o = 0.1642 para el primer intento del inciso a). Al sustituir en la ecuación (13.6-4),

$$i = i_f = \frac{x_f}{1 - x_f} = \frac{0.209}{1 - 0.209} = 0.2642$$

$$i = \frac{0.1642}{1\text{-}0.1642} = 0.1965$$

$$D = 0.5\left(\frac{(1 - \alpha^*)p_l}{p_h} + \alpha^*\right)$$

$$= 0.5\left[\frac{(1 - 10)19}{190} + 10\right] = 4.550$$

$$F = -0.5\left(\frac{(1-\alpha^*)p_l}{p_h} - 1\right) =$$

$$= -0.5\left[\frac{(1-10)19}{190} - 1\right] = 0.950$$

$$E = \frac{\alpha^*}{2} - DF = \frac{10}{2} - 4.550(0.950) = 0.6775$$

$$R = \frac{}{2D-1} = \frac{}{2(4.550)-1} \quad 0.12346$$

$$S = \frac{\alpha^*(D-1)+F}{(2D-1)(\alpha^*/2-F)}$$

$$= \frac{10(4.550-1)+0.950}{(2 \times 4.550 - 1)(10/2 - 0.950)} = 1.1111$$

$$T = \frac{1}{1-D-(E/F)}$$

$$= \frac{1}{1-4.550-0.6775/0.950} = 0.2346$$

$$u_f = -Di + (D^2 i^2 + 2Ei + F^2)^{0.5}$$

$$= -(4.550)(0.2642) + [(4.550)^2 (0.2642)^2$$

$$+ 2(0.6775)(0.2642) + (0.950)^2]^{0.5}$$

$$= 0.4427$$

$$u = -(4.550)(0.1965) + [(4.550)^2 (0.1965)^2$$

$$+ 2(0.6775)(0.1965) + (0.950)^2]^{0.5}$$

$$= 0.5089$$

$$\frac{(1-\theta^*)(1-x)}{(1-x_f)} = \frac{(1-\theta^*)(1-0.1642)}{(1-0.209)}$$

$$= \left(\frac{0.4427 - 0.6775/4.550}{0.5089 - 0.6775/4.550} \right)^{0.12346}$$

$$\left(\frac{0.4427 - 10 + 0.950}{0.5089 - 10 + 0.950} \right)^{1.1111}$$

$$\left(\frac{0.4427 - 0.950}{0.5089 - 0.950} \right)^{-0.2346}$$

El resultado es, $\theta^* = 0.0992$. Este valor de 0.0992 no concuerda con el valor dado de $\theta = 0.200$, pero ambos valores se podrán usar más tarde para resolver la ecuación (13.6-5).

Para la segunda iteración, se supone un valor de $x_o = 0.142$ y se usa de nuevo para despejar θ^* en la ecuación (13.6-4), que da como resultado $\theta^* = 0.1482$. Para la última iteración, $x_o = 0.1190$ y $\theta^* = \theta = 0.2000$. Se calculan varios valores más para usarlos más tarde y son para $x_o = 0.187, \theta^* = 0.04876$ yparax, $= 0.209, \theta^* = 0$. Estos valores se tabulan en la tabla 13.6-1.

TABLA 13.6-I. *Valores calculados para el ejemplo 13.6-1*

θ^*	x	y_p	F_i
0	0.209	0.6550	0.6404
0.04876	0.1870	0.6383	0.7192
0.0992	0.1642	0.6158	0.8246
0.1482	0.1420	0.5940	0.9603
0.2000	0.1190	0.5690	1.1520

Al utilizar la ecuación de balance de materia (13.4-g) para calcular y_p,

$$y_p = \frac{x_f - x_o(1-\theta)}{\theta} = \frac{0.209 - 0.1190(1 - 0.2000)}{0.2000} = 0.5690$$

Para calcular y_p a $\theta^* = 0$ se debe usarse las ecuaciones (13.6-3) y (13.4-10), que dan $y_p = 0.6550$.

Para despejar el área, la ecuación (13.6-5) se puede escribir como

$$A_m = \frac{tq_f}{p_h P'_B} \int_{io}^{if} \left[\frac{(1-\theta^*)(1-x)}{(f_i - i)\left[\frac{1}{1+i} - \frac{p_l}{p_h}\left(\frac{1}{1+f_i} \right) \right]} \right] di = \frac{tq_f}{p_h P'_B} \int_{io}^{if} F_i \, di \qquad (13.6\text{-}6)$$

donde la función F_i se define como antes. Los valores de F_i se deberán calcular para diferentes valores de i a fin de integrar la ecuación. Para $\theta^* = 0.200$, $x_o = 0.119$ y a partir de la ecuación (13.6-4),

$$i = i_o = \frac{x}{(1-x)} = \frac{0.119}{(1-0.119)} = 0.1351$$

A partir de la ecuación (13.6-5),

$$f_i = (Di - F) + (D^2 i^2 + 2Ei + F^2)^{0.5}$$

$$= (4.55 \text{ x } 0.1351 - 0.950) + [(4.55)^2 (0.1351)^2$$

$$+ 2(0.6775)(0.135\,1) + (0.95)^2]^{0.5}$$

$$= 0.8744$$

Si se utiliza la definición de F_i de la ecuación (13.6-6),

$$F_i = \frac{(1-\theta^*)(1-x)}{(f_i - i)\left[\frac{1}{1+i} - \frac{p_l}{p_h}\left(\frac{1}{1+f_i}\right)\right]}$$

$$= \frac{(1 - 0.200)(1 - 0.119)}{(0.8744 \quad 0.1351)\left[\frac{1}{1+0.1351} - \frac{19}{190}\left(\frac{1}{1+0.8744}\right)\right]}$$

$$= 1.1520$$

Se calculan otros valores de F_i para los valores restantes de θ^* y están tabulados en la tabla 13.6-1. La integral de la ecuación (13.6-6) se obtiene usando los valores de la tabla 13.6-1 y graficando F_i en función de i para dar un área de 0.1082. Por último, al sustituir en la ecuación (13.6-6),

$$A_m = \frac{tq_f}{p_h P'_B} \int_{io}^{if} F_i \, di = \frac{2.54 \text{ x } 10^{-3}(1 \text{ x } 10^6)}{190(50 \text{ x } 10^{-10})/10} = (0.1082)$$

$$= 2.893 \text{ x } 10^8 \text{ cm}^2$$

Para el inciso b), a partir del ejemplo 13.4-2, $y_p = 0.5067$ y $A_m = 3.228 \times 10^8$ cm^2. Por tanto, elmodelode flujo cruzado da un y_p más alto de 0.5690 comparado con 0.5067 para el modelo de mezcla completa. Además, el área para el modelo de flujo cruzado es 10% menor que para el modelo de mezcla completa.

13.7 MODELO DE FLUJO A CONTRACORRIENTE PARA LA SEPARACIÓN DE GASES A TRAVÉS DE MEMBRANAS

13.7A Deducción de las ecuaciones básicas

En la figura 13.7-1 se muestra un diagrama de flujo para el modelo de flujo a contracorriente, en el cual las dos corrientes tienen flujo obstruido. La deducción es semejante a la dada por Walawender y Stem (W5). Otros (B1, P4) también han deducido ecuaciones para este caso.

Si se hace un balance total y uno de componente parad sobre el elemento de volumen y el desecho,

$$q = q_o + q' \tag{13.7-1}$$

$$qx = q_o x_o + q'y \tag{13.7-2}$$

Al diferenciar la ecuación (13.7-2)

$$d(qx) = 0 + d(q'y) \tag{13.7-3}$$

Un balance para el componente A en los lados de alta y baja presión del elemento de volumen da como resultado

$$qx = (q - dq)(x - dx) + y\,dq \tag{13.7-4}$$

Al simplificar, tenemos

$$y\,dq = q\,dx + x\,dq = d(qx) \tag{13.7-5}$$

El flujo específico local fuera del elemento que tiene un área dA_m es

$$-y\,dq = \frac{P'_A}{t}(p_h x - p_l y)\,dA_m \tag{13.7-6}$$

Si se combinan las ecuaciones (13.7-3), (13.7-5) y (13.7-6),

$$-d(q'y) = -d(qx) = \frac{P'_A}{t}(p_h x - p_l y)\,dA_m \tag{13.7-7}$$

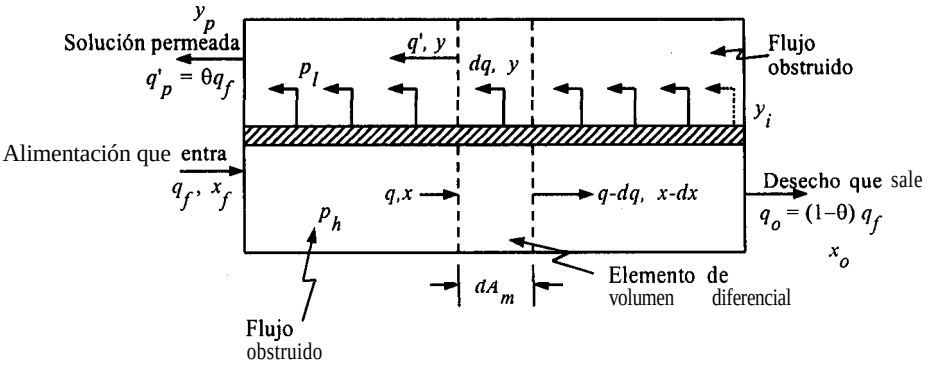


FIGURA 13.7-1. *Diagrama de flujo para el modelo de flujo a contracorriente*

De igual manera, para el componente *B*,

$$-d[q'(1-y)] = -d[q(1-x)] = \frac{P'_B}{t}[p_h(1 \quad x) - p_l(1-y)]dA_m \tag{13.7-8}$$

Al combinar la ecuación (13.7-1) con la (13.7-2) para eliminar *q'* y al multiplicar por dx,

$$q_o\,dx = \left(\frac{x-y}{y-x_o}\right)(-q\;dx) \tag{13.7-9}$$

Se puede demostrar que la ecuación (13.7- 10) es válida:

$$-q\,dx = -(1-x)\,d(qx) + x\,d[q(l-x)] \tag{13.7-10}$$

Al sustituir-q dx de la ecuación (13.7-10), $-d(qx)$ de la (13.7-7) *y* $d[q(l-x)]$ de la (13.7-8) en la ecuación (13.7-9), se obtiene

$$\left(\frac{q_o t}{p_l P'_B}\right)\frac{dx}{dA_m} = \left(\frac{x-y}{y-x_o}\right)((1-x)\alpha^*(rx-y) - x[r(1-x) - (1-y)]\} \tag{13.7-11}$$

donde $r = p_h/p_l$ *y* $\alpha^* = P'_A/P'_B$.

La ecuación (13.7-l 2) también se puede deducir utilizando los mismos métodos que se usaron para la ecuación (13.7-9).

$$q_o\,dy = \left(\frac{x-y}{x-x_o}\right)(-q'\,dy) \tag{13.7-12}$$

También se puede demostrar que la ecuación (13.7-l 3), la cual es semejante a la ecuación (13.7-10), es válida:

$$q'\,dy = (1-y)\,d(q'y) - y\,d[q'(1-y)] \tag{13.7-13}$$

Al sustituir *q'dy* de la ecuación (13.7-13), $d(q'y)$ de la (13.7-7) *y* $d[q'(l \quad y)]$ de la (13.7-8) en la ecuación (13.7-12),

$$\left(\frac{q_o t}{p_l P'_B}\right)\frac{dy}{dA_m} = \left(\frac{x-y}{x-x_o}\right)\{(1-y)\alpha^*(rx-y) - y[r(1-x) - 1(1 \quad y)]\} \tag{13.7-14}$$

A la salida de la corriente de residuo de composición x_o, la solución permeada y $= y_i$ y x_o se relaciona mediante la ecuación (13.4-5), que está dada como (13.7-l 5).

$$\frac{y_i}{1-y_i} = \frac{\alpha^*[x_o - (p_l/p_h)y_i]}{(1-x_o) - (p_l/p_h)(1-y_i)} \tag{13.7-15}$$

La solución de esta ecuación cuadrática es idéntica a la ecuación (13.4-10).

13.7B Resolución de las ecuaciones para el flujo a contracorriente

Las ecuaciones (13.7-11) y (13.7-14) se resuelven simultáneamente usando métodos numéricos, empezando con la corriente de salida de alta presión de composición x_o. El área A_m se puede establecer arbitrariamente igual a cero en esta salida y se obtendrá un área negativa cuyo signo se debe invertir. La ecuación (13.7-14) junto con la ecuación (13.7-15) son indeterminadas en la salida de alta presión. Si se utiliza la regla de L'Hôpital para $A_m \to 0$,

$$\left(\frac{dy}{dA_m}\right)_{A_m=0} = \frac{(x_o - y_i)r[\alpha^* - y_i(\alpha^* - 1)]}{q_o t/(p_l P'_B) - \{(x_o - y_i)[(\alpha^* - 1)(2y_i - rx_o - 1) - r]\}/(dx/dA_m)_{Am=0}} \tag{13.7-16}$$

Para la ecuación (13.7-11),

$$\left(\frac{dx}{dA_m}\right)_{A_m=0} = \frac{p_l P'_B}{q_o t}\left[\frac{\alpha^*(rx_o - y_i)(x_o - y_i)}{y_i} 1\right. \tag{13.7-17}$$

Es más conveniente resolver las ecuaciones (13.7-l 1) y (13.7-14) en términos de x como variable independiente. Así, al dividir la ecuación (13.7-14) entre la (13.7-l 1),

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(y - x_o)\{(1-y)\alpha^*(rx - y) - y[r(1\ \ x)\ \ (1\ \ y)]\}}{(x\ \ - x_o)\ \ \{(1-x)\alpha^*(rx - y)\ \text{-x[r(l- x)} - (1 - \text{y})]\}} \tag{13.7-18}$$

Al invertir la ecuación (13.7-1 1),

$$\frac{dA_m}{dx} \frac{q_o t}{p_l P'_B} \frac{[(y - x_o)/(x - y)]}{((1 - x)\alpha^*(rx - y)\ \text{-x[r(l - x)} - (1 - \text{y})]\}} \tag{13.749}$$

Como laecuación (13.7-18) es indeterminada en la salida de alta presión, se puede evaluar utilizando las ecuaciones (13.7-16) y (13.7-17) como sigue:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{A_m=0} = \frac{(dy/dA_m)_{A_m=0}}{(dx/dA_m)_{A_m=0}} \tag{13.7-20}$$

Si se supone que se especifica el corte de etapa θ, el procedimiento es por prueba y error. Primero se supone un valor de x_o en la salida de alta presión, y al resolver las dos ecuaciones (13.7-18) y (13.7-19) se obtienen el valor del área A_m y el de la sustancia permeada y_p en la salida. Para calcular x_o se utilizan este y_p y la ecuación de balance de material (13.4-s). Si el valor supuesto y el calculado de x_o no concuerdan, se supone otro valor y se repite el procedimiento. En otros libros hay detalles

adicionales y programas de computadora (H1, R1, W5). Para el flujo en paralelo, las ecuaciones son bastante semejantes y se encuentran en otras obras (B 1, H 1, R1 , W5).

13.8 EFECTOS DE LAS VARIABLES DE PROCESO EN LA SEPARACIÓN DE GASES A TRAVÉS DE MEMBRANAS

13.8A Efectos de la relación de presión y del factor de separación en la recuperación

Si se utiliza la ecuación de Weller-Steiner (13.4-5) para el modelo de mezcla completa, se pueden determinar los efectos de la relación de presiones, p_h / p_l y del factor de separación, α^*, en la pureza de la solución permeada para una composición de alimentación fija. La figura 13.8-l es una gráfica de esta ecuación para una concentración de la alimentación del 30% (S7). Se puede esperar que esta ecuación proporcione estimados de la pureza del producto y tendencias para condiciones de baja a modesta recuperación en todos los tipos de modelos, como el de mezcla completa, el de flujo cruzado y el de contracorriente.

En la figura 13.8-l se observa que por encima de un α^* de 20, la pureza del producto no se afecta de manera considerable. Además, por encima de una relación de presiones de cerca de 6, esta relación tiene un efecto reductor sobre la pureza del producto, Algunos factores de separación comunes para los separadores comerciales se dan en la tabla 13.8- 1.

Si en el proceso de separación de gases hay líquidos presentes, una película líquida puede aumentar marcadamente la resistencia de la membrana. Los líquidos también dañan a la membrana por acción química o bien hinchándola o suavizándola. Si hay vapor de agua en las corrientes de gas cuando se alcanza el punto de rocío en el producto residual, el líquido se condensa. También se debe evitar la condensación de hidrocarburos.

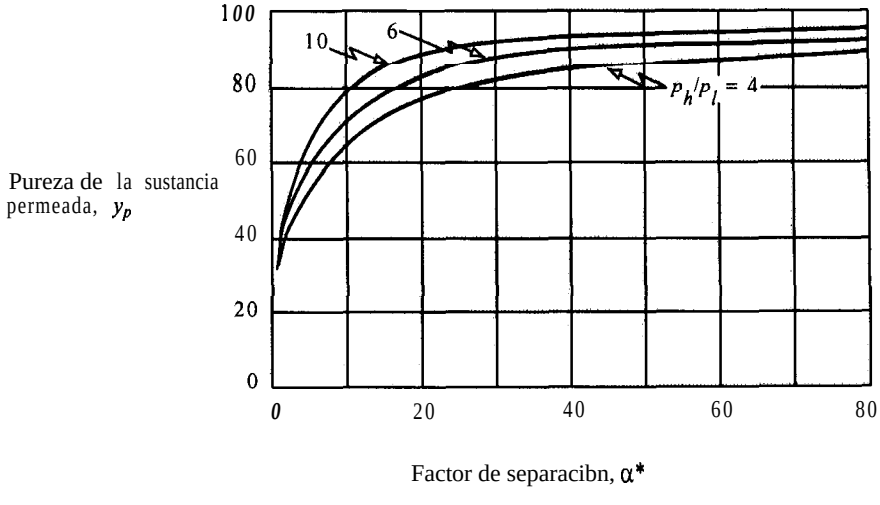


FIGURA 13.8-l. ***Efectos del factor de separación y de la relación de las presiones sobre la pureza de la sustancia permeada. (Alimentación $x_f = 0.30$.)*** [Tomado de "Membranes Separate Gases Selectively", por D. J. Stookey, C. J. Patton y G. L. Malcolm, *Chem. Eng. Progr.*, **82**(11), *36* (1986). Reproducido con autorización del American Institute of Chemical Engineers, 1986.1

TABLA 13.8-1. *Factores de separación típicos para algunas membranas industriales*

Gases separados	*Factor de separación*	*Refs.*
H_2O/CH_4	500	(M4)
He/CH_4	5-44	(M4), (S1), (W3)
H_2/CO	35-80	(K3), (M4)
H_2/N_2	3-200	(H1), (K3), (M4), (W2), (W3)
H_2/O_2	4-12	(M4), (S2), (W3)
H_2/CH_4	6-200	(H1), (K3), (M4), (W3)
O_2/N_2	2-12	(M4), (K3), (S2), (W2), (W3)
CO_2/CH_4	3-50	(H1), (M4), (S2), (W3)
CO_2/O_2	3-6	(M4). (S2), (W2), (W3)
CH_4/C_2H_6	2	(M4)

13.8B Efectos de los patrones de flujo de proceso sobre la separación y el área

Distintos investigadores (P4, P5, W5) que han desarrollado estudios paramétricos detallados para sistemas binarios compararon los cuatro patrones de flujo: el de la mezcla completa, el flujo cruzado, el flujo en paralelo y el flujo a contracorriente. En la figura 13.8-2 (W5) se muestra la concentración de la sustancia permeada graficada en función del corte de etapa, θ, para una alimentación de aire (x_f = 0.209 para el oxígeno) con α^* = 10 y p_h/p_l = 5. Se demuestra que, como se esperaba, el patrón de flujo a contracorriente da la mejor separación. Los otros patrones de flujo cruzado, en paralelo y de mezcla completa dieron separaciones más bajas, en orden descendente. Nótese que cuando el corte de etapa θ = 0, todos los patrones de flujo son equivalentes al modelo de mezcla completa y dan la misma composición de la sustancia permeada. Además, a θ = 1.00, todos los patrones nuevamente dan el mismo valor de y_p = 0.209, que es también la composición de la alimentación.

También se determinaron las áreas de membrana necesarias para las mismas condiciones de proceso y de alimentación de aire en función del corte de etapa (W5). Se demostró que las áreas para

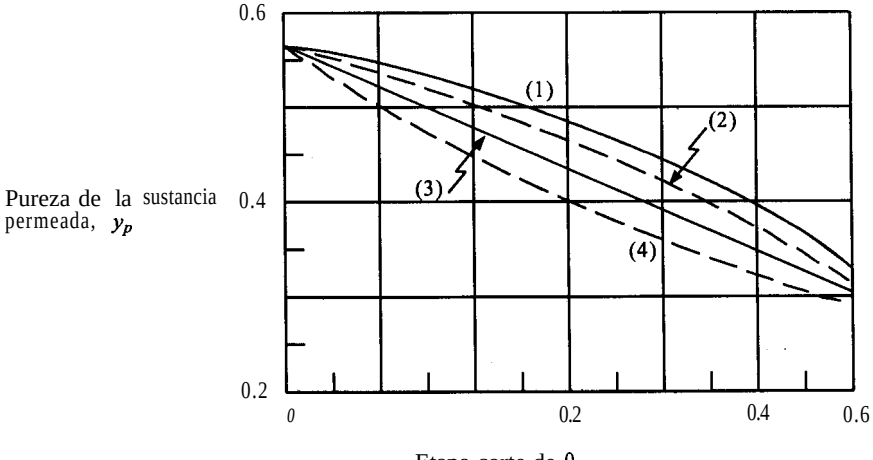


FIGURA 13.8-2. *Efecto del corte de etapa y del patrón de flujo sobre la pureza de la sustancia permeada. Las condiciones operativas para el aire son las siguientes: x_f = 0.209, α^* = 10. p_h/p_l = 5 a 30 cm Hg/76 cm Hg = 5. P'_A = 500 × 10^{-10} cm^3 (TPE) · cm/s · cm^2 · cmHg. 1. flujo a contracorriente, 2. flujo cruzado, 3. Flujo en paralelo, 4. mezcla completa (WS).* [Reimpreso de W. P. Walawender y S. A. Stem, *Sep. Sci., 7, 553* (1972). Por cortesía de Marcel Dekker, Inc.]

los cuatro tipos de patrones de flujo estaban dentro de un 10% unas de otras. Los patrones de flujo a contracorriente y cruzado dieron el área menor necesaria.

En general, se ha concluido mediante muchos estudios paramétricos que en las mismas condiciones de operación, el patrón de flujo a contracorriente da una mejor separación y requiere menor área de membrana. El orden de eficiencia es como sigue: a contracorriente > flujo cruzado > en paralelo > mezcla completa.

13.9 PROCESOS A TRAVÉS DE UNA MEMBRANA DE ÓSMOSIS INVERSA

13.9A Introducción

1. Introducción. Para ser útil en la separación de diferentes especies, una membrana debe permitir el paso de ciertas moléculas e impedir o restringir en gran medida el paso de otras. En la ósmosis ocurre un transporte espontáneo de disolvente desde un soluto diluido o solución salina hacia un soluto concentrado o solución salina a través de una membrana semipermeable que permite el paso del disolvente pero impide el paso de los solutos salinos. En la figura 13.9-1a, el agua disolvente fluye normalmente a través de la membrana semipermeable hacia la solución salina. Los niveles de ambos líquidos son iguales, como se muestra. El flujo de disolvente se puede reducir ejerciendo una presión sobre el lado de la solución salina y la membrana, como se muestra en la figura 13.9-1 b, hasta que a cierta presión, llamada presión osmótica π de la solución salina, se alcanza el equilibrio y la cantidad de disolvente que pasa en sentidos opuestos es igual. Los potenciales químicos del disolvente en ambos lados de la membrana son iguales. Sólo la propiedad de la solución determina el valor de la presión osmótica, no la membrana, siempre y cuando ésta sea verdaderamente semipermeable. Para invertir el flujo del agua de manera que fluya desde la solución salina hacia el disolvente fresco, como en la figura 13.9- 1 c, se aumenta la presión por encima de la presión osmótica en el lado de la solución.

Este fenómeno, llamado *ósmosis inversa,* se usa en varios procesos. Una aplicación importante comercial es la desalinización del agua de mar o agua salobre para producir agua potable. A diferencia de los procesos de destilación y congelamiento utilizados para eliminar disolventes, la ósmosis inversa se efectúa a temperatura ambiente sin cambiar de fase. Este proceso es sumamente útil para el procesamiento de productos térmica y químicamente inestables. Entre las aplicaciones se encuentran la concentración de jugos de frutas y leche, la recuperación de proteínas y azúcar del suero del queso y la concentración de enzimas.

2. Presión osmótica de soluciones. Los datos experimentales muestran que la presión osmótica π de una solución es proporcional a la concentración del soluto y a la temperatura T. Van't Hoff demostró originalmente que la relación es semejante a la de la presión de un gas ideal. Por ejemplo, en soluciones de agua diluidas,

$$\pi = \frac{n}{V_m} RT \qquad \textbf{(13.9-1)}$$

donde n es el número de kg mol de soluto, V_m es el volumen de agua disolvente pura en m^3 asociado con n kg mol de soluto, R es la constante de la ley de los gases, 82.057 x 10^{-3} $m^3 \cdot$ atm kg mol $\cdot$ K y T es la temperatura en K. Si un soluto existe como dos o más iones en solución, n representa el número total de iones. Para soluciones más concentradas, la ecuación (13.9-1) se modifica usando el coeficiente osmótico ϕ, que es la relación entre la presión osmótica real π y la π ideal calculada a partir de la ecuación. Para soluciones muy diluidas, ϕ tiene el valor la unidad y generalmente disminuye conforme la concentración aumenta. En la tabla 13.9-1 se dan algunos valores experimentales de π para soluciones de NaCl, de sacarosa y de agua de mar (S3, SS).

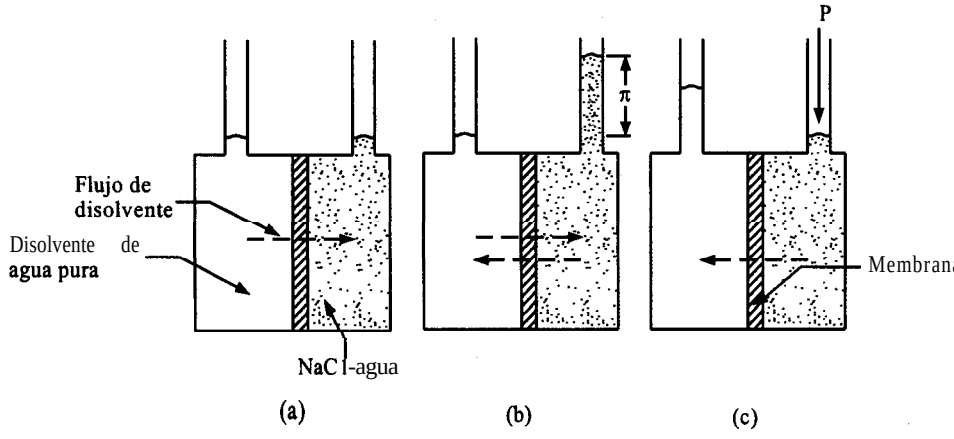


FIGURA *13.9-I. Ósmosis y ósmosis inversa: a) ósmosis, b) equilibrio osmótico, c) ósmosis inversa.*

EJEMPLO 13.9-1. Cálculo de la presión osmótica de una solución salina
Calcule la presión osmótica de una solución que contiene 0.10 g mol NaCl/1000 g H_2O a 25 °C.

Solución: Según la tabla A.2.3, la densidad del agua = 997.0 kg/m^3. Entonces, n = 2 x 0.10 x 10^{-3} = 2.00 x 10^{-4} kg mol (el NaCl da dos iones). Además, el volumen del agua disolvente pura V_m = 1 .00 kg/(997.0 kg/m^3). Al sustituir en la ecuación (13.9-l),

$$\pi = \frac{n}{V_m} RT = \frac{2.00 \times 10^{-4} (82.057 \times 10^{-3})(298.15)}{1.000 / 997.0} = 4.88 \text{ atm}$$

Esto se puede comparar con el valor experimental de la tabla 13.9-1 de 4.56 atm.

3. Tipos de membranas para la ósmosis inversa. Una de las membranas más importantes para la desalinización por ósmosis inversa y para muchos otros procesos de ósmosis inversa es la de acetato de celulosa. La membrana asimétrica se fabrica como película compuesta en la cual una capa densa y delgada de cerca de 0.1 a 10 μm de espesor con poros extremadamente finos está sostenida sobre una capa mucho más gruesa (50 a 125 μm) de esponja microporosa con poca resistencia a la permeación. La capa delgada y densa tiene la capacidad de bloquear el paso de moléculas de soluto bastante pequeñas. En la desalinización, la membrana desecha el soluto salino y permite que el agua disolvente pase a través de ella. Los solutos que la membrana de acetato de celulosa excluye más eficientemente son las sales NaCl, NaBr, $CaCl_2$ y Na_2SO_4; la sacarosa y las sales de amonio tetralquílicas. Las limitaciones principales de la membrana de acetato de celulosa son que prácticamente sólo se puede usar en soluciones acuosas y que se debe usar a menos de unos 60 °C.

Otra importante membrana útil para agua de mar, aguas de desecho, soluciones de enjuague de electrodeposición de níquel y otros solutos es la membrana de poliamida aromática sintética "Permasep", que tiene forma de fibras huecas muy tinas (Ll, P3). Este tipo de membrana de uso industrial soporta una operación continua a pH de 10 a ll (S4). Muchas otras membranas anisotrópicas se han sintetizado también a partir de polímeros sintéticos, y algunas se pueden usar en disolventes orgánicos, a mayor temperaturay a pH alto o bajo (M2, R1).

TABLA 13.9-1. *Presión osmótica para varias soluciones acuosas a 25 °C (PI, S3, S5)*

Soluciones de cloruro de sodio			*Soluciones de sal de mar*		*Soluciones de sacarosa*	
g mol NaCl / kg H_2O	*Densidad (kg/m^3)*	*Presión osmótica (atm)*	*% en peso de sales*	*Presión osmótica (atm)*	*Fracción molar de soluto x 10^3*	*Presión osmótico (atm)*
0	997.0	0	0	0	0	0
0.01	997.4	0.47	1.00	7.10	1.798	2.48
0.10	1001.1	4.56	3.45*	25.02	5.375	7.48
0.50	1017.2	22.55	7.50	58.43	10.69	15.31
1.00	1036.2	45.80	10.00	82.12	17.70	26.33
2.00	1072.3	96.2				

* *Valor del agua de mar estándar.*

13.9B Ecuaciones de flujo específico para la ósmosis inversa

1. Modelos básicos para los procesos de membrana. Existen dos tipos básicos de mecanismos de transporte de masa que pueden ocurrir a través de membranas. En el primer tipo básico, que utiliza membranas apretadas capaces de retener solutos con tamaños de cerca de 10 Å o menores, ocurre principalmente el transporte tipo difusión. Tanto el soluto como el disolvente migran por difusión molecular o de Fickian en el polímero, impulsados por gradientes de concentración establecidos en la membrana por la diferencia de presión aplicada. En el segundo tipo básico, que utiliza membranas microporosas holgadas que retienen partículas mayores de 10 Å, ocurre un mecanismo tipo criba en el cual el disolvente se mueve a través de los microporos con flujo esencialmente viscoso, y las moléculas de soluto, lo bastante pequeñas como para pasar a través de los poros, son arrastradas por convección con el disolvente. Algunos detalles del segundo tipo se pueden ver en (M2, W1).

2. Modelo del tipo de difusión. Para las membranas de difusión, las ecuaciones de estado estacionario que gobiernan el transporte de disolvente y de soluto son, en una primera aproximación, como sigue (M2, M3). Para la difusión del disolvente a través de la membrana como se muestra en la figura 13.9-2,

$$N_w = \frac{P_w}{L_m}(\Delta P - \Delta\pi) = A_w(\Delta P - \Delta\pi) \tag{13.9-2}$$

$$P_w = \frac{D_w \bar{c}_w V_w}{RT} \tag{13.9-3}$$

$$A_w = \frac{P_w}{L_w} \tag{13.9-4}$$

donde N_w es el flujo específico de disolvente (agua) en kg/s · m^2; P_w la permeabilidad de la membrana al disolvente, en kg de disolvente/s · m · atm; L_m el espesor de la membrana, en m; A_w la constante de permeabilidad al disolvente, en kg de disolvente/s · m^2 · atm; $\Delta P = P_1 - P_2$ (diferencia de presión hidrostática, con la presión P_1 ejercida sobre la alimentación y P_2 sobre la disolución de producto),

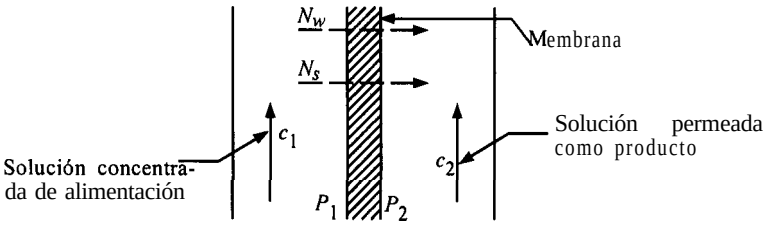


FIGURA 13.9-2. *Concentraciones y flujos en el proceso de ósmosis inversa.*

en atm; $\Delta\pi = \pi_1 - \pi_2$ (presión osmótica de la solución de alimentación − presión osmótica de la solución de producto), en atm; D_w es la difusividad del disolvente en la membrana, en m^2/s; $\bar{c}_w$ la concentración media del disolvente en la membrana, en kg de disolvente/m^3; V_w el volumen molar del disolvente, en m^3/kg mol de disolvente; R la constante de la ley de los gases, 82.057 x 10^{-3} m^3 . atm/kg mol . K; y T la temperatura, en K. Nótese que el subíndice 1 indica el lado de la alimentación o corriente arriba de la membrana y 2 el lado del producto o corriente abajo de la membrana.

En la difusión del soluto a través de la membrana, una aproximación para el flujo del soluto es (C1, M1)

$$N_s = \frac{D_s K_s}{L_m}(c_1 - c_2) - A_s(c_1 - c_2) \qquad \textbf{(13.9-5)}$$

$$A_s = \frac{D_s K_s}{L_m} \qquad (13.9\text{-}6)$$

donde N_s es el flujo específico de soluto (sal) en kg de soluto/s . m^2; D_s es la difusividad del soluto en la membrana, en m^2/s; $K_s = c_m/c$ (coeficiente de distribución), concentración de soluto en la membrana/concentración de soluto en la solución; A_s es la constante de permeabilidad del soluto, en m/s; c_1 es la concentración de soluto en la solución corriente arriba o de alimentación (concentrado), en kg de soluto/m^3, y c_2 es la concentración de soluto en la solución corriente abajo o del producto (solución permeada), en kg de soluto/m^3. El coeficiente de distribución K_s es aproximadamente constante en toda la membrana.

Si se hace un balance de materia en estado estacionario para el soluto, el soluto que se difunde a través de la membrana debe ser igual a la cantidad de soluto que sale en la solución corriente abajo o del producto (solución permeada).

$$N_s = \frac{N_w c_2}{c_{w2}} \qquad (13.9\text{-}7)$$

donde c_{w2} es la concentración del disolvente en la corriente 2 (solución per-meada), en kg de disolvente/m^3. Si la corriente 2 está diluida en el soluto, c_{w2} es aproximadamente la densidad del disolvente. En la ósmosis inversa, el desecho de soluto R se define como la razón de la diferencia de concentración a través de la membrana dividida entre la concentración general en el lado de la alimentación o concentrado (fracción de soluto que queda en la corriente de alimentación).

$$R = \frac{c_1 - c_2}{c_1} = 1 - \frac{c_2}{c_1} \tag{13.98}$$

Ésta se puede relacionar con las ecuaciones de flujo como sigue, sustituyendo primero las ecuaciones (13.9-2) y (13.9-5) en la (13.9-7) para eliminar N_w y N_s en esta última ecuación. Si después se despeja c_2/c_1 y se sustituye este resultado en la ecuación (13.9-8),

$$R = \frac{B(\Delta P - \Delta\pi)}{1 + B(\Delta P - \Delta\pi)} \tag{13.9-9}$$

$$B = \frac{P_w}{D_s K_s c_{w2}} - \frac{A_w}{A_s c_{w2}} \tag{13.9-10}$$

donde B se da en atm^{-1}. Nótese que B está compuesto por las diferentes propiedades físicas P_w, D_s y K_s de la membrana y se debe determinar experimentalmente para cada membrana. Por lo general, se determina el producto $D_s K_s$ y no los valores de D_s y K_s por separado. Además, muchos de los datos publicados en la literatura dan valores de (P_w/L_m) o A_w en kg de disolvente/s · m^2 · atm y ($D_s K_s /L_m$) o A_s en m/s, y no los valores separados de L_m, P_w, entre otros.

EJEMPLO 13.9-2. Determinación experimental de la permeabilidad de la membrana
Se realizaron experimentos a 25 °C para determinar las permeabilidades de una membrana de acetato de celulosa (A 1, W 1). La sección de prueba de laboratorio que se muestra en la figura 13.9-3 tiene un área de membrana A = 2.00 x 1 0^{-3} m^2. La concentración de la solución de alimentación de entrada de NaCl es c_1 = 10.0 kg NaCl/m^3 de solución (10.0 g NaCl/L, ρ_1 = 1004 kg de solución/m^3). Se supone que la recuperación de agua es baja, de manera que la concentración c_1 en la solución de alimentación que entra y que fluye alrededor de la membrana, y la concentración de la solución de alimentación de salida son esencialmente iguales. La solución producto contiene c_2 = 0.39 kg NaCl/m^3 de solución (ρ_2 = 997 kg de solución /m^3) y su flujo medido es de 1.92 x 10^{-8} m^3 de solución /s. Se usa una presión diferencial de 5514 kPa (54.42 atm). 'Calcule las constantes de permeabilidad de la membrana y el desecho de soluto R.

Solución: Como c_2 es muy bajo (solución diluida), el valor de c_{w2} se puede considerar como la densidad del agua (Tabla 13.9-1) o c_{w2} = 997 kg de disolvente/m^3. Para convertir el flujo del producto en flujo específico de agua, N_w, usando un área de 2.00 x 10^{-3} m^2,

$$N_w = (1.92 \times 10^{-8}\ \text{m}^3/\text{s})(997\ \text{kg disolvente/m}^3)(1/2.00 \times 10^{-3}\ \text{m}^2)$$
$$= 9.57 \times 10^{-3}\ \text{kg disolvente/s} \cdot \text{m}^2$$

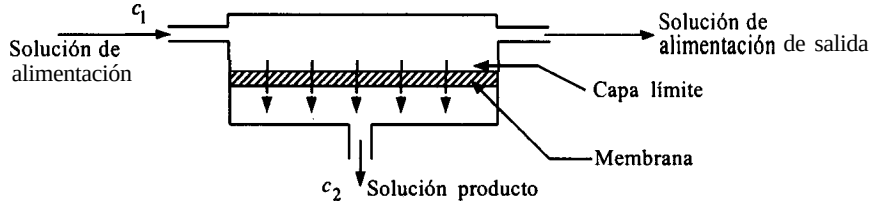


FIGURA 13.9-3. ***Diagrama de flujo de proceso de una unidad experimental de laboratorio de ósmosis inversa.***

Al sustituir en la ecuación (13.9-7),

$$N_s = \frac{N_w c_2}{c_{w2}} = \frac{(9.57 \times 10^{-3})(0.39)}{997}$$

$$= 3.744 \times 10^{-6} \text{ kg soluto NaCl/s} \cdot \text{m}^2$$

Para determinar las presiones osmóticas a partir de la tabla 13.9- 1, las concentraciones se convierten como sigue. Para c_1, hay 10 kg NaCl en 1004 kg de disolución/m^3 (ρ_1 = 1004). Entonces, 1004 - 10 = 994 kg H_2O en 1 m^3 de solución. Por lo tanto, en la solución de alimentación donde el peso molecular del NaCl = 58.45, (10.00 x 1000)/(994 x 58.45) = 0.1721 g mol NaCl/kg H_2O. Apartirdelatabla 13.9-1, π_1 = 7.80 atm por interpolación lineal. Al sustituir en la ecuación (13.9-l), el pronóstico π_1 = 8.39 atm, que es mayor que el valor experimental. Para la solución producto, 997 - 0.39 = 996.6 kg H_2O. Por consiguiente (0.39 x 1000)/(996.6 x 58.45) = 0.00670 g mol NaCl/kg H_2O. Según la misma tabla, π_2 = 0.32 atm. Entonces, $\Delta\pi = \pi_1 - \pi_2$ = 7.80 - 0.32 = 7.48 atm y ΔP = 54.42 atm.
Al sustituir en la ecuación (13.9-2),

$$N_w = 9.57 \text{ x } 10^{-3} = \frac{P_w}{L_m} = (\text{AP - Arr}) = \frac{\$54.42 - 7.48)}{m}$$

Si se resuelve, $(P_w/L_m) = A_w$ = 2.039 x 10^{-4} kg disolvente/s · m^2 · atm. Al sustituir en la ecuación (13.9-5),

$$N_s = 3.744 \text{ x } 10^{-6} = \frac{D_s K_s}{L_m}(c_1 - c_2) = \frac{D_s K_s}{L_m}(10.00 - 0.39)$$

Después de resolver, $(D_s K_s / L_m) = A_s$ = 3.896 x 10^{-7} m/s.

Para calcular el desecho de soluto *R* sustituyendo en la ecuación (13.9-8),

$$R = \frac{c_i - c_2}{c_1} = \frac{10.00 - 0.39}{10.00} = 0.961$$

También se sustituye en la ecuación (13.9- 10) y luego en la (13.9-9),

$$B = \frac{P_w / L_m}{(D_s K_s / L_m) c_{w2}} = \frac{2.039 \times 10^{-4}}{(3.896 \times 10^{-7})997} = 0.5249 \text{ atm}^{-1}$$

$$R = \frac{B(\Delta P - \Delta\pi)}{1 + B(\Delta P - \Delta\pi)} = \frac{0.5249(54.42 - 7.48)}{1 + 0.5249(54.42 - 7.48)} = 0.96$$

13.10 APLICACIONES, EQUIPO Y MODELOS PARA ÓSMOSIS INVERSA

13.10A Efectos de las variables operativas

En muchas unidades comerciales, las presiones operativas en la ósmosis inversa fluctuan entre 1035 y 10350 kPa (150 a 1500 psi). Cuando se comparan la ecuación (13.9-2) para el flujo específico de disolvente y la (13.9-5) para el flujo específico de soluto, se observa que el flujo específico de disolvente N_w depende sólo de la diferencia neta de presión, mientras que el flujo específico de soluto N_s depende sólo de la diferencia de concentración. Por tanto, a medida que aumenta la presión de la alimentación, el flujo de disolvente o agua a través de la membrana se incrementa, y el flujo de soluto permanece aproximadamente constante, dando una concentración menor de soluto en la solución producto.

A una presión aplicada constante, al aumentar la concentración de soluto de alimentación aumenta también la concentración de soluto del producto. Esto se debe al aumento en la presión osmótica de la alimentación, puesto que a medida que se extrae más disolvente de la solución de alimentación (a medida que aumenta la recuperación de agua), la concentración de soluto se va volviendo mayor y el flujo específico de agua disminuye. Además, la cantidad de soluto presente en la solución producto aumenta debido a la mayor concentración de la alimentación.

Si la unidad de ósmosis inversa tiene una gran área de membrana (como en una unidad comercial), y la trayectoria entre la entrada y la salida de la alimentación es larga, la concentración de la alimentación de salida puede ser considerablemente mayor que en la alimentación de entrada c_1. Por tanto, el flujo de sal será mayor en la alimentación de salida que en la entrada (K2). Muchos fabricantes usan la concentración promedio del soluto o sal de alimentación entre la entrada y la salida para calcular el desecho de soluto o sal R en la ecuación (13.9-8).

EJEMPLO 13.10-I. ***Predicción del rendimiento en una unidad de ósmosis inversa***
Una membrana de ósmosis inversa se va a usar a 25 °C para una solución de alimentación de NaCl que tiene 2.5 g NaCl/L (2.5 kg NaCl/m^3, ρ = 999 kg/m^3) con constante de permeabilidad al agua $A_w = 4.81 \times 10^{-4}$ kg/s • m^2 . atmyconstantedepermeabilidadal soluto (NaCl) $A_s = 4.42 \times 10^{-7}$ m/s (Al). Calcule el flujo específico de agua y el flujo específico de soluto a través de la membrana utilizando un ΔP = 27.20 atm y el desecho de soluto R. También calcule c_2 de la solución de producto.

Solución: En la solución de alimentación, c_1 = 2.5 kg NaCl/m^3 y ρ_1 = 999 kg de solución/m^3. Por tanto, para la alimentación, 999 − 2.5 = 996.5 kg H_2O en 1.0 m^3 de solución; también para la alimentación (2.50 x 1000)/(996.5 x 58.45) = 0.04292 g mol NaCl/kg H_2O. A partir de la tabla 13.9-1, π_1 = 1.97 atm. Como no se conoce la c_2 de la solución de producto, se supondrá un valor de c_2 = 0.1 kg NaCl/m^3. Ademas, como ésta esta bastante diluida, ρ_2 = 997 kg de solución/m^3 y C_w^2 = 997 kg de disolvente/m^3. Entonces, para la solución producto (0.10 x 1000)/(996.9 x 58.45) = 0.00172 g mol NaCl/kg H_2O y π_2 = 0.08 atm. Además, $\Delta\pi = \pi_1 - \pi_2 = 1.97 - 0.08 = 1.89$ atm.

Al sustituir en la ecuación (13.9-2),

$$N_w = A_w(\Delta P - \Delta\pi) = 4.81 \times 10^{-4}(217.20 - 1.89)$$

$$= 1.217 \times 10^{-2} \text{ kg } H_2O/\text{s} \cdot \text{m}^2$$

La relación de polarización de concentración común (K3) es 1.2 a 2.0, es decir, la concentración en la capa límite es 1.2 a 2.0 veces c_1 de la solución de alimentación general. Esta relación a veces es difícil de predecir. Al desalinizar agua de mar, con valores de cerca de 1000 lb/pulg^2 abs = ΔP, π_1 puede ser grande. Si se aumenta π_1 por un factor de 1.2 a 2.0 se puede reducir apreciablemente el flujo de disolvente. Para aguas salobres que contienen de 2 a 10 g/L, si se usan valores ΔP de 17 a 55 atm absolutas, el valor de π_1 es bajo y la polarización de la concentración no es importante.

La capa límite se puede reducir si se aumenta la turbulencia mediante el uso de mayores velocidades de solución de alimentación, pero este flujo adicional provoca que la relación del producto respecto a la alimentación sea más pequeña. También se pueden colocar pantallas en la trayectoria del flujo para inducir turbulencia.

13.10C Constantes de permeabilidad para las membranas de ósmosis inversa

Las constantes de permeabilidad de las membranas se determinan experimentalmente para el tipo particular de membrana que se va a usar. En las membranas de acetato de celulosa, las constantes típicas de permeabilidad al agua A_w fluctúan entre 1×10^{-4} y 5×10^{-4} kg de disolvente/s • m^2 • atm (A1, M3, W1). Los valores para otros tipos de membranas pueden ser muy diferentes. En general, la constante de permeabilidad al agua de una membrana particular no depende del soluto presente. Algunos valores relativos comunes para las constantes de permeabilidad al soluto A_s de las membranas de acetato de celulosa son los siguientes, suponiendo un valor de $A_s = 4 \times 10^{-7}$ m/s para NaCl: 1.6×10^{-7} m/s ($BaCl_2$), 2.2×10^{-7} ($MgCl_2$), 2.4×10^{-7} ($CaCl_2$), 4.0×10^{-7} (Na_2SO_4), 6.0×10^{-7} (KCl), 6.0×10^{-7} (NH_4Cl) (A1).

13.10D Tipos de equipo para ósmosis inversa

El equipo para ósmosis inversa es muy semejante al de procesos de membrana de permeación de gases descritos en la sección 13.3C. En la unidad de placa y marco, unas delgadas placas de apoyo de plástico con finas ranuras se cubren por ambos lados con membranas como en un filtro de prensa. Una solución de alimentación con sobrepresión fluye entre las membranas, que guardan poco espacio entre sí (L1). El disolvente permea a través de la membrana y fluye en las ranuras hacia la salida. En la unidad de tipo tubular, las membranas en forma de tubos se insertan dentro de fundas de tubos porosos, que sirven como recipiente con sobrepresión. Estos tubos se disponen en manojos como en un intercambiador de calor.

En la unidad de enrollado en espiral se usan membranas planas, y entre ellas se interpone material de soporte poroso y plano. Después, las membranas, el soporte y un separador de malla del lado de la alimentación se enrollan en espiral alrededor de un tubo. En el de fibras huecas, de 100 a 200 μm de diámetro y paredes de cerca de 25 μm de grueso, las fibras se disponen en un manojo semejante al de un intercambiador de calor (L1, R1).

13.10E Modelo de mezcla completa para ósmosis inversa

El diagrama de flujo de proceso del modelo de mezcla completa se muestra en la figura 13.10-1. Este modelo está simplificado para usarlo con bajas concentraciones de sal de cerca del 1%, como las

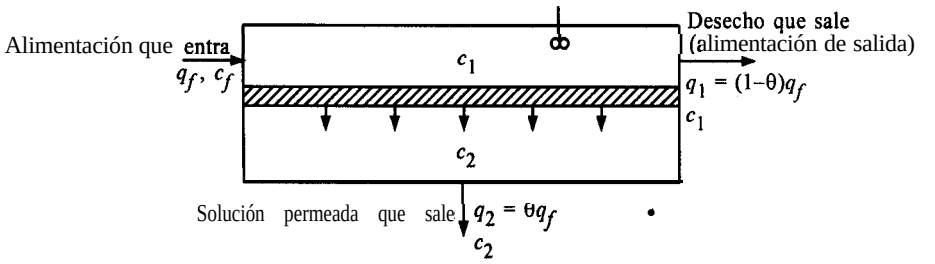


FIGURA *13.10-l. Flujo de proceso para el modelo de mezcla completa para la ósmosis inversa.*

de las aguas salobres. Además hay una recuperación de disolvente relativamente baja y los efectos de la polarización de la concentración son pequeños. Puesto que la concentración de la sustancia permeada es muy baja, el lado de la sustancia permeada actúa como si ésta estuviera completamente mezclada.

Para el balance global de material para soluciones diluidas,

$$q_f = 41 + 92 \tag{13.10-3}$$

donde q_f es la cantidad de flujo volumétrico de la alimentación, en m^3/s; q_2 es la cantidad de flujo de la sustancia permeada, en m^3/s, y q_1 es la cantidad de flujo del residuo o de salida, en m^3/s. Si se hace un balance de soluto,

$$c_f q_f = c_1 q_1 + c_2 q_2 \tag{13.10-4}$$

Al definir el corte o fracción de disolvente recuperado como $\theta = q_2/q_f$, la ecuación (13.10-4) se convierte en

$$c_f = (1 - \theta)c_1 + \theta c_2 \tag{13.10-5}$$

Las ecuaciones anteriores deducidas para los flujos específicos y para el desecho son útiles en este caso y son las siguientes:

$$N_w = A_2(\Delta P - \Delta\pi) \tag{13.9-2}$$

$$N_s = A_s(c_1 - c_2) \tag{13.9-5}$$

$$R = \frac{c_1 - c_2}{c_1} \tag{13.9-8}$$

$$R = \frac{B(\Delta P - \Delta\pi)}{1 + B(\Delta P - \Delta\pi)} \tag{13.9-9}$$

Cuando se especifica el corte o fracción recuperada, θ, la solución se obtiene por aproximaciones sucesivas. Como las concentraciones de la solución permeada y del desecho c_1 y c_2 se desconocen, se supone un valor de c_2. Entonces, c_1 se calcula a partir de la ecuación (13.10-5). Después, se obtiene N_w a partir de la ecuación (13.9-2) y c_2 a partir de las ecuaciones (13.9-8) y (13.9-9). Si el valor calculado de c_2 no concuerda con el valor supuesto, se repite el procedimiento.

Cuando se producen efectos de polarización de la concentración, se puede usar un valor estimado de β para hacer una corrección aproximada por este defecto. Éste se utiliza en la ecuación (13. 10- 1) para obtener un valor de $\Delta\pi$ a fin de usarlo en las ecuaciones (13.9-2) y (13.9-9). Además, la ecuación (13.10-2) remplaza a la (13.9-5). Un análisis más detallado de este modelo de mezcla completa se encuentra en otras obras (H1, K1), en donde se usa el coeficiente de transferencia de masa en la capa límite de polarización de la concentración.

El modelo de flujo cruzado para ósmosis inversa es parecido al de separación de gases por medio de membranas que se estudió en la sección 13.6. Dada la pequeña concentración de soluto, el lado de la solución per-meada actúa como si éste estuviera completamente mezclado. Por lo tanto, incluso si el módulo está diseñado para el flujo a contracorriente o en paralelo, el modelo de flujo cruzado es válido. Esto se analiza con más detalle en otros libros (H1).

13.11 PROCESOS A TRAVÉS DE UNA MEMBRANA DE ULTRAFILTRACIÓN

13.11A Introducción

La ultrafiltración es un proceso a través de una membrana que se parece bastante a la ósmosis inversa. Se trata de un proceso impulsado por la presión en el cual el disolvente y las pequeñas moléculas de soluto -si las hay- pasan a través de la membrana y se recogen como una solución permeada. Las moléculas de soluto más grandes no pasan a través de la membrana y se recuperan en una solución concentrada. Los solutos o moléculas que se van a separar generalmente tienen pesos moleculares que van desde más de 500 hasta 1 000 000 o más, como en las macromoléculas de proteínas, polímeros y almidones, así como dispersiones coloidales de arcillas, partículas de látex y microorganismos.

A diferencia de la ósmosis inversa, las membranas de ultrafiltración son demasiado porosas como para usarse para la desalinización. El desecho, a menudo llamado retención, también está dado por la ecuación (13.9-8), que se definió para la ósmosis inversa. La ultrafiltración se usa además para separar mezclas de proteínas de diferentes pesos moleculares. El limite del peso molecular de la membrana se define como el peso molecular de las proteínas globulares que son retenidas en un 90% por la membrana.

La ultrafiltración se utiliza en muchos procesos en la actualidad. Algunos de ellos son la separación de emulsiones de agua y aceite, la concentración de partículas de látex, el procesamiento de sangre y plasma, el fraccionamiento o separación de proteínas, la recuperación de las proteínas del suero en la elaboración del queso, la eliminación de bacterias y otras partículas para esterilizar el vino, y la clarificación de los jugos de fruta.

Las membranas para la ultrafiltración suelen ser semejantes a las de la ósmosis inversa y normalmente son asimétricas y más porosas. La membrana consta una película densa muy delgada sostenida por una capa relativamente porosa para darle resistencia. Las membranas se fabrican a partir de poliamidas aromáticas, acetato de celulosa,nitrato de celulosa, policarbonato, polimidas, polisulfonas, etc. (M2, P6, R1).

13.11B Tipos de equipo para la ultraiiltración

El equipo para ultrafiltración se parece al que se usa para ósmosis inversa y para procesos de separación de gases que se describieron en las secciones 13.3C y 13.10D. La unidad de tipo tubular es menos propensa a ensuciarse y se limpia más fácilmente que cualquiera de los otros tres tipos, pero es un tanto costosa.

Las membranas de hojas planas en una unidad de placas y marcos ofrecen la mayor versatilidad, pero al mayor costo de capital (P6). Las membranas se pueden limpiar o reemplazar fácilmente desarmando la unidad. Los módulos enrollados en espiral tienen costos relativamente bajos por unidad de área de membrana. Estas unidades se ensucian con más facilidad que las tubulares, pero resisten mejor la suciedad que las unidades de fibras huecas. Los módulos de fibras huecas son los menos resistentes a la suciedad si se comparan con los otros tres tipos, pero la configuración de fibras huecas tiene mayor proporción de área de membrana por volumen unitario.

13.11C Ecuaciones de flujo específico para la ultrafiltración

La ecuación de flujo específico para la difusión de disolvente a través de la membrana es igual que la ecuación (13.9-2) para la ósmosis inversa

$$N_w = A_w(\Delta P - \Delta\pi) \tag{13.9-2}$$

En la ultrafiltración, la membrana no permite el paso del soluto, que generalmente es una macromolécula. La concentración en mol /litro de las grandes moléculas de soluto suele ser pequeña, por lo cual la presión osmótica es muy baja y se desprecia. Entonces, la ecuación (13.9-2) se transforma en

$$N_w = A_w(\Delta P) \tag{13.11-1}$$

Las unidades de ultrafiltración operan a alrededor de 5 a 100 psi de caída de presión en comparación de 400 a 2000 psi para la ósmosis inversa. Para caídas de presión baja de, digamos, 5 a 10 psi y soluciones diluidas de hasta 1% en peso, más o menos, la ecuación (13.11- 1) predice razonablemente bien el rendimiento de los sistemas bien agitados.

Como el soluto es rechazado por la membrana, se acumula y se empieza a concentrar en su superficie. A medida que aumenta la caída de presión o la concentración del soluto, va ocurriendo la polarización de la concentración, que es mucho más fuerte que en la ósmosis inversa. Esto se muestra en la figura 13.1 1- 1 a, donde c_1 es la concentración del soluto en la solución general, en kg de soluto/ m^3, y c_s es la concentración del soluto en la superficie de la membrana.

Conforme aumenta la caída de presión, se eleva el flujo de disolvente N_w hacia la membrana y a través de ella. Esto produce un mayor transporte convectivo del soluto hacia la membrana, es decir, el disolvente lleva consigo más soluto. La concentración c_s aumenta y produce una mayor difusión molecular del soluto de regreso desde la membrana hacia la disolución general. En estado estacionario, el flujo convectivo es igual al flujo de difusión,

$$\frac{N_w c}{\rho} = -D_{AB}\frac{dc}{dx} \tag{13.11-2}$$

donde $N_w c/\rho$ = [kg de disolvente/(s . m^2)] (kg de soluto/m^3)/(kg de disolvente/m^3) = kg de soluto/s . m^2; D_{AB} es la difusividad del soluto en el disolvente, en m^2/s, y x es la distancia, en m. Al integrar esta ecuación entre los límites de $x = 0$ y $c = c_s$ y $x = \delta$ y $c = c_1$,

$$\frac{N_w}{\rho} = \left(\frac{D_{AB}}{\delta}\right)\ln\left(\frac{c_s}{c_1}\right) = k_c \ln\left(\frac{c_s}{c_1}\right) \tag{13.11-3}$$

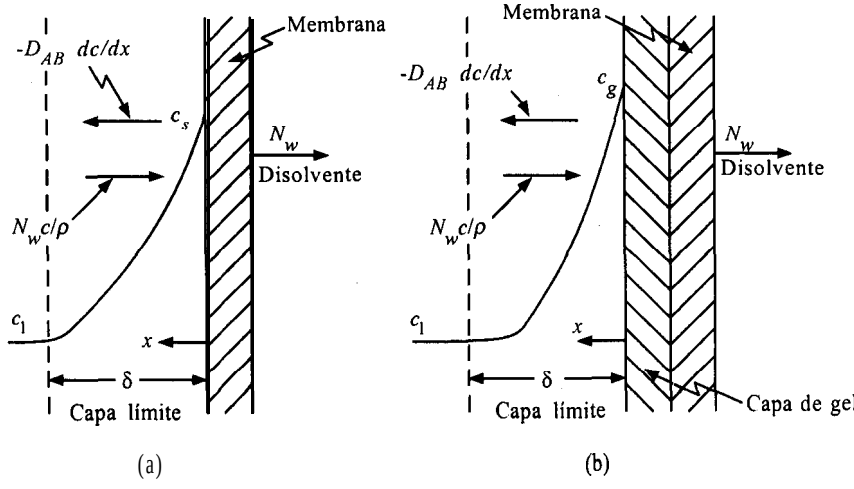


FIGURA 13.1 l-l. *Polarización de la concentración en la ultrajiltración: a) **perfil** de concentración antes de la formación de gel, b) perfil de **concentración** con una capa de gel formada en la **superficie** de la membrana.*

donde k_c es el coeficiente de transferencia de masa, en m/s. Los aumentos adicionales en la caída de presión incrementan el valor de c_s hasta una concentración límite en la cual el soluto acumulado forma un gel semisólido en el que $c_s = c_g$, como se muestra en la figura 13.11 -lb.

Los aumentos aún mayores en la caída de presión no hacen cambiara c_g y se dice que la membrana está "polarizada en gel". Entonces, la ecuación (13.1 l-3) se convierte en (P1, P6, R1)

$$\frac{N_w}{\rho} = k_c \ln\left(\frac{c_g}{c_1}\right) \qquad (13.11\text{-}4)$$

Con el aumento en la caída de presión, la capa de gel aumenta su espesor y esto provoca que el flujo específico de disolvente disminuya, debido a la mayor resistencia de la capa de gel. Por último, el flujo específico neto de soluto por transferencia convectiva se vuelve igual a la difusión de regreso del soluto hacia la solución general, debido al gradiente de la concentración polarizada dado por la ecuación (13.1 l-4).

La mayor resistencia aumentada de la capa de gel cerca de la membrana provoca una resistencia mayor hacia el flujo de disolvente, que es

$$N_w = \frac{\Delta P}{1/A_w + R_g} \qquad \textbf{(13.11-5)}$$

donde $1/A_w$ es la resistencia de la membrana y R_g es la resistencia variable de la capa de gel, en $m^2 \cdot atm)/kg$ de disolvente. El flujo del disolvente en este régimen de gel polarizado es independiente de la diferencia de presión y está determinado por la ecuación (13.11-4) para la difusión de regreso. Los datos experimentales confirman el uso de esta ecuación para un gran número

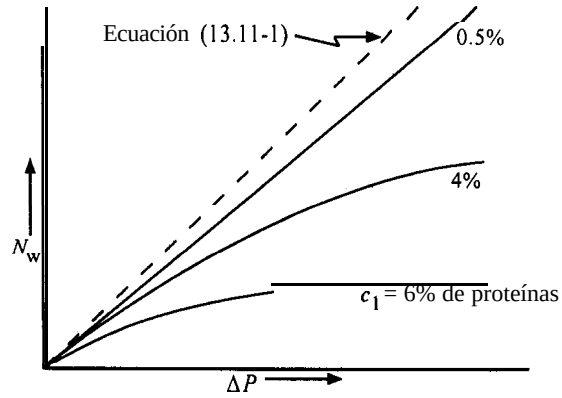


FIGURA 13.11-2. ***Efecto de la diferencia de presión sobre el flujo especi'co de disolvente.***

de soluciones macromoleculares, como proteínas, etc., y suspensiones coloidales, como partículas de látex, etc. (P1, P6).

13.11D Efectos de las variables de proceso en ultrafiltración

En la figura 13.11-2 se ve una gráfica de los datos experimentales típicos del flujo específico en función de la diferencia de presión (H1, P6). A bajas diferencias de presión o bajas concentraciones de soluto, los datos suelen seguir la ecuación (13.1 l-l). Para una concentración general dada, c_1, el flujo específico se aproxima a un valor constante a grandes diferencias de presión, como se muestra en la ecuación (13.11-4). Además, las concentraciones de proteínas más diluidas dan las más altas velocidades de flujo específico, como se espera según la ecuación (13.1 l-4). La mayor parte de las aplicaciones comerciales son de flujo específico limitado por la polarización de la concentración y operan en la región en donde el flujo específico es aproximadamente independiente de la diferencia de presión (R1).

Al graficar datos experimentales, el diagrama de N_w/ρ contra $\ln c_1$ es una línea recta donde la pendiente negativa de k_c, el coeficiente de transferencia de masa, es como indica la ecuación (13.11-4). Estas gráficas también dan el valor de c_g, la concentración del gel. Los datos (PI) muestran que la concentración del gel para muchas soluciones macromoleculares es de cerca del 25% en peso, con un intervalo del 5 al 50%. Para dispersiones coloidales, ésta es de un 65% en peso, con un intervalo de 50 a 75%.

Los efectos de la polarización de la concentración en fibras huecas suelen ser bastante pequeños debido al bajo flujo específico de disolvente, y la ecuación (13.1 l-l) describe dicho flujo. A fin de aumentar el flujo específico de disolvente en la ultrafiltración, se puede usar un flujo cruzado de fluido alrededor de la membrana para barrer parte de la capa polarizada, con lo cual aumenta k_c en la ecuación (13.11-4). Para incrementar la turbulencia, y por tanto k_c, se utilizan mayores velocidades y otros métodos. En la mayoría de los casos, el flujo específico de disolvente es demasiado pequeño como para operar un solo paso; es necesario recircular la alimentación por la membrana con velocidades de recirculación de 10/1 a 100/1.

Los métodos para predecir el coeficiente de transferencia de masa k_c en la ecuación (13.11-4) se encuentran en otras obras (P1, P6) para geometrías conocidas, como canales, etc. Las predicciones

del flujo específico en geometrías conocidas usando estos métodos y valores experimentales de c_g en la ecuación (13.1 l-4) en el régimen de polarización de gel concuerdan con los valores experimentales para las soluciones macromoleculares dentro de un 25 a uh 30%. Sin embargo, para las dispersiones coloidales el flujo específico experimental es mayor que el teórico por factores de 20 a 30 para flujo laminar y de 8 a 10 para flujo turbulento. Por consiguiente, la ecuación (13.1 l-4) no es útil para predecir con precisión el flujo específico del disolvente. En general, para diseñar las unidades comerciales es necesario obtener datos experimentales en módulos únicos.

PROBLEMAS

13.2-1. ***Difusión a través de líquidos y de una membrana.*** Se desea diseñar un proceso de membrana para recuperar el soluto A de una disolución diluida donde c_1 = 2.0 x 10^{-2} kg mol A/m^3 por diálisis a través de una membrana hacia una solución donde c_2 = 0.3 x 10^{-2}. El espesor de la membrana es de 1.59 x 10^{-5} m, el coeficiente de distribución es $K' = 0.75$, D_{AB} = 3.5 x 10^{-11} m^2/s en la membrana, el coeficiente de transferencia de masa en la solución diluida es $k_{c1} = 3.5 \times 10^{-5}$ m/s y $k_{c2} = 2.1 \times 10^{-5}$.

a) Calcule las resistencias individuales, la resistencia total y el porcentaje de resistencia total en las dos películas.

b) Calcule el flujo específico en estado estacionario y el área total en m^2 para una transferencia de 0.01 kg mol de soluto/h.

c) Al aumentar la velocidad de las dos fases líquidas que fluyen por la superficie de la membrana se elevaran los coeficientes de transferencia de masa, que son aproximadamente proporcionales a $v^{0.6}$, donde v es la velocidad. Si se duplican las velocidades, calcule el porcentaje de resistencia total de las dos películas y el porcentaje de aumento en el flujo específico.

Respuesta: a) Resistencia total = 6.823 x 10^5 s/m, ll. 17% de resistencia,
b) N_A = 2.492 x 10^{-8} kg mol $A/s \cdot m^2$, área = ll 1.5 m^2

13.2-2. ***Conveniencia de una membrana para hemodiálisis. Se*** están llevando a cabo experimentos para determinar la conveniencia de una membrana de celofán de 0.029 mm de grueso para un riñón artificial. En un experimento a 37 °C se usa NaCl como soluto que se difunde, la membrana separa dos componentes que contienen soluciones acuosas agitadas de NaCl, donde c_1 = 1.0 x 10^{-4} g mol/cm^3 (100 g mol/m^3) y c_2 = 5.0 x 10^{-7}. Los coeficientes de transferencia de masa en ambos lados de la membrana se estimaron como $k_{c1} = k_{c2} = 5.24$ x 10^{-5} m/s. Los datos experimentales obtenidos dieron un flujo N_A = 8.11 x 10^{-4} g mol NaCl/ s . m^2 en condiciones de estado seudoestacionario.

a) Calcule la permeabilidad p_M en m/s y $D_{AB}K'$ en m^2/s.

b) Calcule el porcentaje de resistencia a la difusión en las películas líquidas.

13.3-1. ***Membrana de permeación de gases para la oxigenación.*** Con el fin de determinar la conveniencia del caucho de silicón como membrana para una máquina cardiopulmonar destinada a oxigenar la sangre, se obtuvo un valor experimental de la permeabilidad a 30 °C del oxígeno, de P''_M = 6.05 x 10^{-7} cm^3 O_2 (TPE)/(s . cm^2 . cm Hg/mm).

a) Pronostique el flujo máximo de O_2 en kg $mol/s \cdot m^2$ con una presión de O_2 de 700 mm Hg en un lado de la membrana y una presión equivalente en el lado de la película de sangre de 50 mm. La membrana tiene 0.165 mm de grueso. Como la película de gas es de oxígeno puro, la resistencia de la película de gas es cero. Desprecie la resistencia de la película de sangre en este caso.

b) Suponiendo que el requerimiento máximo de O_2 para un adulto sea de 300 cm^3 (TPE) por minuto, calcule el área superficial de la membrana necesaria en m^2. (Nota: El área real

necesaria deberá ser considerablemente más grande, porque la resistencia de la película de sangre, que debe se determinar experimentalmente, puede ser apreciable.)

Respuesta: b) 1.953 m^2

13.4-l. Deducción de la ecuación para la concentración de la sustancia permeada. Deduzca la ecuación (13.4-11) para el caso 2 con mezcla completa. Advierta que x_o de la ecuación (13.4-S) primero se debe sustituir en la (13.4-5), antes de multiplicar para eliminarla de la ecuación y despejar y_p

13.4-2. ***Uso del modelo de mezcla completa para el diseño de la membrana.*** Una membrana que tiene un espesor de 2 x 10^{-3} cm una permeabilidad P'_A = 400 x 10^{-10} $cm^3(TPE)$. cm/(s . cm^2 · cm Hg) y una α^* = 10 se va a utilizar para separar una mezcla de gases de *A y B.* El flujo de la alimentación es q_f = 2 x 10^3 cm^3 (TPE)/s y su composición es x_f = 0.413. La presión del lado de la alimentación es de 80 cm Hg y la del lado de la sustancia permeada es de 20 cm Hg. La composición del desecho debe ser x_o = 0.30. Utilice el modelo de mezcla completa para calcular la composición de la sustancia permeada, la fracción de alimentación permeada y el área de la membrana.

Respuesta: y_p = **0.678**

13.4-3. ***Diseño según modelo de mezcla completa.*** Una corriente de alimentación gaseosa que tiene una composición x_f = 0.50 y una velocidad de flujo de 2 x 10^3 cm^3 (TPE)/s se va a separar en una unidad de membrana. La presión del lado de la alimentación es de 40 cm Hg y la de la solución permeada es de 10 cm Hg. La membrana tiene un espesor de 1.5 x 10^{-3} cm, una permeabilidad P'_A = 40 x 10^{-10} cm^3 (TPE) · cm/(s . cm^2 . cm Hg) y una α^* = 10. La fracción de alimentación permeada es 0.529.

a) Utilice el modelo de mezcla completa para calcular la composición de la sustancia permeada, la composición del desecho y el área de la membrana.

b) Calcule la concentración mínima del desecho.

c) Si la composición de la alimentación se aumenta hasta x_f = 0.60, ¿cuál será la nueva concentración mínima del desecho?

Respuesta: a) A_m = 5.153 x 10^7 cm^2

c) x_{oM} = ***0.2478***

13.4-4. Efecto de las permeabilidades sobre ta concentración mínima del desecho. Para las condiciones del problema 13.4-2, x_f = 0.413, α^* = 10, p_l = *20* cm Hg, p_h = *80* cm Hg y x_o = 0.30. Calcule la concentración mínima del desecho en los siguientes casos:

a) Calcule x_{oM} para las condiciones dadas.

b) Calcule el efecto sobre x_{oM} si la permeabilidad de *B* aumenta de manera que α^* disminuya a 5.

c) Calcule el valor límite de x_{oM} cuando α^* se hace disminuir hasta su valor mínimo. Haga una gráfica de x_{oM} en función de α^* para estos tres casos.

13.4-5. ***Concentración mínima del desecho y efecto de la presión.*** Para el ejemplo 13.4-2, de la separación del aire, haga lo siguiente:

a) Calcule la concentración mínima del desecho.

b) Si la presión del lado de la alimentación se reduce a la mitad, calcule el efecto sobre x_{oM}.

Respuesta: x_{oM} = **0.0624**

13.5-1. ***Separación de las mezclas de gases de las multicomponentes.*** Utilice la misma composición de alimentación y cantidad de flujo, presiones y membranas que en el ejemplo 13.5-1 para hacer lo siguiente, utilizando el modelo de mezcla completa.

a) Calcule la composición de la sustancia permeada, la composición del desecho y el área de la membrana para una fracción permeada de 0.50 en lugar de 0.25.

b) Repita el inciso a) pero con θ = 0.90.

c) Trace una gráfica de la composición de la sustancia permeada x_{pA} en función de θ y ademas del área A_m en función de θ utilizando los valores calculados para θ = 0.25, 0.50 y 0.90.

13.5-2. ***Separación del helio del gas natural.*** La composición típica de un gas natural (S1) es 0.5% He (A), 17.0% N_2 (B), 76.5% CH_4 (C) y 6.0% hidrocarburos superiores (D). La membrana propuesta para separar el helio tiene un espesor de 2.54 $\times 10^{-3}$ cm y las permeabilidades son $P'_A = 60 \times 10^{-10}$ cm³(TPE) · cm/(s · cm² · cm Hg), $P'_B = 3.0 \times 10^{-10}$ y $P'_C = 1.5 \times 10^{-10}$. Se supone que los hidrocarburos superiores son esencialmente no permeables ($P'_D \cong 0$). La velocidad de flujo de alimentación es de 2.0 $\times 10^5$ cm³ (TPE)/s. La presión de la alimentación p_h = 500 cm Hg y la presión de la sustancia permeada p_l = 20 cm Hg.

a) Para una fracción permeada de 0.2, calcule la composición de la sustancia permeada, la composición del desecho y el área de la membrana utilizando el modelo de mezcla completa.

b) Utilice la sustancia per-meada del inciso a) como alimentación a una segunda etapa completamente mezclada. La presión p_h = 500 cm Hg y p_l = 20 cm. Para una fracción permeada de 0.20, calcule la composición de la sustancia permeada y el área de la membrana.

13.6-1. ***Diseño con el modelo de flujo cruzado para una membrana.*** Utilice las mismas condiciones de separación de una corriente de aire del ejemplo 13.6-1. Los valores dados son x_f = 0.209, a^* = 10, p_h = 190 cm Hg, p_l = 19 cm Hg, q_f = 1 $\times 10^6$ cm³ (TPE)/s, $P'_A = 500 \times 10^{-10}$ cm³ (TPE) · cm/(s × cm² × cm Hg) y t = 2.54 $\times 10^{-3}$ cm. Haga lo siguiente usando el modelo de flujo cruzado.

a) Calcule y_p, x_o y A_m para θ = 0.40.

b) Calcule y_p y x_o para θ = 0.

Respuesta: a) y_p = 0.452, x_o = 0.0303, $A_m = 6.94 \times 10^8$ cm² (S6)
b) y_p = 0.655, x_o = 0.209

13.7-1. ***Ecuaciones para el modelo de flujo a contracorriente.*** Para la deducción de las ecuaciones de flujo a contracorriente en la separación de gases utilizando una membrana, haga lo siguiente:

a) Obtenga la ecuación (13.7-5) a partir de la (13.7-4).

b) Demuestre que la ecuación (13.7-10) es válida.

c) Obtenga la ecuación (13.7-12).

13.7-2. ***Diseño con el uso del modelo de flujo a contracorriente con una membrana.*** Utilice las mismas condiciones que se dieron en el ejemplo 13.6-1 para la separación de una corriente de aire. Los valores dados son x_f = 0.209, a^* = 10, p_h = 190 cm Hg, p_l = 19 cm Hg, q_f = 1 $\times 10^6$ cm³(TPE)/s, $P'_A = 500 \times 10^{-10}$ cm³(TPE) · cm/(s · cm² × cm Hg) y t = 2.54 $\times 10^{-3}$ cm. Utilice el modelo de flujo a contracorriente para calcular y_p, x_o y A_m para θ = 0.40. (Nótese que este problema implica un procedimiento de prueba y error junto con la solución numérica de dos ecuaciones diferenciales.)

13.9-1. ***Presión osmótica de soluciones de sal y de azúcar.*** Calcule la presión osmótica de las siguientes soluciones a 25 °C y compárela con los valores experimentales.

a) Solución de 0.50 g mol NaCl/kg H_2O (Véase en la tabla 13.9-1 el valor experimental.)

b) Solución de 1.0 g sacarosa/kg H_2O. (Valor experimental = 0.0714 atm.)

c) Solución de 1.0 g $MgCl_2$/kg H_2O. (Valor experimental = 0.660 atm.)

Respuesta: a) π = 24.39 atm, b) π = 0.0713 atm, c) $\pi = 0.768$ atm

13.9-2. ***Determinacidn'de las constantes depermeabilidadpara la ósmosis inversa.*** Una membrana de acetato de celulosa con un área de 4.0 $\times 10^{-3}$ m² se usa a 25 °C para determinar las constantes de permeabilidad para ósmosis inversa de una solución salina de alimentación que contiene 12.0 kg NaCl/m³ (ρ = 1005.5 kg/m³). La solución producto tiene una concentración de 0.468 kg NaCl/m³ (ρ = 997.3 kg/m³). La velocidad de flujo de producto medida es de 3.84 $\times 10^{-8}$ m³/s y la diferencia de presión que se usó es de 56.0 atm. Calcule las constantes de permeabilidad y el desecho de soluto R.

Respuesta: A_w = 2.013 $\times 10^{-4}$ kg de disolvente/s · m² · atm, R = 0.961

13.9-3. ***Rendimiento de una unidad de laboratorio de ósmosis inversa.*** Una solución de alimentación a 25 °C contiene NaCl/L (ρ = 999.5 kg/m^3). La constante de permeabilidad A_w = 3.50 × 10^{-4} kg de disolvente/s · m^2 . atm y A_s = 2.50 × 10^{-7} m/s. Utilizando un ΔP = 35.50 atm, calcule los flujos, el desecho de soluto R y la concentración de la solución producto en mg NaCl/L. Repita, pero ahora utilice una solución de alimentación de 3500 mg $BaCl_2$/L. Use el mismo valor de A_w pero A_s = 1.00 × 10^{-7} m/s (Al).

13.10-1. ***Efecto de la presión en el rendimiento de una unidad de ósmosis inversa.*** Utilice las mismas condiciones y constantes de permeabilidad que en el ejemplo 13.10-l para calcular los flujos específicos, el desecho de soluto R y la concentración de producto c_2 para presiones ΔP de 17.20, 27.20 y 37.20 atm. (Nota: los valores para 27.20 atm ya han sido calculados.) Gratique los flujos específicos, R y c_2 en función de la presión.

13.10-2. ***Efecto de la polarización de la concentración sobre la ósmosis inversa.*** Repita el ejemplo 13.10-l pero use una polarización de concentración de 1.5. (*Nota:* Las ecuaciones del flujo y el desecho de soluto R se deberán calcular utilizando ese nuevo valor de c_1.)

Respuesta: N_w = 1.170 × 10^{-2} kg de disolvente/s · m^2, c_2 = 0.1361 kg NaCl/m^3

13.10-3. ***Rendimiento de un modelo de mezcla completa para ósmosis inversa.*** Emplee las mismas condiciones de alimentación y de presión que se dieron en el ejemplo 13. 10- 1. Suponga que el corte o fracción recuperada del agua disolvente será de 0.10 en lugar de la bajísima recuperación de agua supuesta en el ejemplo 13.10-l. De este modo, la concentración de la solución de alimentación que entra no será la misma que la que sale. El gasto q_2 de la solución de agua permeada es de 100 gal/h. Calcule c_{21} y c_2 en kg NaCl/m^3 y el área de la membrana en m^2.

Respuesta: c_1 = 2.767 kg/m^3, c_2 = 0.0973 kg/m^3, área = 8.68 m^2,

13.11-1. ***Flujo específico para ultrafiltración.*** Una solución que contiene 0.9% en peso de proteínas se somete a ultrafiltración con una diferencia de presión de 5 lb/pulg^2. La permeabilidad de la membrana es A_w = 1.37 × 10^{-2} kg/s · m^2 . atm. Si se supone que no hay efectos de polarización, pronostique el flujo específico en kg/s · m^2 y en las unidades de gal/pie^2 · día que tanto se usan en la industria.

Respuesta: 9.88 gal/pie^2 · día

13.11-2. ***Tiempo de ultrafiltración utilizando recirculación.*** Se desea usar ultratiltración para 800 kg de una solución que contiene 0.05 % en peso de cierta proteína para obtener una solución de 1.10 % en peso. La alimentación se recircula por una membrana con área superficial de 9.90 m^2. La permeabilidad de la membrana es A_w = 2.50 × 10^{-2} kg/s · m^2 · atm. Sin tomar en cuenta los efectos de la polarización de concentración, si los hay, calcule la cantidad final de solución y el tiempo para desarrollar este experimento usando una diferencia de presión de 0.50 atm.

REFERENCIAS

(Al) AGRAWAL, J. P. y SOURIRAJAN, S. *Ind. Eng. Chem.*, **69**(11), 62 (1969).

(B1) BLAISDELL, C. T. y KAMMERMEYER, K. *Chem. Eng. Sci., 28,* 1249 (1973).

(B2) BABB, A. L., MAURER, C. J., Fry, D. L., POPOVICH, R. P. *y* MCKEE, R. E. *Chem. Eng. Progr. Symp.*, **64**(84), *59* (1968).

(B3) BERRY, R. 1. *Chem. Eng.*, **88**(13 de julio), 63 (1981).

(Cl) CLARK, W. E. *Science,* **138, 148** (1962).

(H1) HWANG, S. T. y KAMMERMEYER, K. *Membranes in Separations,* Nueva York: John Wiley & Sons, Inc., 1975.

(K1) KIMURA, S. y SOURIRAJAN, *S. A.I.Ch.E.J.,* **13, 497** (1967).

(K2) KAUP, E. C. *Chem. Eng.*, 80(2 de abril), 46 (1973).
(K3) KURZ, J. E. y NARAYAN, R. S. "New Developments and Applications in Membrane Tecbnology".
(L1) LACEY, R. E. *Chem, Eng.*, 79(4 de septiembre), 57 (1972).
(M1) MCCABE, W. L. *Ind. Eng. Chem.*, 21, 112 (1929).
(M2) MICHAELS, A. S. *Chem. Eng. Progr.*, 64(12), 3 1 (1968).
(M3) MERTEN, U. (ED). *Desalination by Reverse Osmosis*, Cambridge, Mass.: The MIT Press, 1966.
(M4) MAZUR, W. H. y MARTIN, *C. C. Chem. Eng. Progr.*, 78(10), 38 (1982).
(P1) PERRY, R. H. y GREEN, D. *Perry's Chemical Engineers' Handbook*, 6a. ed., Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1984.
(P2) PAN, *C. Y. A.I.Ch.E.J., 29,* 545(1983).
(P3) PERMASEP PERMEATORS, *E. I. duPont Tech. Bull.*, 401, 403, 405 (1972).
(P4) PAN, C. Y. y HABGOOD, H. W. *Ind. Eng. Chem. Fund.*, 13, 323 (1974).
(P5) PAN, C. Y. y HABGOOD, H. W. *Can. J. Chem. Fund., 56, 197,210 (1978).*
(P6) PORTER, M. *C.* (ed.). *Handbook of Industrial Membrane Technology*, Park Ridge, N. J.: Noyes Publications, 1990.
(R1) ROUSSEAU, R. W. (ed.). *Handbook of Separation Process Technology*, Nueva York: John Wiley & Sons, Inc., 1987.
(S1) STERN, S. A., SINCLAIR, T. F., GAREIS, P. J. , VAHLDIECK, N. P. y MOHR, P. H. *Ind. Eng. Chem., 57, 49* (1965).
(S2) STANNETT, V. T., KOROS, W. J., PAUL, D. R., LONSDALE, H. K y BAKER, R. W. *Adv. Polym. Sci., 32, 69* (1979).
(S3) STOUGHTEN, R. W. y LIETZKE, M. H. JR. *Chem. Eng. Data*, 10, 254 (1965).
(S4) SCHROEDER, E. D. *Water and Wastewater Treatment*, Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1977.
(S5) SOURIRAJAN, S. *Reverse Osmosis*, Nueva York: Academic Press, Inc., 1970.
(S6) STERN, S. A. y WALAWENDER, W. P. *Sep. Sci., 4,* 129 (1969).
(S7) STOOKEY, D. J., PATTON, C. J. y MALCOLM, *G.* L. *Chem. Eng. Progr.*, 82(11), 36 (1986).
(W1) WEBER, W. J., Jr. *Physicochemical Processes for Water Quality Control*, Nueva York: Wiley-Interscience, 1972.
(W2) WARD, W. J., BROWAL, W. R. y SALEMME, R. M. *J. Membr. Sci.*, 1, 99 (1976).
(W3) WELLER, S. y STEINER, W. A. *Chem. Eng. Progr., 46, 585 (1950).*
(W4) WELLER, S. y STEINER, W. A. *J. Appl. Phys.*, 21, 279 (1950).
(W5) WALAWENDER, W. P. y STERN, S. A. *Sep. Sci., 7, 553 (1972).*

CAPÍTULO 14

Procesos de separación físico-mecánicos

14.1 INTRODUCCIÓN Y CLASIFICACIÓN DE LOS PROCESOS DE SEPARACIÓN FÍSICO-MECÁNICOS

14.1A Introducción

En los capítulos 10 y ll se estudiaron los procesos de separación gas-líquido y vapor-líquido. Éstos se basan en la difusión o vaporización de moléculas de una fase a otra. En el capitulo 12 se analizaron los procesos de separación líquido-líquido, Las dos fases líquidas son muy diferentes desde el punto de vista químico, lo que conduce a una separación a escala molecular dependiente de las propiedades fisicoquímicas. Además, en el capítulo 12 también se consideraron los procesos de separación o lixiviación líquido-sólido. Una vez más, las diferencias en las propiedades fisicoquímicas de las moléculas conducen a una separación a escala molecular. En el capítulo 13 se estudiaron los procesos de separación de membrana'que también dependen de las propiedades fisicoquímicas.

Todos los procesos de separación estudiados hasta ahora, se fundamentan en diferencias fisicoquímicas de las propias moléculas y en sus transferencias de masa. Las moléculas individuales se separan en dos fases a causa de las diferencias moleculares. En este capítulo se considerará un grupo de procesos de separación que no se lleva a cabo a escala molecular ni se debe a diferencias entre las diversas moléculas presentes. La separación se logra usando fuerzas físico-mecánicas y no fuerzas moleculares o químicas ni difusión, Estas fuerzas físico-mecánicas actúan sobre partículas, líquidos o mezclas de partículas y líquidos, y no necesariamente sobre moléculas individuales.

Las fuerzas físico-mecánicas incluyen la gravitación y la centrifugación, las fuerzas mecánicas propiamente dichas y las fuerzas cinéticas causadas por flujos. Las corrientes de partículas o fluidos se separan debido a los diferentes efectos que sobre ellas producen estas fuerzas.

14.1B Clasificación de los procesos de separación físico-mecánicos

Estos procesos de separación físico-mecánicos se considerarán en el presente capítulo de acuerdo con la clasificación siguiente:

1. Filtración. El problema general de la separación de partículas sólidas de líquidos se puede resolver usando gran diversidad de métodos, dependientes del tipo de sólido, de la proporción de sólido a líquido en la mezcla, de la viscosidad de la solución y de otros factores. En la filtración se establece una diferencia de presión que hace que el fluido fluya a través de poros pequeños que impiden el paso, de las partículas sólidas las que a su vez, se acumulan sobre la tela como torta porosa.

2. Precipitación y sedimentación. En la precipitación y la sedimentación las partículas se separan del fluido debido a las fuerzas gravitacionales que actúan sobre las partículas de tamaños y densidades diferentes.

3. Precipitación y sedimentación por cientrifugación. En las separaciones por centrífugación, las partículas se separan del fluido a causa de las fuerzas centrífugas que actúan sobre las partículas de tamaños y densidades diferentes. Se usan dos tipos generales de procesos de separación. En el primer tipo de proceso se lleva a cabo una precipitación o sedimentación por centrifugación.

4. Filtración centrífuga. El segundo tipo de proceso de separación por centrifugación es la filtración centrífuga que se asemeja a la filtración ordinaria en la que un lecho o torta de sólidos se acumula en una pantalla, pero se utiliza la fuerza centrífuga para provocar el flujo en lugar de una diferencia de presión.

5. Reducción mecánica de tamaño y separación. En la reducción mecánica de tamaño, las partículas sólidas se fragmentan por medios mecánicos en tamaños más pequeíios y se separan de acuerdo con sus dimensiones.

14.2 FILTRACIÓN EN LA SEPARACIÓN SÓLIDO-LÍQUIDO

14.2A Introducción

En la filtración, las partículas suspendidas en un fluido, ya sea líquido o gas, se separan mecánica o fisicamente usando un medio poroso que retiene las partículas en forma de fase separada que permite el paso del filtrado sin sólidos. Las filtraciones comerciales cubren una amplia gama de aplicaciones. El fluido puede ser un gas o un líquido. Las partículas sólidas suspendidas pueden ser muy finas (del orden de micrómetros) o bastante grandes, muy rígidas o plásticas, esféricas o de forma muy irregular, agregados o partículas individuales. El producto valioso puede ser el filtrado sin sólidos o la torta sólida. En algunos casos, se requiere una eliminación completa de las partículas sólidas y en otros, basta con una eliminación parcial.

La alimentación o suspensión de entrada puede contener una gran carga de partículas sólidas o una proporción baja. Cuando la concentración es mínima, los filtros operan por tiempos muy largos, antes de que sea necesario limpiar el medio filtrante. Debido a la gran diversidad de problemas de filtración, se ha desarrollado un enorme número de equipos de filtración.

El equipo industrial de filtración difiere del de laboratorio únicamente en lo que respecta a la cantidad de materia que se maneja y en la necesidad de operar a costos bajos. En la figura 14.2-1 se muestra un aparato de filtración típico del laboratorio, que es un embudo de Büchner. El flujo del líquido a través de la tela o papel filtro se produce debido al vacío en el extremo de salida. La suspensión consta del líquido y las partículas suspendidas. Las pequeñas aberturas de los poros de la tela bloquean el paso de las partículas. Se usa un soporte con orificios bastante grandes, sobre el cual se apoya la tela filtrante. Las partículas sólidas se acumulan en forma de una torta de filtrado a medida que se verifica el proceso. Esta torta también actúan como filtro de las partículas suspendidas. La resistencia al flujo aumenta a medida que la torta crece.

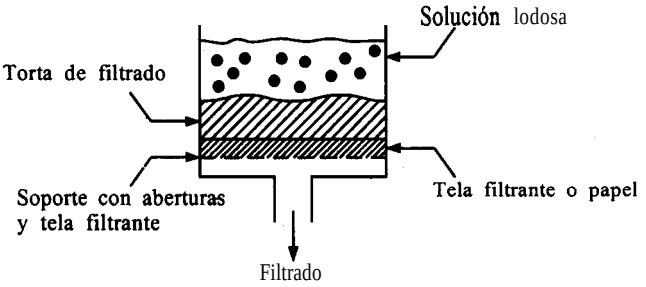


FIGURA 14.2-1. *Aparato de filtración de laboratorio.*

En esta sección 14.2 se va a considerar el tipo ordinario de filtración en el que se usa una diferencia de presión para forzar al líquido a través de filtro de tela y de la torta que se acumula.

En la sección 14.4E se analizará la filtración centrífuga, en la que se emplea la fuerza centrífuga en lugar de una diferencia de presión. En muchas aplicaciones de la filtración, los filtros ordinarios y los centrífugos suelen ser competitivos y puede usarse cualquiera de ellos.

14.2B Tipos de equipos de filtración

1. Clasificacion de los *filtros.* Existen diversos métodos para clasificar los equipos de filtración y no es posible establecer un sistema simple que incluya a todos ellos. En una de las agrupaciones, los filtros se clasifican dependiendo de que la torta de filtrado sea el producto deseado o bien el líquido transparente. En cualquier caso, la suspensión puede tener un porcentaje de sólidos relativamente alto, lo que conduce a la formación de una torta, o a tener muy pocas partículas en suspensión.

Los filtros también se clasifican de acuerdo con su ciclo de operación: por lotes, cuando se extrae la torta después de cierto tiempo, o de manera continua, cuando la torta se va extrayendo a medida que se forma. En otra clasificación, los filtros pueden ser de gravedad, donde el líquido simplemente fluye debido a la presencia de una carga hidrostática, o bien se puede usar presión o vacío para incrementar la velocidad de flujo. Un método de clasificación muy importante se basa en la colocación mecánica del medio filtrante. La tela filtrante puede estar en serie, en forma de placas planas encerradas, como hojas individuales sumergidas en la suspensión, o sobre cilindros giratorios que penetran en la suspensión. En las siguientes secciones se describen los tipos más importantes. Para mayores detalles, se sugiere consultar las referencias (B1, P1).

2. Lecho de filtración. El tipo más sencillo de filtro es el de lecho, que se muestra de manera esquemática en la figura 14.2-2. Este tipo es útil principalmente en casos en los que pequeñas cantidades relativas de sólidos se separan de grandes cantidades de agua y se clarifica el líquido. Con frecuencia, las capas inferiores se componen de piezas burdas de grava que descansan sobre una placa perforada o ranurada. Por encima de la grava hay arena fina que actúa como el medio de filtración real. El agua se introduce en la parte alta del lecho sobre un deflector que dispersa el agua. El líquido clarificado se extrae de la parte inferior.

La filtración continua hasta que el precipitado, esto es, las partículas filtradas, obstruyen el lecho de arena y la velocidad de flujo resulta demasiado baja. Entonces se suspende el flujo y se introduce agua en dirección contraria lavar el filtro y arrastrar el sólido. Este aparato sólo se puede usar con precipitados que no se adhieran con firmeza a la arena y que se desprendan con facilidad con un retrolavado. Para la filtración del suministro de agua municipal, se usan filtros de tanques abiertos.

3. Filtros prensa de placas y marcos. Uno de los tipos de filtros más importantes es el filtro prensa de placas y marcos, que se muestra en la figura 14.2-3a. Estos filtros consisten de placas y marcos alternados con una tela filtrante a cada lado de las placas, Las placas tienen incisiones con forma de canales para drenar el filtrado en cada placa. La suspensión de alimentación se bombea en la prensa y fluye a través del conducto al interior de cada uno de los marcos abiertos, de manera que va llenando los espacios vacíos. El filtrado fluye entre la tela filtrante y la superficie de la placa, a través de los canales y hacia el exterior, mientras los sólidos se acumulan como torta en los marcos.

La filtración continúa hasta que los marcos quedan completamente llenos de sólidos. En la figura 14.2-3a, todas las salidas de descarga comunican a un cabezal común. En muchos casos, el filtro prensa tiene una descarga abierta individual para cada marco, que permite una inspección visual para verificar la transparencia del líquido filtrado. Si una de las salidas descarga líquido turbio debido auna perforación de la tela o a otras causas, se puede cerrar por separado y continuar con la operación. Cuando los espacios están totalmente llenos, las placas y los marcos se separan y se extraen las tortas. Después se vuelve a armar el filtro y se repite el ciclo.

Si se desea lavar la torta, ésta se deja en los marcos y se procede a un lavado transversal, como se muestra en la figura 14.2-3b. En este tipo de prensa existe un canal aparte para la entrada del agua de lavado, que penetra a la unidad y alas placas a través de aberturas situadas detrás de las telas filtrantes, en placas alternadas. El agua de lavado fluye a través de la tela, pasa por la totalidad de la torta (no por una mitad, como en la filtración), a través de la tela filtrante, del otro lado de los marcos, y por último, pasa al canal de descarga. Nótese que la figura 14.2-3b ilustra dos tipos de placas: las que tienen conductos para admitir el agua de lavado por detrás de la tela filtrante, y las que están alternadas con las anteriores y carecen de dichos conductos.

Las prensas de placas y marcos presentan los inconvenientes comunes a todos los procesos por lotes. El costo de mano de obra para extraer las tortas y volver a ensamblar la unidad, más los costos fijos por tiempos muertos, pueden constituir una porción muy elevada de los costos totales de operación. Algunos modelos modernos de prensas de placas y marcos tienen un juego duplicado de marcos montados en un eje giratorio. Mientras se usa la mitad de los marcos, la otra mitad se descarga y se limpia, lo que reduce los costos de mano de obra. Existen también sistemas automatizados que se han aplicado a estos tipos de filtros.

Los filtros prensa se usan en los procesos por lotes pero no se pueden emplear para procesos de alto rendimiento. Se manejan con facilidad, son versátiles y de operación flexible y se pueden utilizar a altas presiones si es necesario, con soluciones viscosas o cuando la torta de filtro tiene una gran resistencia.

4. Filtros de hojas. El filtro prensa es útil para muchos propósitos pero no es económico para el manejo de grandes cantidades de lodos, ni para el lavado eficiente con cantidades pequeñas de agua.

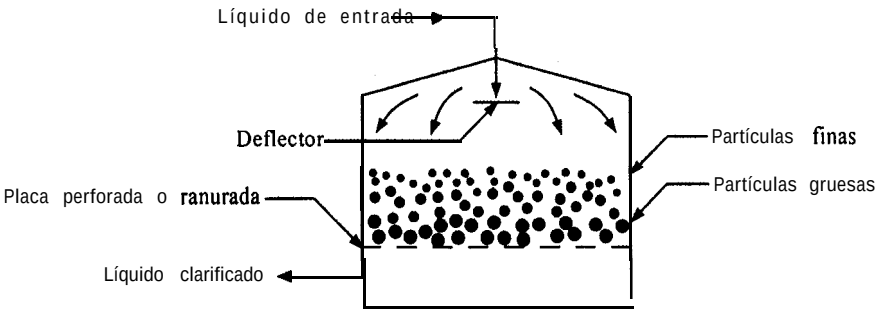
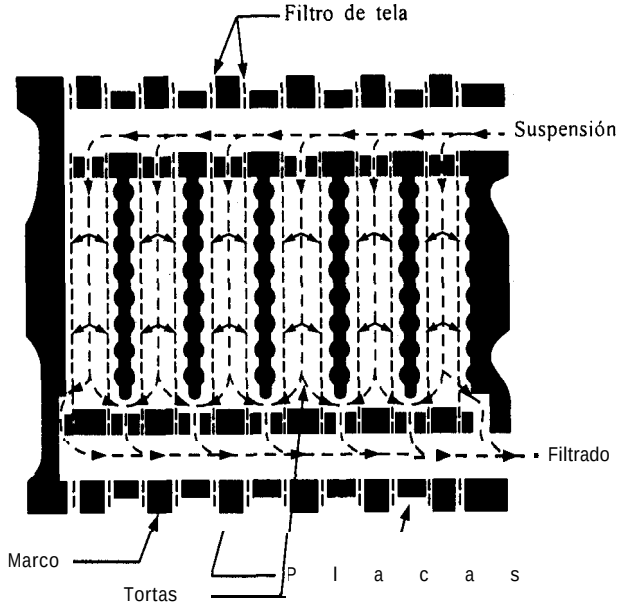
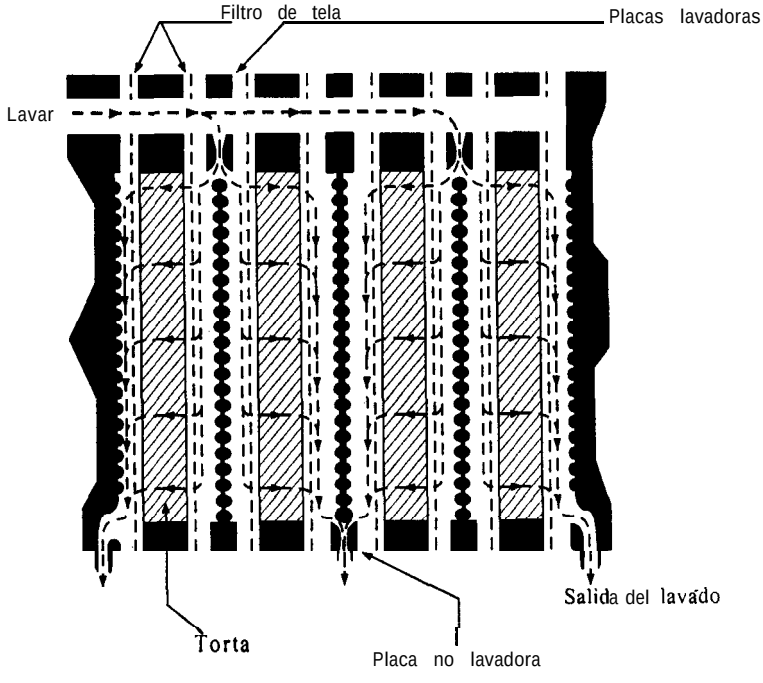


FIGURA 14.2-2. *Lecho de filtración de partículas sólidas.*



(a)



(b)

FIGURA 14.2-3. *Diagramas de filtros prensa de placas y marcos: a) filtración de uno suspensión con descarga cerrada, b) lavado de una prensa con descarga abierta.*

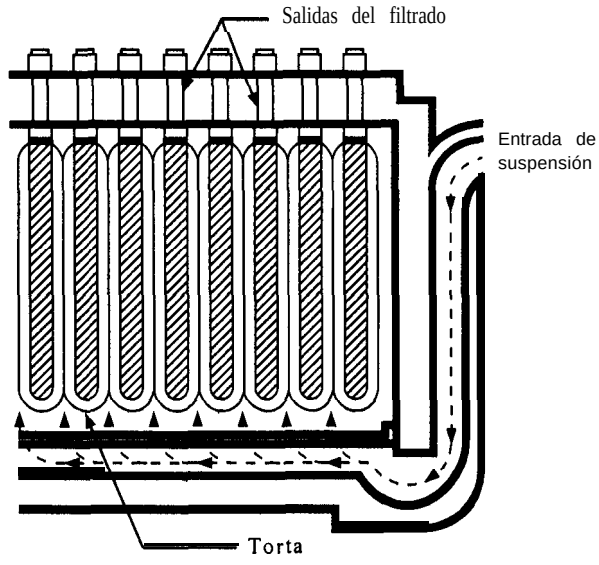


FIGURA 14.2-4. *Filtro de hojas.*

El agua de lavado suele formar canales en las tortas y se requieren grandes volúmenes de líquido. El filtro de hojas que se muestra en la figura 14.2-4 se acondicionó para grandes volúmenes de suspensión y un lavado más eficiente. Cada hoja es un marco hueco de alambre cubierto con un saco de tela filtrante.

Estas hojas se cuelgan en paralelo en un tanque cerrado. La suspensión entra al tanque y la presión llega a la tela filtrante, donde la torta se deposita en el exterior de la hoja. El filtrado fluye por el interior del marco hueco hacia un cabezal de descarga y el líquido de lavado sigue la misma trayectoria de la suspensión, De esta forma, el lavado resulta más eficiente que en los filtros prensa. Para extraer la torta se abre la coraza del tanque. Algunas veces se hace pasar una corriente de aire a través de las hojas en dirección contraria para ayudar a desprender la torta. Cuando el material valioso no es el sólido, se pueden usar chorros de agua a presión para desprenderlo y eliminarlo sin necesidad de abrir el filtro.

Los filtros de hoja también presentan la desventaja de la operación por lotes. Se pueden automatizar para el ciclo de filtración, lavado y limpieza, pero su funcionamiento es cíclico, por lo cual se usan para procesos por lotes y de producción relativamente modesta.

5. *Filtros rotatorios continuos.* Los filtros de placas y marcos y los de hojas tienen las desventajas típicas de los procesos intermitentes y no se pueden usar para procesos de gran capacidad. Existen varios filtros de tipo continuo disponibles, los cuales se analizan en seguida.

a) Filtro rotatorio continuo de tambor al vacío. El filtro rotatorio continuo al vacío que se ilustra en la figura 14.2-5 filtra, lava y descarga la torta con un régimen continuo. El tambor cilíndrico se recubre de un medio filtrante adecuado, se hace girar, y una válvula automática en el centro sirve para activar las funciones de filtrado, secado, lavado y descarga de la torta del ciclo de operación. El filtrado sale por el eje del filtro.

La válvula automática permite la salida independiente del filtrado y líquido de lavado. Además, cuando es necesario, se puede usar una conexión para un retrosoplado de aire comprimido poco antes de la descarga, para ayudara que el raspador de cuchilla desprenda la torta. El diferencial máximo de presión para el filtro al vacío es de sólo 1 atm. Por consiguiente, este modelo no es adecuado para

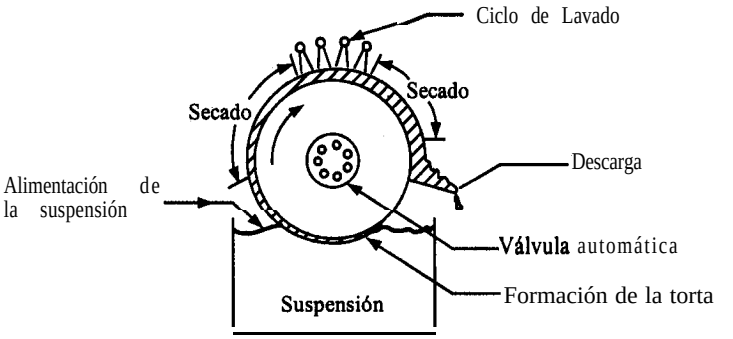


FIGURA 14.2-5. *Diagrama esquemático de un filtro continuo de tambor rotatorio.*

líquidos viscosos o líquidos que deben estar encerrados. Si el tambor se encierra en una coraza, se pueden usar presiones superiores a la atmosférica. Sin embargo, el costo de un equipo de presión es de cerca del doble del de un filtro rotatorio de tambor al vacío (P2).

Los procesos modernos de alta capacidad utilizan filtros continuos. Las ventajas importantes son que los procesos son continuos y automáticos y los costos de mano de obra son relativamente bajos. Sin embargo, la inversión inicial es relativamente alta.

b) Filtro de disco rotatorio continuo. Este filtro consta de discos verticales concéntricos montados en un eje horizontal rotatorio. El filtro opera con el mismo principio que el filtro rotatorio de tambor al vacío. Todos los discos están huecos y cubiertos con un filtro de tela que se sumerge parcialmente en la suspensión. La torta se lava, se seca y se descarga raspándola cuando el disco está en la sección superior de su rotación. El lavado es menos eficiente que con el filtro de tambor rotatorio.

c) Filtro horizontal rotatorio continuo. Éste es un filtro al vacío cuya superficie filtradora anular rotatoria está dividida en sectores. Conforme el filtro horizontal gira recibe suspensión, luego se lava, se seca y se le quita la torta. La eficiencia del lavado es mejor que con el filtro de disco rotatorio. Se usa mucho en procesos de extracción de minerales, lavado de pulpas y otros procesos de gran capacidad.

14.2C Medios filtrantes y ayudas de filtración

1. Medios filtrantes. El medio para filtraciones industriales debe tener ciertas características. La primera y más importante es que permita separar los sólidos de la suspensión y producir un filtrado transparente. Además, los poros no se deben obstruir con facilidad para que la velocidad del proceso no sea demasiado lenta. El medio filtrante debe permitir la extracción de la torta sin dificultades ni pérdidas. Obviamente, debe tener una resistencia suficiente para no rasgarse y no ser afectado por los productos químicos presentes.

Algunos medios filtrantes de uso común son telas gruesas de loneta o sargas, tejidos pesados, fibra de vidrio, papel, fieltro de celulosa, telas metálicas, de lana, de nylon, de dacrón y otros tejidos sintéticos. Las fibras de hilacha de materiales naturales, son más eficaces para partículas finas que las fibras plásticas o metálicas. Algunas veces, el filtrado sale un poco lechoso al principio, antes de que se depositen las primeras capas de partículas que ayudan al filtrado subsecuente. El filtrado se puede recircular para una nueva filtración.

2. Ayudas de filtración. En algunos casos se usan ayudas de filtración para acelerar el proceso. Por lo general, son tierras diatomáceas o kieselguhr, que están constituidos principalmente por sílice no compresible. También se usa celulosa de madera, asbesto y otros sólidos porosos inertes.

Estas ayudas de filtración se pueden usar de diferentes maneras; por ejemplo como recubrimiento previo antes de filtrar la suspensión, el cual impide que los sólidos de tipo gelatinoso obstruyan el medio filtrante y permite obtener un filtrado más transparente. También se pueden añadir a la suspensión antes de la filtración. Esto aumenta la porosidad de la torta y reduce su resistencia durante el proceso. En un filtro rotatorio, la ayuda de filtración se puede aplicar como recubrimiento previo y durante la operación se desprende junto con la torta.

El uso de ayudas de filtración suele estar limitado a los casos en que la torta es el material que se descarta, o cuando el precipitado se puede separar de ellas por medios químicos.

14.2D Teoría básica de la filtración

1. Caída de presión del fluido a través de la torta. La figura 14.2-6 muestra el corte transversal de una torta de filtración y un medio filtrante, en un tiempo definido t s desde el inicio del flujo del filtrado. En dicho momento, el espesor de la torta es L m (pie). El área de corte transversal del filtro es A m^2 (pie^2) y la velocidad lineal del filtrado en la dirección L es v m/s (pie/s), con base en el área de filtración A m^2.

El flujo del filtrado a través del lecho empacado de la torta puede describir por medio de una ecuación similar a la ley de Poiseuille, suponiendo un flujo laminar en los canales del filtro. La ecuación (2.10-2) es la expresión de Poiseuille para flujo laminar en un tubo recto, y se puede escribir como sigue:

$$-\frac{\Delta p}{L} = \frac{32\mu v}{D^2} \qquad \text{(SI)} \tag{14.2-1}$$

$$-\frac{\Delta p}{L} = \frac{32\mu v}{g_c D^2} \qquad \text{(Unidades del sistema inglés)}$$

donde Ap es la caída de presión en N/m^2 (lb$_f$/pie^2), v es la velocidad en el tubo abierto en m/s (pie/s), D es el diámetro en m (pie), L es la longitud en m (pie), μ es la viscosidad en Pa · s o kg/m · s (lb$_m$/pie · s) y g_c es 32.174 lb$_m$ · pie/lb$_f$ · s^2.

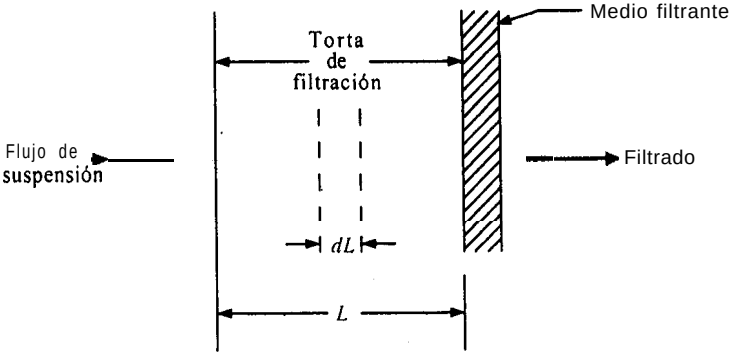


FIGURA 14.2-6. *Corte de una torta de filtración*

Para el flujo laminar en un lecho empacado con partículas, la relación de *Carman-Kozeny* es similar a la ecuación (14.2-1) y a la de *Blake-Kozeny* (3.1-17) y se ha demostrado que es aplicable ala filtración.

$$-\frac{\Delta p_c}{L} = \frac{k_1 \mu v (1-\varepsilon)^2 S_0^2}{\varepsilon^3} \tag{14.2-2}$$

donde k_1 es una constante igual a 4.17 para partículas aleatorias, de tamaño y forma definidos, μ es la viscosidad del filtrado en Pa · s (lb_m/pie · s), v es la velocidad lineal basada en el área de filtración, en m/s (pie/s), ε es la fracción de espacios vacíos o porosidad de la torta, L es el espesor de torta en m (pie), S_0 es el área superficial específica de las partículas en m^2 (pie^2) de área de partícula por m^3 (pie^3) de volumen de partículas sólidas y Ap, es la caída de presión en la torta en N/m^2 (lb_f/pie^2). En unidades del sistema inglés, el lado derecho de la ecuación (14.2-2) se divide entre g_c. La velocidad lineal es

$$v = \frac{dV/dt}{A} \tag{14.2-3}$$

donde A es el área del filtro en m^2 (pie^2) y Ves el total de m^3 (pie^3) de filtrado recolectado en el' tiempo t s. El espesor de la torta L puede relacionarse con el volumen de filtrado V, por medio de un balance de materia. Si c_S es kg de sólidos/m^3 (lb_m/pie^3) de filtrado, el balance de materia nos da

$$LA(1-\varepsilon)\rho_p = c_S(V + \varepsilon LA) \tag{14.2-4}$$

donde ρ_p es la densidad de las partículas sólidas de la torta en kg/m^3 (lb_m/pie^3) de sólido. El término final de la ecuación (14.2-4) es el volumen del filtrado retenido en la torta. Este suele ser pequeño y se desprecia.

Al sustituir la ecuación (14.2-3) en la (14.2-2) y al usarla (14.2-4) para eliminar L, se obtiene la ecuación final

$$\frac{dV}{A\,dt} = \frac{-\Delta p_c}{\dfrac{k_1(1-\varepsilon)S_0^2 \quad \mu c_S V}{\rho_p \varepsilon^3 \qquad A}} = \frac{-\Delta p_c}{\alpha \dfrac{\mu c_S V}{A}} \tag{14.2-5}$$

donde α es la resistencia específica de la torta en m/kg (pie/lb_m), que se define como

$$\alpha = \frac{k_1(1-\varepsilon)S_0^2}{\rho_p \varepsilon^3} \tag{14.2-6}$$

Para la resistencia del medio filtrante, por analogía con la ecuación (14.2-5), se puede escribir la expresión

$$\frac{dV}{A\,dt} = \frac{-\Delta p_f}{\mu R_m} \tag{14.2-7}$$

donde R_m es la resistencia del medio filtrante al flujo de filtración en m^{-1} (pie^{-1}) y Δp_f es la caída de presión. Cuando R_m se trata como constante empírica, incluye tanto la resistencia al flujo en las conexiones de tuberías hacia y desde el filtro como la resistencia del medio filtrante.

Puesto que las resistencias de la torta y del medio filtrante están en serie, se pueden combinar las ecuaciones (14.2-5) y (14.2-7), con lo que se obtiene

$$\frac{dV}{A\,dt} = \frac{-\Delta p}{\mu\left(\frac{\alpha c_S V}{A} + R_m\right)} \tag{14.2-8}$$

donde Δ_p = Ap, + Δp_f. Algunas veces, (14.2-8) se modifica como sigue:

$$\frac{dV}{A\,dt} = \frac{-\Delta p}{\frac{\mu\alpha c_S}{A}(V + V_e)} \tag{14.2-9}$$

donde V_e es el volumen de filtrado necesario para formar una torta de filtración ficticia cuya resistencia sea igual a R,.

El volumen del filtrado V también se puede relacionar con W, que son los kilogramos de sólido acumulado como torta seca,

$$W = c_S V = \frac{\rho c_x}{1 - m c_x} V \tag{14.2-10}$$

donde c_x es la fracción de masa de sólido en la suspensión, m es la relación de masa de la torta húmeda respecto a la torta seca y ρ es la densidad del filtrado en kg/m^3 (lb$_m$/pie^3).

2. Resistencia específica de la torta, La ecuación (14.2-6) indica que la resistencia específica de la torta está en función de la fracción de espacios huecos ε y de S_0. También está en función de la presión, pues ésta puede afectar a ε. La variación de α con respecto a Ap se determinar experimentalmente a presión constante con diferentes caídas de presión.

Por otra parte, también se pueden llevar a cabo experimentos de compresión-permeabilidad, mediante un cilindro de fondo poroso sobre el cual se forma la torta de filtrado. La filtración se efectúa por gravedad y el dispositivo opera a presión atmosférica, con una caída de presión baja. Un pistón en la parte superior comprime la torta a presión conocida y entonces, se añade filtrado a la torta y se determina α con una forma diferencial de la ecuación (14.2-9). El proceso se repite para otras presiones de compresión (G1).

Si a es independiente de $-\Delta p$, los lodos son incompresibles. Por lo general, a aumenta con $-\Delta p$, pues la mayoría de las tortas son algo comprimibles. Una ecuación empírica de uso muy común es

$$a = \alpha_0(-\Delta p)^s \tag{14.2-11}$$

donde α_0 y s son constantes empíricas. La constante de comprensibilidad s es cero para lodos o tortas incompresibles y suele tener valores entre 0.1 y 0.8. Algunas veces se usa la siguiente relación:

$$\text{a} = \alpha_0'[\,1 + \beta(-\text{Ap})^{s'}] \tag{14.2-12}$$

donde α_0', β y s' son constantes empíricas. Grace (G1) proporciona datos experimentales para diversos tipos de tortas.

Los datos obtenidos en experimentos de filtración suelen ser poco reproducibles. El estado de aglomeración de las partículas en la suspensión puede variar y afectar la resistencia específica de la torta.

14.2E Ecuaciones de filtración para procesos a presión constante

1. Ecuaciones básicas para la velocidad de filtración en los *procesos por lotes.* Con frecuencia, las filtraciones se llevan a cabo en condiciones de presión constante. La ecuación (14.2-8) se puede invertir y reordenar para obtener

$$\frac{dt}{dV} = \frac{\mu\alpha c_S}{A^2(-\Delta p)}V + \frac{\mu}{A(-\Delta p)}R_m = K_P V + B \qquad \textbf{(14.2-13)}$$

donde K_p se da en s/m^6 (s/pie^6) y B en s/m^3 (s/pie^3).

$$K_P = \frac{\mu\alpha c_S}{A^2(-\Delta p)} \quad \text{(SI)}$$

$$K_P = \frac{\mu\alpha c_S}{A^2(-\Delta p)g_c} \quad \text{(Unidades se sistema inglés)} \qquad \textbf{(14.2-14)}$$

$$B = \frac{\mu R_m}{A(-\Delta p)} \quad \text{(SI)}$$

$$B = \frac{\mu R_m}{A(-\Delta p)g_c} \quad \text{(Unidades se sistema inglés)} \qquad \textbf{(14.2-15)}$$

Para presión invariable, a constante y una torta incompresible, V y t son las únicas variables de la ecuación (14.2-13). Integrando para obtener el tiempo de filtración t en s,

$$\int_0^t dt = \int_0^V (K_p V + B)dV \qquad \textbf{(14.2-16)}$$

$$t = \frac{K_p}{2}V^2 + BV \qquad \textbf{(14.2-17)}$$

Al dividir entre V

$$\frac{t}{V} = \frac{K_p V}{2} + B \qquad \textbf{(14.2-18)}$$

donde V es el volumen total de filtrado en m^3 (pie^3) recolectado en t s.

Para evaluar la ecuación (14.2-17) es necesario conocer α y R_m. Esto se puede hacer usando la ecuación (14.2-18). Se obtienen los datos de V recogidos en diferentes tiempos t. Entonces, se grafican los datos experimentales de t/V contra V como en la figura 14.2-7. A menudo, el primer punto de la gráfica no cae sobre la línea y se omite. La pendiente de la línea es $K_p/2$ y la intersección, B. Después, se utilizan las ecuaciones (14.2-14) y (14.2-15) para determinar los valores de α y de R_m.

EJEMPLO 14.2-l. Evaluación de las constantes de filtración en un proceso a presión constante

Se cuenta con los siguientes datos para filtrar en el laboratorio una suspensión de $CaCO_3$ en agua a 298.2 K (25 "C), a presión constante (-Ap) de 338 kN/m^2

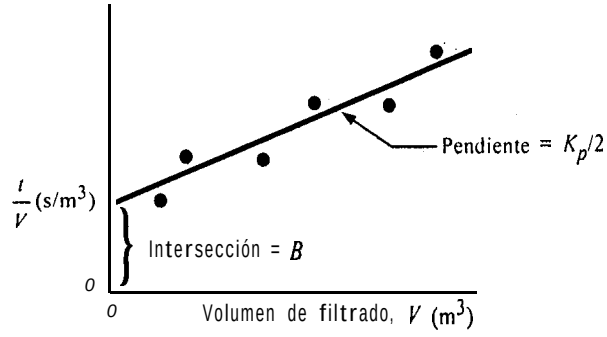


FIGURA 14.2-7. *Determinación de constantes en una filtración a presión constante*

(7060 lb_f/pie^2) (R1, R2, M1). El área de filtración de la prensa de placas y marcos es $A = 0.0439$ m^2 (0.473 pie^2), y la concentración de la suspensión es $c_S = 23.47$ kg/m^3 (1.465 lb_m /pie^3). Calcule las constantes α y R_m con base en estos datos experimentales, si t es el tiempo en s y Ves el volumen de filtrado recolectado en m^3.

t	V	t	V	t	V
4.4	0.489×10^{-3}	34.7	2.489×10^{-3}	73.6	4.004×10^{-3}
9.5	1.000×10^{-3}	46.1	3.002×10^{-3}	89.4	4.502×10^{-3}
16.3	1.501×10^{-3}	59.0	3.506×10^{-3}	107.3	5.009×10^{-3}
24.6	2.000×10^{-3}				

Solución: Primero se calculan los datos como t/V y se tabulan en la tabla 14.2-1. Se construye la gráfica de t/V contra Ven la figura 14.2-8, y se determinan la intersección que es $B = 6400$ s/m^3 (181 s/pie^3) y la pendiente, que es $K_p/2 = 3.00 \times 10^6$ s/m^6. Por tanto, $K_p = 6.00 \times 10^6$ s/m^6 (4820 s/pie^6).

TABLA 14.2-I. *Valores de t/V para el ejemplo 14.2-1 (t = s, V = m^3)*

t	$V \times 10^{-3}$	$(t/V) \times 10^{-3}$
0	0	
4.4	0.498	8.84
9.5	1.000	9.50
16.3	1.501	10.86
24.6	2.000	12.30
34.7	2.498	13.89
46.1	3.002	15.36
59.0	3.506	16.83
73.6	4.004	18.38
89.4	4.502	19.86
107.3	5.009	21.42

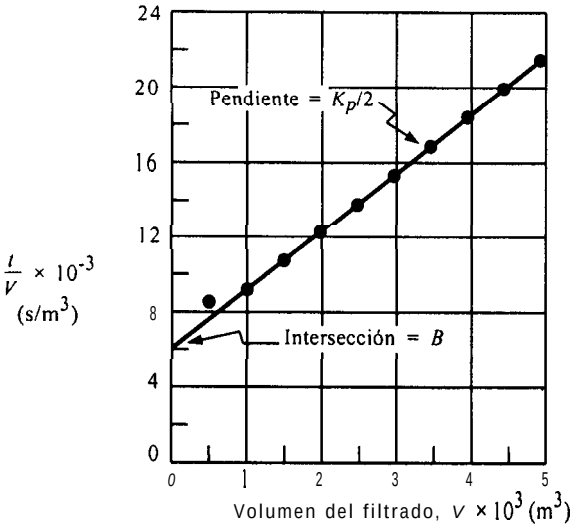


FIGURA 14.2-8. *Determinación de las constantes del ejemplo 14.2-l*

A 298.2 K, la viscosidad del agua es 8.937×10^{-4} Pa · s = 8.937×10^{-4} kg/m · s. Sustituyendo los valores conocidos en la ecuación (14.2-14) y resolviendo,

$$K_p = 6.00 \times 10^6 = \frac{\mu \alpha c_s}{A^2(-\Delta p)} = \frac{(8.937 \times 10^{-4})(\alpha)(23.47)}{(0.0439)^2(338 \times 10^3)}$$

$$\alpha = 1.863 \times 10^{11} \text{ m/kg } (2.77 \times 10^{11} \text{ pie/lb}_m)$$

Sustituyendo en la ecuación (14.2-15) y despejando,

$$B = 6400 = \frac{\mu R_m}{A(-\Delta p)} = \frac{(8.937 \times 10^{-4})(R_m)}{0.0439(338 \times 10^3)}$$

$$R_m = 10.63 \times 10^{10} \text{ m}^{-1} (3.24 \times 10^{10} \text{ pie}^{-1})$$

EJEMPLO 14.2-2. Tiempo requerido para efectuar una filtración

Se desea filtrar la misma suspensión del ejemplo 14.2-1 en una prensa de placas y marcos que tiene 20 marcos y 0.873 m^2 (9.4 pie*) de área por marco. Se usará la misma presión constante. Suponiendo las mismas propiedades de la torta de filtrado y de la tela de filtración, calcule el tiempo necesario para extraer 3.37 m^3 (119 pie^3) de filtrado.

Solución: En el ejemplo 14.2-1, el área $A = 0.0439$ m^2, $K_p = 6.00 \times 10^6$ s/m^6, y $B = 6400$ s/m^3. Puesto que α y R_m tendrán los mismos valores, es posible corregir K_p. De acuerdo con la ecuación (14.2-14), K_p es proporcional a $1/A^2$. La nueva área es $A = 0.873(20) = 17.46$ m^2 (188 pie*). El nuevo valor de K_p es

$$K_p = 6.00 \times 10^6(0.0439/17.46)^2 = 37.93 \text{ s/m}^6 \ (0.03042 \text{ s/pie}^6)$$

El nuevo valor de B es proporcional a $1/A$ de acuerdo con la ecuación (14.2-15)

$$B = (6400)\,\frac{0.0439}{17.46} = 16.10\ \text{s/m}^3\ (0.456\ \text{s/pie}^3)$$

Sustituyendo en la ecuación (14.2-17),

$$t = \frac{K_p}{2}V^2 + BV = \frac{37.93}{2}(3.37)^2 + (16.10)(3.37) = 269.7\ \text{s}$$

Y en unidades del sistema inglés,

$$t = \frac{K_p}{2}V^2 + BV = \frac{0.03042}{2}(119)^2 + (0.456)\ (119) = 269.7\ \text{s}$$

2. Ecuaciones para el lavado de tortas de filtrado y tiempo total del ciclo. El lavado de una torta después del ciclo de filtrado se lleva a cabo por desplazamiento del filtrado y por difusión. La cantidad de líquido de lavado debe ser suficiente para lograr el efecto que se desea. Para calcular las velocidades de lavado, se supone que las condiciones durante el mismo son iguales a las que existían al final de la filtración. Se supone también que la estructura de la torta no resulta afectada cuando el líquido de lavado remplaza al líquido de suspensión en ella.

En filtros en los que el líquido de lavado sigue una trayectoria de flujo similar a la de filtración, como es el caso de los filtros de hojas, la velocidad final de filtrado permite predecir la velocidad de lavado. Para una filtración a presión constante y usando la misma presión de lavado que de filtración, la velocidad final de filtrado es el recíproco de la ecuación (14.2-13),

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_f = \frac{1}{K_p V_f + B} \qquad \textbf{(14.2-19)}$$

donde $(dV/dt)_f$ = velocidad de lavado en m^3/s (pie^3/s) y V_f es el volumen tota1 de filtrado para todo el periodo al final de la filtración, en m^3 (pie^3).

Para filtros prensa de placas y marcos, el líquido de lavado se desplaza a través de una torta con el doble de espesor y la mitad del área con respecto a la de filtración, por 10 que la velocidad de lavado estimada es $\frac{1}{4}$ de la velocidad final de filtración.

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_f = \frac{1}{4}\frac{1}{K_p V_f + B} \qquad \textbf{(14.2-20)}$$

En la práctica, la velocidad de lavado puede ser inferior a la estimada debido a consolidación de la torta, a la formación de canales y de grietas. Algunos experimentos (M1) con filtros pequeños de placas y marcos han producido velocidades de lavado entre 70 y 92% de los valores estimados.

Después de completare] lavado, se requiere un tiempo adicional para extraer la torta, limpiar el filtro y volver a armarlo. El tiempo tota1 del ciclo de filtrado es la suma del tiempo de filtración, de lavado, y de limpieza.

EJEMPLO 14.2-3. Velocidad de lavado y tiempo total de un ciclo de filtración

Al final del ciclo de filtrado del ejemplo 14.2-2, se recolecta un volumen tota1 de filtrado de 3.37 m^3 en un tiempo tota1 de 269.7 s. Se desea lavar la torta en la prensa de placas y marcos, usando un volumen de agua igual al 10% de volumen del filtrado. Calcule el tiempo de lavado y el del ciclo total de filtración suponiendo que el lavado toma 20 min.

Solución: La ecuación (14.2-20) es válida para este filtro. Sustituyendo, $K_p = 37.93$ s/m^6, $B = 16.10$ s/m^3, y $V_f = 3.37$ m^3 la velocidad de lavado es como sigue:

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_f = \frac{1}{4}\frac{1}{(37.93)(3.37) + 16.10} = 1.737 \times 10^{-3}\ \text{m}^3/\text{s}\ (0.0613\ \text{pie}^3/\text{s})$$

Entonces, el tiempo de lavado con 0.10 (3.37), o 0.337 m^3 de agua de lavado es:

$$t = \frac{0.337\ \text{m}^3}{1.737 \times 10^{-3}\ \text{m}^3/\text{s}} = 194.0$$

El ciclo total de filtración tarda

$$\frac{269.7}{60} + \frac{194.0}{60} + 20 = 27.73\ \text{min}$$

3. Ecuaciones para filtración continua. En filtros de operación continua como los de tambor rotatorio, la alimentación, el filtrado y la torta están sometidos a estado estacionario, esto es, las velocidades son continuas. En un tambor rotatorio, la caída de presión se mantiene constante durante la filtración. La formación de la torta implica un cambio continuo de las condiciones. En la filtración continua, la resistencia del medio filtrante suele ser despreciable en comparación con la de la torta. De esta forma, en la ecuación (14.2-13), $B = 0$.

Integrando la ecuación (14.2-13) con $B = 0$,

$$\int_0^t dt = K_p \int_0^V V\, dV \tag{14.2-21}$$

$$t = K_p \frac{V^2}{2} \tag{14.2-22}$$

donde t es el tiempo requerido para la formación de la torta. En un filtro de tambor rotatorio, el tiempo de filtración t es inferior al del ciclo total t_c, en una cantidad igual a

$$t = ft_c \tag{14.2-23}$$

dondefes la fracción del ciclo usada para la formación de la torta. En el tambor rotatorio, f es la fracción de inmersión del tambor en la suspensión.

Ahora, sustituyendo las ecuaciones (14.2-14) y (14.2-23) en la (14.2-22) y reordenando,

$$\text{velocidades de flujo} = \frac{V}{At_c} = \left[\frac{2f(-\Delta P)}{t_c \mu \alpha c_s}\right]^{1/2} \tag{14.2-24}$$

Si la resistencia específica de la torta varía con la presión, se necesita conocer las constantes de la ecuación (14.2-11) para predecir el valor de α que se requiere en la ecuación (14.2-24). La comprobación experimental de la ecuación (14.2-24) indica que el flujo varía inversamente con la raíz cuadrada de la viscosidad y con el tiempo del ciclo (N 1).

Cuando se usan tiempos de ciclo cortos en la filtración continua o la resistencia del medio de filtración es relativamente grande, se debe incluir el término de resistencia del filtro B, y la ecuación (14.2-13) se convierte en

$$t = ft_c = K_p \frac{V^2}{2} + B\ V \tag{14.2-25}$$

Entonces, la ecuación (14.2-25) se transforma en

$$\text{velocidad de flujo} = \frac{V}{At_c} = \frac{-R_m/t_c + \left[R_m^2/t_c^2 + 2c_S\alpha(-\Delta p)f/(\mu t_c)\right]^{1/2}}{\alpha c_S} \qquad \textbf{(14.2-26)}$$

EJEMPLO 14.2-4. Filtración en un filtro continuo de tambor rotatorio
Un filtro rotatorio de tambor al vacío que sumerge el 33% del tambor en la suspensión se va a utilizar para filtrar una suspensión de $CaCO_3$, como se vio en el ejemplo 14.2-l con una caída de presión de 67.0 kPa. La concentración de sólidos en la suspensión es c_x = 0.19 l kg de sólido/kg de suspensión y la torta del filtro es tal que los kg de torta húmedaikg de torta seca = m = 2.0. La densidad y la viscosidad del filtrado se pueden suponer equivalentes a las del agua a 298.2 K. Calcule el área del filtro necesaria para filtrar 0.778 kg de suspensión/s. El tiempo de ciclo del filtro es de 250 s. La resistencia específica de la torta se puede representar como $\alpha = (4.37 \times 10^9)(-\Delta p)^{0.3}$, donde $-\Delta p$ se da en Pa y cx en m/kg.

Solución: Según el Apéndice A.2, para el agua, $\rho = 996.9$ kg/m^3, $\mu = 0.8937 \times 10^{-3}$ Pa . s. A partir de la ecuación (14.2-10),

$$c_S = \frac{\rho c_x}{1 - mc_x} = \frac{996.9(0.191)}{1 - (2.0)(0.191)} = 308.1 \text{ kg de sólidos/m}^3 \text{ de filtrado}$$

Despejando $\alpha = (4.37 \times 10^9)(67.0 \times 10^3)^{0.3} = 1.225 \times 10^{11}$ m/kg. Para calcular la velocidad de flujo del filtrado,

$$\frac{V}{t_c} = 0.778\ (c_x)/(c_s)$$

$$= \left(0.778 \frac{\text{kg de suspensión}}{\text{s}}\right)\left(0.191 \frac{\text{kg de sólido}}{\text{kg de suspensión}}\right)\Big/\left(308.1 \frac{\text{kg de sólido}}{\text{m}^3 \text{ de filtrado}}\right)$$

$$= 4.823 \times 10^{-4} \text{ m}^3 \text{ de filtrado.}$$

Al sustituir en la ecuación (14.2-24), al despreciar y hacer $B = 0$ y al resolver,

$$\frac{V}{At_c} = \frac{4.823 \times 10^{-4}}{A} = \left[\frac{2(0.33)(67.0 \times 10^3)}{250(0.8937 \times 10^{-3})(1.225 \times 10^{11})(308.1)}\right]^{1/2}$$

Por tanto, $A = 6.60$ m^2.

14.2F Ecuaciones para filtración a velocidad constante

En algunos casos, las corridas de filtración se llevan a cabo en condiciones de velocidad constante en lugar de presión constante. Esto ocurre cuando la suspensión se alimenta al filtro por medio de una bomba de desplazamiento positivo. La ecuación (14.2-8) se puede reordenar para obtener la siguiente expresión para una velocidad constante (dV/dt) m^3/s.

$$-\Delta p = \left(\frac{\mu\alpha c_s}{A^2}\frac{dV}{dt}\right)V + \left(\frac{\mu R_m}{A}\frac{dV}{dt}\right) = K_V V + C \qquad (14.2\text{-}27)$$

donde

$$K_V = \left(\frac{\mu\alpha c_S}{A^2}\frac{dV}{dt}\right) \qquad \text{(SI)}$$

$$K_V = \left(\frac{\mu\alpha c_S}{A^2 g_c}\frac{dV}{dt}\right) \qquad \text{(Unidades del sistema inglés)} \qquad (14.2\text{-}28)$$

$$C = \left(\frac{\mu R_m}{A}\frac{dV}{dt}\right) \qquad \text{(SI)}$$

$$C = \left(\frac{\mu R_m}{A g_c}\frac{dV}{dt}\right) \qquad \text{(Unidades del sistema inglés)} \qquad (14.2\text{-}29)$$

K_V se da en N/m^5 (lb_f/pie^5) y C en N/m^2 (lb_f/pie^2).

Suponiendo que la torta sea incompresible, K_V y C son constantes características de la suspensión, de la torta, de la velocidad de flujo del filtrado, etc. Por consiguiente, una gráfica de la presión, $-\Delta p$, en función del volumen total de filtrado recolectado, *V*, produce una recta para una velocidad constante dV/dt. La pendiente de la línea és K_V y la intersección es C. La presión aumenta a medida que el espesor de la torta se incrementa y también cuando aumenta el volumen del filtrado recolectado.

Las ecuaciones se pueden reordenar en términos de $-\Delta p$ y el tiempo t como variables. En cualquier momento durante la filtración, el volumen total *Vse* relaciona con la velocidad y el tiempo total t como sigue:

$$V = t\frac{dV}{dt} \qquad (14.2\text{-}30)$$

Sustituyendo la ecuación (14.2-30) en la (14.2-27),

$$-\Delta p = \left[\frac{\mu\alpha c_s}{A^2}\left(\frac{dV}{dt}\right)^2\right] t + \left(\frac{\mu R_m}{A}\frac{dV}{dt}\right) \qquad (14.2\text{-}31)$$

Si la resistencia específica de la torta (α) no es constante, sino que varía como en la ecuación (14.2-11), ésta puede remplazar a a en la ecuación (14.2-27) para obtener la expresión final.

14.3 PRECIPITACIÓN Y SEDIMENTACIÓN EN LA SEPARACIÓN PARTÍCULA-FLUIDO

14.3A Introducción

En la filtración, las partículas sólidas se separan de la suspensión forzando el paso del fluido a través de un medio filtrante, que retiene a las partículas sólidas y permite que el fluido pase. En la precipitación y la sedimentación, las partículas se separan del fluido por la acción de las fuerzas gravitatorias.

Entre las aplicaciones de la precipitación y la sedimentación se incluye la eliminación de sólidos de aguas negras, la sedimentación de cristales del licor madre, la separación de mezclas líquido-líquido provenientes de la etapa de extracción con disolvente de un sedimentador, la sedimentación de partículas alimenticias sólidas de un líquido preparado y la sedimentación de una suspensión en el proceso de lixiviación de la soya. Las partículas pueden ser de tipo sólido o gotas de líquido, el fluido puede ser un líquido o un gas y estar en reposo o en movimiento.

En algunos procesos de precipitación y sedimentación, el objetivo es eliminar las partículas de la corriente del fluido para que éste quede libre de contaminantes. En otros casos, se desea recuperar las partículas como productos, por ejemplo al aislar la fase dispersa en una extracción líquido-líquido. En algunos casos, las partículas se suspenden en fluidos para separarlas, de acuerdo con su tamaño o densidad.

Cuando una partícula esta a suficiente distancia de las paredes del recipiente y de otras partículas, de manera que no afecten su caída, el proceso se llama *sedimentación libre.* La interferencia es inferior al 1% cuando la relación del diámetro de lapartículacon respecto al diámetro del recipiente no sobrepasa 1:200, o cuando la concentración de las partículas en solución no llega al 0.2% en volumen. Cuando las partículas están muy juntas, se sedimentan a velocidad menor y el proceso se llama *sedimentación frenada.* La separación de una suspensión diluida por la acción de la gravedad con la obtención de un fluido transparente y otra suspensión con mayor proporción de sólidos, se llama *sedimentación.*

14.3B Teoría del movimiento de las partículas a través de un fluido

1. Deducción de las ecuaciones básicas para esferas rígidas. Cuando una partícula se mueve a través de un fluido, varias fuerzas actúan sobre ella. Primero, se requiere una diferencia de densidades entre la partícula y el fluido. Debe haber una fuerza gravitatoria externa que imparta un movimiento a la partícula. Si las densidades del fluido y de la partícula son iguales, la fuerza de flotación sobre la partícula contrarrestara a la fuerza externa y la partícula no se moverá con respecto al fluido.

Para el movimiento de una partícula rígida en un fluido existen tres fuerzas que actúan sobre los cuerpos: la gravedad que actúa hacia abajo, la fuerza de flotación que actúa hacia arriba y la resistencia o fuerza de retardo que actúa en dirección opuesta al movimiento de la partícula.

Consideraremos una partícula de masa m kg cayendo a una velocidad de v m/s con relación al fluido. La densidad de la partícula sólida es ρ_p kg/m^3 de sólido y la del líquido es ρ kg/m^3 de líquido. La fuerza de flotación F_b en N sobre la partícula es

$$F_b = \frac{m\rho g}{\rho_p} = V_p \rho g \qquad \textbf{(14.3-1)}$$

donde m/ρ_p es el volumen V_p en m^3 de la partícula, y g es la aceleración de la gravedad en m/s^2.

La fuerza de gravitación o externa F_g en N que actúa sobre la partícula es

$$F_g = mg \qquad \textbf{(14.3-2)}$$

La fuerza de arrastre F_D sobre un cuerpo, en N, se puede deducir del hecho de que, como en el caso de flujo de fluidos, la resistencia al flujo o arrastre es proporcional a la carga de velocidad $v^2/2$ del fluido desplazado por el cuerpo en movimiento. Esto se debe multiplicar por la densidad del fluido y por un área significativa A, tal como el área proyectada de la partícula. Esto se definió previamente en la ecuación (3.1-l).

$$F_D = C_D \frac{v^2}{2} \rho A \qquad \textbf{(14.3-3)}$$

donde el coeficiente de arrastre C_D es la constante de proporcionalidad, esto es, un numero adimensional.

Entonces, la fuerza resultante sobre el cuerpo es $F_g - F_b - F_D$. Esta fuerza resultante debe ser igual a la debida a la aceleración:

$$m\frac{dv}{dt} = F_g - F_b - F_D \tag{14.3-4}$$

Sustituyendo las ecuaciones (14.3-1) a (14.3-3) en la (14.3-4),

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \frac{m\rho g}{\rho_p} - \frac{C_D v^2 \rho A}{2} \tag{14.3-5}$$

Si empezamos desde el momento en que el cuerpo deja de estar en reposo, su caída pasa por dos periodos: el de caída aceleraday el de caída a velocidadconstante. El periodo inicial de aceleración suele ser bastante corto, del orden de una décima de segundo más o menos. Por consiguiente, el periodo de caída a velocidad constante es el más importante. A esta velocidad se le llama *velocidad de precipitación libre o velocidad terminal* v_t.

Para despejar el valor de la velocidad terminal en la ecuación (14.3-5), $dv/dt = 0$ y la expresión toma la forma

$$v_t = \sqrt{\frac{2g(\rho_p - \rho)m}{A\rho_p C_D \rho}} \tag{14.3-6}$$

Para partículas esféricas, $m = \pi D_p^3 \rho_p /6$ y $A = \pi D_p^2/4$. Sustituyendo estos valores en la ecuación (14.3-6), se obtiene, para partículas esféricas:

$$v_t = \sqrt{\frac{4(\rho_p - \rho)gD_p}{3C_D\rho}} \tag{14.3-7}$$

donde v, se da en m/s (pie/s), p en kg/m^3 (lb$_m$/pie^3), g tiene el valor 9.80665 m/s^2 (32.174 pie/s^2) y D_p se da en m (pie).

2. Coeficiente de arrastre para esferas rígidas. El coeficiente de arrastre para esferas rígidas está en función del número de Reynolds $D_p v\rho/\mu$ de la esfera, como muestra la figura 14.3-l. En la región del flujo laminar, llamada región de la ley de Stokes para $N_{Re} < 1$, el coeficiente de arrastre, como se analizó en la sección 3.1B, es

$$C_D = \frac{24}{D_p v\rho/\mu} = \frac{24}{N_{Re}} \tag{14.3-8}$$

donde μ es la viscosidad del líquido en Pa · s o kg/m · s (lb$_m$/pie · s). Sustituyendo en la ecuación (14.3-7) para flujo laminar.

$$v_t = \frac{gD_p^2(\rho_p - \rho)}{18\mu} \tag{14.3-9}$$

Para partículas con otras formas, los coeficientes de arrastre difieren de los de la figura 14.3-1 y están dados en la figura 3.1-2 y en la bibliografía (B2, L2, P1). En la región turbulenta de la ley de Newton, con un número de Reynolds superior a aproximadamente 1000 hasta 2.0×10^5, el coeficiente de arrastre es casi constante con valor de $C_D = 0.44$.

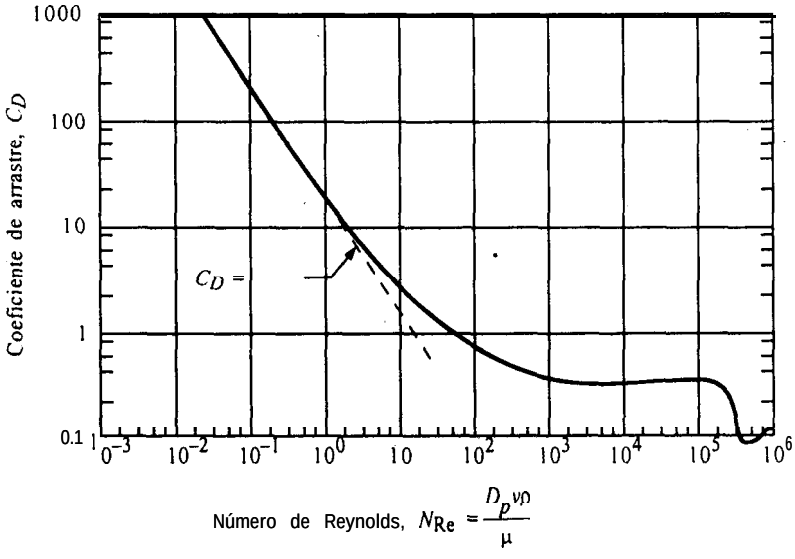


FIGURA 14.3-I. *Coeficiente de resislencin al flujo para uno esfera rigidn.*

La resolución de la ecuación (14.3-7) se lleva a cabo por aproximaciones sucesivas cuando se conoce el diámetro de la partícula y se desea obtenerla velocidad terminal. Esto se debe a que C_D también depende de la velocidad v,.

Si las partículas son muy pequeñas, tienen movimiento browniano. El *movimiento browniano es* el movimiento aleatorio de las partículas causado por las colisiones con las moléculas del fluido que las rodea. Este movimiento, en direcciones impredecibles, tiende a contrarrestar el efecto de la gravedad, por lo que la precipitación puede ser más lenta y, aveces, no se verifica. Para partículas de unos cuantos micrómetros, el efecto browniano es considerable, y amenos de 0.1 μm, es predominante. Cuando las de partículas son muy pequeñas, la aplicación de una fuerza centrífuga ayuda a reducir el efecto del movimiento browniano.

EJEMPLO 14.3-1. Velocidad de precipitación de gotas de aceite

Se desea precipitar gotas de aceite con diámetro de 20 μm (0.020 mm), suspendidas en aire a una temperatura de 37.8 °C (3 ll K) y 101.3 kPa de presión . La densidad del aceite es 900 kg/m^3 (56.2 $lb_m/(pie^3)$). Calcule la velocidad terminal de precipitación de las gotas.

Solución: Los valores conocidos son $D_p = 2.0 \times 10^{-5}$ m, ρ_p = 900 kg/m^3. De acuerdo con el Apéndice A.3 para el aire a 37.8 "C, ρ = 1.137 kg/m^3, μ = 1.90 × 1 0^{-5} Pa ' s (1.275 × 10^{-5} lb_m/pie ' s). Se supondrá que la gota es una esfera rígida.

La solución se obtiene por aproximaciones sucesivas, pues se desconoce la velocidad. Por tanto, C_D no se puede evaluar directamente. El número de Reynolds es

$$N_{Re} = \frac{D_p v_t \rho}{\mu} = \frac{(2.0 \times 10^{-5})(v_t)(1.137)}{1.90 \times 10^{-5}} = 1.197 v_t \qquad (14.3\text{-}10)$$

Como primera aproximación, se supone que $v_t = 0.305$ m/s. Entonces, $N_{Re} = 1.197 (0.305) = 0.365$. Sustituyendo en la ecuación (14.3-7) y despejando C_D,

$$v_t = \sqrt{\frac{4(\rho_p - \rho)gD_p}{3C_D\rho}} = \sqrt{\frac{4(900-1.137)(9.8066)(2.0\times10^{-5})}{(3)C_D(1.137)}} \qquad \textbf{(14.3-11)}$$

$$C_D = \frac{0.2067}{v_t^2}$$

Si $v_t = 0.305$ m/s, $C_D = 0.2067/(0.305)2 = 2.22$
Suponiendo que $v_t = 0.0305$ m/s, la ecuación (14.3-10) da $N_{Re} = 0.0365$ y aplicando la ecuación (14.3-11), $C_D = 222$. Para la tercera aproximación, suponiendo que $v_t = 0.00305$ m/s, $N_{Re} = 0.00365$ y $C_D = 22200$. Estos tres puntos de N_{Re} y los valores de C_D se grafican en una curva similar a la de la figura 14.3-1, como muestra la figura 14.3-2. Se puede demostrar que la línea que pasa por estos tres puntos es recta. La intersección de esta recta con la línea de correlación del coeficiente de arrastre, es la resolución del problema y da $N_{Re} = 0.012$. Este número de Reynolds permite calcular la velocidad empleando la ecuación (14.3-10).

$$N_{Re} = 0.012 = 1.197\, v_t$$

$$v_t = 0.0100 \text{ m/s}(0.0328 \text{ pie/s})$$

La partícula considerada queda situada en el intervalo de números de Reynolds inferiores a 1, que es la región laminar de la ley de Stokes. Siguiendo otro procedimiento, la velocidad se puede calcular sustituyendo en la ecuación (14.3-9),

$$v_t = \frac{9.8066\left(2.0 \times 10^{-5}\right)^2(900-1.137)}{18\left(1.90 \times 10^{-5}\right)} = 0.0103 \text{ m/s}$$

Obsérvese que la ecuación (14.3-9) no podía usarse hasta haber determinado que la caída de la partícula correspondía a la región laminar.

En partículas rígidas no esféricas, la resistencia al flujo depende de la forma de la partícula y de su orientación con respecto al movimiento. Diversas referencias (P1, B2, C1) proporcionan correlaciones de coeficientes de resistencia al flujo para partículas de diferentes formas.

3. Coeficientes de resistencia al flujo (arrastre) para esferas no rígidas. Cuando las partículas no son rígidas, puede presentarse una circulación interna dentro de ellas, así como deformaciones de las mismas. Ambos efectos producen variaciones en el coeficiente de arrastre y en la velocidad terminal. Perry y Green (P1) incluyen coeficientes de arrastre para burbujas de aire que se elevan en agua, y para un número de Reynolds inferior a 50, la curva es igual a la de esferas rígidas en agua.

Para gotas líquidas en gases, se obtiene la misma relación de resistencia al flujo que para las partículas esféricas sólidas, cuando el número de Reynolds no pasa de 100 (H1). Al aumentar la resistencia al flujo, las gotas grandes se deforman. Las gotas líquidas pequeñas en líquidos inmiscibles se comportan como esferas rígidas y la curva del coeficiente de arrastre es igual a la de esferas rígidas, hasta un número de Reynolds de más o menos 10. Por encima de este valor y hasta un número de Reynolds de 500, la velocidad terminal es mayor que la de los sólidos, debido a la circulación interna en la gota.

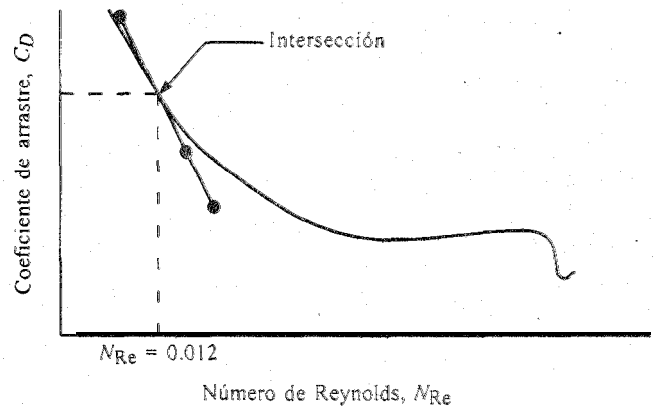


FIGURA 14.3-2. *Resolución del ejemplo 14.3-1 para la velocidad de precipitación de una partícula.*

14.3C Precipitación frenada

En muchos casos de precipitación, el número de partículas es bastante grande y las propias partículas interfieren entre sí debido a su movimiento. Los gradientes de velocidad que rodean a cada partícula son afectados por la presencia cercana de otras partículas. La precipitación de las partículas desplaza a el líquido y esto genera una velocidad ascendente bastante considerable en él. Por consiguiente, la velocidad del líquido es notablemente mayor con respecto a la partícula que con respecto al propio aparato.

En un flujo frenado, la velocidad de precipitación es inferior a la que resultaría de un cálculo con la ley de Stokes, ecuación (14.3-9). La fuerza de arrastre real es mayor en la suspensión, debido a la interferencia de las otras partículas. Esta viscosidad efectiva más alta de la mezcla, μ_m, es igual a la viscosidad real del propio líquido, μ, dividida entre un factor de corrección empírico, ψ_p, que depende de ε, esto es, de la fracción de volumen de la mezcla o suspensión ocupada por el líquido (S1).

$$\mu_m = \frac{\mu}{\psi_p} \tag{14.3-12}$$

donde ψ_p es adimensional y corresponde a (S1):

$$\psi_p = \frac{1}{10^{1.82(1-\varepsilon)}} \tag{14.3-13}$$

La densidad de la fase fluida equivale, de hecho, a la densidad general de la suspensión ρ_m, que es como sigue:

$$\rho_m = \varepsilon\rho + (1 - \varepsilon)\rho_p \tag{14.3-14}$$

donde ρ_m es la densidad de la suspensión en kg sólido + líquido/m^3. Con esto, la diferencia de densidades es

$$\rho_p - \rho_m = \rho_p - [\varepsilon\rho + (1 - \varepsilon)\rho_p] = \varepsilon(\rho_p - \rho) \tag{14.3-15}$$

La velocidad de precipitación v_t con respecto al aparato es ε multiplicado por la velocidad calculada con la ley de Stokes.

Sustituyendo el valor de μ_m de la ecuación (14.3-12) por μ de la ecuación (14.3-9) y $(\rho_p - \rho_m)$ de la (14.3-15) por $(\rho_p - \rho)$, y multiplicando el resultado por ε para el efecto de la velocidad relativa, la ecuación (14.3-9) para precipitación laminar se transforma en

$$v_t = \frac{gD_p^2(\rho_p - \rho)}{18\mu}(\varepsilon^2 \psi_p) \tag{14.3-16}$$

Esto corresponde a la velocidad calculada con la ecuación (14.3-9) multiplicada por el factor de corrección $(\varepsilon^2\psi_p)$.

Entonces, el número de Reynolds se basa en la velocidad con respecto al fluido, y es

$$N_{\mathrm{Re}} = \frac{D_p v_t \rho_m}{\mu_m \varepsilon} = \frac{D_p^3 g(\rho_p - \rho)\rho_m \varepsilon \psi_p^2}{18\mu^2} \tag{14.3-17}$$

Cuando el número de Reynolds es inferior a 1, la precipitación corresponde al intervalo de aplicabilidad de la ley de Stokes. Para números de Reynolds superiores a 1.0, véase la referencia (P1). El efecto de la concentración es mayor en partículas no esféricas y en las de geometría angular (S1).

EJEMPLO 14.3-2. Precipitación frenada de esferas de vidrio

Calcule la velocidad de precipitación de esferas de vidrio con diámetro de 1.554×10^{-4} m (5.10×10^{-4} pie) en agua a temperatura de 293.2 K (20 °C). La suspensión contiene 60% de sólidos en peso. La densidad de las esferas de vidrio es $\rho_p = 2467$ kg/m^3 (154 lb$_m$/pie^3)

Solución: La densidad del agua es $\rho = 998$ kg/m^3 (62.3 lb$_m$/pie^3) y la viscosidad es $\mu = 1.005 \times 10^{-3}$ Pa · s (6.72×10^{-4} lb$_m$/pie · s). Para calcular la fracción de volumen ε del líquido,

$$\varepsilon = \frac{40/998}{40/998 + 60/2467} = 0.622$$

La densidad general de la suspensión ρ_m se calcula con la ecuación (14.3-14) y es

$$\rho_m = \varepsilon\rho + (1 - \varepsilon)\rho_p = 0.622(998) + (1 - 0 - 622)(2467)$$
$$= 1553 \text{ kg/m}^3 (96.9 \text{ lb}_m/\text{pie}^3)$$

Sustituyendo en la ecuación (14.3-13),

$$\psi_p = \frac{1}{10^{1.82(1-\varepsilon)}} = \frac{1}{10^{1.82(1-0.622)}} = 0.205$$

Sustituyendo en la ecuación (14.3-16), y usando unidades SI y del sistema inglés,

$$v_t = \frac{9.807(1.554 \times 10^{-4})^2(2467 - 998)(0.622^2 \times 0.205)}{18(1.005 \times 10^{-3})}$$

$$= 1.525 \times 10^{-3} \text{ m/s}$$

$$v_t = \frac{32.174\left(5.1 \times 10^{-4}\right)^2 (154 - 62.3)\left(0.622^2 \times 0.205\right)}{18\left(6.72 \times 10^{-4}\right)}$$

$$= 5.03 \times 10^{-3} \text{ pie/s}$$

El número de Reynolds se obtiene sustituyendo en la ecuación (14.3-17),

$$N_{\text{Re}} = \frac{D_p v_t \rho_m}{\mu_m \varepsilon} = \frac{D_p v_t \rho_m}{(\mu/\psi_p)\varepsilon} = \frac{\left(1.554 \times 10^{-4}\right)\left(1.525 \times 10^{-3}\right)1553}{\left(1.005 \times 10^{-3}/0.205\right)0.622}$$

$$= 0.121$$

Por consiguiente, la precipitación corresponde al intervalo laminar.

14.3D Efecto de pared sobre la precipitación libre

Cuando el diámetro D_p de la partícula es apreciable con respecto al diámetro D_W del recipiente donde se verifica la sedimentación, la partícula sufre un efecto retardante conocido como *efecto de pared*, cuyo resultado es una disminución de la velocidad de precipitación terminal. En el caso de una precipitación en el intervalo de la ley de Stokes, la velocidad terminal calculada se puede multiplicar por la siguiente expresión de corrección para el efecto de pared (Z1), cuando $D_p/D_W < 0.05$:

$$k_W = \frac{1}{1 + 2.1 D_p / D_W} \tag{14.3-18}$$

Para un régimen completamente turbulento, el factor de corrección es

$$k'_W = \frac{1 - \left(D_p/D_W\right)^2}{\left[1 + \left(D_p/D_W\right)^4\right]^{1/2}} \tag{14.3-19}$$

14.3E Precipitación diferencial y separación de sólidos en la clasificación

1. Métodos de hundimiento y flotación. Los dispositivos para separar partículas sólidas en diversas fracciones con base en sus velocidades de flujo o precipitación en fluidos, se llaman *clasificadores*. Hay varios métodos de separación para lograr esto por medio de hundimiento y flotación y precipitación diferencial. En el método de *hundimiento y flotación*, se usa un líquido de densidad intermedia entre la del material pesado o de alta densidad y la del de baja densidad. En este método, las partículas pesadas no flotan y se precipitan y las partículas ligeras flotan.

El método es independiente de los tamaños de las partículas y sólo depende de las densidades relativas de los dos materiales. Esto significa que los líquidos usados deben tener una densidad superior a la del agua, pues la mayoría de los sólidos también la tienen más alta. Por desgracia, hay pocos líquidos

con estas características que no sean costosos y corrosivos. Debido a esto, se usan seudolíquidos, que son una suspensión acuosa de materiales sólidos muy finos, de peso específico alto, tales como la galena (peso específico = 7.5) y la magnetita (peso específico = 5.17).

Se usa precipitación frenada y la densidad general del medio puede variar en intervalos amplios, modificando la proporción del material sólido fino en el medio. Las aplicaciones más comunes de esta técnica son la concentración de minerales y la limpieza de coque. Los materiales sólidos del medio son de diámetro tan pequeño, que su velocidad de precipitación es despreciable, con lo que se logran suspensiones bastante estables.

2. Métodos de precipitación diferencial. La separación de partículas sólidas en fracciones de diversos tamaños, con base en las velocidades de precipitación en el medio, se llama *clasificación o sedimentación diferencial*. La densidad del medio es inferior a la de cualquiera de las dos sustancias que se están separando.

En la precipitación diferencial, los materiales ligeros y pesados se precipitan en el medio usado. Una desventaja de este método radica en que, si tanto el material ligero como el pesado tienen un intervalo de tamaño más o menos amplio, las partículas pesadas más pequeñas precipitan con la misma velocidad terminal que las partículas ligeras más grandes.

Supóngase que se consideran dos materiales diferentes: un material A de alta densidad (como la galena, cuyo peso específico ρ_A es 7.5) y un material B de baja densidad (como el cuarzo, cuya gravedad específica $\rho_B = 2.65$). La velocidad terminal de precipitación de los componentes A y B, calculada mediante la ecuación (14.3-7), es la siguiente:

$$v_{tA} = \left[\frac{4(\rho_{pA} - \rho)gD_{pA}}{3C_{DA}\rho}\right]^{1/2} \tag{14.3-20}$$

$$v_{tB} = \left[\frac{4(\rho_{pB} - \rho)gD_{pB}}{3C_{DB}\rho}\right]^{1/2} \tag{14.3-21}$$

Para partículas con velocidades de sedimentación iguales, $v_{tA} = v_{tB}$ y al igualar las ecuaciones (14.3-20) y (14.3-21), cancelar términos y elevar al cuadrado ambos lados, se obtiene,

$$\frac{(\rho_{pA} - \rho)D_{pA}}{\rho C_{DA}} = \frac{(\rho_{pB} - \rho)D_{pB}}{\rho C_{DB}} \tag{14.3-22}$$

o

$$\frac{D_{pA}}{D_{pB}} = \frac{\rho_{pB} - \rho}{\rho_{pA} - \rho} \cdot \frac{C_{DA}}{C_{DB}} \tag{14.3-23}$$

Para partículas esencialmente esféricas y números de Reynolds muy elevados en la región de turbulencia de la ley de Newton, C_D es constante y $C_{DA} = C_{DB}$, por lo que

$$\frac{D_{pA}}{D_{pB}} = \left(\frac{\rho_{pB} - \rho}{\rho_{pA} - \rho}\right)^{1.0} \tag{14.3-24}$$

Para precipitación laminar que siga la ley de Stokes:

$$C_{DA} = \frac{24\mu}{D_{pA}v_{tA}\rho} \qquad C_{DB} = \frac{24\mu}{D_{pB}v_{tB}\rho} \tag{14.3-25}$$

Sustituyendo la ecuación (14.3-25) en la (14.3-23) y reordenando con base en la precipitación acorde con la ley de Stokes, esto es, con $v_{tA} = v_{tB}$,

$$\frac{D_{pA}}{D_{pB}} = \left(\frac{\rho_{pB} - \rho}{\rho_{pA} - \rho}\right)^{0.5} \tag{14.3-26}$$

Para un flujo de transición entre laminar y turbulento,

$$\frac{D_{pA}}{D_{pB}} = \left(\frac{\rho_{pB} - \rho}{\rho_{pA} - \rho}\right)^{n} \quad \text{donde } \frac{1}{2} < n < 1 \tag{14.3-27}$$

Para precipitación de partículas en el intervalo de turbulencia, la ecuación (14.3-24) es aplicable a velocidades de precipitación iguales. Cuando $D_{pA} = D_{pB}$ y la precipitación corresponde a la región de turbulencia de la ley de Newton, al combinar las ecuaciones (14.3-20) y (14.3-21),

$$\frac{v_{tA}}{v_{tB}} = \left(\frac{\rho_{pA} - \rho}{\rho_{pB} - \rho}\right)^{1/2} \tag{14.3-28}$$

Si las partículas de A y B precipitan en el mismo medio, se pueden usar las ecuaciones (14.3-24) y (14.3-28) para construir las gráficas de la figura 14.3-3, que corresponden a la relación de la velocidad respecto al diámetro para A y B.

Considérese primero una mezcla de partículas de los materiales A y B, con un intervalo de tamaño de D_{p1} a D_{p4} para ambos materiales. En el intervalo D_{p1} a D_{p4} en la figura 14.3-3, se puede obtener una fracción pura de la sustancia B, pues no hay partículas de A que precipiten con esta lentitud. En el intervalo de tamaño de D_{p3} a D_{p4}, es posible obtener una fracción pura de A, pues ninguna partícula de B precipita con la rapidez de las partículas de A de este tamaño. En el intervalo de tamaño de D_{p1} a D_{p3}, las partículas de A se precipitan con la misma rapidez que las de B del intervalo D_{p2} a D_{p4}, formando una fracción mezclada de A y B.

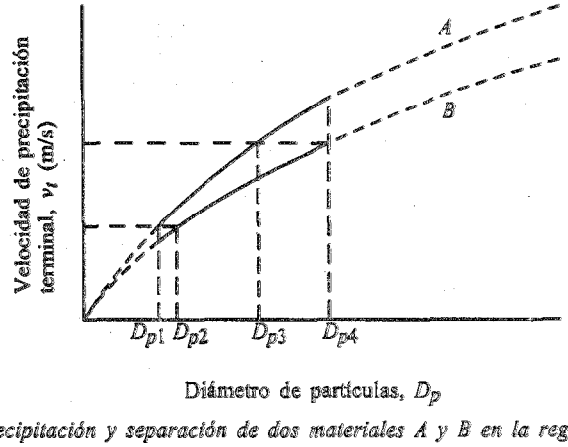


FIGURA 14.3-3. *Precipitación y separación de dos materiales A y B en la región de la ley de Newton.*

Al aumentar la densidad ρ del medio en la ecuación (14.3-24), el numerador disminuye proporcionalmente con más rapidez que el denominador y ello incrementa la separación entre D_{pA} y D_{pB}. En la región de la ley de Stokes, se obtienen curvas similares.

EJEMPLO 14.3-3. Separación de una mezcla de sílice y galena

Se desea separar una mezcla de partículas sólidas de sílice (B) y galena (A), con tamaños de 5.21×10^{-6} m a 2.50×10^{-5} m, por medio de una clasificación hidráulica usando condiciones de precipitación libre en agua a 293.2 K (B1). El peso específico del sílice es 2.65 y el de la galena, 7.5. Calcule los intervalos de tamaño de las diversas fracciones que se obtienen en el proceso. Si la precipitación corresponde a la región laminar, los coeficientes de arrastre son casi iguales al de una esfera.

Solución: El intervalo de tamaño de partícula es $D_p = 5.21 \times 10^{-6}$ a $D_p = 2.50 \times 10^{-5}$ m. Las densidades son $\rho_{pA} = 7.5(1000) = 7500$ kg/m^3, $\rho_{pB} = 2.65(1000) = 2650$ kg/m^3 y $\rho = 998$ kg/m^3 para el agua a 293.2 K (20 °C). La viscosidad del agua es $\mu = 1.005 \times 10^{-3}$ Pa · s $= 1.005 \times 10^{-3}$ kg/m · s.

Suponiendo una sedimentación acorde con la ley de Stokes, la ecuación (14.3-9) se transforma en

$$v_{tA} = \frac{gD_{pA}^2(\rho_{pA} - \rho)}{18\mu} \tag{14.3-29}$$

El número de Reynolds más alto corresponde a la partícula de mayor tamaño y de densidad más alta, es decir, cuando $D_{pA} = 2.50 \times 10^{-5}$ m y $\rho_{pA} = 7500$. Sustituyendo en (14.3-29).

$$v_{tA} = \frac{9.807\left(2.50 \times 10^{-5}\right)^2(7500 - 998)}{18\left(1.005 \times 10^{-3}\right)} = 2.203 \times 10^{-3} \text{ m/s}$$

Sustituyendo en la ecuación del número de Reynolds:

$$N_{\text{Re}} = \frac{D_{pA}v_{tA}\rho}{\mu} \tag{14.3-30}$$

$$= \frac{\left(2.50 \times 10^{-5}\right)\left(2.203 \times 10^{-3}\right)998}{1.005 \times 10^{-3}} = 0.0547$$

Por consiguiente, la precipitación corresponde a la región de la ley de Stokes.

Con respecto a la figura 14.3-3 y usando la misma nomenclatura, el tamaño más grande es $D_{p4} = 2.50 \times 10^{-5}$ m. El más pequeño es $D_{p1} = 5.21 \times 10^{-6}$ m . La fracción pura de A se compone de $D_{pA4} = 2.50 \times 10^{-5}$ m a D_{pA3}. Las partículas con diámetros de D_{pA3} y D_{pA4} se relacionan por tener velocidades de precipitación iguales en la ecuación (14.3-26). Sustituyendo $D_{pB4} = 2.50 \times 10^{-5}$ en la ecuación (14.3-26) y resolviéndola,

$$\frac{D_{pA3}}{2.50 \times 10^{-5}} = \left(\frac{2650 - 998}{7500 - 998}\right)^{1/2}$$

$$D_{pA3} = 1.260 \times 10^{-5} \text{ m}$$

El intervalo de tamaño de la fracción pura de B es de D_{pB2} a $D_{pB1} = 5.21 \times 10^{-6}$ m. El diámetro D_{pB2} se relaciona con $D_{pA1} = 5.21 \times 10^{-6}$ por medio de la ecuación (14.3-26) a velocidades de precipitación iguales,

$$\frac{5.21 \times 10^{-6}}{D_{pB2}} = \left(\frac{2650 - 998}{7500 - 998}\right)^{1/2}$$

$$D_{pB2} = 1.033 \times 10^{-5} \text{ m}$$

Las tres fracciones que se obtienen son las siguientes:

1. El intervalo de tamaño de la primera fracción de A puro (galena) es:

$$D_{pA3} = 1.260 \times 10^{-5} \text{ m} \qquad \text{a} \qquad D_{pA4} = 2.50 \times 10^{-5} \text{ m}$$

2. La fracción mezclada tiene los siguientes intervalos de tamaño:

$$D_{pB2} = 1.033 \times 10^{-5} \text{ m} \qquad \text{a} \qquad D_{pB4} = 2.50 \times 10^{-5} \text{ m}$$

$$D_{pA1} = 5.21 \times 10^{-6} \text{ m} \qquad \text{a} \qquad D_{pA3} = 1.260 \times 10^{-5} \text{ m}$$

3. El intervalo de tamaño de la tercera función, que es B (sílice) puro es:

$$D_{pB1} = 5.21 \times 10^{-6} \text{ m} \qquad \text{a} \qquad D_{pB2} = 1.033 \times 10^{-5} \text{ m}$$

14.3F Sedimentación y espesamiento

1. Mecanismos de sedimentación. Cuando una suspensión diluida precipita por gravedad en un fluido claro y en una suspensión de mayor concentración de sólidos, el proceso se llama *sedimentación* o a veces *espesamiento*. A fin de ilustrar el método para determinar las velocidades y los mecanismos de la precipitación, se lleva a cabo una prueba de precipitación por lotes colocando una concentración uniforme de la suspensión en un cilindro graduado. Al principio, como se muestra en la figura 14.3-4a, todas las partículas se asientan estableciéndose libremente en la zona de suspensión B. Las partículas que están en la zona B se precipitan a una tasa uniforme al principio y aparece una zona de líquido claro A, como se ve en la figura 14.3-4b. La altura z disminuye con una velocidad constante y además empieza a aparecer una zona D que contiene las partículas precipitadas en el fondo. La zona C es una capa de transición cuyo contenido de sólidos varía entre los de la zona B y D. Más avanzada la precipitación, las zonas B y C desaparecen, como se observa en la figura 14.3-4c. Entonces, empieza a aparecer la compresión, y este momento se denomina *punto crítico*. Durante la compresión, algo de líquido es expulsado de la zona D hacia arriba y el espesor de esta zona disminuye.

2. Determinación de la velocidad de precipitación. En la figura 14.3-4d se grafica la altura z de la interfaz de líquido claro en función del tiempo. Como se muestra, la velocidad de precipitación, que es la pendiente de la línea, es constante al principio. El punto crítico se encuentra en el punto C. Como los sedimentos se forman a velocidades muy diferentes, se necesita encontrar experimentalmente la velocidad de precipitación de cada sedimento. Kynch (K1) y Talmage y Fitch (T1) describen un método para predecir el tamaño del espesador a partir de la prueba de precipitación por lotes.

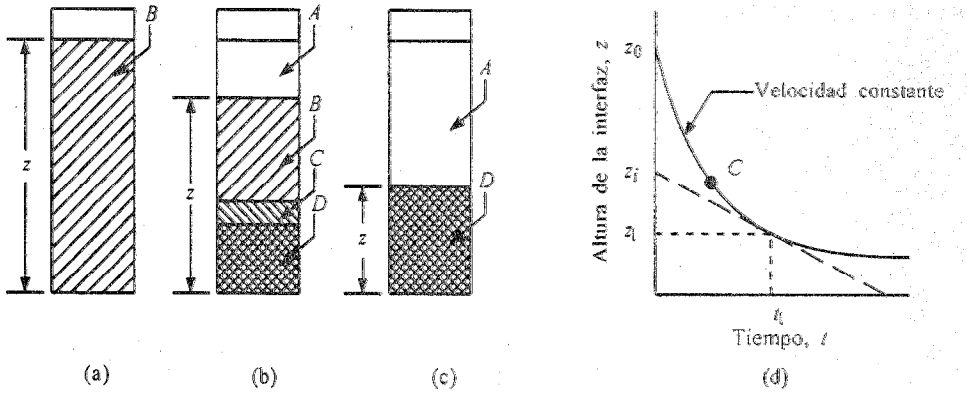


FIGURA 14.3-4. *Resultados de la precipitación por lotes: a) suspensión original uniforme, b) zonas de precipitación después de un tiempo determinado, c) compresión de la zona D después de que desaparecen las zonas B y C, d) altura de la interfaz del líquido claro z en función del tiempo de precipitación.*

La velocidad de precipitación v se determina trazando una tangente a la curva de la figura 14.3-4d en un tiempo dado t_1 y la pendiente es $-dz/dt = v_1$. En este punto la altura es z_1 y z_i es la intersección de la tangente a la curva. Entonces,

$$v_1 = \frac{z_i - z_1}{t_1 - 0} \tag{14.3-31}$$

La concentración c_1 es, pues, la concentración promedio de la suspensión si z_i es la altura de esta suspensión, y se calcula mediante.

$$c_1 z_i = c_0 z_0 \quad \text{o} \quad c_1 = \left(\frac{z_0}{z_i}\right) c_0 \tag{14.3-32}$$

donde c_0 es la concentración original de la lechada en kg/m^3 en la altura z_0 y $t = 0$. Esto se repite para otros tiempos y se hace una gráfica de la velocidad de precipitación en función de la concentración. En otras obras hay detalles adicionales sobre este método y otros para diseñar el espesador (C1, F1, F2, T1, P1). Éstos y otros métodos que aparecen en la literatura son sumamente empíricos y se debe tener cuidado al usarlos.

14.3G Equipo para sedimentación y precipitación

1. Tanque simple de precipitación por gravedad. En la figura 14.3-5a se muestra un precipitador por gravedad para la separación de una fase líquida dispersa en otra fase. La velocidad en sentido horizontal hacia la derecha debe ser bastante lenta como para permitir que las gotas más pequeñas se eleven desde el fondo hasta la interfaz o desde la parte superior hacia abajo, para llegar a la interfaz y experimentar coalescencia.

En la figura 14.3-4b se muestra el diagrama de una cámara de precipitación por gravedad. A la cámara con forma de caja penetra una corriente de aire con polvo. Las partículas se precipitan hacia

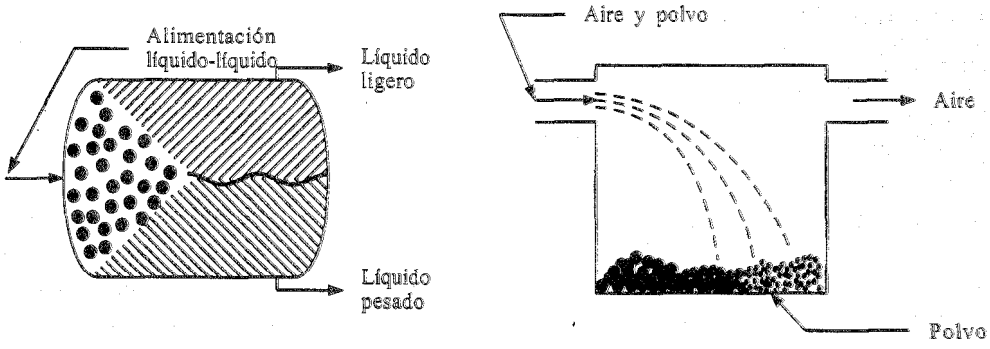


FIGURA 14.3-5. *Tanques de precipitación por gravedad: a) precipitación para la dispersión líquido-líquido, b) cámara de precipitación de polvos.*

el fondo con sus velocidades terminales de precipitación. El aire debe permanecer en la cámara el tiempo suficiente (tiempo de residencia) como para que las partículas lleguen al fondo de la cámara. Conociendo el flujo de la corriente de aire a través de la cámara y el tamaño de ésta, es posible calcular el tiempo de residencia del aire en la cámara. La dimensión vertical de la misma debe ser lo bastante pequeña como para que esta altura dividida entre la velocidad de precipitación, produzca un tiempo inferior al de residencia del aire.

2. Equipo para clasificación. El clasificador más simple consiste en un tanque subdividido en varias secciones, como se ilustra en la figura 14.3-6. La alimentación consiste en una suspensión líquida que contiene partículas sólidas de tamaño comprendido en cierto intervalo. Las partículas más grandes, que precipitan con mayor rapidez, caen al fondo, cerca de la entrada, y las de menor velocidad de precipitación llegan hasta el otro extremo del tanque. La velocidad lineal de la alimentación disminuye como resultado del aumento de área de corte transversal en la entrada al tanque. Los deflectores verticales del equipo permiten recolectar las diversas fracciones. Las ecuaciones de velocidad de precipitación que se aplican a este proceso son las mismas que se han deducido en esta sección.

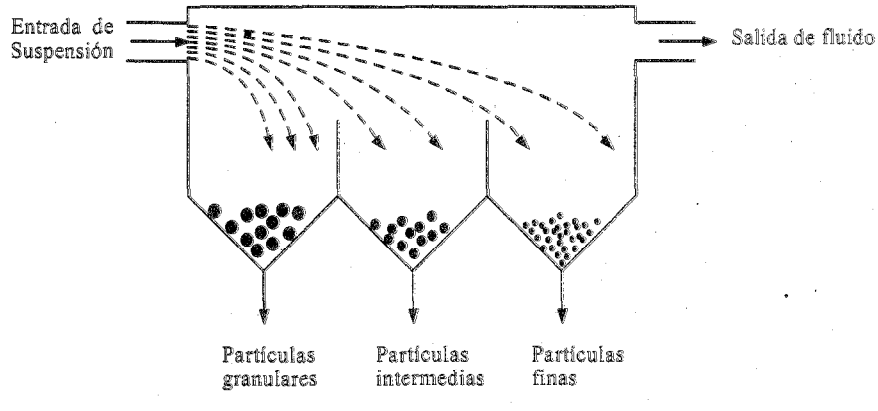


FIGURA 14.3-6. *Clasificador simple de precipitación por gravedad.*

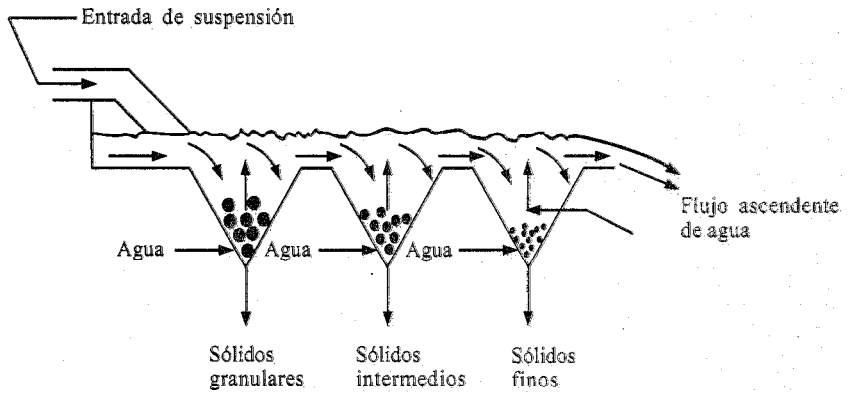


FIGURA 14.3-7. *Cámara de Spitzkasten de precipitación por gravedad.*

3. Clasificador de Spitzkasten. Otro tipo de cámara de precipitación por gravedad es el *clasificador de Spitzkasten*, representado en la figura 14.3-7, que consiste en una serie de recipientes cónicos de diámetro creciente en dirección del flujo. La suspensión penetra al primer recipiente, donde se separan las partículas de tamaño más grande y mayor velocidad de precipitación. El flujo de derrame pasa al siguiente recipiente, donde se produce otra separación. El proceso continúa en los recipientes subsecuentes. La velocidad del flujo ascendente de agua se controla en cada recipiente para obtener el intervalo de tamaño deseado.

4. Espesador de sedimentación. La separación de una suspensión diluida por acción de la gravedad para obtener una suspensión con mayor concentración de sólidos y un fluido transparente se llama *sedimentación*. En la industria, las operaciones de sedimentación se llevan a cabo en regímenes continuos en equipos llamados *espesadores*. En la figura 14.3-8 se muestra un espesador continuo con un raspador de rotación lenta, que arrastra los lodos o la suspensión espesa.

La suspensión de la figura 14.3-8 se alimenta por el centro del tanque, a varios pies por debajo de la superficie del líquido. La salida de derrame del líquido transparente rodea toda la parte superior del tanque. El raspador sirve para arrastrar la suspensión hacia el centro del fondo para su extracción. Esta agitación ligera ayuda a separar agua de la suspensión.

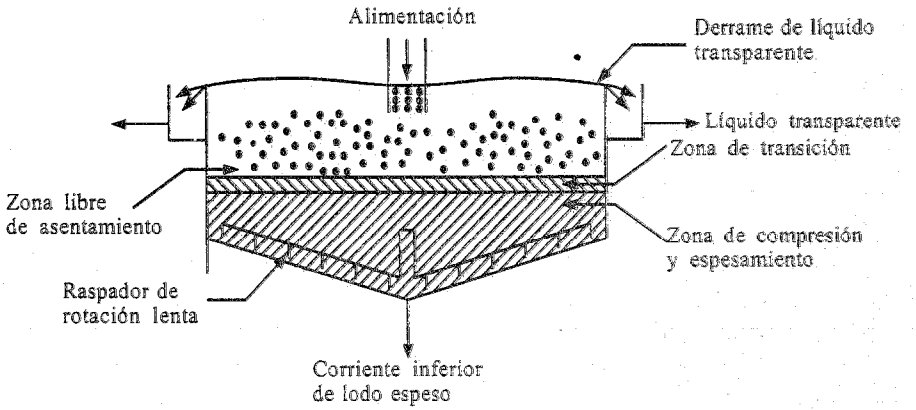


FIGURA 14.3-8. *Engrosador continuo.*

La suspensión que entra al espesador se distribuye radialmente por toda la sección transversal de la unidad y el líquido fluye hacia arriba para derramarse. Los sólidos se precipitan en la zona superior por precipitación libre. Por debajo de esta zona de precipitación diluida está la región de transición, en la cual la concentración de los sólidos aumenta con gran rapidez y luego la zona de compresión. Es posible obtener un derrame transparente cuando la velocidad ascendente del fluido de la zona diluida es inferior a la velocidad terminal de precipitación mínima de los sólidos en dicha zona.

Las velocidades de precipitación son bastante bajas en la zona de espesamiento, donde ocurre una compresión de los sólidos y el líquido se fuerza hacia arriba a través de los mismos. Éste es un caso extremo de precipitación frenada. Se puede usar la ecuación (14.3-16) para estimar las velocidades de precipitación, pero los cálculos pueden albergar errores considerables debido a la aglomeración de partículas. En consecuencia, para el diseño de los espesadores es necesario usar datos de sedimentación de experimentos de laboratorio. Los métodos para ello se encuentran en la sección 14.3F.

14.4 PROCESOS DE SEPARACIÓN POR CENTRIFUGACIÓN

14.4A Introducción

1. Precipitación o sedimentación centrífuga. En la sección 14.3 se analizaron los métodos de proceso para precipitación y sedimentación, en los cuales las partículas se separan de un fluido por la acción de las fuerzas gravitatorias sobre ellas. Las partículas eran sólidas, gaseosas o líquidas, y el fluido era un líquido o un gas. En esta sección se estudiarán métodos de separación de partículas en un fluido, por medio de fuerzas centrífugas.

El uso de centrífugas aumenta en alto grado las fuerzas que actúan sobre las partículas. Por tanto, las partículas que no se precipitan o lo hacen con mucha lentitud en precipitadores por gravedad, casi siempre se pueden separar de los fluidos por medio de fuerzas centrífugas. Estas fuerzas de precipitación de gran magnitud permiten obtener velocidades prácticas con partículas mucho más pequeñas que en los precipitadores por gravedad. Las elevadas fuerzas centrífugas no modifican las velocidades relativas de precipitación de las partículas pequeñas, pero sí contrarrestan los efectos perturbadores del movimiento browniano y de las corrientes de convección libre.

Algunas veces, la separación por gravedad es demasiado lenta debido a la similitud de densidades de la partícula y el fluido, o las fuerzas de asociación que mantienen unidos a los componentes, como en el caso de las emulsiones. Un ejemplo en la industria lechera es la separación de la crema de la leche para obtener leche descremada. La separación por gravedad requiere muchas horas, mientras que con la separación por centrifugación en un separador de crema, se logran los mismos resultados en pocos minutos. La separación por centrifugación se usa en muchas industrias alimenticias, tales como cervecerías, procesamiento de aceites vegetales, concentración de proteínas de pescado, procesamiento de jugos de frutas para eliminar materiales celulares, etc. La separación por centrifugación también se emplea para secar cristales, separar constituyentes líquidos o sólidos de las emulsiones. Los principios de la sedimentación centrífuga se estudian en las secciones 14.4B y 14.4C.

2. Filtración centrífuga. Las centrífugas también se usan en filtración empleando una fuerza centrífuga en lugar de una diferencia de presión para hacer que fluya la suspensión a través de un filtro, y se acumule una torta de sólidos sobre una pantalla. La torta de sólidos granulares de la suspensión se deposita en un medio de filtración sostenido en una canastilla rotatoria, se lava y luego se "seca" haciéndolo girar. Las centrífugas y los filtros ordinarios son competitivos para la mayoría de los problemas de separación de sólido y líquido. Los principios de la filtración centrífuga se analizan en la sección 14.4E.

14.4B Fuerzas que se desarrollan en la separación por centrifugación

1. Introducción. Los separadores centrífugos se basan en el principio común de que la rotación de un objeto en torno a un eje o punto central, a una distancia radial constante desde dicho punto, produce una fuerza que actúa sobre dicho objeto. El objeto que gira en torno al eje cambia de dirección constantemente, con lo cual se produce una aceleración aún cuando la velocidad rotacional sea constante. Esta fuerza centrípeta está dirigida hacia el centro de rotación.

Si el objeto que se hace girar es un recipiente cilíndrico, el contenido de fluidos y sólidos desarrolla una fuerza igual y opuesta, llamada *fuerza centrífuga*, hacia las paredes del recipiente. Ésta causa la sedimentación o precipitación de las partículas a través de una capa de líquido, o la filtración de un líquido a través de un lecho o torta de filtrado en el interior de una cámara de rotación perforada.

En la figura 14.4-1a se muestra un recipiente cilíndrico o tazón giratorio y la alimentación de una suspensión de partículas sólidas en un fluido penetra por el centro. Al entrar, la alimentación es arrastrada de inmediato hacia las paredes del tazón, como se ilustra en la figura 14.4-1b. La fuerza gravitatoria vertical y la fuerza centrífuga horizontal actúan sobre el líquido y los sólidos. La fuerza centrífuga suele ser tan grande, que es posible despreciar la fuerza de gravedad. Entonces, la capa líquida asume una posición de equilibrio con su superficie casi vertical. Las partículas se precipitan horizontalmente hacia afuera, presionándose sobre la pared vertical del tazón.

En la figura 14.4-1c se muestra la separación de dos líquidos con densidades diferentes en una centrífuga. El fluido más denso ocupará la periferia, pues la fuerza centrífuga es mayor sobre él.

2. Ecuaciones para la fuerza centrífuga La aceleración de la fuerza centrífuga en un movimiento circular es

$$a_e = rw^2 \tag{14.4-1}$$

donde a_e es la aceleración causada por la fuerza centrífuga en m/s^2 (pie/s^2), r es la distancia radial al centro de rotación en m (pie) y w es la velocidad angular en rad/s.

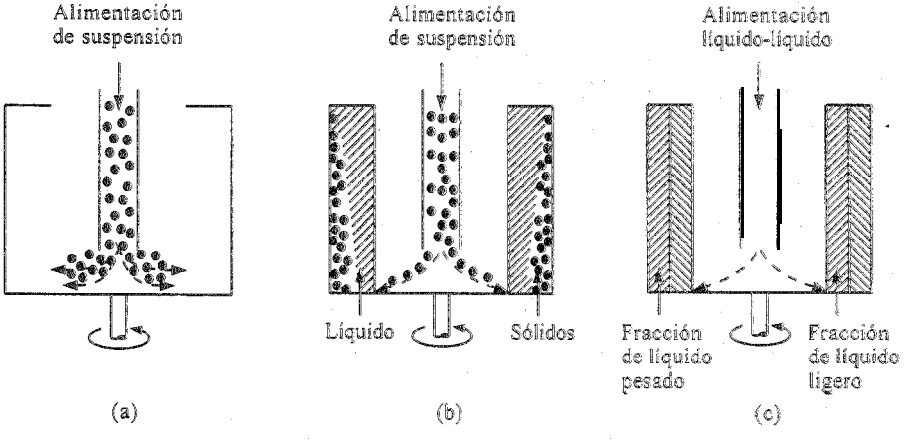


FIGURA 14.4-1. *Diagrama de una separación por centrifugación: a) entrada de la suspensión de alimentación inicial, b) precipitación de los sólidos suspendidos en el líquido, c) separación de dos fracciones líquidas.*

La fuerza centrífuga F_c en N (lb_f) que actúa sobre la partícula está dada por:

$$F_c = ma_c = mr\omega^2 \qquad \text{(SI)} \qquad \textbf{(14.4-2)}$$

$$F_c = \frac{mr\omega^2}{g_c} \qquad \text{(Unidades del sistema inglés)}$$

donde $g_c = 32.174\ lb_m \cdot pie/lb_f \cdot s^2$.

Puesto que $\omega = v/r$, donde v es la velocidad tangencial de la partícula en m/s (pie/s).

$$F_c = mr\left(\frac{v}{r}\right)^2 = \frac{mv^2}{r} \qquad \textbf{(14.4-3)}$$

Las velocidades de rotación también se expresan como N rev/min y

$$\omega = \frac{2\pi N}{60} \qquad \textbf{(14.4-4)}$$

$$N = \frac{60v}{2\pi r} \qquad \textbf{(14.4-5)}$$

Sustituyendo la ecuación (14.4-4) en la (14.4-2),

$$F_c \text{ newton} = mr\left(\frac{2\pi N}{60}\right)^2 = 0.01097\, mrN^2 \qquad \text{(SI)}$$

$$F_c\ lb_f = \frac{mr}{g_c}\left(\frac{2\pi N}{60}\right)^2 = 0.000341\, mrN^2 \qquad \text{(Unidades del sistema inglés)} \qquad \textbf{(14.4-6)}$$

La ecuación (14.3-2) indica que la fuerza de gravedad sobre una partícula es

$$F_g = mg \qquad \textbf{(14.3-2)}$$

donde g es la aceleración de la gravedad, a 9.80665 m/s^2. Al combinar las ecuaciones (14.3-2), (14.4-2) y (14.4-3), se obtiene la expresión de la fuerza centrífuga en términos de la fuerza de gravedad:

$$\frac{F_c}{F_g} = \frac{r\omega^2}{g} = \frac{v^2}{rg} = \frac{r}{g}\left(\frac{2\pi N}{60}\right)^2 = 0.001118rN^2 \qquad \text{(SI)}$$

$$\frac{F_c}{F_g} = 0.000341rN^2 \qquad \text{(Unidades del sistema inglés)} \qquad \textbf{(14.4-7)}$$

Por consiguiente, la fuerza que se desarrolla en una centrífuga es $r\omega^2/g$ o v^2/rg veces mayor que la fuerza de gravedad. Con frecuencia, esto se expresa como un múltiplo de la fuerza g.

EJEMPLO 14.4-1. Fuerza en una centrífuga

Una centrífuga en la que el radio del tazón es 0.1016 m (0.333 pie) gira a $N = 1000$ rev/min.

a) Calcule la fuerza centrífuga desarrollada en términos de la fuerza de gravedad.
b) Comparela con la de un tazón de radio 0.2032 m, que gira a las mismas rev/min.

Solución: Para el inciso a), $r = 0.1016$ m y $N = 1000$. Sustituyendo en la ecuación (14.4-7),

$$\frac{F_c}{F_g} = 0.0001118rN^2 = 0.001118(0.1016)(1000)^2 \qquad \text{(SI)}$$

$$= 113.6 \text{ gravedades o } g\text{'s}$$

$$\frac{F_c}{F_g} = 0.000341(0.333)(1000)^2 = 113.6 \qquad \text{(Unidades del sistema inglés)}$$

Para el inciso b), $r = 0.2032$ m. Sustituyendo en la ecuación (14.4-7),

$$\frac{F_c}{F_g} = 0.001118(0.2032)(1000)^2 = 227.2 \text{ gravedades o g's}$$

14.4C Ecuaciones para las velocidades de precipitación en centrífugas

1. Ecuación general para la precipitación. Cuando se usa una centrífuga para una sedimentación (separación de partículas por precipitación), una partícula de cierto tamaño puede separarse del líquido en el tazón cuando su tiempo de residencia es suficiente para que la partícula llegue hasta la pared. Es posible calcular el diámetro de la partícula más pequeña extraída, cuando se mueve radialmente a su velocidad terminal de precipitación.

En la figura 14.4-2 se muestra un esquema de una centrífuga de tazón tubular. La alimentación penetra por el fondo y se supone que todo el líquido se desplaza hacia arriba a velocidad uniforme, arrastrando consigo a las partículas sólidas. Se supone que la partícula se mueve de forma radial a su velocidad de precipitación terminal, v_t. (En la figura 14.4-2 se ilustra la trayectoria de la partícula.) Una partícula de cierto tamaño se puede separar del líquido cuando dispone de tiempo suficiente para llegar a la pared del tazón, donde se mantiene. La longitud del tazón es b en m.

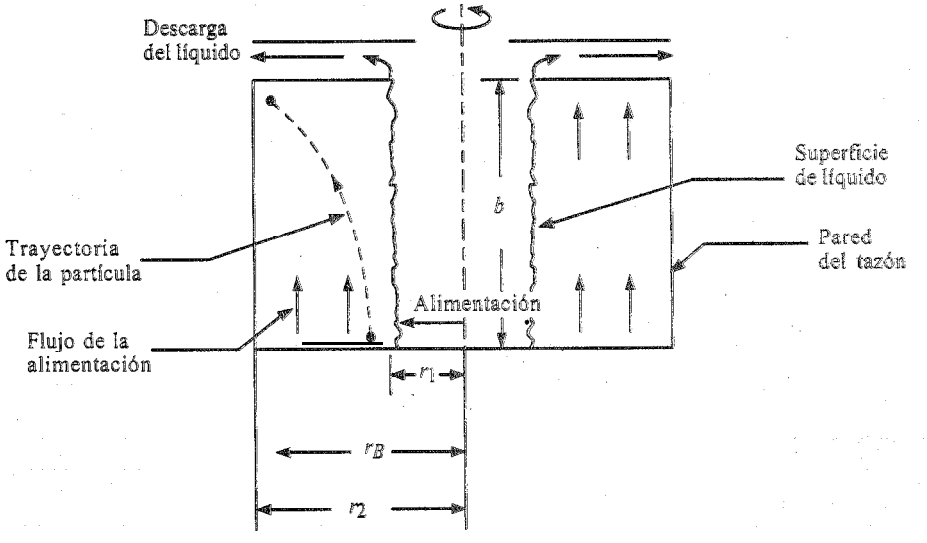


FIGURA 14.4-2. *Precipitación de partículas en una centrífuga de sedimentación de tazón tubular.*

Al final del tiempo de residencia de Ba partícula en el fluido, dicha partícula está a una distancia r_B m del eje de rotación. Si $r_B < r_2$, entonces la partícula abandona el tazón can el fluido. Si $r_B = r_2$, la partícula se deposita en la pared y se separa de manera efectiva del ífluida.

Para una precipitación en el intervalo de la ley de Stokes, Ra velocidad terminal de precipitación en el radio r se obtiene sustituyendo la expresión de la aceleración g, ecuación (14.4-1) en la (14.3-9),

$$v_t = \frac{\omega^2 r D_p^2 (\rho_p - \rho)}{18\mu} \tag{14.4-8}$$

donde v_t es la velocidad de precipitación en sentido radial en m/s, D_p el diámetro de la partícula en m, ρ_p la densidad de la partícula en kg/m^3, ρ la densidad del líquido en kg/m^3, y μ es la viscosidad del líquido en Pa · s. Cuando se presenta precipitación frenada, el lado derecho de la ecuación (14.4-8) se multiplica por el factor $(\varepsilon^2\psi\rho)$ de la ecuación (14.3-16).

Puesto que $v_t = dr/dt$, la ecuación (14.4-8) se transforma en

$$d_t = \frac{18\mu}{\omega^2(\rho_p - \rho)D_p^2}\frac{dr}{r} \tag{14.4-9}$$

Integrando entre los límites $r = r_1$ en $t = 0$ y $r = r_2$ en $t = t_T$,

$$t_T = \frac{18\mu}{\omega^2(\rho_p - \rho)D_p^2}\ln\frac{r^2}{r_1} \tag{14.4-10}$$

El tiempo de residencia t_T es igual al volumen del líquido V m^3 en el recipiente, dividido entre el flujo volumétrico de la alimentación q en m^3/s. El volumen, $V = \pi b(r_2^2 - r_1^2)$. Sustituyendo en la ecuación (14.4-10) y despejando q,

$$q = \frac{\omega^2(\rho_p - \rho)D_p^2}{18\mu\ln[r_2/(r_1) + r_2]}(V) = \frac{\omega^2(\rho_p - \rho)D_{pc}}{18\mu\ln[r_2/(r_1) + r_2]}\left[(\pi b_2^2 - r_1^2)\right] \tag{14.4-11}$$

Las partículas de tamaño más pequeño que el calculado en la ecuación (14.4-11) no llegarán a la pared del tazón y saldrán con el líquido. Las partículas de mayor tamaño sí llegan a la pared y se separan del líquido.

Un punto de corte o diámetro crítico D_{pc} se puede definir como el diámetro de una partícula que llega a la mitad de la distancia entre r_1 y r_2. Esta partícula se mueve a la mitad de la capa líquida o (r_2

$- r_1)/2$ durante el tiempo en que está en la centrífuga. La integración se efectúa entonces entre $r = (r_1 - r_2)/2$ en $t = 0$ y $r = r_2$ en $t = t_T$ y se obtiene:

$$q_c = \frac{\omega^2(\rho_p - \rho)D_{pc}^2}{18\mu \ln\left[2r_2/(r_1 + r_2)\right]}(V) = \frac{\omega^2(\rho_p - \rho)D_{pc}}{18\mu \ln\left[2r_2/(r_1 + r_2)\right]}\left[\pi b(r_2^2 - r_1^2)\right] \qquad \textbf{(14.4-12)}$$

A esta velocidad de flujo q_c, las partículas que tienen un diámetro mayor de D_{pc} precipitarán predominantemente en la pared, y la mayoría de las partículas menores permanecerán en el líquido.

2. Caso especial del precipitación. Para el caso especial en que el espesor de la capa límite sea pequeño comparado con el radio, la ecuación (14.4-8) se puede escribir para un $r \cong r_2$ constante y $D_p = D_{pc}$, como sigue:

$$v_t = \frac{\omega^2 r_2 D_{pc}^2(\rho_p - \rho)}{18\mu} \qquad \textbf{(14.4-13)}$$

De esta manera, el tiempo de precipitación t_T es para el caso crítico D_{pc},

$$t_T = \frac{V}{q_c} = \frac{(r_1 - r_2)/2}{v_t} \qquad \textbf{(14.4-14)}$$

Sustituyendo la ecuación (14.4-13) en la (14.4-14) y reordenando,

$$q_c = \frac{\omega^2 r_2 D_{pc}^2(\rho_p - \rho)V}{18\mu\left[(r_2 + r_1)/2\right]} \qquad \textbf{(14.4-15)}$$

El volumen V se puede expresar como

$$V \cong 2\pi r_2(r_2 - r_1)b \qquad \textbf{(14.4-16)}$$

Combinando las ecuaciones (14.4-15) y (14.4-16),

$$q_c = \frac{2\pi b r_2^2 w^2 D_{pc}^2(\rho_p - \rho)}{9\mu} \qquad \textbf{(14.4-17)}$$

El análisis anterior se simplificó; en realidad, las características de flujo del fluido son más complicadas. Estas ecuaciones también son aplicables a sistemas líquido-líquido en los cuales las

pequeñas gotas de líquido migran de acuerdo con las ecuaciones y se aglutinan en la otra fase líquida.

EJEMPLO 14.4-2. Precipitación en una centrífuga

Se desea clarificar por centrifugación una solución viscosa que contiene partículas con densidad $\rho_p = 1461$ kg/m^3. La densidad de la solución es $\rho = 801$ kg/m^3 y su viscosidad es de 100 cp. La centrífuga tiene un tazón de $r_2 = 0.02225$ m, $r_1 = 0.00716$ m y altura $b = 0.1970$ m. Calcule el diámetro crítico de las partículas más grandes en la corriente de salida, cuando $N = 23000$ rev/min y la velocidad de flujo $q = 0.002832$ m^3/h.

Solución: Usando la ecuación (14.4-4),

$$\omega = \frac{2\pi N}{60} = \frac{2\pi(23000)}{60} = 2410 \text{ rad/s}$$

El volumen V del tazón es

$$V = \pi b\left(r_2^2 - r_1^2\right)$$

$$= \pi(0.1970)[(0.02225)^2 - (0.00716)^2] = 2.747 \times 10^{-4} \text{ m}^3$$

La viscosidad $\mu = 100 \times 10^{-3} = 0.100$ Pa · s = 0.100 kg/m · s. La velocidad de flujo q_c es

$$q_c = \frac{0.002832}{3600} = 7.87 \times 10^{-7} \text{ m}^3/\text{s}$$

Sustituyendo en la ecuación (14.4-12) y despejando D_{pc},

$$q_c = 7.87 \times 10^{-7}$$

$$= \frac{(2410)^2(1461 - 801)D_{pc}^2\left(2.747 \times 10^{-4}\right)}{18(0.100)\ \ln\left[2 \times 0.02225/(0.00716 + 0.02225)\right]}$$

$$D_{pc} = 0.746 \times 10^{-6} \text{ m o } 0.746\ \mu\text{m}$$

Si se sustituye en la ecuación (14.4-13) para obtener v_t y luego se calcula el número de Reynolds, el asentamiento está dentro del intervalo de la ley de Stokes.

3. Valores sigma y aumento de escala para las centrífugas. Se puede deducir una característica física útil de una centrífuga de taza tubular multiplicando y dividiendo la ecuación (14.4-12) por $2g$ y luego sustituyendo la ecuación (14.3-9) escrita para D_{pc} en la (14.4-12) para obtener

$$q_c = 2\,\frac{\left(\rho_p - \rho\right)gD_{pc}^2}{18\ \mu}\,\frac{\omega^2 V}{2g\ \ln\left[2r_2/\left(r_1 - r_2\right)\right]} = 2v_t \cdot \sum \qquad \textbf{(14.4-18)}$$

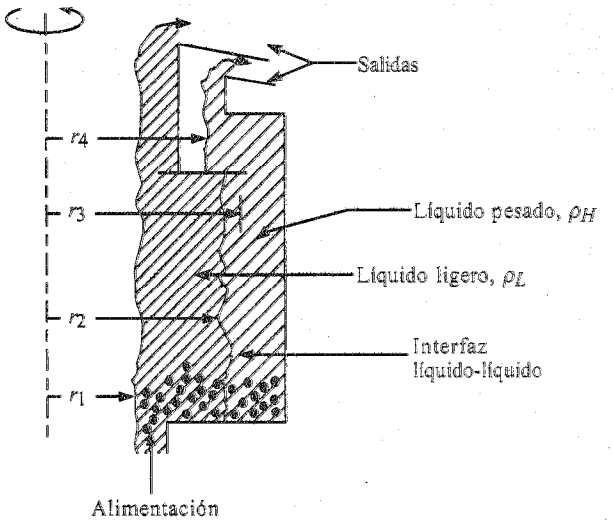


FIGURA 14.4-3. *Centrífuga de tazón tubular para la separación de dos fases líquidas.*

donde b es la altura del recipiente en m y $(2\pi rb)\,dr$ es el volumen del fluido. Sustituyendo la ecuación (14.4-23) en la (14.4-22) y dividiendo ambos lados entre el área $A = 2\pi\, rb$,

$$dP = \frac{dF_c}{A} = \omega^2\, \rho r\, dr \tag{14.4-24}$$

donde P es la presión en N/m^2 (lb_f/pie^2).

Integrando la ecuación (14.4-24) entre r_1 y r_2,

$$P_2 - P_1 = \frac{\rho\omega^2}{2}\left(r_2^2 - r_1^2\right) \tag{14.4-25}$$

Al aplicar la ecuación (14.4-25) a la figura 14.4-3 y establecer una igualdad entre la presión desarrollada por la fase ligera de espesor $r_2 - r_1$ y la presión desarrollada por la fase pesada con espesor $r_2 - r_4$ en la interfaz líquida a r_2

$$\frac{\rho_H\omega^2}{2}\left(r_2^2 - r_4^2\right) = \frac{\rho_L\omega^2}{2}\left(r_2^2 - r_1^2\right) \tag{14.4-26}$$

Despejando r_2^2, esto es, la posición de la interfaz,

$$r_2^2 = \frac{\rho_H r_4^2 - \rho_L r_1^2}{\rho_H - \rho_L} \tag{14.4-27}$$

La interfaz en r_2 debe estar situada a un radio inferior a r_3 en la figura 14.4-3.

EJEMPLO 14.4-3. Localización de la interfaz en una centrífuga

En un proceso de refinación de aceite vegetal, se separa por centrifugación una fase acuosa de la fase de aceite. La densidad del aceite es de 919.5 kg/m^3 y la de la fase acuosa es

980.3 kg/m^3. El radio r_1 del derrame del líquido ligero se ha fijado a un valor de 10.160 mm y la salida del líquido pesado en 10.414 mm. Determine la localización de la interfaz en la centrífuga.

Solución: Las densidades son $\rho_L = 919.5$ y $\rho_H = 980.3$ kg/m^3. Sustituyendo en la ecuación (14.4-27) y despejando r_2,

$$r_2^2 = \frac{980.3(10.414)^2 - 919.5(10.160)^2}{980.3 - 919.5}$$

$$r_2 = 13.75 \text{ mm}$$

14.4D Equipos de centrifugación para la sedimentación

1. Centrífuga tubular. En la figura 14.4-3 se muestra el esquema de una *centrífuga de tazón tubular*. El tazón es alto y de diámetro estrecho, 100-150 mm. Estas centrífugas, conocidas como supercentrífugas, desarrollan una fuerza equivalente a unas 13000 veces la de la gravedad. Las centrífugas muy estrechas, con diámetros de 75 mm y velocidades muy altas, de 60000 rev/min, se llaman ultracentrífugas. Las supercentrífugas tienen grandes aplicaciones en la separación de emulsiones líquido-líquido.

2. Centrífuga de tazón con discos. La *centrífuga de tazón con discos* que se ilustra en la figura 14.4-4, se usa con frecuencia en las separaciones líquido-líquido. La alimentación penetra al compartimiento por el fondo y se desplaza hacia arriba a través de orificios de alimentación espaciados verticalmente, llenando los espacios entre los discos. Los orificios dividen al conjunto vertical en una sección interior, en la que está presente la mayor parte del líquido ligero, y una sección externa, donde predomina el líquido pesado. Esta línea divisoria es similar a la interfaz de una centrífuga tubular.

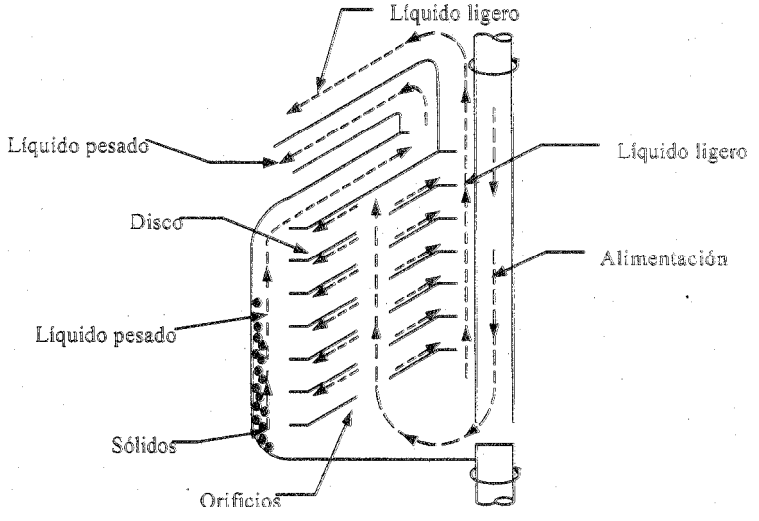


FIGURA 14.4-4. *Diagrama esquemático de una centrífuga de tazón con discos.*

El líquido pesado fluye por debajo de la superficie inferior de un disco hasta la periferia del tazón. El líquido ligero fluye sobre la superficie y hacia la salida de la zona interior. Cualquier cantidad pequeña de sólidos pesados que pueda existir se desplaza hacia la pared exterior. Se requiere limpieza periódica para extraer los sólidos depositados. Las centrífugas de tazón con discos se usan en la separaciones de almidón-gluten, en la concentración de látex de caucho y en la separación de cremas. En la bibliografía (P1, L1) se describen algunos tipos especiales de centrífugas adecuadas para filtración y sedimentación.

14.4 Filtración centrífuga

1. Teoría de la filtración centrífuga. La predicción teórica de las velocidades de filtración en filtros centrífugos no ha tenido demasiado éxito hasta ahora. La filtración en centrífugas es más complicada que la filtración ordinaria en la que se usan diferencias de presión, ya que el área para el flujo y la fuerza impulsora aumentan con la distancia al eje y la resistencia específica de una torta puede cambiar marcadamente. Las centrífugas para filtrar generalmente se eligen aumentando la escala de las pruebas con un centrífuga de laboratorio del mismo tipo en la cual se utiliza la suspensión que se va a procesar.

La teoría de la filtración a presión constante que se analizó en la sección 14.2E se puede modificar y usarse para el caso en que el flujo sea ocasionado por la fuerza centrífuga, y no por la diferencia de presión imprimida. Se va a deducir la ecuación para el caso en que ya se ha depositado una torta, como se muestra en la figura 14.4-5. El radio interior de la canastilla es r_2, r_1 es el radio interno de la cara de la torta y r, es el radio interno de la superficie líquida. Supondremos que la torta es casi incompresible, de modo que se puede usar un valor promedio de α para ella. Además, el flujo es laminar. Si suponemos una torta delgada en una centrífuga de diámetro grande, el área A para el flujo es aproximadamente constante. La velocidad del líquido es

$$v = \frac{q}{A} = \frac{dV}{A\,dt} \tag{14.4-28}$$

donde q es la velocidad de flujo del filtrado en m^3/s y v es la velocidad. Al sustituir la ecuación (14.4-28) en la (14.2-8).

$$-\Delta p = q\mu\left(\frac{m_c\alpha}{A^2} + \frac{R_m}{A}\right) \tag{14.4-29}$$

donde $m_c = c_S V$, la masa de la torta en kg depositada en el filtro.

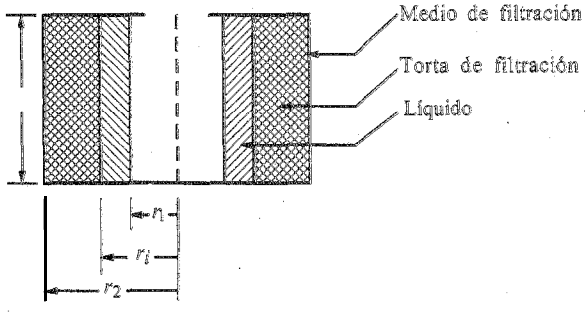


FIGURA 14.4-5. *Disposición física para la filtración centrífuga.*

Para una carga hidráulica de dz m, la caída de presión de

$$dp = \rho g\, dz \tag{14.4-30}$$

En un campo centrífugo, g se remplaza por $r\omega^2$ de la ecuación (14.4-1) y dz por dr. Entonces,

$$dp = \rho r\omega^2\, dr \tag{14.4-31}$$

AI integrar entre r_1 y r_2,

$$-\Delta p = \frac{\rho\omega^2\left(r_2^2 - r_1^2\right)}{2} \tag{14.4-32}$$

Si se combinan las ecuaciones (14.4-29) y (14.4-32) y se despeja q,

$$q = \frac{\rho\omega^2\left(r_2^2 - r_1^2\right)}{2\mu\left(\dfrac{m_c\alpha}{A^2} + \dfrac{R_m}{A}\right)} \tag{14.4-33}$$

Para el caso en que el área de flujo A varíe considerablemente con el radio, se ha deducido lo siguiente (G1):

$$q = \frac{\rho\omega^2\left(r_2^2 - r_1^2\right)}{2\mu\left(\dfrac{m_c\alpha}{A_l,\, A_a} + \dfrac{R_m}{A_2}\right)} \tag{14.4-34}$$

donde $A_2 = 2\pi r_2 b$ (área del medio de filtración), $\overline{A}_L = 2\pi b(r_2 - r_1)/\ln(r_2/r_i)$ (área logarítmica de la torta) y $A_a = (r_i + r_2)\,\pi b$ (media aritmética del área de la torta). Esta ecuación se cumple para una torta de una masa dada en un tiempo dado. No es una ecuación integrada que cubra el ciclo completo de filtración.

2. Equipo para la filtración centrífuga. En un filtro centrífugo, la suspensión se alimenta continuamente a una canastilla rotatoria que tiene una pared perforada cubierta con una tela de filtración. La torta se acumula en la superficie del medio de filtración hasta el grosor deseado. Luego, hacia el final del ciclo de filtración, se detiene la alimentación y se agrega o se rocía líquido de lavado sobre la torta. Entonces, el líquido de lavado se detiene y la torta se hace girar hasta dejarla lo más seca posible. El motor se detiene o se reduce su velocidad y se permite que la canastilla gire mientras los sólidos se descargan mediante un cuchillo raspador, de modo que los sólidos caen a través de una abertura en el piso de la canastilla. Por último, el medio de filtración se limpia enjuagándolo para completar el ciclo. Por lo general, el ciclo por lotes está automatizado. Las centrífugas automáticas por lotes tienen canastillas de hasta 1.2 m de diámetro y suelen girar a menos de 4000 rpm.

Se pueden conseguir filtros centrífugos continuos con capacidades de hasta 25000 kg de sólidos/h. La torta depositada en el medio de filtración se elimina intermitentemente dirigiéndola hacia el extremo de descarga mediante un empujador, que luego se retrae de nuevo para permitir que la torta se acumule una vez más. Al empujar la torta, ésta pasa por la región de lavado. El filtrado y el líquido de lavado se mantienen separados por medio de divisiones en el colector. Se pueden encontrar detalles sobre los diferentes tipos de filtros centrífugos en otras obras (P1).

14.4F Separadores de ciclón para gas-sólido

1. Introducción y equipo. Para separar partículas sólidas pequeñas o polvo fino de los gases, el tipo de equipo de uso más común es el separador de ciclón que se muestra en la figura 14.4.-6. El ciclón consta de un cilindro vertical con fondo cónico. La mezcla de gas y partículas sólidas entra tangencialmente por la parte superior. La penetración de la mezcla le imparte un movimiento giratorio, y el remolino que se desarrolla produce la fuerza centrífuga que arrastra a las partículas hacia la pared de forma radial.

Al entrar, el aire del ciclón fluye hacia abajo en una espiral o vórtice adyacente a la pared. Cuando el aire se aproxima al fondo cónico, vuelve a subir en una pequeña espiral en el centro del cono y del cilindro. Por consiguiente, se forma un vórtice doble. Las espirales descendente y ascendente giran en el mismo sentido.

Las partículas son arrastradas hacia la pared y caen al fondo, saliendo por la parte inferior del cono. Un ciclón es un dispositivo de precipitación, en el que las fuerzas que arrastran a las partículas hacia afuera a velocidades tangenciales altas, son varias veces superiores a la fuerza de gravedad. Por tanto, los ciclones permiten separaciones mucho más efectivas que las cámaras de precipitación por gravedad.

La fuerza centrífuga en un ciclón va desde unas 5 veces la fuerza de gravedad en unidades grandes de baja velocidad, hasta 2500 veces en unidades pequeñas de alta resistencia. Estos equipos son muy comunes en ciertas aplicaciones, como el secado de alimentos por rociado, en el que las partículas secas se separan con ciclones; en equipos separadores de polvos ambientales; y en la separación de rocíos finos de los gases. Los ciclones constituyen uno de los sistemas más económicos para la separación de gases y partículas. Se pueden usar para la extracción de partículas de más de 5 μm de diámetro suspendidas en gases; para partículas de más de 200 μm, se prefieren las cámaras de precipitación por gravedad. Algunas veces se usan ciclones de purificación en húmedo, en los cuales se rocía agua para ayudar a separar los sólidos.

2. Teoría de los separadores de ciclón. Se supone que al entrar a un ciclón, las partículas adquieren rápidamente sus velocidades terminales de precipitación. Los tamaños de las partículas suelen ser tan pequeños, que se considera que la ley de Stokes es válida. La ecuación (14.4-8) expresa la velocidad terminal radial v_{tR} de un movimiento centrífugo, donde v_{tR} remplaza a v_t.

$$v_{tR} = \frac{\omega^2 r D_p^2 (\rho_p - \rho)}{18\mu} \tag{14.4-35}$$

Puesto que $\omega = v_{\tan}/r$, donde $v_{\tan}$ es la velocidad tangencial de la partícula en el radio r, la ecuación (14.4-35) se transforma en

$$v_{tR} = \frac{D_p^2 g(\rho_p - \rho)}{18\mu} \frac{v_{\tan}^2}{gr} = v_t \frac{v_{\tan}^2}{gr} \tag{14.4-36}$$

donde v_t es la velocidad terminal gravitatoria de precipitación de la ecuación (14.3-9).

Cuanto más alta sea la velocidad terminal v_t, mayor será la velocidad radial v_{tR} y más fácil resultará "precipitar" la partícula en la pared. Sin embargo, la evaluación de la velocidad radial es bastante difícil porque está en función de la velocidad terminal gravitatoria, de la velocidad tangencial y de la posición radial y axial en el ciclón. Debido a lo anterior, se prefiere usar la siguiente ecuación empírica (S2):

$$v_{tR} = \frac{b_1 D_p^2 (\rho_p - \rho)}{18\mu r^n} \tag{14.4-37}$$

donde b_1 y n son constantes empíricas.

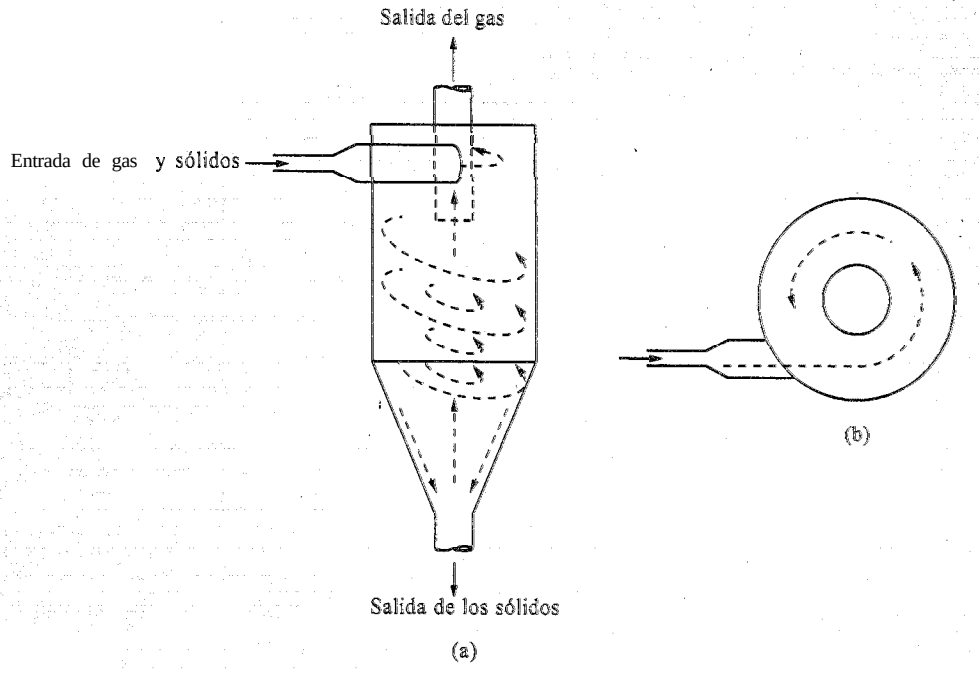


FIGURA 14.4-6 Separador de ciclón gas-sólido: a) vista lateral, b) vista superior

3. Eficiencia de recolección en los ciclones. Las partículas más pequeñas tienen velocidades de precipitación más bajas, como lo expresa la ecuación (14.4-37), y no tienen tiempo para llegar a la pared y ser recolectadas. Por consiguiente, salen con el aire que se extrae del ciclón. Las partículas más grandes se recolectan con bastante facilidad. La eficiencia de separación para cierto diámetro de partícula se define como la fracción de masa de los tamaños de partícula que se recolectan.

Una curva típica de eficiencia de recolección en un ciclón muestra que la eficiencia se reduce notablemente al disminuir el tamaño de las partículas. El diámetro de corte D_{pc} es el diámetro en el cual se recolecta la mitad de la masa de entrada de las partículas.

14.5 REDUCCIÓN MECÁNICA DE TAMAÑO

14.5A Introducción

Muchos materiales sólidos se presentan con dimensiones demasiado grandes para su uso por lo que se deben reducir. Con frecuencia, la reducción de tamaño de los sólidos se lleva a cabo para poder separar sus diversos ingredientes. En general, los términos *trituración y molienda* se usan para denotar la subdivisión de partículas sólidas grandes en partículas más pequeñas.

En la industria de procesamiento de alimentos, gran número de productos alimenticios se somete a una reducción de tamaño. Se usan molinos de rodillos para moler trigo y cebada y obtener harinas. Las semillas de soya se trituran, se comprimen y se muelen para producir aceite y harina. También se usan molinos de martillos para procesar harina de patata, tapioca y otras harinas. El azúcar se pulveriza para obtener un producto más fino.

Las operaciones de molienda son muy comunes en las industrias de minerales y del cemento. Entre los ejemplos están los minerales de cobre, níquel, cobalto y hierro, que se muelen antes de procesarlos

por vía química. La piedra caliza, el mármol, el yeso y la dolomita, se muelen para usarse como cargas en el papel, las pinturas y el caucho. Las materias primas del cemento, tales como cal, alúmina y sílice, se muelen antes de procesarlas.

Los sólidos se reducen de tamaño mediante diversos métodos. La *compresión* o *trituración* se usa para reducir sólidos duros a tamaños más o menos grandes. El *impacto* produce tamaños gruesos, medianos o finos, *el desgaste* o *frotamiento* produce materiales muy finos, el *corte* se usa para obtener tamaños prefijados.

14.5B Medición del tamaño de las partículas

La alimentación a procesos de reducción de tamaño, así como el propio producto, se definen en términos de la distribución del tamaño de las partículas. Un método muy común para graficar los tamaños de las partículas consiste en construir una curva del diámetro de éstas (abertura de los tamices en la malla) en mm o μm, en un eje, y el porcentaje acumulado retenido para dicho tamaño en el otro eje. (En el Apéndice A.5 se incluyen los datos de aberturas de los diferentes tipos de tamices.) Éste es el tipo de gráfica que se ilustró en papel de probabilidades aritméticas en la figura 12.12-2.

Estas gráficas también se construyen con la cantidad acumulada como porcentaje inferior al tamaño considerado, en función del tamaño de las partículas, como lo ilustra la figura 14.5-1a. En la figura 14.5-1b se muestra la misma información, en una curva de distribución de partículas. La ordenada se obtiene tomando las pendientes a intervalos de 5 μm en la figura 14.5-1a, y transformándolas a porcentajes en peso por μm. En la mayoría de las comparaciones y cálculos, se necesita un análisis completo del tamaño de las partículas.

14.5C Requerimientos de energía y de potencia para la reducción de tamaño

1. Introducción. En la reducción de tamaño de los sólidos, los materiales de alimentación se pulverizan a tamaños más pequeños por medio de una acción mecánica, es decir, los materiales se fracturan. El primer paso del proceso consiste en que las partículas de la alimentación se deformen y desarrollen tensiones por acción de la maquinaría de reducción de tamaño. Este trabajo para crear esfuerzos en las partículas se almacena temporalmente en el sólido como energía de tensión. A medida que se aplica más fuerza a las partículas, Ea energía de tensión excede un nivel y el material se fractura en trozos más pequeños.

Cuando el material se fractura, se producen nuevas áreas superficiales. Cada nueva unidad de área de superficie requiere determinada cantidad de energía. Parte de la energía añadida se utiliza en la creación de estas nuevas superficies, pero gran parte aparece en forma de calor. Ea energía requerida para la fractura está en función muy complicada del tipo de material, del tamaño, de su dureza, y de otros factores.

La magnitud de la fuerza mecánica aplicada; su duración; el tipo de fuerza, tal como compresión, esfuerzo cortante e impacto; y otros factores, afectan la eficiencia y alcance del proceso de reducción de tamaño. Los factores importantes del proceso de reducción de tamaño son la cantidad de energía 0 potencia consumida, el tamaño de las partículas y las superficies nuevas formadas.

2. Potencia requerida para la reducción de tamaño. Los diversas teorías o *leyes que SC* han postulado para predecir las necesidades de potencia en 18 reducción de tamaño de los sólidos, no dan buenos resultados en la práctica. Sin embargo, analizaremos las más importantes. Parte del problema radica en la estimación de Ba cantidad teórica de energia necesaria para fracturar y crear nuevas áreas superficiales. Los cálculos aproximados producen eficiencias reales del 0.1 al 2%.

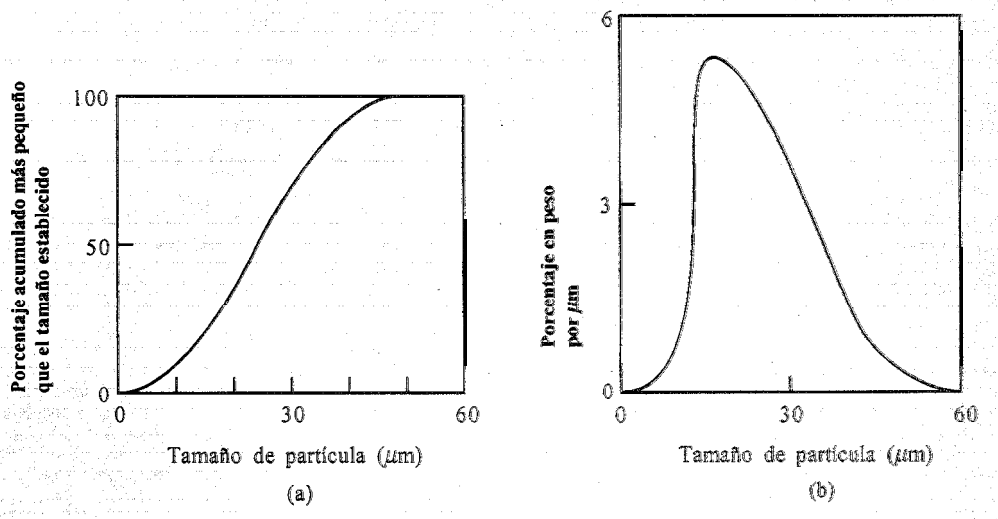


FIGURA 14.5-1. *Curvas de distribución del tamaño de partícula: a) porcentaje acumulado en función del tamaño de las partículas, b) porcentaje en peso en función del tamaño de las partículas. (Tomado de R. H. Perry y C. H. Chilton, Chemical Engineers' Handbook. 5a. ed., Nueva York. McGraw-Hill, Book Company, 1973. Reproducida con autorización.)*

Las teorías deducidas dependen de la suposición de que la energía E requerida para producir un cambio dX en una partícula de tamaño X, está en función exponencial de X.

$$\frac{dE}{dX} = -\frac{C}{X^n} \tag{14.5-1}$$

donde X es el tamaño o diámetro de la partícula en mm, y n y C son constantes que dependen del tipo, tamaño del material y del tipo de máquina.

Rittinger propuso una ley que enuncia que el trabajo de trituración es proporcional a la nueva superficie creada. Esto conduce a un valor de $n = 2$ para la ecuación (14.5-1), puesto que el área es proporcional a la longitud al cuadrado. Integrando la ecuación (14.5-1),

$$E = \frac{C}{n-1}\left(\frac{1}{X_2^{n-1}} - \frac{1}{X_1^{n-1}}\right) \tag{14.5-2}$$

donde X_1 es el diámetro medio de la alimentación y X_2 es el diámetro medio del producto. Puesto que en la ecuación de Rittinger $n = 2$,

$$E = K_R \frac{1}{X_2} - \frac{1}{X_1} \tag{14.5-3}$$

donde E es el trabajo para reducir una unidad de masa de alimentación desde X_1 hasta X_2, y K_R es una constante. Esta ley implica que se necesita la misma cantidad de energía para reducir un material de 100 mm a 50 mm, que la que se requiere para reducir el mismo material de 50 mm a 33.3 mm. Experimentalmente se ha demostrado que esta ley tiene cierta validez en la molienda de polvos finos.

Kick supuso que la energía requerida para reducir el tamaño de un material es directamente proporcional a Ba relación de reducción de tamaño. Esto significa que $n = 1$ en la ecuación (14.5-1), lo que produce la expresión:

$$E = C \ln \frac{X_1}{X_2} = K_K \log \frac{X_1}{X_2} \tag{14.5-4}$$

donde K_K *es una constante. De acuerdo* con *esta ley, se necesita* la misma energía para reducir un material de 100 mm a 50 mm, que para reducir el: mismo material de 50 mm a 25 mm.

Datos recientes obtenidos por Bond (B3) correlacionan valores experimentales e indican que el trabajo requerido cuando se usa una alimentación de tamaño considerable, es proporcional a la raíz cuadrada de la relación superficie/volumen del producto. Esto corresponde a $n = 1.5$ en la ecuación (14.5-1), con lo cual se obtiene la expresión:

$$E = K_B \frac{1}{\sqrt{X_2}} \tag{14.5-5}$$

donde K_B *es* una constante. Para usar la ecuación (14.4-5), Bond propuso un índice de trabajo E_i, que se define como el trabajo en kW · h/ton que se requiere para reducir una unidad de peso desde un tamaño muy grande, hasta un tamaño tal que el 80% pase por un tamiz de 100 μm. Entonces, el trabajo E *es* el trabajo bruto que se requiere para reducir una unidad de peso de la alimentación, desde un tamaño para el cual el 80% pasa por un diámetro X_F μm, hasta un tamaño en el que el 80% pasa por X_P μm.

La ecuación final de Bond, en términos de unidades inglesas, es

$$\frac{P}{T} = 1.46\, E_i \left(\frac{1}{\sqrt{D_P}} - \frac{1}{\sqrt{D_F}} \right) \tag{14.5-6}$$

donde P se da en hp, T es la velocidad de alimentación en ton/min. D_F es el tamaño de la alimentación en pies y D_P es el tamaño del producto en pies. Perry y Green (P1) y Bond (B3) han publicado valores típicos de E_i para diversos tipos de materiales. Algunos de estos valores son $E_i = 9.45$ para la bauxita, 11.37 para el carbón, 8.23 para carbonato de potasio, 16.4 para arcilla tipo pizarra y 14.39 para granito. Estos valores deben multiplicarse por 1.34 para molienda en seco.

EJEMPLO 14.5.1. ***Cálculo de la potencia para triturar mineral de hierro, usando la teoría de Bond.***

Se desean triturar 10 ton/h del mineral de hierro hematita. El tamaño de la alimentación es tal, que el 80% pasa por un tamiz de 3 pulg (76.2 mm) y el del producto debe pasar en un 80% por un tamiz de 1/8 pulg (3.175 mm). Calcule la potencia bruta requerida. Use un índice de trabajo E_i de 12.68 para la hematita (P1).

Solución: El tamaño de la alimentación es $D_F = \frac{3}{12} = 0.250$ pie (76.2 mm) y el tamaño del producto es $D_P = \frac{1}{8}/12 = 0.0104$ pie (3.175 mm). La tasa de la alimentación es $T = 10/60 = 0.167$ ton/min. Sustituyendo en la ecuación (14.5-6) y despejando P,

$$\frac{P}{0.167} = (1.46)(12.68) \left(\frac{1}{\sqrt{0.0104}} - \frac{1}{\sqrt{0.250}} \right)$$

$$P = 24.1 \text{ hp } (17.96 \text{ kW})$$

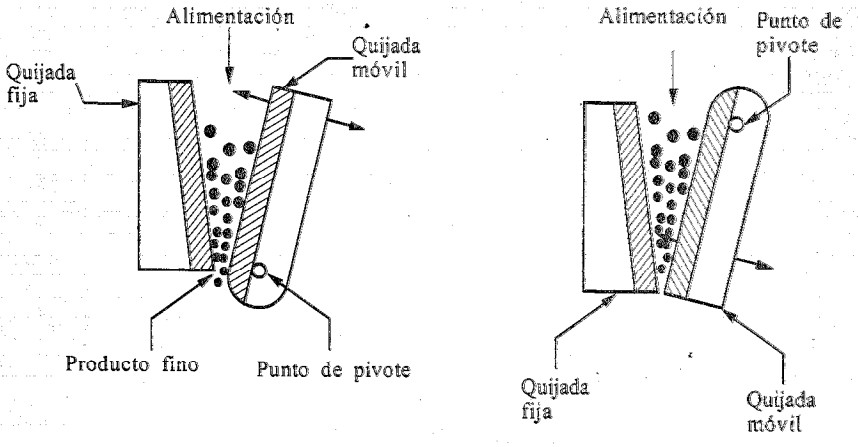


FIGURA 14.5-2. *Tipos de trituradores de quijada: a) modelo Dodge, b) modelo Blake.*

14.5D Equipo para la reducción de tamaño

1. Introducción y clasificación. Los equipos para la reducción de tamaño se pueden clasificar de acuerdo con la forma en que se aplican las fuerzas, de la siguiente manera: entre dos superficies, como en la trituración y el corte; en una superficie sólida, como en el impacto; y por la acción del medio circundante como en los molinos coloidales. Una clasificación más práctica consiste en dividir los equipos en trituradores, molinos, molinos finos y cortadores.

2. Trituradores de quijadas. El equipo para la reducción no muy fina de grandes cantidades de sólidos, consiste en unidades de baja velocidad llamadas *trituradores*; de los cuales existen varios tipos comunes. En el primer tipo, que corresponde a un triturador de quijadas, la alimentación se hace pasar entre dos quijadas pesadas o placas planas. Como se muestra en el *triturador Dodge* de la figura 14.5-2a una de las quijadas es fija, y la otra es móvil y alternante con respecto a un punto de pivote en la parte inferior. La quijada oscila sobre el punto de pivote en el fondo de la V. El material pasa con lentitud hacia un espacio cada vez más pequeño, triturándose al desplazarse.

El *triturador Blake* de la figura 14.5.2b es de uso más común, y su punto de pivote está en la parte superior de la quijada móvil. Las relaciones de reducción del triturador Blake son de aproximadamente 8:1. La aplicación principal de los trituradores de quijadas es en la trituración primaria de materiales duros, y casi siempre va seguida de un procesamiento posterior en otro tipo de triturador.

3. Trituradores giratorios. El *triturador giratorio* que se representa en la figura 14.5-3a. se ha convertido en el más predominante en el campo de la trituración de minerales duros en trozos de gran tamaño. Se podría considerar que su acción es la de un mortero manual. La cabeza trituradora móvil tiene forma de cono truncado invertido, y está en el interior de una coraza que tiene el mismo contorno. La cabeza trituradora gira excéntricamente y el material que se tritura queda atrapado entre el cono externo fijo y el cono interno giratorio.

4. Trituradores de rodillos. En la figura 14.5-3b se muestra un modelo típico de *triturador de rodillos* lisos. Los rodillos giran en sentido contrario, a velocidades iguales o diferentes. El desgaste de los rodillos suele ser un problema grave. La relación de reducción varía entre 4:1 y 2.5:1. También

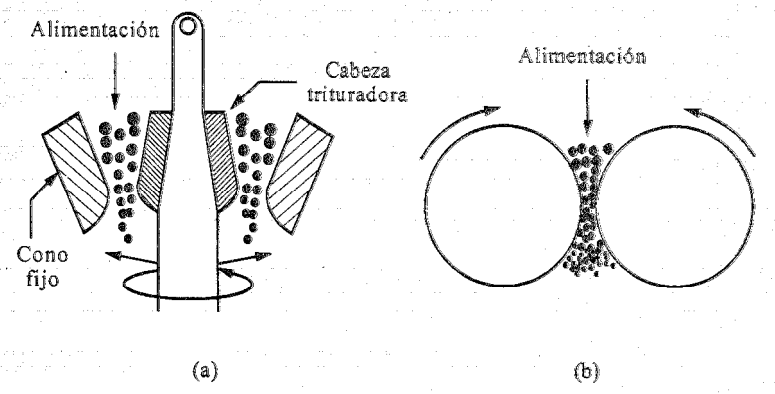


FIGURA 14.5-3 *Tipo de equipo para reducción de tamaño: a) triturador giratorio, b) triturador de rodillos.*

se usan rodillos únicos que giran contra una superficie fija, así como rodillos corrugados y dentados. Muchos productos alimenticios, que casi siempre son blandos, tales como harina, soya y almidón, se muelen con rodillos.

5. Molinos de martillos. Los *molinos de martillos* se usan para reducir partículas de tamaño intermedio a dimensiones pequeñas o a polvos. Con frecuencia, la alimentación de los molinos de martillos es el producto de trituradores giratorios o de quijadas. En el molino de martillos, un rotor de alta velocidad gira en el interior de una coraza cilíndrica. En el exterior del rotor se acopla una serie de martillos en los puntos de pivote. La alimentación entra por la parte superior de la coraza y las partículas se rompen a medida que caen por el cilindro. El material se rompe por el impacto de los martillos y se pulveriza al pasar por la estrecha abertura entre los martillos y la coraza. Por último, el polvo pasa por un tamiz o malla en el extremo de descarga.

6. Molinos giratorios. Los *molinos giratorios* se usan para reducir materiales a tamaños intermedios y finos. En este tipo de molinos, una coraza cilíndrica o cónica que gira sobre un eje horizontal, se carga con un medio de molienda, como bolas de acero, pedernal o porcelana, o bien cilindros sólidos de acero. La reducción de tamaño se lleva a cabo por acción del impacto y frotación de las bolas al girar el molino. En los molinos giratorios, el medio gira pegado a la paredes de la coraza durante la rotación de ésta, hasta alcanzar una altura desde la cual caen sobre las partículas. Estos molinos operan en seco o en húmedo.

El equipo para moliendas muy finas es altamente especializado. En algunos casos se usan dos discos planos, pudiendo girar ambos o uno solamente, y el material pasa entre ambos (P1).

PROBLEMAS

14.2.1. ***Filtración a presión constante y constantes de filtración.*** Se cuenta con los siguientes datos de filtración para una suspensión de $CaCO_3$ en agua a 298.2 K (25 °C) (R1, R2, M1), a presión constante ($-\Delta p$) de 46.2 kN/m^2 (6.70 lb/pulg^2 abs). El área de la prensa y marco es 0.0439 m^2 (0.473 pie^2) y la concentración de la suspensión es 23.47 kg sólido/m^3 de filtrado. Calcule las constantes α y R_m. Los datos son t = tiempo en s y V = volumen de filtrado recolectado en m^3.

$V \times 10^3$	t	$V \times 10^3$	t	$V \times 10^3$	t
0.5	17.3	1.5	72.0	2.5	152.0
1.0	41.3	2.0	108.3	3.0	201.7

Respuesta: $\alpha = 1.106 \times 10^{11}$ m/kg (1.65×10^{11} pie/lbm).
$R_m = 6.140 \times 1010$ m^{-1} (1.95×10^{10} pie^{-1})

14.2-2. ***Constantes de filtración y filtración a presión constante.*** Se dispone de los siguientes datos para filtración a presión constante de 194.4 kN/m^2 de la misma suspensión del problema 14.2-1, donde t se da en s y V en m^3:

$V \times 10^3$	t	$V \times 10^3$	t	$V \times 10^3$	t
0.5	6.3	2.5	51.7	4.5	134.0
1.0	14.0	3.0	69.0	5.0	160.0
1.5	24.2	3.5	88.8		
2.0	37.0	4.0	110.0		

Calcule las constantes α y R_m.

Respuesta: $\alpha = 1.61 \times 10^{11}$ m/kg

14.2-3 ***Compresibilidad de las tortas de filtración.*** Use los datos de resistencia específica de la torta α, del ejemplo 14.2-1 y de los problemas 14.2-1 y 14.2-2 y determine la constante de compresibilidad s de la ecuación (14.2-11). Grafique ln α contra ln$-\Delta p$ y determine la pendiente s.

14.2-4. ***Predicción del tiempo de filtración y del tiempo de lavado.*** Se desea filtrar la suspensión del problema 14.2-1 en una prensa de placas y marcos que tiene 30 marcos y un área de 0.873 m^2 por marco. Se usará la misma presión constante de 46.2 kN/m^2 para la filtración. Suponga las mismas propiedades de la torta de filtrado y la misma tela de filtración, y calcule el tiempo necesario para obtener 2.26 m^3 de filtrado. Al final del proceso se usará 0.283 m^3 de agua para el lavado del filtrado. Calcule el tiempo de lavado y el tiempo total del ciclo de filtrado, suponiendo que la limpieza del equipo requiere 30 min.

14.2-5. ***Constantes de filtración a presión constante.*** Usando un filtro-prensa con área de 0.0929 m^2, McMillen y Webber (M2) reportan los siguientes resultados para filtración a presión constante de 34.5 kPa de una suspensión acuosa de 13.9% en peso de $CaCO_3$, a 300 K. La relación de masa de torta húmeda a seca es de 1.59. La densidad de la torta seca es de 1017 kg/m^3. Los símbolos corresponden a W = kg de filtrado y t = tiempo en s.

W	t	W	t	W	t
0.91	24	3.63	244	6.35	690
1.81	71	4.54	372	7.26	888
2.72	146	5.44	524	8.16	1188

Calcule los valores de α y R_m.

14.2-6. ***Filtración a presión constante y lavado en un filtro de hojas.*** Se usó (R1) un filtro prensa experimental, con área de 0.0414 m^2, para filtrar una suspensión acuosa de $BaCO_3$ a presión constante de 267 kPa. La ecuación de filtración que se obtuvo fue

$$\frac{t}{V} = 10.25 \times 10^6 V + 3.4 \times 10^3$$

donde t se da en s y V en m^3.

a) Usando la misma suspensión e iguales condiciones en un filtro de hojas con área de 6.97 m^2, ¿cuánto tiempo se necesitará para obtener 1.00 m^3 de filtrado?

b) Después de la filtración, la torta se lava con 0.100 m^3 de agua. Calcule el tiempo de lavado.

Respuesta: a) t = 381.8 s

14.2-7. ***Filtración a velocidad constante y torta incompresible.*** La ecuación de filtración a presión constante de 38.7 lb/pulg^2 abs (266.8 kPa) es

$$\frac{t}{V} = 6.10 \times 10^{-5} V + 0.01$$

donde t se da en s, $-\Delta p$ en lb/pulg^2 abs y V en litros. La resistencia específica de la torta es independiente de la presión. ¿Cuánto tiempo se necesitará para llegar a 50 lb/pulg^2 abs, cuando la filtración procede a una velocidad constante de 10 l/s?

14.2-8. ***Efecto de la resistencia del medio filtrante sobre un filtro continuo de tambo rotatorio.*** Repita el ejemplo 14.2-4 para el filtro continuo al vacío de tambor rotatorio pero no desprecie la constante R_m, que es la resistencia del medio de filtración al flujo. Compare con los resultados del ejercicio 14.2-4.

Respuesta: A = 7.78 m^2

14.2-9. ***Rendimiento del filtro continuo de tambor rotatorio.*** Un filtro de tambor rotatorio que tiene un área de 2.20 m^2 se va a usar para filtrar la suspensión de $CaCO_3$ del ejemplo 14.2-4. El tambor se sumerge un 28% y el tiempo del ciclo de filtración es de 300 s. Se va a usar una caída de presión de 62.0 kN/m^2. Calcule la tasa de alimentación de la suspensión como kg de suspensión/s para los siguientes casos.

a) La resistencia del medio filtrante es despreciable.

b) El valor de B no es despreciable.

14.3-1. ***Velocidad de precipitación y partículas de extracto de café.*** Las partículas esféricas sólidas de un extracto de café (F1) proveniente de un secador con diámetro de 400 μm, caen a través del aire a temperatura de 422 K. La densidad de las partículas es 1030 kg/m^3. Calcule la velocidad terminal de precipitación y la distancia de la caída en 5 s. La presión es 101.32 kPa.

Respuesta: v_t = 1.49 m/s, 7.45 m de caída

14.3-2. ***Velocidad terminal de precipitación y partículas de polvo.*** Calcule la velocidad terminal de precipitación de partículas de polvo con diámetro de 60 μm, en aire a 294.3 K y 101.32 kPa. Las partículas de polvo pueden considerarse como esféricas con una densidad de 1280 kg/m^3.

Respuesta: v_t = 0.1372 m/s

14.3-3. ***Velocidad de precipitación de partículas líquidas.*** Considere la precipitación en aire a 294.3 K y 101.32 kPa, de gotas pequeñas de aceite de 200 μm de diámetro. La densidad del aceite es 900 kg/m^3. La cámara de precipitación tiene 0.457 m de altura. Calcule la velocidad terminal de precipitación. ¿Cuánto tiempo se requerirá para la precipitación de estas partículas? (*Nota:* Si el número de Reynolds es superior a aproximadamente 100, no se pueden usar las ecuaciones ni la correlación de resistencia al flujo para esferas rígidas.)

14.3-4. ***Velocidad de precipitación en agua de partículas de cuarzo.*** Partículas sólidas de cuarzo con diámetro de 1000 μm se sedimentan en agua a 294.3 K, la densidad de las partículas esféricas es de 2650 kg/m^3. Calcule la velocidad terminal de precipitación de estas partículas.

14.3-5. ***Precipitación frenada de partículas sólidas.*** Partículas esféricas sólidas con diámetro de 0.090 mm y densidad igual a 2002 kg/m^3 se precipitan en agua a 26.7°C. La fracción de volumen de los sólidos en el agua es de 0.45. Calcule la velocidad de precipitación y el número de Reynolds.

14.3-6. ***Precipitación frenada de partículas de cuarzo.*** Se precipitan en agua a 293.2 K. La fracción de volumen de las partículas en la suspensión de cuarzo y agua es de 0.25. Calcule la velocidad de precipitación frenada y el número de Reynolds.

14.3-7. ***Efecto de la densidad sobre la velocidad de precipitación y el diámetro de las partículas.*** Calcule la velocidad terminal de precipitación de una esfera de vidrio de 0.080 mm de diámetro y una densidad de 2469 kg/m^3 en aire a 300 K y 101.32 kPa. Calcule también el diámetro de una esfera del mineral esfalerita, cuyo peso específico es de 4.00 con la misma velocidad terminal.

14.3-8. ***Precipitación diferencial de partículas.*** Repita el ejemplo 14.3-3 para partículas esféricas con tamaños de 1.27×10^{-2} mm a 5.08×10^{-2} mm. Calcule los tamaños de las diversas fracciones que se obtienen en condiciones de precipitación libre. Calcule además el valor más alto del número de Reynolds que se presenta en estas condiciones.

14.3-9. ***Separación por precipitación.*** Una mezcla de partículas de galena y sílice, de entre 0.075 y 0.65 mm, se va a separar usando una corriente ascendente de agua a 293.2 K. Use las densidades relativas del ejemplo 14.3-3.

a) ¿Qué velocidad de flujo de agua se necesita para obtener como producto galena no contaminada, y cuál será el intervalo de tamaños de dicho producto puro?

b) ¿Qué velocidad se requerirá al usar otro líquido como el benceno, cuyo peso específico es de 0.85 y tiene una viscosidad de 6.50×10^{-4} Pa · s y cuál será el intervalo de tamaños del producto puro?

14.3-10. ***Separación por el método de hundimiento y flotación.*** Una mezcla de partículas contiene cuarzo, cuya densidad relativa es de 2.65, y hematita cuya densidad es de 5.1. Se desea separar las partículas por un método de hundimiento y flotación, usando una suspensión de partículas finas de ferrosilicio, cuya densidad es 6.7. ¿Qué consistencia, en % volumen de sólidos de ferrosilicio, se debe mantener en el medio acuoso para lograr la separación?

14.3-11. ***Velocidades de precipitación sedimentación y por lotes.*** Una prueba de precipitación por lotes en una suspensión dio los siguientes resultados, donde la altura z en metros entre el líquido claro y los sólidos suspendidos se tomó en el tiempo t en horas.

t (h)	z (m)	t (h)	z (m)	t (h)	z (m)
0	0.360	1.75	0.150	12.0	0.102
0.50	0.285	3.00	0.125	20.00	0.090
1.00	0.211	5.00	0.113		

La concentración original de la suspensión es de 250 kg/m^3 de ésta. Determine las velocidades de precipitación y las concentraciones y haga una gráfica de la velocidad en función de la concentración.

14.4-1. ***Comparación de fuerzas en centrífugas.*** Dos centrífugas giran a la misma velocidad periférica de 53.34 m/s. El primer tazón tiene un radio de $r_1 = 76.2$ m y el segundo, $r_2 =$

305 mm. Calcule las rev/min y las fuerzas centrífugas que se desarrollan en los tazones.

Respuesta: N_1 = 6684 rev/min
N_2 = 1670 rev/min. 3806 veces g's en el tazón 1 y 951 veces g's en el tazón 2

14.4-2. ***Fuerzas en una centrífuga.*** Un tazón de centrífuga gira a velocidad constante de 2000 rev/min. ¿Qué radio debe tener para lo siguiente?

a) Una fuerza de 455 g.
b) Una fuerza cuatro veces mayor que en el inciso a).

Respuesta: a) r = 0.1017 m

14.4-3. ***Efecto de la variación de las dimensiones y velocidad de una centrífuga.*** Repita el ejemplo 14.4-2 con los siguientes cambios:

a) Reduzca las rev/min a 10000 y duplique el radio de la taza exterior r_2 a 0.0445 m, manteniendo r_1 = 0.00716 m.
b) Mantenga todas las variables como en el ejemplo 14.4-2 pero duplicando la velocidad de procesamiento.

Respuesta: b) $D_p = 1.747 \times 10^{-6}$ m

14.4-4. ***Centrifugación para extraer partículas alimenticias.*** Una suspensión diluida contiene pequeñas partículas alimenticias sólidas con diámetro de 5×10^{-2} mm, que se desean extraer por centrifugación. La densidad de las partículas es de 1050 kg/m^3 y la densidad de la solución es de 1000 kg/m^3. La viscosidad del líquido es de 1.2×10^{-3} Pa · s. Se usará una centrífuga de 3000 rev/min. Las dimensiones del tazón son b = 100.1 mm. r_1 = 5.00 mm y r_2 = 30.0 mm. Calcule la velocidad de flujo necesaria en m^3/s para extraer estas partículas.

14.4-5. ***Efecto de la densidad de un aceite en la localización de la interfase.*** Repita el ejemplo 14.4-3, pero disminuyendo la densidad del aceite vegetal a 914.7 kg/m^3.

14.4-6. ***Interfaz en un separador de crema.*** Una centrífuga separadora de crema tiene un radio de descarga de r_1 = 50.8 mm y un radio exterior de r_2 = 76.2 mm. La densidad de la leche descremada es 1032 kg/m^3 y la de la crema es 865 kg/m^3 (E1). Calcule el radio de la zona neutra de la interfaz.

Respuesta: r_2 = 150 mm

14.4-7. ***Aumento de escala y valores de Σ de las centrífugas.*** Para las condiciones dadas en el ejemplo 14.4-2, haga lo siguiente.

a) Calcule el valor Σ.
b) Se va a utilizar una nueva centrífuga con las siguientes dimensiones: r_2 = 0.0445 m, r_1 = 0.01432 m, b = 0.394 m y N = 26000 rev/min. Calcule el nuevo valor de Σ y aumente la escala del tazón de flujo utilizando la misma solución.

Respuesta: a) Σ = 196.3 m^2

14.4-8. ***Proceso de filtración centrífuga.*** Un filtro centrífugo por lote semejante al de la figura 14.4-5 tiene un tazón de altura b = 0.457 m y r_2 = 0.381 m, y opera a 33.33 rev/s a 25 °C. El filtrado es esencialmente agua. En un momento determinado del ciclo, la suspensión y la torta formada tienen las siguientes propiedades: c_S = 60.0 kg de sólidos/m^3 de filtrado, ε = 0.82, ρ_p = 2002 kg de sólidos/m^3 de filtrado, espesor de la torta = 0.152 m, $\alpha = 6.38 \times 10^{10}$ m/kg, $R_m = 8.53 \times 10^{10}$ m^{-1}, r_1 = 0.2032 m. Calcule la velocidad de flujo del filtrado.

Respuesta: $q = 6.11 \times 10^{-4}$ m^3/s

14.5-1. ***Variación de requerimientos de potencia en la trituración.*** En la trituración de un mineral, la alimentación tiene un tamaño tal, que el 80% es inferior a 50.8 mm y se tritura de tal manera que el 80% sea inferior a 6.35 mm. La potencia necesaria es de 89.5 kW. ¿Cuál sería la potencia necesaria usando la misma alimentación para que el 80% fuera inferior a 3.18 mm? Use la ecuación de Bond. (*Sugerencia:* se desconoce el índice de trabajo E_i, pero se puede determinar usando los datos experimentales originales en términos de T. En la

ecuación para el nuevo tamaño aparecen las mismas incógnitas. Si se divide una ecuación entre la otra, se eliminan.)

Respuesta: 146.7 kW.

14.52. ***Trituración de roca fosfórica.*** Se desean triturar 100 ton/h de roca fosfórica, de un tamaño de alimentación donde el 80% es de menos de 4 pulg, hasta un producto donde el 80% menor de 1/8 pulg. El índice de trabajo es 10.13 (P1).

a) Calcule la potencia necesaria.

b) Calcule la potencia requerida para triturar la roca aún más, de manera que el 80% mida menos de 1000 mm.

REFERENCIAS

(B1) BADGER, W. L. y BANCHERO, J. T. *Introduction to Chemical Engineering*, Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1955.

(B2) BECKER, H. A. *Can. J. Chem.* Eng. **37,** 85 (1951).

(B3) BOND, F. C. *Trans. A.I.M.E.*, **193,** 484 (1952).

(C1) COULSON, J.M. y RICHARDSON, J. F. *Chemical Engineering*, Vol. 2, 3a. ed., Nueva York: Pergamon Press, Inc., 1978.

(E1) EARLE, R. L. *Unit Operations in Food Processing*, Oxford: Pergamon Press, Inc. 1966.

(F1) FOUST, A. S., et al. *Principles of Unit Operations*, 2a. ed., Nueva York: John Wiley & Sons: Inc. 1980.

(F2) FITCH, B. *Ind. Eng. Chem.* **58** (10), 18 (1966).

(G1) GRACE, H. P. *Chem. Eng. Progr.*, **46,** 467 (1950); **49,** 303, 367, 427 (1953); *A.I.Ch.E.J.*, **2,** 307 (1956).

(H1) HUGHES, R. R. y GILLILAND, E. R. *Chem. Eng. Progr.* **48**, 497 (1952).

(K1) KYNCH, G. J. *Trans. Faraday Soc.*, **48**, 166 (1952).

(Ll) LARIAN, M.G. *Fundamentals of Chemical Engineering Operations*. Englewood Cliffs. N. J.: Prentice-Hall, Inc., 1958.

(L2) LAPPLE, C. E. y SHEPHERD, C. B. *Ind. Eng. Chem.* **32,** 605 (1940).

(M1) MCCABE, W. L. y SMITH, J. C. *Unit Operations of Chemical Engineering*, 3a. ed., Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1976.

(M2) MCMILLEN, E. L. y WEBBER, H. A. *Trans, A.I.Ch.E.*, **34**, 213 (1938).

(N1) NICKOLAUS, N. y DAHLSTROM, D. A. *Chem. Eng. Progr.*, **52**(3), 87M (1956).

(P1) PERRY, R. H. y GREEN D. *Perry's Chemical Engineer's Handbook*, 6a. ed., Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1984.

(P2) PERRY, R. H. y CHILTON, C. H. *Chemical Engineers's Handbook*, 5a. ed., Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1973.

(R1) RUTH, B. F. y KEMPE, L. L. *Trans. A.I.Ch.E.*, **34**, 213 (1938).

(R2) RUTH, B. F. *Ind. Eng. Chem.*, **25**, 157 (1933).

(S1) STEINOUR, H. H. *Ind. Eng. Chem.*, **36**, 618, 840 (1944).

(S2) SHEPHERD, C. B. y LAPPLE, C. E. *Ind. Eng. Chem.*, **31**, 972 (1939); **32**, 1246 (1940).

(T1) TALMAGE, W. P. y FITCH, E. B. *Ind. Eng. Chem.*, **47** (1), 38 (1995).

(Z1) ZENZ, F. A. y OTHMER, D. F. *Fluidization and Fluid-Particle Systems*. Nueva York: Reinhold Publishing Co., Inc., 1960.

APÉNDICE A.1

Constantes fundamentales y factores de conversión

A.l-1. Constante *R* de la ley de los gases

Valor numérico	*Unidades*
1.9872	cal g/g mol · K
1.9872	btu/mol lb · °R
82.057	cm^3 · atm/mol g · K
83 14.34	J/mol kg · K
82.057 × 10^{-3}	m^3 · atm/kg mol · K
83 14.34	kg · m^2/s^2 · kg mol · K
10.73 1	pie^3 · $lb_f/plug^2$ · mol lb · °R
0.7302	pie^3 · atm/lb mol · °R
1545.3	pie · lb_f/lb mol · °R
83 14.34	m^3 · Pa/kg mol · K

A.l-2 Volumen y densidad

1 g mol de gas ideal a 0 °C, 760 mm de Hg = 22.4140 lt = 22414 cm^3
1 lb mol de gas ideal a 0 °C, 760 mm de Hg = 359.05 pie^3
1 kg mol de gas ideal a 0 °C, 760 mm de Hg = 22.414 m^3
Densidad del aire seco a 0 °C, 760 mm de Hg = 1.2929 g/litro
= 0.080711 lb_m/pie^3
Peso molecular del aire = 28.97 lb_m/lb mol = 28.97 g/g mol
1 g/cm^3 = 62.43 lb_m/pie^3 = 1000 kg/m^3
1 g/cm^3 = 8.345 lb_m/gal estadounidense
1 lb_m/pie^3 = 16.0185 kg/m^3

A.l-3. Longitud

1 pulg. = 2.540 cm
100 cm = 1 m

1 micra = 10^{-6} m = 10^{-4} cm = 10^{-3} mm μm (micrómetro)
1 Å (angstrom) = 10^{-10} m = 10^{-4} μm
1 milla = 5280 pies
1 m = 3.2808 pies = 39.37 pulg.

A.1-4 Masa

1 lb_m = 453.59 g = 0.45359 kg
1 lb_m = 16 oz = 7000 granos
1 kg = 1000 g = 2.2046 lb_m
1 ton (corta) = 2000 lb_m
1 ton (larga) = 2240 lb_m
1 ton (métrica) = 1000 kg

A.1-5 Aceleración normal de la gravedad

g = 9.80665 m/s^2
g = 980.665 cm/s^2
g = 32.174 pie/s^2
g_c = (factor de conversión gravitatorio) = 32.1740 $lb_m \cdot$ pie/$lb_f \cdot s^2$
= 980.665 $g_m \cdot$ cm/$g_f \cdot s^2$

A.1-6 Volumen

1 L (litro) = 1000 cm^3
1 pulg^3 = 16.387 cm^3
1 pie^3 = 28.317 L (litro)
1 pie^3 = 0.028317 m^3
1 pie^3 = 7.481 gal estadounidense
1 m^3 = 264.17 gal estadounidense
1 m^3 = 1000 L (litro)
1 gal estadounidense = 4 cuartos
1 gal estadounidense =3.7854 L (litro)
1 gal estadounidense = 3785.4 cm^3
1 gal inglés =1.20094 gal estadounidense
1 m^3 = 35.313 pie^3

A.1-7 Fuerza

1 g · cm/s^2 (dina) = 10^{-5} kg · m/s^2 = 10^{-5} N (newton)
1 g · cm/s^2 = 7.2330 × 10^{-5} $lb_m \cdot$ pie/s^2 (poundal)
1 kg · m/s^2 = 1 N (newton)
1 lb_f = 4.4482 N
1 g · cm/s^2 = 2.2481 × 10^{-6} lb_f

A.1-8 Presión

1 bar = 1 × 10^{-5} Pa (pascal) = 1 × 10^{-5} N/m^2
1 lb/pulg^2 abs = 1 lb_f/pulg^2
1 lb/pulg^2 abs = 2.0360 pulg de Hg a 0 °C
1 lb/pulg^2 abs = 2.311 pie de H_2O a 70 °F
1 lb/pulg^2 abs = 51.715 mm de Hg a 0 °C (ρ_{Hg} = 13.5955 g/cm^3)
1 atm = 14.696 lb/pulg^2 abs = 1.01325 × 10^5 N/m^2 = 1.01325 bar
1 atm = 760 mm de Hg a 0 °C = 1.01325 × 10^5 Pa
1 atm = 29.921 pulg de Hg a 0 °C
1 atm = 33.90 pie de H_2O a 4 °C

1 lb/pulg^2 abs = 6.89476×10^4 g/cm · s^2
1 lb/pulg^2 abs = 6.89476×10^4 dina/cm^2
1 dina/cm^2 = 2.0886×10^{-3} lb$_f$/pie^2
1 lb/pulg^2 abs = 6.89476×10^3 N/m^2 = 6.89476×10^3 Pa
1 lb$_f$/pie^2 = 4.7880×10^2 dina/cm^2 = 47.880 N/m^2
1 mm de Hg (0 °C) = 1.333224×10^2 N/m^2 = 0.1333224 kPa

A.1-9 Potencia

1 hp = 0.74570 kW 1 watt (W) = 14.340 cal/min
1 hp = 550 pie · lb$_f$/s 1 btu/h = 0.29307 W (watt)
1 hp = 0.7068 btu/s 1 J/s (joule/s) = 1 W

A.1-10 Calor, energía, trabajo

1 J = 1 N . m = 1 kg · m^2/s^2
1 kg . m^2/s^2 = 1 J (joule) = 10^7 g · cm^2/s^2 (erg)
1 btu = 1055.06 J = 1.05506 kJ
1 btu = 252.16 cal (termoquímica)
1 kcal (termoquímica) = 1000 cal = 4.1840 kJ
1 cal (termoquímica) = 4.1840 J
1 cal (IT) = 4.1868 J
1 btu = 251.996 cal (IT)
1 btu = 778.17 pie · lb$_f$
1 hp . h = 0.7457 kW · h
1 hp · h = 2544.5 btu
1 pie . lb$_f$ = 1.35582 J
1 pie · lb$_f$/lb$_m$ = 2.9890 J/kg

A.1-11 Conductividad térmica

1 btu/h . pie . °F = 4.1365×10^{-3} cal/s · cm · °C
1 btu/h . pie · °F = 1.73073 W/m · K

A.1-12 Coeficiente de transferencia de calor

1 btu/h . pie^2 · °F = 1.3571×10^{-4} cal/s · cm^2 · °C
1 btu/h · pie^2 . °F = 5.6783×10^{-4} W/cm^2 · °C
1 btu/h . pie^2 . °F = 5.6785 W/m^2 · K
1 kcal/h · m^2 . °F = 0.2048 btu/h . pie^2 . °F

A.1-13 Viscosidad

1 cp = 10^{-2} g/cm · s (poise)
1 cp = 2.4191 lb$_m$/pie · h
1 cp = 6.7197×10^{-4} lb$_m$/pie · s
1 cp = 10^{-3} Pa · s = 10^{-3} kg/m · s = 10^{-3} N · s/m^2
1 cp = 2.0886×10^{-5} lb$_f$ · s/pie^2
1 Pa · s = 1 N · s/m^2 = 1 kg/m · s = 1000 cp = 0.67197 lb$_m$/pie · s

A.1-14 Difusividad

$1\ cm^2/s = 3.875\ pie^2/h$
$1\ cm^2/s = 10^{-4}\ m^2/s$
$1\ m^2/h = 10.764\ pie^2/h$
$1\ m^2/s = 3.875 \times 10^4\ pie^2/h$
1 centistoke $= 10^{-2}\ cm^2/s$

A.1-15 Flujo específico de masa y flujo específico molar

$1\ g/s \cdot cm^2 = 7.3734 \times 10^3\ lb_m/h \cdot pie^2$
1 g mol $g/s \cdot cm^2 = 7.3734 \times 10^3$ mol $lb/h \cdot pie^2$
1 mol $g/s \cdot cm^2 = 10$ mol $kg/s \cdot m^2 = 1 \times 10^4$ mol $g/s \cdot m^2$
1 lb mol$/h \cdot pie^2 = 1.3562 \times 10^{-3}$ kg mol$/s \cdot m^2$

A.1-16 Flujo específico de calor y flujo de calor

$1\ btu/h \cdot pie^2 = 3.1546\ W/m^2$
$1\ btu/h = 0.29307\ W$
$1\ cal/h = 1.1622 \times 10^{-3}\ W$

A.1-17 Capacidad calorífica y entalpía

$1\ btu/lb_m \cdot {}^\circ F = 4.1868\ kJ/kg \cdot K$
$1\ btu/lb_m \cdot {}^\circ F = 1.000\ cal/g \cdot {}^\circ C$
$1\ btu/lb_m = 2324.0\ J/kg$
$1\ pie \cdot lb_f/lb_m = 2.9890\ J/kg$
1 cal(IT) $g \cdot {}^\circ C = 4.1868\ kJ/kg \cdot K$
1 kcal/g mol $= 4.1840 \times 10^3\ kJ/kg\ mol$

A.1-18 Coeficiente de transferencia de masa

$1\ k_c\ cm/s = 10^{-2}\ m/s$
$1\ k_c\ pie/h = 8.4668 \times 10^{-5}\ m/s$
$1\ k_x$ g mol$/s \cdot cm^2 \cdot$ frac mol $= 10$ kg mol$/s \cdot m^2 \cdot$ frac mol
$1\ k_x$ g mol$/s \cdot cm^2 \cdot$ frac mol $= 1 \times 10^4$ g mol$/s \cdot m^2 \cdot$ frac mol
$1\ k_x$ lb mol$/h \cdot pie^2 \cdot$ frac mol $= 1.3562 \times 10^{-3}$ kg mol$/s \cdot m^2 \cdot$ frac mol
$1\ k_x\ a$ lb mol$/h \cdot pie^3 \cdot$ frac mol $= 4.449 \times 10^{-3}$ kg mol$/s \cdot m^3 \cdot$ frac mol
$1\ k_G$ kg mol$/s \cdot m^2 \cdot$ atm $= 0.98692 \times 10^{-5}$ kg mol$/s \cdot m^2 \cdot$ Pa
$1\ k_G\ a$ kg mol$/s \cdot m^3 \cdot$ atm $= 0.98692 \times 10^{-5}$ kg mol$/s \cdot m^3 \cdot$ Pa

APÉNDICE A.2

Propiedades físicas del agua

A.2-1 Calor latente del agua a 273.15 K (°C)

Calor latente de fusión = 1436.3 cal/g mol
= 79.724 cal/g
= 2585.3 btu/lb mol
= 6013.4 kJ/kg mol

Referencia: O. A. Hougen, K. M. Watson y R. A. Ragatz, *Chemical Process Principles*, Parte I, 2a. ed. Nueva York: John Wiley & Sons, Inc., 154.

Calor latente de vaporización a 298.15 K (25°C)

Presión (mm Hg)	*Calor latente*
23.75	44020 kJ/kg mol, 10.514 kcal/g mol, 18925 btu/lb mol
760	44045 kJ/kg mol, 10.520 kcal/g mol, 18936 btu/lb mol

Referencia: National Bureau of Standards, *Circular 500.*

A.2-2 Presión de vapor del agua

Temperatura		*Presión de vapor*		*Temperatura*		*Presión de vapor*	
K	*°C*	*kPa*	*mm Hg*	*K*	*°C*	*kPa*	*mm Hg*
273.15	0	0.611	4.58	323.15	50	12.333	92.51
283.15	10	1.228	9.21	333.15	60	19.92	149.4
293.15	20	2.338	17.54	343.15	70	31.16	233.7
298.15	25	3.168	23.76	353.15	80	47.34	355.1
303.15	30	4.242	31.82	363.15	90	70.10	525.8
313.15	40	7.375	55.32	373.15	100	101.325	760.0

Referencia: Physikalish-technishe, Reichsansalt, Holborn, Scheel y Henning, *Warmetabellen.* Brunswick, Alemania: Fridrich Viewig and Son, 1909.

A.2-3 Densidad del agua líquida

Temperatura		Densidad		Temperatura		Densidad	
K°	C	g/cm³	kg/m³	K	°C	g/cm³	kg/m³
273.15	0	0.99987	999.87	323.15	50	0.98807	988.07
277.15	4	1.00000	1000.00	333.15	60	0.98324	983.24
283.15	10	0.99973	999.73	343.15	70	0.97781	977.81
293.15	20	0.99823	998.23	353.15	80	0.97183	971.83
298.15	25	0.99708	997.08	363.15	90	0.96534	965.34
303.15	30	0.99568	995.68	373.15	100	0.95838	958.38
313.15	40	0.99225	992.25				

Referencia: R. H. Perry y C. H. Chilton, *Chemical Engineers'* Handbook, 5a. ed. Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1973. Con autorización.

A.2-4 Viscosidad del agua líquida

Temperatura		Viscosidad [(Pa·s) 10^3 (kg/m·s) 10^3, o cp]	Temperatura		Viscosidad [(Pa·s) 10^3 (kg/m·s) 10^3, o cp]
K	°C		K	°C	
273.15	0	1.7921	323.15	50	0.5494
275.15	2	1.6728	325.15	52	0.5315
277.15	4	1.5674	327.15	54	0.5146
279.15	6	1.4728	329.15	56	0.4985
281.15	8	1.3860	331.15	58	0.4832
283.15	10	1.3077	333.15	60	0.4688
285.15	12	1.2363	335.15	62	0.4550
287.15	14	1.1709	337.15	64	0.4418
289.15	16	1.1111	339.15	66	0.4293
291.15	18	B.0559	341.15	68	0.4174
293.15	20	B.0050	343.15	70	0.4061
293.35	20.2	B.0000	345.15	72	0.3952
295.15	22	0.9579	347.15	74	0.3849
297.15	24	0.9142	349.15	76	0.3750
298.15	25	0.8937	351.15	78	0.3655
299.15	26	0.8737	353.15	80	0.3565
301.15	28	0.8360	355.15	82	0.3478
303.15	30	0.8007	357.15	84	0.3395
305.15	32	0.7679	359.15	86	0.3315
307.15	34	0.7371	361.15	88	0.3239
309.15	36	0.7085	363.15	90	0.3165
311.15	38	0.6814	365.15	92	0.3095
313.15	40	0.6560	367.15	94	0.3027
315.15	42	0.6321	369.15	96	0.2962
317.15	44	0.6087	371.15	98	0.2899
319.15	46	0.5883	373.15	100	0.2838
321.15	48	0.5683			

Referencia: Bingham, *Fluidity and Plasticity.* Nueva York. McGraw-Hill, Book Company, 1922. Con autorización.

A.2.5 Capacidad calorífica del agua líquida a 101.325 kPa (1 atm)

Temperatura		*Capacidad calorífica, c_p*		*Temperatura*		*Capacidad calorífica, c_p*	
°C	*K*	*cal/g · °C*	*kJ/kg · K*	*°C*	*K*	*cal/g · °C*	*kJ/kg · K*
0	273.15	1.0080	4.220	50	323.15	0.9992	4.183
10	283.15	1.0019	4.195	60	333.15	1.0001	4.187
20	293.15	0.9995	4.185	70	343.15	1.0013	4.192
25	298.15	0.9989	4.182	80	353.15	1.0029	4.199
30	303.15	0.9987	4.181	90	363.15	1.0050	4.208
40	313.15	0.9987	4.181	100	373.15	1.0076	4.219

Referencia: N. S. Osborne, H. F. Stimson y D. C. Ginnings, *Bur. Standards J. Res.*, **23**, 197 (1939).

A.2-6 Conductividad térmica del agua líquida

Temperatura			*Conductividad térmica*	
°C	*°F*	*K*	*btu/h·pie·°F*	*W/m · k*
0	32	273.15	0.329	0.569
37.8	100	311.0	0.363	0.628
93.3	200	366.5	0.393	0.680
148.9	300	422.1	0.395	0.684
215.6	420	588.8	0.376	0.651
326.7	620	599.9	0.275	0.476

Referencia: D. L. Timrot y N. B. Vargaftik, *J. Tech. Phys. (U.R.S.S.)*, **10**, 1063 (1940); 6a. Conferencia Internacional de las Propiedades del Vapor, París, 1964.

A.2-7 Presión de vapor de hielo saturado-vapor de agua y calor de sublimación

Temperatura			*Presión de vapor*			*Calor de sublimación*	
K	*°F*	*°C*	*kPa*	*lb/pulg^2 abs*	*mmHg*	*btu/lb$_m$*	*kJ/kg*
273.2	32	0	6.107×10^{-1}	8.858×10^{-2}	4.581	1218.6	2834.5
266.5	20	–6.7	3.478×10^{-1}	5.045×10^{-2}	2.609	1219.3	2836.1
261.0	10	–12.2	2.128×10^{-1}	3.087×10^{-2}	1.596	1219.7	2837.0
255.4	0	–17.8	1.275×10^{-1}	1.849×10^{-2}	0.9562	1220.1	2838.0
249.9	–10	–23.3	7.411×10^{-2}	1.082×10^{-2}	0.5596	1220.3	2838.4
244.3	–20	–28.9	3.820×10^{-2}	6.181×10^{-3}	0.3197	1220.5	2838.9
238.8	–30	–34.4	2.372×10^{-2}	3.440×10^{-3}	0.1779	1220.5	2838.9
233.2	–40	–40.0	1.283×10^{-2}	1.861×10^{-3}	0.19624	1220.5	2838.9

Referencia: ASHRAE, *Handbook of Fundamentals*, Nueva York: ASHRAE, 1972.

A.2-8 Capacidad calorífica del hielo

Temperatura		c_p		Temperatura		c_p	
°F	K	$btu/lb_m \cdot °F$	$kJ/kg \cdot K$	°F	K	$btu/lb_m \cdot °F$	$kJ/kg \cdot K$
32	273.15	0.500	2.093	–10	249.85	0.461	1.930
20	266.45	0.490	2.052	–20	244.25	0.452	1.892
10	260.95	0.481	2.014	–30	238.75	0.442	1.850
0	255.35	0.472	1.976	–40	233.15	0.433	1.813

Referencia: Adaptado de ASHRAE, *Handbook of Fundamentals*, Nueva York. ASHRAE, 1972

A.2-9 Propiedades del vapor saturado y del agua (tablas de vapor) Unidades SI

Temperatura (°C)	Presión de vapor (kPa)	Volumen específico (m^3/kg)		Entalpía (kJ/kg)		Entropía (kJ/kg ·K)	
		Líquido	Vapor saturado	Líquido	Vapor saturado	Líquido	Vapor saturado
0.01	0.6113	0.0010002	206.136	0.00	2501.4	0.0000	9.1562
3	0.7577	0.0010001	168.132	12.57	2506.9	0.0457	9.0773
6	0.9349	0.0010001	137.734	25.20	2512.4	0.0912	9.0003
9	1.1477	0.0010003	113.386	37.80	2517.9	0.1362	8.9253
12	1.4022	0.0010005	93.784	50.41	2523.4	0.1806	8.8524
15	1.7051	0.0010009	77.926	62.99	2528.9	0.2245	8.7814
18	2.0640	0.0010014	65.038	75.58	2534.4	0.2679	8.7123
21	2.487	0.0010020	54.514	88.14	2539.9	0.3109	8.6450
24	2.985	0.0010027	45.883	100.70	2545.4	0.3534	8.5794
25	3.169	0.0010029	43.360	140.89	2547.2	0.3674	8.5580
27	3.567.	0.0010035	38.774	113.25	2550.8	0.3954	8.5156
30	4.246	0.0010043	32.894	125.79	2556.3	0.4369	8.4533
33	5.034	0.0010053	28.011	138.33	2561.7	0.4781	8.3927
36	5.947	0.0010063	23.940	150.86	2567.1	0.5188	8.3336
40	7.384	0.0010078	19.523	167.57	2574.3	0.5725	8.2570
45	9.593	0.0010099	15.258	188.45	2583.2	0.6387	8.1648
50	12.349	0.0010121	12.032	209.33	2592.1	0.7038	8.0763
55	15.758	0.0010146	9.568	230.23	2600.9	0.7679	7.9913
60	19.940	0.0010172	7.671	251.13	2609.6	0.8312	7.9096
65	25.03	0.0010199	6.197	272.06	2618.3	0.8935	7.8310
70	31.19	0.0010228	5.042	292.98	2626.8	0.9549	7.7553
75	38.58	0.0010259	4.131	313.93	2635.3	1.0155	7.6824
80	47.39	0.0010291	3.407	334.91	2643.7	1.0753	7.6122
85	57.83	0.0010325	2.828	355.90	2651.9	1.1343	7.5445
90	70.14	0.0010360	2.361	376.92	2660.1	1.1925	7.4791
95	84.55	0.0010397	1.9819	397.96	2668.1	1.2500	7.4159
100	101.35	0.0010435	1.6729	419.04	2676.1	1.3069	7.3549

(Continúa)

A.2-9 Unidades SI , *Continuación*

Temperatura (°C)	*Presión de vapor (kPa)*	*Volumen específico (m^3/kg)*		*Entalpía (kJ/kg)*		*Entropía (kJ/kg ·K)*	
		Líquido	*Vapor saturado*	*Líquido*	*Vapor saturado*	*Líquido*	*Vapor saturado*
105	120.82	0.0010475	1.4194	440.15	2683.8	1.3630	7.2958
110	143.27	0.0010516	1.2102	461.30	2691.5	1.4185	7.2387
115	169.06	0.0010559	1.0366	482.48	2699.0	1.4734	7.1833
120	198.53	0.0010603	0.8919	503.71	2706.3	1.5276	7.1296
125	232.1	0.0010649	0.7706	524.99	2713.5	1.5813	7.0775
130	270.1	0.0010697	0.6685	546.31	2720.5	1.6344	7.0269
135	313.0	0.0010746	0.5822	567.69	2727.3	1.6870	6.9777
140	316.3	0.0010797	0.5089	589.13	2733.9	1.7391	6.9299
145	415.4	0.0010850	0.4463	610.63	2740.3	1.7907	6.8833
150	475.8	0.0010905	0.3928	632.20	2746.5	1.8418	6.8379
155	543.1	0.0010961	0.3468	653.84	2752.4	1.8925	6.7935
160	617.8	0.0011020	0.3071	675.55	2758.1	1.9427	6.7502
165	700.5	0.0011080	0.2727	697.34	2763.5	1.9925	6.7078
170	791.7	0.0011143	0.2428	719.21	2768.7	2.0419	6.6663
175	892.0	0.0011207	0.2168	741.17	2773.6	2.0909	6.6256
180	1002.1	0.0011274	0.19405	763.22	2778.2	2.1396	6.5857
190	1254.4	0.0011414	0.15654	807.62	2786.4	2.2359	6.5079
200	1553.8	0.0011565	0.12736	852.45	2793.2	2.3309	6.4323
225	2548	0.0011992	0.07849	966.78	2803.3	2.5639	6.2503
250	3973	0.0012512	0.05013	1085.36	2801.5	2.7927	6.0730
275	5942	0.0013168	0.03279	1210.07	2785.0	3.0208	5.8938
300	8581	0.0010436	0.02167	1344.0	2749.0	3.2534	5.7045

Referencia: Resumido de J. H. Keenan, F. G. Keyes, P.G. Hill y J. G. Moore, *Steam Tables-Metric Units*. Nueva York: John Wiley & Sons, Inc. 1969. Reimpreso con autorización de los editores.

A.2.9 Propiedades del vapor saturado y del agua (tablas de vapor) Unidades del Sistema Inglés

Temperatura (°F)	*Presión de vapor ($lb/pulg^2$ abs)*	*Volumen específico (pie^3/lb_m)*		*Entalpía (btu/lb_m)*		*Entropía ($btu/lb_m \cdot °F$)*	
		Líquido	*Vapor saturado*	*Líquido*	*Vapor saturado*	*Líquido*	*Vapor saturado*
32.02	0.08866	0.016022	3302	0.00	1075.4	0.000	2.1869
35	0.09992	0.016021	2948	3.00	1076.7	0.00607	2.1764
40	0.12166	0.016020	2445	8.02	1078.9	0.01617	2.1592
45	0.14748	0.016021	2037	13.04	1081.1	0.02618	2.1423
50	0.17803	0.016024	1704.2	18.06	1083.3	0.03607	2.1259
55	0.2140	0.016029	1431.4	23.07	1085.5	0.04586	2.1099

(*Continúa*)

A.2.9. Unidades del Sistema Inglés, *Continuación*

Temperatura (°F)	*Presión de vapor* (lb/pulg² abs)	*Volumen específico* (pie^3/lb_m)		*Entalpía* (btu/lb_m)		*Entropía* ($btu/lb_m \cdot °F$)	
		Líquido	*Vapor saturado*	*Líquido*	*Vapor saturado*	*Líquido*	*Vapor saturado*
60	0.2563	0.016035	1206.9	28.88	1887.7	0.05555	2.0943
65	0.3057	0.016042	1021.5	33.8~9	1089.9	0.06514	2.0791
70	0.3622	0.016051	867.7	38.09	1092.0	0.07463	2.0642
75	0.4300	0.016061	739.7	43.6i9	18'94.2	0.08402	2.0497
80	0.5073	0.016073	632.8	48.09	1096.4	0.09332	2.0356
85	0.5964	0.016085	543.1	53.08	1098.6	0.10252	2.0218
90	0.6988	0.016099	467.7	58.07	1100.7	0.11165	2.0083
95	0.8162	0.016114	404.0	63.06	1102.9	0.12068	1.9951
100	0.9503	0.016130	350.0	68.05	1105.0	0.12963	1.9822
110	1.2763	0.016166	265.1	78.02	1109.3	0.14730	1.9574
120	1.6945	0.016205	203.0	88.00	1113.5	0.16465	1.9336
130	2.225	0.016247	157.17	97.98	1117.8	0.18172	1.9109
140	2.892	0.016293	122.88	107.96	1121.9	0.19851	1.8892
150	3.722	0.016343	96.99	117.96	1126.1	0.21503	1.8684
160	4.745	0.016395	77.23	E27.96	1130.1	0.23130	1.8484
170	5.996	0.016450	62.02	137.97	1134.2	0.24732	1.8293
180	7.515	0.016509	50.20	147.99	1138.2	0.26311	1.8109
190	9.343	0.016570	40.95	158.03	1142.1	0.27866	1.7932
200	11.529	0.016634	33.6'3	168.07	1145.9	0.29400	1.7762
210	14.125	0.016702	27.82	178.14	1 n49.7	0.30913	1.7599
212	14.698	0.016716	26.80	180.16	1150.5	0.31213	1.7567
220	17.188	0.016772	23.15	188.22	1153.5	0.32406	1.7441
230	20.78	0.016845	19.386	198.32	1157.1	0.33880	1.7289
240	24.97	0.016922	16.327	208.44	1160.7	0.35335	1.7143
250	29.82	0.017001	13.826	218.59	1164.2	0.36772	1.7001
260	35.42	0.017084	11.768	228.76	1167.6	0.38193	1.6864
270	41.85	0.017170	10.066	238.95	1170.9	0.39597	1.6731
280	49.18	0.017259	8.650	249.18	1174.1	0.40986	1.6602
290	57.33	0.017352	7.467	259.44	1177.2	0.42360	1.6477
300	66.98	0.017448	6.472	269.73	1180.2	0.43720	1.6356
310	77.64	0.017548	5.632	280.06	1183.0	0.45067	1.6238
320	89.60	0.017652	4.919	290.43	1185.8	0.46400	1.6123
330	103.00	0.017760	4.312	300.84	1188.4	0.47722	1.6010
340	117.93	0.017872	3.792	311.30	1190.8	0.49031	1.5901
350	134.53	0.017988	3.346	321.80	1193.1	0.50329	1.5793
360	152.92	0.018108	2.961	332.35	1195.2	0.51617	1.5688
370	173.23	0.018233	2.628	342.96	1197.2	0.52894	1.5585
380	195.60	0.018363	2.33'9	353.62	1199.0	0.54163	1.5483
390	220.2	0.018498	2.087	364.34	1200.6	0.55422	1.5383
400	247.1	0.018638	1.8661	375.12	1202.0	0.56672	1.5284
410	276.5	0.018784	1.6726	385.97	1203.1	0.57916	1.5187
450	422.1	0.019433	1.1011	430.2	1205.6	0.6282	1.4806

Referencia: Resumido de J. H. Keenan, F. G. Keyes, P. G. Hill y J. G. Moore, *Steam Tables-English Units*, Nueva York: John Wiley & Sons, Inc., 1969. Reimpreso con autorización de los editores.

A.2-10 **Propiedades del vapor sobrecalentado (tablas de vapor)**
UNIDADES SI
(v, volumen específico, m^3/kg; H, entalpía, kJ/kg; s, entropía, kJ/kg · K)

Presión absoluta kPa (Temp. Sat., °C)		*Temperatura (°C)*							
		100	*150*	*200*	*250*	*300*	*360*	*420*	*500*
	v	17.196	19.512	21.825	24.136	26.445	29.216	31.986	35.679
10	H	2687.5	2783.0	2879.5	2977.3	3076.5	3197.6	3320.9	3489.1
(45.81)	s	8.4479	8.6882	8.9038	9.1002	9.2813	9.4821	9.6682	9.8978
	v	3.418	3.889	4.356	4.820	5.284	5.839	6.394	7.134
50	H	2682.5	2780.1	2877.7	2976.0	3075.5	3196.8	3320.4	3488.7
(81.33)	s	7.6947	7.9401	8.1580	8.3556	8.5373	8.7385	8.9249	9.1546
	v	2.270	2.587	2.900	3.211	3.520	3.891	4.262	4.755
75	H	2679.4	2778.2	2876.5	2975.2	3074.9	3196.4	3320.0	3488.4
(91.78)	s	7.5009	7.7496	7.9690	8.1673	8.3493	8.5508	8.7374	8.9672
	v	1.6958	1.9364	2.172	2.406	2.639	2.917	3.195	3.565
100	H	2672.2	2776.4	2875.3	2974.3	3074.3	3195.9	3319.6	3488.1
(99.63)	s	7.3614	7.6134	7.8343	8.0333	8.2158	8.4175	8.6042	8.8342
	v		1.2853	1.4443	1.6012	1.7570	1.9432	2.129	2.376
150	H		2772.6	2872.9	2972.7	3073.1	3195.0	3318.09	3487.6
(111.37)	s		7.4193	7.6433	7.8438	8.0720	8.2293	8.4163	8.6466
	v		0.4708	0.5342	0.5951	0.6548	0.7257	0.7960	0.8893
400	H		2752.8	2860.5	2964.2	3066.8	3190.3	3315.3	3484.9
(143.63)	s		6.9299	7.1706	7.3789	7.5662	7.7712	7.9598	8.1913
	v			0.2999	0.3363	0.3714	0.4126	0.4533	0.5070
700	H			2844.8	2953.6	3059.1	3184.7	3310.9	3481.7
(164.97	s								
	v			0.2060	0.2327	0.2579	0.2873	0.3162	0.3541
1000	H			2827.9	2942.6	3051.2	3178.9	3306.5	3478.5
(179.91)	s			6.6940	6.9247	7.1229	7.3349	7.5275	7.7622
	v			0.13248	0.15195	0.16966	0.18988	0.2095	0.2352
1500	H			2796.8	2923.3	3037.6	3.1692	3299.1	3473.1
(198.32)	s			6.4546	6.7090	6.9179	7.1363	7.3323	7.5698
	v				0.11144	0.12547	0.14113	0.15616	0.17568
2000	H				2902.5	3023.5	3159.3	3291.6	3467.6
(212.42)	s				6.5453	6.7664	6.9917	7.1915	7.4317
	v				0.08700	0.09890	0.11186	0.12414	0.13998
2500	H				2880.1	3008.8	3149.1	3284.0	3462.1
(223.99)	s				6.4085	6.6438	6.8767	7.0803	7.3234
	v				0.07058	0.08114	0.09233	0.10279	0.11619
3000	H				2855.8	2993.5	3138.7	3276.3	3456.5
(233.90)	s				6.2872	6.5390	6.7801	6.9878	7.2338

Referencia: Resumido de J. H. Keenan, F. G. Keyes, P. G. Hill y J. G. Moore, *Steam Tables–Metric Units*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1969. Reimpreso con autorización de los editores.

A.2-10 Propiedades del vapor sobrecalentado (tablas de vapor)

UNIDADES DEL SISTEMA INGLÉS

(v, volumen específico, pie^3/lb$_m$; H, entalpía, btu/lb$_m$; s, entropía, btu/lb$_m$ · °F)

Presión absoluta lb/pulg² abs (Temp. Sat., °F)		*Temperatura (°F)*								
		200	*300*	*400*	*500*	*600*	*700*	*800*	*900*	*1000*
	v	392.5	452.3	511.9	571.5	631.1	690.7	750.3	809.9	869.5
1.0	H	1150.1	1195.7	1241.8	1288.5	1336.1	1384.5	1433.7	1483.8	1534.78
(101.70)	s	2.0508	2.1150	2.1720	2.2235	2.2706	2.3142	2.3550	2.3932	2.4294
	v	78.15	90.24	102.24	114.20	126.15	138.08	150.01	161.94	173.86
5.0	H	1148.6	1194.8	1241.2	1288.2	1335.8	1384.3	1433.5	1483.7	1534.7
(162.21)	s	1.8715	1.9367	1.9941	2.0458	2.0930	2.1367	2.1775	2.2158	2.2520
	v	38.85	44.99	51.03	57.04	63.03	69.01	74.98	80.95	86.91
10.0	H	1146.6	1193.7	1240.5	1287.7	1335.5	1384.0	1433.3	1483.5	1534.6
(193.19)	s	1.7927	1.8592	1.9171	1.9690	2.0164	2.0601	2.1009	2.1393	2.1755
	v		30.52	34.67	38.77	42.86	46.93	51.00	55.07	59.13
14.696	H		1192.6	1239.9	1287.3	1335.2	1383.8	1433.1	1483.4	1534.5
(211.99)	s		1.8157	1.8741	1.9263	1.9737	2.0175	2.0584	2.0967	2.1330
	v		22.36	25.43	28.46	31.47	34.77	37.46	40.45	43.44
20.0	H		1191.5	1239.2	1286.8	1334.8	1383.5	1432.9	1483.2	1534.3
(227.96)	s		1.7805	1.8395	1.8919	1.9395	1.9834	2.0243	2.0627	2.0989
	v		7.260	8.353	9.399	10.425	11.440	12.448	13.452	14.454
60.0	H		1181.9	1233.5	1283.0	1332.1	1381.4	1431.2	1481.8	1533.2
(292.73)s	s		1.6496	1.7134	1.7678	1.8165	1.8609	1.9022	1.9408	1.9773
	v			4.934	5.587	6.216	6.834	7.445	8.053	8.657
100.0	H			1227.5	1279.1	1329.3	1379.2	1429.6	1480.5	1532.1
(327.86)	s			1.6517	1.7085	1.7582	1.8033	1.8449	1.8838	1.9204
	v			3.221	3.679	4.111	4.531	4.944	5.353	5.759
150.0	H			1219.5	1274.1	1325.7	1376.6	1427.5	1478.8	1530.7
(358.48)	s			1.5997	1.6598	1.7110	1.7568	1.7989	1.8381	1.8750
	v			2.361	2.724	3.058	3.379	3.693	4.003	4.310
200.0	H			1210.8	1268.8	1322.1	1373.8	1425.3	1477.1	1529.3
(381.86)	s			1.5600	1.6239	1.6767	1.7234	1.7660	1.8055	1.8425
	v				2.150	2.426	2.688	2.943	3.193	3.440
250.0	H				1263.3	1318.3	1371.1	1423.2	1475.3	1527.9
(401.04)	s				1.5948	1.6494	1.6970	1.7401	1.7799	1.8172
	v				1.766	2.004	2.227	2.442	2.653	2.860
300.0	H				1257.5	1314.5	1368.3	1421.0	1473.6	1526.5
(417.43)	s				1.5701	1.6266	1.6751	1.7187	1.7589	1.7964
	v				1.2843	1.4760	1.6503	1.8163	1.9776	2.136
400	H				1245.2	1306.6	1362.5	1416.6	1470.1	1523.6
(444.70)	s				1.5282	1.5892	1.6397	1.6884	1.7252	1.7632

Referencia: Resumido de J. H. Keenan, F. G. Keyes, P. G. Hill y J. G. Moore, *Steam Tables–Metric Units*. Nueva York: John Wiley & Sons, Inc., 1969. Reimpreso con autorización de los editores.

A.2.11 Propiedades de transferencia de calor del agua líquida (UNIDADES SI)

T (°C)	T (K)	ρ (kg/m^3)	c_p ($kJ/kg \cdot K$)	$\mu \times 10^3$ ($Pa \cdot s$, o $kg/m \cdot s$)	k ($W/m \cdot K$)	N_{Pr}	$\beta \times 10^4$ ($1/K$)	$(g\beta\rho^2/\mu^2) \times 10^{-8}$ ($1/K \cdot m^3$)
0	273.2	999.6	4.229	1.786	0.5694	13.3	–0.630	
15.6	288.8	998.0	4.187	1.131	0.5884	8.07	1.44	10.93
26.7	299.9	996.4	4.183	0.860	0.6109	5.89	2.34	30.70
37.8	311.0	994.7	4.183	0.682	0.6283	4.51	3.24	68.0
65.6	338.8	981.9	4.187	0.432	0.6629	2.72	5.04	256.2
93.3	366.5	962.7	4.229	0.3066	0.6802	1.91	6.66	642
121.1	394.3	943.5	4.271	0.2381	0.6836	1.49	8.46	1300
148.9	422.1	917.9	4.312	0.1935	0.6836	1.22	10.08	2231
204.4	477.6	858.6	4.522	0.1384	0.6611	0.950	14.04	5308
260.0	533.2	784.9	4.982	0.1042	0.6040	0.859	19.8	11030
315.6	588.8	679.2	6.322	0.0862	0.5071	1.07	31.5	19260

A.2-11 Propiedades de transferencia de calor del agua líquida (UNIDADES DEL SISTEMA INGLÉS)

T (°F)	ρ $\left(\frac{lb_m}{pie^3}\right)$	c_p $\left(\frac{btu}{lb_m \cdot °F}\right)$	$\mu \times 10^3$ $\left(\frac{lb_m}{pie \cdot s}\right)$	k $\left(\frac{btu}{h \cdot pie \cdot °F}\right)$	N_{Pr}	$\beta \times 10^4$ ($1/°R$)	$g\beta\rho^2/\mu^2 \times 10^{-6}$ ($1/°R \cdot pie^3$)
32	62.4	1.01	1.20	0.329	13.3	–0.350	
60	62.3	1.00	0.760	0.340	8.07	0.800	17.2
80	62.2	0.999	0.578	0.353	5.89	1.30	48.3
100	62.1	0.999	0.458	0.363	4.51	1.80	107
150	61.3	1.00	0.290	0.383	2.72	2.80	403
200	60.1	1.01	0.206	0.393	1.91	3.70	1010
250	58.9	1.02	0.160	0.395	1.49	4.70	2045
300	57.3	1.03	0.130	0.395	1.22	5.60	3510
400	53.6	1.08	0.0930	0.382	0.950	7.80	8350
500	49.9	1.19	0.0700	0.349	0.859	11.0	17350
600	42.4	1.51	0.0579	0.293	1.07	17.5	30300

A.2-12 Propiedades de transferencia de calor del vapor de agua a 101.32 kPa (1 atm abs)

UNIDADES SI

T (°C)	T (K)	ρ (kg/m^3)	c_p ($kJ/kg \cdot K$)	$\mu \times 10^3$ ($Pa \cdot s$, o $kg/m \cdot s$)	k ($W/m \cdot K$)	N_{Pr}	$\beta \times 10^3$ ($1/K$)	$g\beta\rho^2/\mu^2$ ($1/K \cdot m^3$)
100.0	373.2	0.596	1.888	1.295	0.02510	0.96	2.68	0.557×10^8
148.9	422.1	0.525	1.909	1.488	0.02960	0.95	2.38	0.292×10^8
204.4	477.6	0.461	1.934	1.682	0.03462	0.94	2.09	0.154×10^8
260.0	533.2	0.413	1.968	1.883	0.03946	0.94	1.87	0.0883×10^8
315.6	**588.8**	0.373	1.997	2.113	0.04448	0.94	1.70	52.1×10^5
371.1	**644.3**	0.341	2.030	2.314	0.04985	0.93	1.55	33.1×10^5
426.7	**699.3**	0.314	2.068	2.529	0.05556	0.92	1.43	21.6×10^5

A.2-12 Propiedades de transferencia de calor de vapor de agua a 101.32 kPa (1 atm abs)

(UNIDADES DEL SISTEMA INGLÉS)

T (°F)	ρ $\left(\frac{lb_m}{pie^3}\right)$	c_p $\left(\frac{btu}{lb_m \cdot °F}\right)$	$\mu \times 10^5$ $\left(\frac{lb_m}{pie \cdot s}\right)$	k $\left(\frac{btu}{h \cdot pie \cdot °F}\right)$	N_{Pr}	$\beta \times 10^3$ ($1/°R$)	$g\beta\rho^2/\mu^2$ ($1/°R \cdot pie^3$)
212	0.0372	0.451	0.870	0.0145	0.96	1.49	0.877×10^6
300	0.0328	0.456	1.000	0.0171	0.95	1.32	0.459×10^6
400	0.0288	0.462	1.130	0.0200	0.94	1.16	0.243×10^6
500	0.0258	0.470	1.265	0.0228	0.94	1.04	0.139×10^6
600	0.0233	0.477	1.420	0.0257	0.94	0.943	82×10^3
700	0.0213	0.485	1.555	0.0288	0.93	0.862	52.1×10^3
800	0.0196	0.494	1.700	0.0321	0.92	0.794	34.0×10^3

Referencia: D. L. Timrot y N. B. Vargaftik, *J. Tech. Phys. (U.R.S.S.)*, **10**, 1063 (1940); R. H. Perry y C. H. Chilton, *Chemical Engineers' Handbook*, 5a. ed., Nueva York: McGraw-Hill, Book Company, 1973; J. H. Keenan, F. G. Keyes, P. G. Hill y J. G. Moore, *Steam Tables*. Nueva York John Wiley & Sons Book Company, 1969, National Research Council, *International Critical Tables*. Nueva York McGraw-Hill, Book Company, 1929; L. S. Marks, *Mechanical Engineers' Handbook*, 5a. ed. Nueva York: McGraw-Hill, Book Company, 1951.

APÉNDICE A.3

Propiedades físicas de compuestos inorgánicos y orgánicos

A.3-1 Calores estándar de formación a 298.15 K (25 °C) y 101.325 kPa (1 atm abs), (c) = cristales, (*g*) = gas, (*l*) = líquido

	ΔH°_f			ΔH°_f	
Compuesto	*(kJ/kg mol)10^{-3}*	*kcal/g mol*	*Compuesto*	*(kJ/kg mol)10^{-3}*	*kcal/g mol*
$NH_3(g)$	-46.19	-11.04	$CaCO_3(c)$	-1206.87	-288.45
$NO(g)$	+90.374	+21.600	$CaO(c)$	-635.5	-151.9
$H_2O(l)$	-285.840	-68.3174	$CO(g)$	-110.523	-26.4157
$H_2O(g)$	-241.826	-57.7979	$CO_2(g)$	-393.513	-94.0518
$HCN(g)$	+130.1	+31.1	$CH_4(g)$	-74.848	-17.889
$HCl(g)$	-92.3 12	-22.063	$C_2H_6(g)$	-84.667	-20.236
$H_2SO_4(l)$	-811.32	-193.91	$C_3H_8(g)$	-103.847	-24.820
$H_3PO_4(c)$	-1281.1	-306.2	$CH_3OH(l)$	-238.66	-57.04
$NaCl(c)$	-411.003	-98.232	$CH_3CH_3OH(l)$	-277.61	-66.35
$NH_4Cl(c)$	-315.39	-75.38			

Referencia: J. H. Peny y C. H. Chilton, *Chemical Engineers' Handbook,* 5a. ed. Nueva York: McGraw-Hill, Book Company, 1973; y O.A. Hougen, K. M. Watson y R. A. Ragatz, *Chemical Process Principles,* Parte I, 2a. ed. Nueva York: John Wiley & Sons, Inc., 1954.

A.3-2 Calores estándar de combustión a 298.15 K (25 °C) y 101.325 kPa (1 atm abs), (g) = gas, (l) = líquido (s) = sólido

Compuesto	Reacción de combustión	$\Delta H°_c$ kcal/g mol	$\Delta H°_c$ (kJ/kg mol)10^{-3}
C(s)	$C(s) + \frac{1}{2} O_2(g) \rightarrow CO(g)$	-26.4157	-110.523
CO(g)	$CO(g) + \frac{1}{2} O_2(g) \rightarrow CO_2(g)$	-67.6361	-282.989
C(s)	$C(s) + O_2(g) \rightarrow CO_2(g)$	-94.0518	-393.513
$H_2(g)$	$H_2(g) + \frac{1}{2} O_2(g) \rightarrow H_2O(l)$	-68.3 174	-285.840
$H_2(g)$	$H_2(g) + \frac{1}{2} O_2(g) \rightarrow H_2O(g)$	-57.7979	-241.826
$CH_4(g)$	$CH_4(g) + 2O_2(g) \rightarrow CO_2(g) + 2H_2O(l)$	-212.798	-890.346
$C_2H_6(g)$	$C_3H_6(g) + \frac{7}{2} O_2(g) \rightarrow 3CO_2(g) + 3H_2O(l)$	-372.820	-1559.879
$C_3H_8(g)$	$C_3H_8(g) + 5O_2(g) \rightarrow 3CO_2(g) + 4H_2O(l)$	-530.605	-2220.05 1
d-Glucosa (dextrosa) $C_6H_{12}O_6(s)$	$C_6H_{12}O_6(s) + 6O_2(g) \rightarrow 6CO_2(g) + 6H_2O(l)$	-673	-2816
Lactosa (anhidra) $C_{12}H_{22}O_{11}(s)$	$C_{12}H_{22}O_{11}(s) + 12O_2(g) \rightarrow 12CO_2(g) + 11H_2O(l)$	-1350.1	-5648.8
Sacarosa $C_{12}H_{22}O_{11}(s)$	$C_{12}H_{22}O_{11}(s) + 12O_2(g) \rightarrow 12CO_2(g) + 11H_2O(l)$	-1348.9	-5643.8

Referencia: R. H. Peny y C. H. Chilton, *Chemical Engineers' Handbook*, 5a. ed. Nueva York: McGraw-Hill, Book Company, 1973; y 0. A: Hougen, K. M. Watson, y R. A. Ragatz, *Chemical Process Principles,* Parte I, 2a. ed. Nueva York: John Wiley & Sons, Inc., 1954

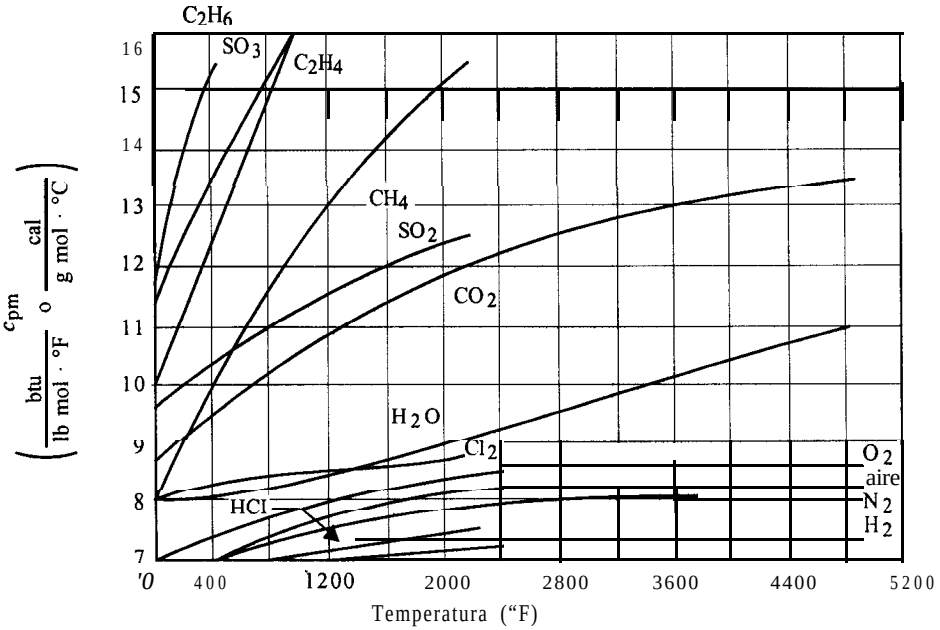


FIGURA A.3.1. *Capacidades caloríficas molares medias desde 77 °F (25 “C) hasta t °F, a presión constante de 101.325 kPa (1 atm abs). (Tomado de 0. A. Hougen, K. M. Watson y R. A. Ragatz, Chemical Process Principles, Parte I, 2a., ed., Nueva York John Wiley & Sons, Inc., 1954: Con autorización.)*

A.3.3 Propiedades físicas del aire a 101.325 kPa (1 atm abs)
UNIDADES SI

T (°C)	T (K)	ρ (kg/m³)	c_p (kJ/kg·K)	$\mu \times 10^5$ (Pa · s, o kg/m·s)	k (W/m · K)	N_{Pr}	$\beta \times 10^3$ (1/K)	$g\beta\rho^2/m^2$ (1/K . m³)
-17.8	255.4	1.379	1.0048	1.62	0.02250	0.720	3.92	2.79×10^8
0	273.2	1.293	1.0048	1.72	0.02423	0.715	3.65	2.04×10^8
10.0	283.2	1.246	1.0048	1.78	0.02492	0.713	3.53	1.72×10^8
37.8	311.0	1.137	1.0048	1.90	0.02700	0.705	3.22	1.12×10^8
65.6	338.8	1.043	1.0090	2.03	0.02925	0.702	2.95	0.775×10^8
93.3	366.5	0.964	1.0090	2.15	0.03115	0.694	2.74	0.534×10^8
121.1	394.3	0.895	1.0132	2.27	0.03323	0.692	2.54	0.386×10^8
148.9	422.1	0.838	1.0174	2.37	0.0353 1	0.689	2.38	0.289×10^8
176.7	449.9	0.785	1.0216	2.50	0.03721	0.687	2.21	0.214×10^8
204.4	477.6	0.740	1.0258	2.60	0.03894	0.686	2.09	0.168×10^8
232.2	505.4	0.700	1.0300	2.71	0.04084	0.684	1.98	0.130×10^8
260.0	533.2	0.662	1.0341	2.80	0.04258	0.680	1.87	0.104×10^8

A.3.3 Propiedades físicas del aire a 101.325 kPa (1 atm abs)
UNIDADES DEL SISTEMA INGLÉS

T (°F)	ρ (lb_m/pie³)	c_p (btu/lb_m·°F)	μ (centipoise)	k (btu/h·pie·°F)	N_{Pr}	$\beta \times 10^3$ (1K)	$g\beta\rho^2/\mu^2$ (1/K · m³)
0	0.0861	0.240	0.0162	0.0130	0.720	2.18	4.39×10^6
32	0.0807	0.240	0.0172	0.0140	0.715	2.03	3.21×10^6
50	0.0778	0.240	0.0178	0.0144	0.713	1.96	2.70×10^6
100	0.0710	0.240	0.0190	0.0156	0.705	1.79	1.76×10^6
150	0.0651	0.241	0.0203	0.0169	0.702	1.64	1.22×10^6
200	0.0602	0.241	0.0215	0.0180	0.694	1.52	0.840×10^6
250	0.0559	0.242	0.0227	0.0192	0.692	1.41	0.607×10^6
300	0.0523	0.243	0.0237	0.0204	0.689	1.32	0.454×10^6
350	0.0490	0.244	0.0250	0.0215	0.687	1.23	0.336×10^6
400	0.0462	0.245	0.0260	0.0225	0.686	1.16	0.264×10^6
450	0.0437	0.246	0.0271	0.0236	0.674	1.10	0.204×10^6
500	0.0413	0.247	0.0280	0.0246	0.680	1.04	0.163×10^6

Referencia: National Bureau of Standards, Circular **461C**, 1947; 564, 1955; NBS-NACA, Tables of *Thermal Propierties of Gases,* 1949; F. *G.* Keyes, *Trans. A.S.M.E.,* **73**, *590,* 597*(1951);* **74**, 1303 (1952); D. D. Wagman, *Selected Values of Chemical Thermodynamic Properties.* Washington, D.C.: National Bureau of Standards, 1953.

A.3-4 Viscosidad de gases a 101.325 kPa (1 atm abs) [Viscosidades en (Pa · s)10^3, (kg/m · s)10^3 o cp]

Temperatura							
K	*°F*	*°C*	H_2	O_2	N_2	*CO*	CO_2
255.4	0	-17.8	0.00800	0.0181	0.0158	0.0156	0.0128
273.2	32	0	0.00840	0.0192	0.0166	0.0165	0.0137
283.2	50	10.0	0.00862	0.0197	0.0171	0.0169	0.0141
311.0	100	37.8	0.00915	0.0213	0.0183	0.0183	0.0154
338.8	150	65.6	0.00960	0.0228	0.0196	0.0195	0.0167
366.5	200	93.3	0.0101	0.0241	0.0208	0.0208	0.0179
394.3	250	121.1	0.0106	0.0256	0.0220	0.0220	0.0191
422.1	300	148.9	0.0111	0.0267	0.0230	0.0231	0.0203
449.9	350	176.7	0.0115	0.0282	0.0240	0.0242	0.0215
477.6	400	204.4	0.0119	0.0293	0.0250	0.0251	0.0225
505.4	450	232.3	0.0124	0.0307	0.0260	0.0264	0.0236
533.2	500	260.0	0.0128	0.0315	0.0273	0.0276	0.0247

Referencia: National Bureau of Standards, *Circular* **461C**, 1947; 564, 1955; NBS-NACA, *Tables of Thermal Properties of Gases,* 1949; F. *G.* **Keyes,** *Trans. A.S.M.E.*, **13, 590, 597 (1951); 74.** 1303 (1952); D.D. Wagman, *Selected Values of Chemical Thermodynamic Properties,* Washington, D.C.: National Bureau of Standards, 1953.

A.3-5 Conductividad térmica de gases a 101.325 kPa (1 atm abs)

Temperatura			H_2				N_2		CO		CO_2	
K	°C	°F	W/m · K	btu/ h · pie · °F	W/m · K	btu/ h · pie · °F	W/m · K	btu/ h · pie · °F	W/m · K	btu/ h · pie · °F	W/m · K	btu/ h · pie · °F
255.4	-17.8	0	0.1592	0.0920	0.0228	0.0132	0.0228	0.0132	0.0222	0.0128	0.0132	0.0076
273.2	0	32	0.1667	0.0963	0.0246	0.0142	0.0239	0.0138	0.0233	0.0135	0.0145	0.0084
283.2	10.0	50	0.1720	0.0994	0.0253	0.0146	0.0248	0.0143	0.0239	0.0138	0.0152	0.0088
311.0	37.8	100	0.1852	0.107	0.0277	0.0160	0.0267	0.0154	0.0260	0.0150	0.0173	0.0100
338.8	65.6	150	0.1990	0.115	0.0299	0.0173	0.0287	0.0166	0.0279	0.0161	0.0190	0.0110
366.5	93.3	200	0.2111	0.122	0.0320	0.0185	0.0303	0.0175	0.0296	0.0171	0.0216	0.0125
394.3	121.1	250	0.2233	0.129	0.0343	0.0198	0.0329	0.0190	0.0318	0.0184	0.0239	0.0138
422.1	148.9	300	0.2353	0.136	0.0363	0.0210	0.0348	0.0201	0.0338	0.0195	0.0260	0.0150
449.9	176.7	350	0.2458	0.142	0.0382	0.0221	0.0365	0.0211	0.0355	0.0205	0.0286	0.0165
477.6	204.4	400	0.2579	0.149	0.0398	0.0230	0.0382	0.0221	0.0369	0.0213	0.0308	0.0178
505.4	232.2	450	0.2683	0.155	0.0422	0.0244	0.0400	0.0231	0.0384	0.0222	0.0334	0.0193
533.2	260.0	500	0.2786	0.161	0.0438	0.0253	0.0419	0.0242	0.0407	0.0235	0.0355	0.0205

Referencia: National Bureau of Standards, Circular 461C, 1947; 564, 1955; NBS-NACA, *Table of Thermal Properties of Gases,* 1949; F. G. Keyes, *Trans. A.S.M.E.*, 73, 590, 597 (1951); 74, 1303 (1952); D. D. Wagman, *Selected Values of Chemical Thermodynamic Properties*, Washington, D.C.: National Bureau of Standards. 1953.

A.3-6 Capacidad calorífica de gases a presión constante de 101.325 kPa (1 atm abs)

Temperatura			H_2		$_4$		N_2		$_{c\ o}$		CO_2	
			kJ/	btu/	kJ/	btu/	kJ/	btu/	kJ/	btu/	kJ/	btu/
K	°C	°F	kg . K	lb_m . °F	kg . K	lb_m . °F	kg . K	lb_m . °F	kg . K	lb_m . °F	kg · K	lb_m · °F
255.4	-17.8	0	14.07	3.36	0.909	0.217	1.034	0.247	1.034	0.247	0.800	0.191
273.2	0	32	14.19	3.39	0.913	0.218	1.038	0.248	1.038	0.248	0.816	0.195
283.2	10.0	50	14.19	3.39	0.917	0.219	1.038	0.248	1.038	0.248	0.825	0.197
311.0	37.8	100	14.32	3.42	0.921	0.220	1.038	0.248	1.043	0.249	0.854	0.240
338.8	65.6	150	14.36	3.43	0.925	0.221	1.038	0.248	10.43	0.249	0.883	0.211
366.5	93.3	200	14.40	3.44	0.929	0.222	1.043	0.249	10.47	0.250	0.904	0.216
394.3	121.1	250	14.44	3.45	0.938	0.224	1.043	0.249	1.047	0.250	0.929	0.222
422.1	148.9	300	14.49	3.46	0.946	0.226	1.047	0.250	1.051	0.251	0.950	0.227
449.9	176.7	350	14.49	3.46	0.955	0.228	1.047	0.250	1.055	0.252	0.976	0.233
477.6	204.4	400	14.49	3.46	0.963	0.230	1.051	0.251	1.059	0.253	0.996	0.238
505.4	232.2	450	14.52	3.47	0.971	0.232	1.055	0.252	1.063	0.254	1.017	0.243
533.2	260.0	500	14.52	3.47	0.976	0.233	1.059	0.253	1.068	0.255	1.030	0.246

Referencia: National Bureau of Standards, ***Circular* 461C,** 1947; 564, 1955; **NBS-NACA,** ***Tables of Thermai Properties of Gases.*** 1949; F. G. Keyes, ***Trans, A.S.M.E.***, 73, 590, 597 (195 1); 74, 1303 (1952); D. D. Wagman, ***Selected Values of Chemical Thermodynamic Properties.*** Washington, D.C.: National Bureau of Standards, 1953.

A.3-7 Número de Prandtl para gases a 101.325 kPa (1 atm abs)

Temperatura							
°C	*°F*	*K*	H_2	O_2	N_2	*CO*	CO_2
-17.8	0	255.4	0.720	0.720	0.720	0.740	0.775
0	32	273.2	0.715	0.711	0.720	0.738	0.770
10.0	50	283.2	0.710	0.710	0.717	0.735	0.769
37.8	100	311.0	0.700	0.707	0.710	0.731	0.764
65.6	150	338.8	0.700	0.706	0.700	0.727	0.755
93.3	200	366.5	0.694	0.703	0.700	0.724	0.752
121.1	250	394.3	0.688	0.703	0.696	0.720	0.746
148.9	300	422.1	0.683	0.703	0.690	0.720	0.738
176.6	350	449.9	0.677	0.704	0.689	0.720	0.734
204.4	400	477.6	0.670	0.706	0.688	0.720	0.725
232.2	450	505.4	0.668	0.702	0.688	0.720	0.716
260.0	500	533.2	0.666	0.700	0.688	0.720	0.702

Referencia: National Bureau of Standards, *Circular* **461C**, 1947; 564, 1955; NBS-NACA, *Tables of Thermal Properfies of Gases,* 1949; F.,G. Keyes, *Trans. A.S.M.E.*, 73, 590, 597 (1951); 74, 1303 (1952); D. D. Wagman, *Selected Values of Chemical Thermodynamic Properties,* Washington, D.C.: National Bureau of Standards, 1953.

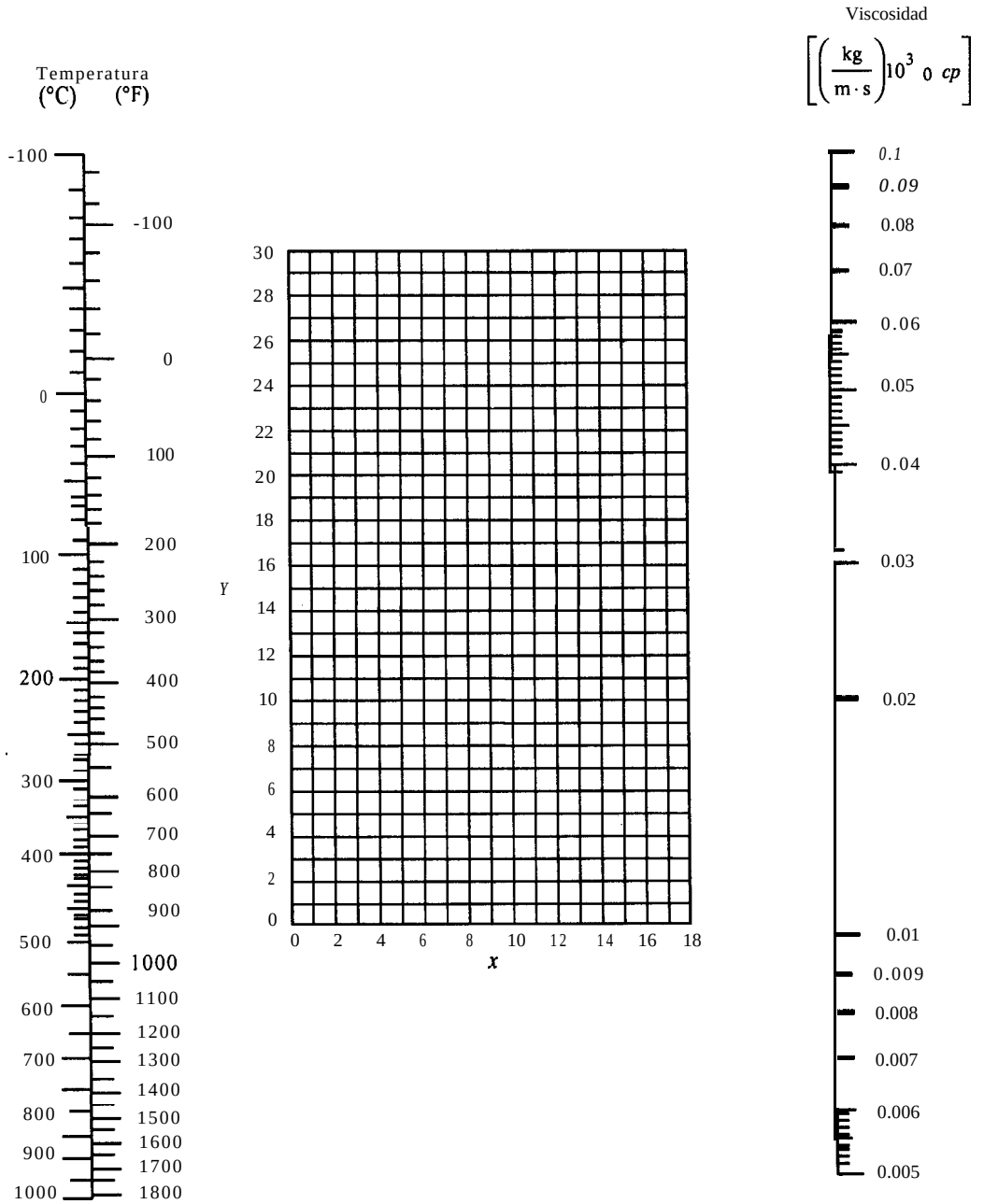
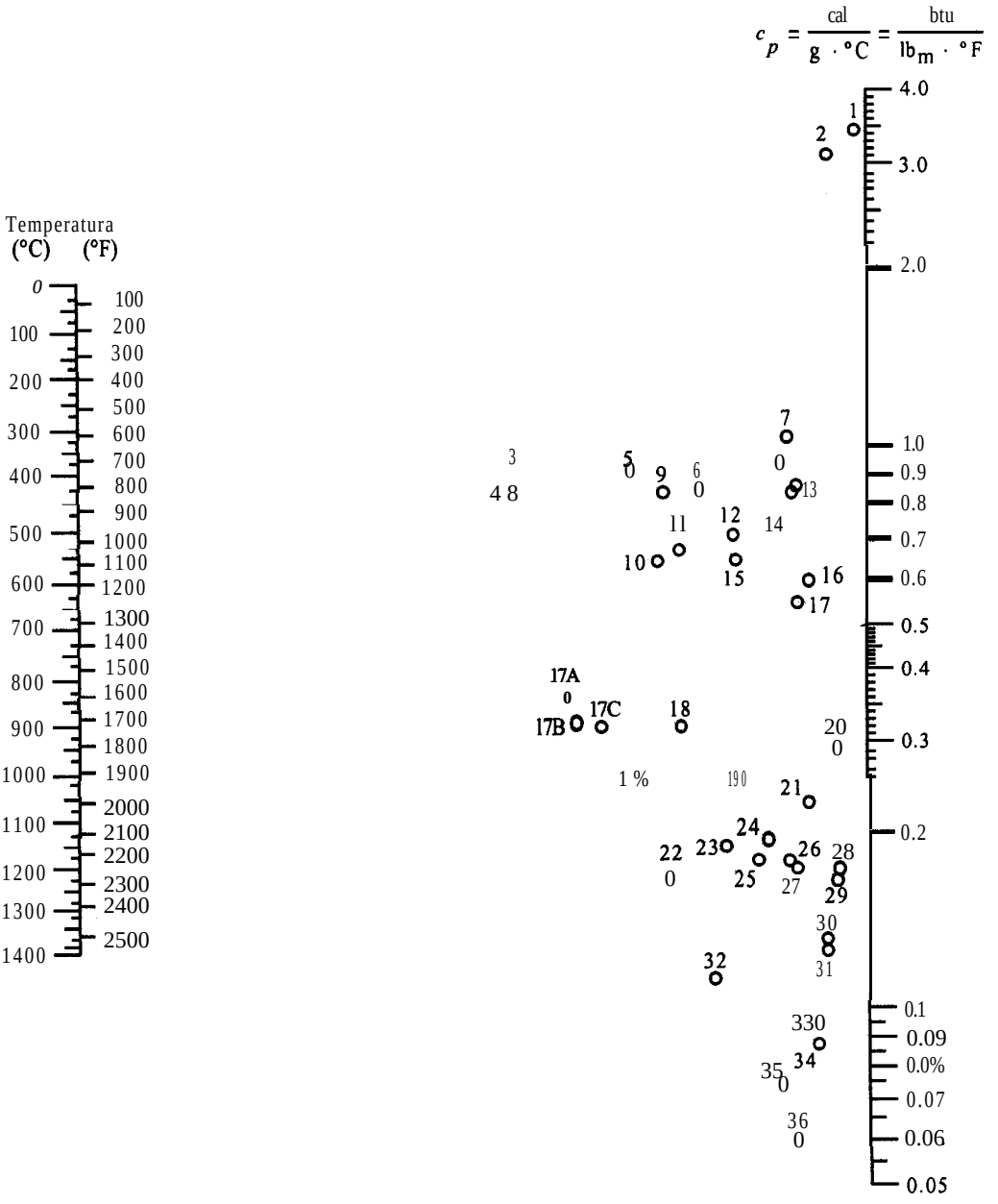


FIGURA A.3-2. *Viscosidades de gases a 101.325 kPa (1 atm abs). (Tomado de C. H. Chilton, Chemical Engineer's Handbook. 5a. ed.. Nueva York: Mc Graw-Hill Book Company, 1973. Con autorización.) Véanse en la tabla A. 3-8 las coordenadas que se deben usar con la figura A.3-2.*

A.3.8 Viscosidades de gases (Coordenadas que deben usarse con la Fig. A.3-2)

Núm.	*Gas*	*x*	*Y*	*Núm.*	*Gas*	*x*	*Y*
1	Ácido acético	7.7	14.3	29	Freón 113	11.3	14.0
2	Acetona	8.9	13.0	30	Helio	10.9	20.5
3	Acetileno	9.8	14.9	31	Hexano	8.6	11.8
4	Aire	11.0	20.0	32	Hidrógeno	11.2	12.4
5	Amoniaco	8.4	16.0	33	$3H_2 + 1N_2$	11.2	17.2
6	Argón	10.5	22.4	34	Bromuro de hidrógeno	8.8	20.9
7	Benceno	8.5	13.2	35	Cloruro de hidrógeno	8.8	18.7
8	Bromo	8.9	19.2	36	Cianuro de hidrógeno	9.8	14.9
9	Buteno	9.2	13.7	37	Yoduro de hidrógeno	9.0	21.3
10	Butileno	8.9	13.0	38	Sulfuro de hidrógeno	8.6	18.0
11	Dióxido de carbono	9.5	18.7	39	Yodo	9.0	18.4
12	Disulfuro de carbono	8.0	16.0	40	Mercurio	5.3	22.9
13	Monóxido de carbono	11.0	20.0	41	Metano	9.9	15.5
14	Cloro	9.0	18.4	42	Alcohol metílico	8.5	15.6
15	Cloroformo	8.9	15.7	43	Óxido nítrico	10.9	20.5
16	Cianógeno	9.2	15.2	44	Nitrógeno	10.6	20.0
17	Ciclohexano	9.2	12.0	45	Cloruro de nitrosilo	8.0	17.6
18	Etano	9.1	14.5	46	Óxido nitroso	8.8	19.0
19	Acetato de etilo	8.5	13.2	47	Oxígeno	11.0	21.3
20	Alcohol etílico	9.2	14.2	48	Pentano	7.0	12.8
21	Cloruro de etilio	8.5	15.6	49	Propano	9.7	12.9
22	Éter etílico	8.9	13.0	50	Alcohol propílico	8.4	13.4
23	Etileno	9.5	15.1	51	Propileno	9.0	13.8
24	Flúor	7.3	23.8	52	Dióxido de azufre	9.6	17.0
25	Freón- 11	10.6	15.1	53	Tolueno	8.6	12.4
26	Freón-12	11.1	16.0	54	2,3,3-Trimetilbutano	9.5	10.5
27	Freón-21	10.8	15.3	55	Agua	8.0	16.0
28	Freón 22	10.1	17.0	56	Xenón	9.3	23.0


Temperatura
(°C) (°F)
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000
1100
1200
1300
1400
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000
1100
1200
1300
1400
1500
1600
1700
1800
1900
2000
2100
2200
2300
2400
2500
$c_p = \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot °\text{C}} = \frac{\text{btu}}{\text{lb}_m \cdot °\text{F}}$
4.0
3.0
2.0
1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.09
0.0%
0.07
0.06
0.05
1
2
3
4 8
5
0
6
0
7
0
9
13
11
12
14
10
15
16
17
17A
0
17B
17C
18
20
0
1 %
19 0
21
22
0
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
330
34
35
0
36
0

A.3-9 Capacidades caloríficas de gases a presión constante (para usarse con la Fig. A.3-3)

Núm.	*Gas*	*Intervalo (°C)*
10	Acetileno	O-200
15	Acetileno	200-400
16	Acetileno	400-1400
27	Aire	O-1400
12	Amoniaco	O-600
14	Amoniaco	600-1400
18	Dióxido de carbono	0–400
24	Dióxido de carbono	400-1400
26	Monóxido de carbono	O-1400
32	Cloro	O-200
34	Cloro	200-1400
3	Etano	O-200
9	Etano	200-600
8	Etano	600-1400
4	Etileno	O-200
11	Etileno	200-600
13	Etileno	600-1400
17B	Freón ll (CCl_3F)	O-150
17c	Freón 21 ($CHCl_2F$)	O-150
17A	Freón 22 ($CHClF_2$)	O-150
17D	Freón 113 (CCl_2F-$CClF_2$)	O-150
1	Hidrógeno	O-600
2	Hidrógeno	600-1400
35	Bromuro de hidrógeno	O-1400
30	Cloruro de hidrógeno	O-1400
20	Fluoruro de hidrógeno	O-1400
36	Yoduro de hidrógeno	O-1400
19	Sulfuro de hidrógeno	O-700
21	Sulfuro de hidrógeno	700-1400
5	Metano	O-300
6	Metano	300-700
7	Metano	700–1400
25	Óxido nítrico	O-700
28	Óxido nítrico	700–1400
26	Nitrógeno	o-1400
23	Oxígeno	O-500
29	Oxígeno	500-1400
33	Azufre	300-1400
22	Dióxido de azufre	O-400
31	Dióxido de azufre	400-1400
17	Agua	O-1400

A.3-10 Conductividades térmicas de gases y vapores a 101.325 kPa (1 atm abs; k = W/m . K)

Gas o vapor	K	k	Gas o vapor	K	k
Acetona (1)	273	0.0099	Etano (5,6)	239	0.0149
	319	0.0130		273	0.0183
	373	0.0171		373	0.0303
	457	0.0254	Alcohol etílico (1)	293	0.0154
Amoniaco (2)	273	0.0218		373	0.0215
	373	0.0332	Eter etílico(*)	273	0.0133
	473	0.0484		319	0.0171
Butano (3)	273	0.0135		373	0.0227
	373	0.0234	Etileno (6)	273	0.0175
Monóxido de carbono (2)	173	0.0152		323	0.0227
	273	0.0232		373	0.0279
	373	0.0305	*n*-Hexano (3)	273	0.0125
Cloro (4)	273	0.00744		293	0.0138
			Dióxido de azufre (7)	273	0.0087
				373	0.0119

Referencia: (1) Moser, disertación, Berlín, 1913; (2) F. G. Keyes, *Tech. Repf.* 37, Project Squid, 1 de Abril, 1952; (3) W. B. Mann y B. G. Dickens, *Proc. Roy, Soc.* (Londres), A134, 77 (1931); (4) *International Critical Tables,* Nueva York: McGraw-Hill, Book Company. 1929; (5) T. H. Chilton y R. P. Genereaux, comunicación pesonal, 1946; (6) A. Eucken, *Physik Z,* 12, 1101 (1911): 14, 324 (1913); (7) B. G. Dickens, *Proc. Roy.* Soc. (Londres), A143, 517 (1934)

A.3-11 Capacidades caloríficas de líquidos (c_p = kJ/kg . K)

Líquido	K	c_p	Líquido	K	c_p
Ácido acético	273	1.959	Ácido clorhídrico (de 20% mol)	273	2.43
	311	2.240		293	2.474
Acetona	273	2.119	Mercurio	293	0.01390
	293	2.210	Alcohol metílico	293	2.512
Anilina	273	2.001		313	2.583
	323	2.181	Nitrobenceno	283	1.499
Benceno	293	1.700		303	1.419
	333	1.859		363	1.436
Butano	273	2.300	Cloruro de sodio (de 9.1% mol)	293	3.39
Alcohol i-butílico	303	2.525		330	3.43
Alcohol etílico	273	2.240	Ácido sulfúrico (100%)	293	1.403
	298	2.433	Tolueno	273	1.616
Ácido fórmico	273	1.825		323	1.763
	289	2.131	o-Xileno	303	1.721
Glicerol	288	2.324			
	305	2.412			

Referencia: N. A. Lange, *Handbook of Chemistry,* 10a. ed. Nueva York: McGraw-Hill, Book Company, 1967; National Research Council, *International Critica1 Tables,* Vol. V. Nueva York; McGraw-Hill, Book Company, 1929; R. H. Perry y C. H. Chilton, *Chemical Engineers' Handbook,* 5a. ed. Nueva York: McGraw-Hill, Book Company, 1973.

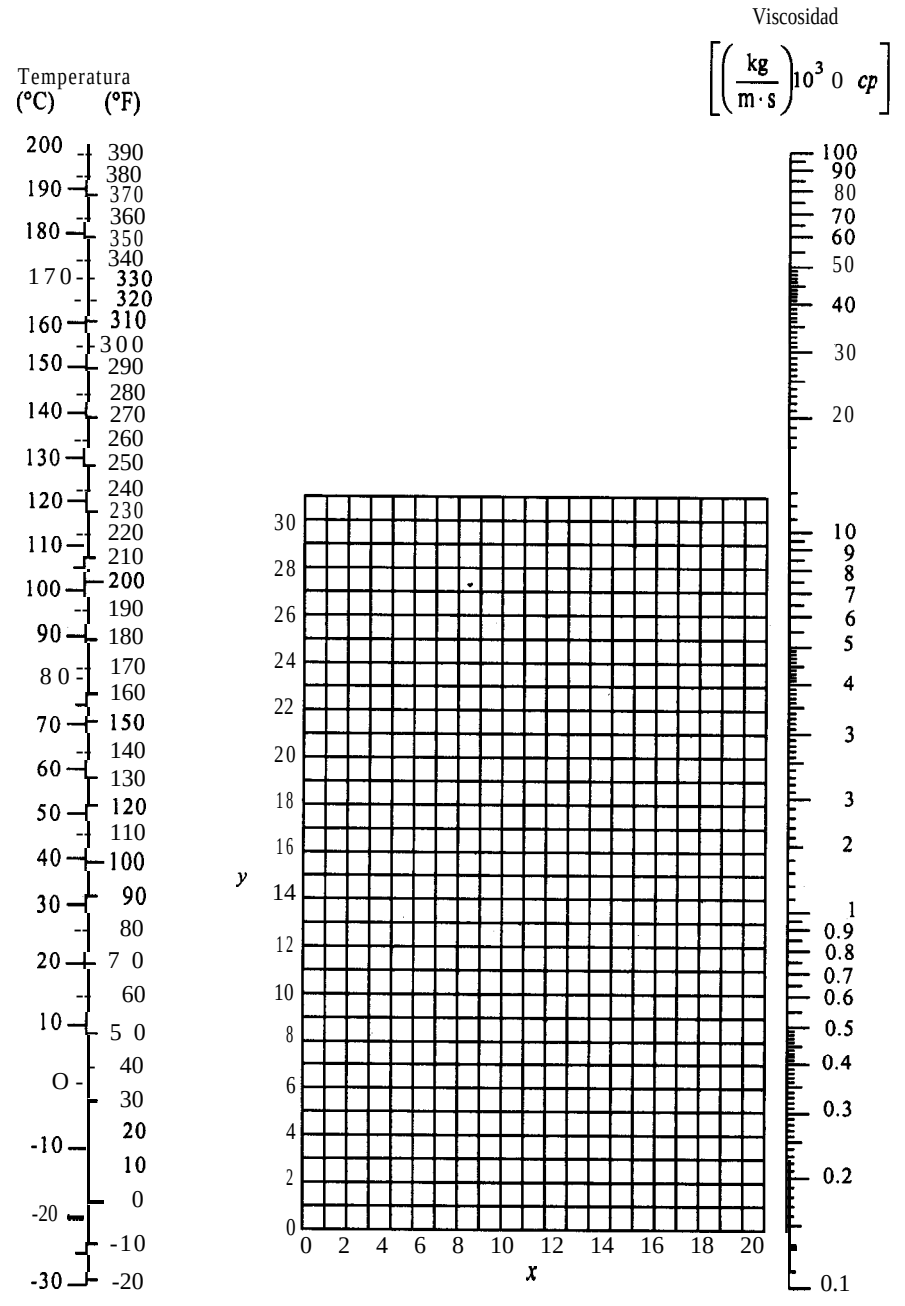


FIGURA A.3-4 Viscosidades de líquidos. (De R.H. Perry y C. H. Chilton, *Chemical Engineers' Handbook*, 5a. ed. Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1973. Reproducido con autorización) Véase la tabla **A.3-12** para usarla con la figura **A.3-4**.

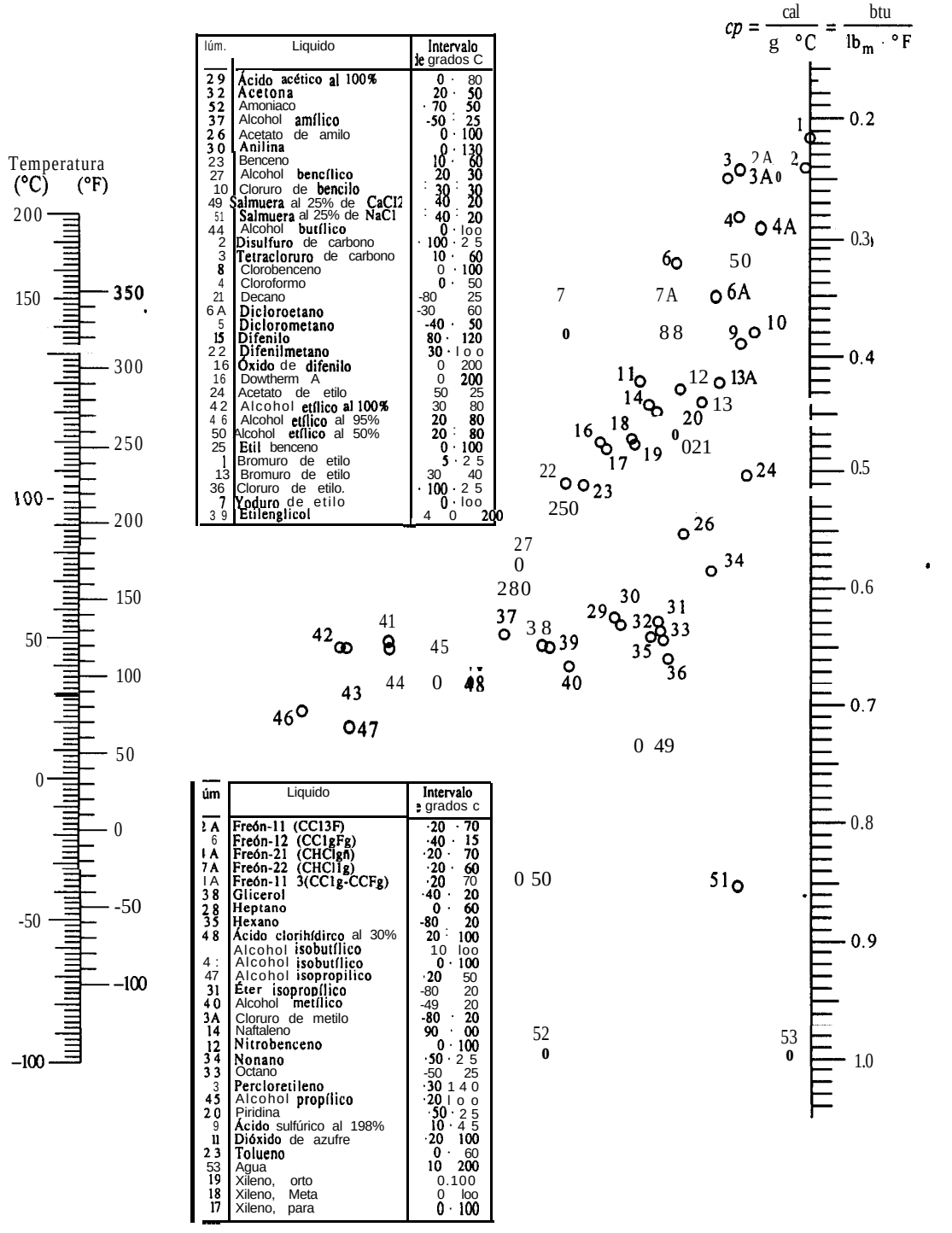
A.3-12 Viscosidades de líquidos (Coordenadas que deben usarse con la Fig. A.3-4)

Líquido	X	Y	Líquido	x	Y
Acetaldehído	15.2	4.8	Ciclohexanol	2.9	24.3
Ácido acético, 100%	12.1	14.2	Ciclohexano	9.8	12.9
Ácido Acético 70%	9.5	17.0	Dibromometano	12.7	15.8
Anhídrido acético	12.7	12.8	Dicloroetano	13.2	12.2
Acetona, 100%	14.5	7.2	Diclorometano	14.6	8.9
Acetona, 3 5%	7.9	15.0	Dietilcetona	13.5	9.2
Acetonitrilo	14.4	7.4	Oxalato de dietilo	11.0	16.4
Ácido acrílico	12.3	13.9	Dietilenglicol	5.0	24.7
Alcohol alílico	10.2	14.3	Difenilo	12.0	18.3
Bromuro de alilo	14.4	9.6	Éter dipropílico	13.2	8.6
Yoduro de alilo	14.0	11.7	Oxalato de dipropilo	10.3	17.7
Amoniaco, 100%	12.6	2.0	Acetato de etilo	13.7	9.1
Amoniaco, 26%	10.1	13.9	Acrilato de etilo	12.7	10.4
Acetato de amilo	11.8	12.5	Alcohol etílico, 100%	10.5	13.8
Alcohol amílico	7.5	18.4	Alcohol etílico, 95%	9.8	14.3
Anilina	8.1	18.7	Alcohol etílico, 40%	6.5	16.6
Anisol	12.3	13.5	Etilbenceno	13.2	11.5
Tricloruro de arsénico	13.9	14.5	Bromuro de etilo	14.5	8.1
Benceno	12.5	10.9	Acrilato de 2-etilbutilo	11.2	14.0
Salmuera, $CaCL_2$, 25%	6.6	15.9	Cloruro de etilo	14.8	6.0
Salmuera, NaCl, 25%	10.2	16.6	Éter etílico	14.5	5.3
Bromo	14.2	13.2	Formiato de etilo	14.2	8.4
Bromotolueno	20.0	15.9	Acrilato de 2-etilhexilo	9.0	15.0
Acetato de butilo	12.3	11.0	Yoduro de etilo	14.7	10.3
Acrilato de butilo	11.5	12.6	Propionato de etilo	13.2	9.9
Alcohol butílico	8.6	17.2	Éter etilpropílico	14.0	7.0
Ácido butírico	12.1	15.3	Sulfuro de etilo	13.8	8.9
Dióxido de carbono	11.6	0.3	Bromuro de etileno	11.9	15.7
Disulfuro de carbono	16.1	7.5	Cloruro de etileno	12.7	12.2
Tetracloruro de carbono	12.7	13.1	Etilenglicol	6.0	23.6
Clorobenceno	12.3	12.4	Cloruro de etilideno	14.1	8.7
Cloroformo	14.4	10.2	Fluorobenceno	13.7	10.4
Ácido clorosulfónico	11.2	18.1	Ácido fórmico	10.7	15.8
Orto clorotolueno,	13.0	13.3	Freón- 11	14.4	9.0
Meta clorotolueno,	13.3	12.5	Freón-12	16.8	15.6
Para clorotolueno,	13.3	12.5	Freón-2 1	15.7	7.5
Meta cresol,	2.5	20.8	Freón-22	17.2	4.7

(Continúa)

A.3-12 Viscosidades de líquidos *Continuación*

Líquido	*X*	*Y*	*Líquido*	*X*	*Y*
Freón-113	12.5	11.4	Alcohol octílico	6.6	21.1
Glicerol, 100%	2.0	30.0	Pentacloroetano	10.9	17.3
Glicerol 50%	6.9	19.6	Pentano	14.9	5.2
Heptano	14.1	8.4	Fenol	6.9	20.8
Hexano	14.7	7.0	Tribomuro de fósforo	13.8	16.7
Ácido clorhídrico, 3 1.5%	13.0	16.6	Tricloruro de fósforo	16.2	10.9
Yodobenceno	12.8	15.9	Ácido propiónico	12.8	13.8
Alcohol isobutílico	7.1	18.0	Acetato de propilo	13.1	10.3
Ácido Isobutirico	12.2	14.4	Alcohol propilico	9.1	16.5
Alcohol isopropílico	8.2	16.0	Bromuro de propilo	14.5	9.6
Bromuro de isopropilo	14.1	9.2	Cloruro de propilo	14.4	7.5
Cloruro de isopropilo	13.9	7.1	Formiato de propilo	13.1	9.7
Yoduro de isopropilo	13.7	11.2	Yoduro de propilo	14.1	11.6
Queroseno	10.2	16.9	Sodio	16.4	13.9
Aceite de linaza, crudo	7.5	27.2	Hidróxido. de sodio, 50%	3.2	25.8
Mercurio	18.4	16.4	Cloruro estánico	13.5	12.8
Metanol, 100%	12.4	10.5	Succinonitrilo	10.1	20.8
Metanol, 90%	12.3	11.8	Dióxido de azufre	15.2	7.1
Metanol, 40%	7.8	15.5	Ácido sulfúrico, 110%	7.2	27.4
Acetato de metilo	14.2	8.2	Ácido sulfúrico, 100%	8.0	25.1
Acrilato de metilo	13.0	9.5	Ácido sulfúrico, 98%	7.0	24.8
i-butirato de metilo	12.3	9.7	Ácido sulfiírico, 60%	10.2	21.3
n-butirato de metilo	13.2	10.3	Cloruro de sultürilo	15.2	12.4
Cloruro de metilo	15.0	3.8	Tetracloroetano	11.9	15.7
Metil etil cetona	13.9	8.6	Tiofeno	13.2	11.0
Formiato de metilo	14.2	7.5	Tetracloruro de titanio	14.4	12.3
Yoduro de metilo	14.3	9.3	Tolueno	13.7	10.4
Propionato de metilo	13.5	9.0	Tricloroetileno	14.8	10.5
Metil propil cetona	14.3	9.5	Trietilenglicol	4.7	24.8
Sulfuro de metilo	15.3	6.4	Turpentina	11.5	14.9
Naftaleno	7.9	18.1	Acetato de vinilo	14.0	8.8
Ácido nítrico 95%	12.8	13.8	Vinil tolueno	13.4	12.0
Ácido nitrico, 60%	10.8	17.0	Agua	10.2	13.0
Nitrobenceno	10.6	16.2	Orto xileno	13.5	12.1
Dióxido de nitrógeno	12.9	8.6	Meta xileno	13.9	10.6
Nitrotolueno	11.0	17.0	Para xileno	13.9	10.9
Octano	13.7	10.0			



lúm.	Liquido	Intervalo de grados C
29	Ácido acético al 100%	0 · 80
32	Acetona	20 · 50
52	Amoniaco	· 70 50
37	Alcohol amílico	-50 · 25
26	Acetato de amilo	0 · 100
30	Anilina	0 · 130
23	Benceno	10 · 60
27	Alcohol bencílico	20 30
10	Cloruro de bencilo	30 · 30
49	Salmuera al 25% de CaCl2	40 20
51	Salmuera al 25% de NaCl	40 · 20
44	Alcohol butílico	0 · loo
2	Disulfuro de carbono	· 100 · 2 5
3	Tetracloruro de carbono	10 · 60
8	Clorobenceno	0 · 100
4	Cloroformo	0 · 50
21	Decano	-80 25
6A	Dicloroetano	-30 60
5	Diclorometano	-40 · 50
15	Difenilo	80 · 120
22	Difenilmetano	30 · loo
16	Óxido de difenilo	0 200
16	Dowtherm A	0 200
24	Acetato de etilo	50 25
42	Alcohol etílico al 100%	30 80
46	Alcohol etílico al 95%	20 80
50	Alcohol etílico al 50%	20 · 80
25	Etil benceno	0 · 100
1	Bromuro de etilo	5 · 2 5
13	Bromuro de etilo	30 40
36	Cloruro de etilo.	· 100 · 2 5
7	Yoduro de etilo	0 · loo
39	Etilenglicol	4 0 200

úm	Liquido	Intervalo de grados c
2A	Freón-11 (CC13F)	·20 · 70
6	Freón-12 (CC1gFg)	·40 · 15
1A	Freón-21 (CHClgñ)	·20 · 70
7A	Freón-22 (CHC1g)	·20 · 60
1A	Freón-11 3(CC1g-CCFg)	·20 70
38	Glicerol	·40 · 20
28	Heptano	0 · 60
35	Hexano	-80 20
48	Ácido clorihídirco al 30%	20 · 100
	Alcohol isobutílico	10 loo
4:	Alcohol isobutílico	0 · 100
47	Alcohol isopropilico	·20 50
31	Éter isopropílico	-80 20
40	Alcohol metílico	-49 20
3A	Cloruro de metilo	-80 · 20
14	Naftaleno	90 · 00
12	Nitrobenceno	0 · 100
34	Nonano	·50 · 2 5
33	Octano	-50 25
3	Percloretileno	·30 1 4 0
45	Alcohol propílico	·20 l o o
20	Piridina	·50 · 2 5
9	Ácido sulfúrico al 198%	10 · 4 5
11	Dióxido de azufre	·20 100
23	Tolueno	0 · 60
53	Agua	10 200
19	Xileno, orto	0.100
18	Xileno, Meta	0 loo
17	Xileno, para	0 · 100

FIGURA A.3-5 *Capacidad calorífica de los líquidos (de R.H. Perry y C. H. Chilton, Chemical Engineers' Handbook, 5a. Ed. New York: McGraw-Hill Book (Company, 1973. Con autorización).*

A.3-13 Conductividades térmicas de líquidos (k = W/m · K)*

Líquido	*K*	*k*	*Líquido*	*K*	*k*
Ácido acético			Etilenglicol	273	0.265
100%	293	0.171	Glicerol, 100%	293	0.284
50%	293	0.346	n-Hexano	303	0.138
Amoniaco	243-258	0.502		333	0.135
Alcohol n-amílico	303	0.163	Queroseno	293	0.149
	373	0.154		348	0.140
Benceno	303	0.159	Alcohol metílico		
	333	0.151	100%	293	0.215
Tetracloruro de carbono	273	0.185	60%	293	0.329
	341	0.163	20%	293	0.492
n-Decano	303	0.147	100%	323	0.197
	333	0.144	*n*-Octano	303	0.144
Acetato de etilo	293	0.175		333	0.140
Alcohol etílico			Salmuera de NaCI		
100%	293	0.182	25%	303	0.571
60%	293	0.305	12.5%	303	0.589
20%	293	0.486	Ácido sulfúrico		
100%	323	0.151	90%	303	0.364
			60%	303	0.433
			Vaselina	332	0.183

* Se puede suponer una variación lineal con la tempertura dentro del intervalo de temperaturas señalado.
Referencia: R. H. Perry y C. H. Chilton, *Chemical Engineers' Handbook,* 5a. ed., Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1973, Reproducido con autorización.

A.3-14 Capacidades caloríficas de sólidos (c_p = kJ/kg · K)

Sólido	K	c_p	Sólido	K	c_p
Alúmina	373	0.84	Benceno	273	1.570
	1773	1.147	Ácido benzoico	293	1.243
Asbesto		1.05	Canfeno	308	1.591
Asfalto		0.92	Ácido caprílico	271	2.629
Ladrillo refractario	373	0.829	Dextrina	273	1.218
	1773	1.248	Ácido fórmico	273	1.800
Cemento, portland		0.779	Glicerol	273	1.382
Arcilla		0.938	Lactosa	293	1.202
Concreto		0.63	Ácido oxálico	323	1.612
Corcho prensado	303	0.167	Ácido tartárico	309	1.202
Vidrio		0.84	Urea	293	1.340
Óxido de magnesio	373	0.980			
	1773	0.787			
Roble		2.39			
Pino amarillo	298	2.81			
Porcelana	293-373	0.775			
Caucho vulcanizado		2.01			
Acero		0.50			
Lana		1.361			

Referencia: R. H. Perry y C. H. Chilton, *Chemical Engineers' Handbook,* 5 a. ed., Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1973; National Research Council, *International Critica1 Tables,* Vol. V. Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1929; L.S. Marks, *Mechanical Engineers' Handbook,* 5 a. ed. Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1951; F. Kreith, *Principales of Heat Transfer,* 2a. ed. Scranton, Scranton, Pa: International Textbook Co., 1965

A.3-15 Conductividades térmicas de materiales de construcción y aislantes

Material	ρ $\left(\frac{kg}{m^3}\right)$	t^* (°C)	$k(W/m \cdot K)$		
Asbesto	577		0.151 (0 °C)	0.168 (37.8 °C)	0.190(93.3 °C)
Asbesto laminado	889	51	0.166		
Ladrillo de construcción		20	0.69		
Ladrillo refractario			1.00 (200 °C)	1.47 (600°C)	1.64 (1000 “C)
Arcilla, 4% de H_2O	1666	4.5	0.57		
Concreto, 1:4 seco			0.762		
Corcho prensado	160.2	30	0.0433		
Algodón	80.1		0.055 (0 °C)	0.061 (37.8 “C)	0.068 (93.3 °C)
Fieltro de lana	330	30	0.052		
Aislante de laminados de fibra	237	21	0.048		
Vidrio de ventana			0.52-1.06		
Lana de vidrio	64.1	30	0.0310 (-6.7 °C)	0.0414 (37.8 °C)	0.0549 (93.3 °C)
Hielo	921	0	2.25		
Óxido de magnesio 85%	271		0.068 (37.8°C)	0.071 (93.3 “C)	0.080 (204.4 “C)
	208		0.059 (37.8 “C)	0.062 (93.3 “C)	0.066 (148.9 “C)
Roble, perpendicular a la fibra	825	15	0.208		
Pino, perpendicular a la fibra	545	15	0.151		
Papel			0.130		
Lana mineral	192		0.0317 (-6.7 “C)	0.0391 (37.8 “C)	0.0486 (93.3 “C)
	128		0.0296 (-6.7 “C)	0.0395 (37.8 “C)	0.0518 (93.3 “C)
Caucho duro	1198	0	0.151		
Arena					
4% H_2O	1826	4.5	1.51		
10% H_2O	1922	4.5	2.16		
Piedra arenisca	2243	40	1.83		
Nieve	559	0	0.47		
Lana	110.5	30	0.036		

* A temperatura ambiente cuando no se especifica lo contrario.

Referencia: L. S. Marks, *Mechanical Engineers' Handbook,* 5a. ed. Nueva York: McGraw-Hill, Book Company, 1951; W. H. McAdams, *Heat Transmission,* 3a. ed. Nueva York: McGraw-Hill, Book Company 1954; F. H. Norton, *Refracfories,* New York; McGraw-Hill, Book Company, 1949, National Research y Council, *International Critical Tables.* Nueva York McGraw-Hill Co., Book Company, 1929; M. S. Kersten, *Univ. Minn. Eng. Ex. Sta., Bull. 28.* Junio 1949; R. H. Heilman, *Ind. Eng. Chem., 28, 782* (1936).

A-3-16 Conductividades térmicas, densidades y capacidades caloríficas de metales

Material	t (°C)	ρ $\left(\frac{kg}{m^3}\right)$	c_p $\left(\frac{kJ}{kg \cdot K}\right)$	$k(W/m \cdot K)$		
Aluminio	20	2707	0.896	202 (0 °C) 230 (300 °C)	206 (100 °C)	215 (200 °C)
Latón (70-3 0)	20	8522	0.385	97 (0 °C)	104 (100 °C)	109 (200 °C)
Hierro colado	20	7593	0.465	55 (0 °C)	52 (100 °C)	48 (200 °C)
Cobre	20	8954	0.383	388 (0 °C)	377 (100 °C)	372 (200 °C)
Plomo	20	11370	0.130	35 (0 °C)	33 (100 °C)	31 (200 °C)
Acero 1%C	20	7801	0.473	45.3 (18 °C) 43 (300 °C)	45 (100 °C)	45 (200 °C)
Inoxidable 308	20	7849	0.461	15.2 (100 °C)	21.6 (500 °C)	
Inoxidable 304	0	7817	0.461	13.8 (0 °C)	16.3 (100 °C)	18.9 (300 °C)
Estaño	20	7304	0.227	62 (0 °C)	59 (100 °C)	57 (200 °C)

Referencia: L. S. Marks, *Mechanical Engineers: Handbook,* 5a. ed. Nueva York; McGraw-Hill, Book Company, 1951; E. R. G. Eckert *y* R. M. Drake, *Heat and Mass Transfer,* 2a. ed. Nueva York; McGraw-Hill, Book Company, 1959; R. H. Perry y C. H. Chilton, *Chemical Engineers'* Handbook 5a. ed. Nueva York: McGraw-Hil Book Company, 1973; National Research Council, *International Critica1 Tables,* Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1929.

A.3-17 Emisividades normales totales de diversas superficies

Superficie	K	ε	Superficie	K	ε
Aluminio			Plomo sin oxidar	400	0.057
altamente oxidado	366	0.20	Níquel pulido	373	0.072
altamente pulido	500	0.039	Óxido de níquel	922	0.59
	850	0.057	Roble cepillado	294	0.90
Óxido de aluminio	550	0.63	Pintura		
Asbesto prensado	296	0.96	de aluminio	373	0.52
Latón, altamente	520	0.028	al aceite (16		
pulido	630	0.03 1	colores diferentes)	373	0.92496
Cromo pulido	373	0.075	Papel	292	0.924
Cobre			Papel impermeable		
oxidado	298	0.78	para techos	294	0.91
pulido	390	0.023	Caucho (duro brillante)	296	0.94
Vidrio liso	295	0.94	Acero		
Hierro			oxidado a 867 K	472	0.79
oxidado	373	0.74	inoxidable pulido	373	0.074
estañado	373	0.07	inoxidable 304	489	0.44
Óxido de hierro	772	0.85	Agua	273	0.95
				373	0.963

Referencia: R. H. Perry y C. H. Chilton, *Chemical Engineers, Handbook,* 5a. ed. Nueva York: McGraw-Hill, Book Company, 1973; W. H. McAdams, *Heat Transmission,* 3a. ed., Nueva York: McGraw-Hill, Book Company, 1954; E. Schmidt, *Gesundh: -Ing.* Beiheft, 20 Reihe 1, 1 (1927).

A.3-18 Constantes de la ley de Henry para gases en agua ($H \times 10^{-4}$)*

T											
K	(°C)	CO_2	CO	C_2H_6	C_2H_4	He	H_2	H_2S	CH_4	N_2	O_2
273.2	0	0.0728	3.52	1.26	0.552	12.9	5.79	0.0268	2.24	5.29	2.55
283.2	10	0.104	4.42	1.89	0.768	12.6	6.36	0.0367	2.97	6.68	3.27
293.2	20	0.142	5.36	2.63	1.02	12.5	6.83	0.0483	3.76	8.04	4.01
303.2	30	0.186	6.20	3.42	1.27	12.4	7.29	0.0609	4.49	9.24	4.75
313.2	40	0.233	6.96	4.23		12.1	7.51	0.0745	5.20	10.4	5.32

* $p_A = Hx_A$, p_A = presión parcial de A en el gas en atm, x_A = fracción mol de A en el líquido, H = constante de la ley de Henry en atm/frac mol.
Referencia: National Research Council, *International Critical Tables,* Vol. III, Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1929.

A.3-19 Datos de equilibrio para el sistema SO_2-Agua

Fracción mol del SO_2 en el líquido x_A	*Presión parcial de SO_2 en el vapor, p_A (mm Hg)*		*Fracción mol del SO_2 en el vapor y_A; P = 1 Atm*	
	20 °C (293 K)	30 °C (303 K)	20 °C	30 °C
0	0	0	0	0
0.0000562	0.5	0.6	0.000658	0.000790
0.0001403	1.2	1.7	0.00158	0.00223
0.000280	3.2	4.7	0.00421	0.00619
0.000422	5.8	8.1	0.00763	0.01065
0.000564	8.5	11.8	0.01120	0.0155
0.000842	14.1	19.7	0.01855	0.0259
0.001403	26.0	36	0.0342	0.0473
0.001965	39.0	52	0.0513	0.0685
0.00279	59	79	0.0775	0.1040
0.00420	92	125	0.121	0.1645
0.00698	161	216	0.212	0.284
0.01385	336	452	0.443	0.594
0.0206	517	688	0.682	0.905
0.0273	698		0.917	

Referencia: T. K. Sherwood, *Ind. Eng. Chem,.* 17, 745 (1925)

A.3-20 Datos de equilibrio para el sistema metanol-agua

Fracción mol del metano1 en el líquido, x_A	*Presión parcial del metano1 en el vapor, p_A (mm Hg)*	
	39.9 °C (313.1K)	59.4 °C (332.6K)
0	0	0
0.05	25.0/760	50/760
0.10	46.0/760	102/760
0.15	66.5/760	151/760

Referencia: National Research Council, *International Critical Tables,* Vol. III, Nueva York: McGraw-Hill, Book Company, 1929

A.3-21 Datos de equilibrio para el sistema acetona-agua a 20 °C (293 K)

Fracción mol de la acetona en el líquido, x_A	*Presión parcial de la acetona en el vapor,* p_A *(mm Hg)*
0	0
0.0333	30.0
0.0720	62.8
0.117	85.4
0.171	103

Referencia: T. K. Sherwood, *Absorption and Extraction.* Nueva York: McGraw-Hill, Book Company, 1937. Con autorización.

A.3-22 Datos de equilibrio para el sistema amoniaco-agua

Fracción mol del NH_3 *en el líquido,* x_A	*Presión parcial del* NH_3 *en el vapor* p_A *(mmHg)*		*Fracción mol de* NH_3 *en el vapor,* y_A*; P = 1 atm*	
	20 °C (293 K)	30 °C (303 K)	20 °C	30 °C
0	0	0	0	0
0.0126		11.5		0.0151
0.0167		15.3		0.0201
0.0208	12	19.3	0.0158	0.0254
0.0258	15	24.4	0.0197	0.0321
0.0309	18.2	29.6	0.0239	0.0390
0.0405	24.9	40.1	0.0328	0.0527
0.0503	31.7	51.0	0.0416	0.0671
0.0737	50.0	79.7	0.0657	0.105
0.0960	69.6	110	0.0915	0.145
0.137	114	179	0.150	0.235
0.175	166	260	0.218	0.342
0.210	227	352	0.298	0.463
0.241	298	454	0.392	0.597
0.297	470	719	0.618	0.945

Referencia: J. H. Peny, *Chemical Engineers' Handbook,* 4a. ed. Nueva York McGraw-Hill, Book Company, 1953. Con autorización.

A.3-23 Datos de equilibrio para el sistema etanol-agua a 101.325 kPa (1 atm)*

Temperatura		Equilibrio vapor-líquido fracción de masa del etanol		Temperatura		Equilibrio vapor-líquido j-acción de masa del etanol		Temperatura		Fracción de masa	Entalpía (btu/lb$_m$ de mezcla)		Entalpía (kJ/kg de mezcla)	
°C	°F	x_A	YA	°C	°F	x_A	YA	°C	°F		Líquido	Vapor	Líquido	Vapor
100.0	212	0	0	81.0	177.8	0.600	0.794	100.0	212	0	180.1	1150	418.9	2675
098.1	208.5	0.020	0.192	80.1	176.2	0.700	0.822	91.8	197.2	0.1	159.8	1082	371.7	2517
095.2	203.4	0.050	0.377	79.1	174.3	0.800	0.858	84.7.	184.5	0.3	135.0	943	314.0	2193
091.8	197.2	0.100	0.527	78.3	173.0	0.900	0.912	82.0	179.6	0.5	122.9	804	285.9	1870
087.3	189.2	0.200	0.656	78.2	172.8	0.940	0.942	80.1	176.2	0.7	111.1	664	258.4	1544
084.7	184.5	0.300	0.713	78.1	172.7	0.960	0.959	78.3	173.0	0.9	96.6	526	224.7	1223
083.2	181.7	0.400	0.746	78.2	172.8	0.980	0.978	78.3	173.0	1.0	89.0	457.5	207.0	1064
082.0	179.6	0.500	0.771	78.3	173.0	1.00	1.00							

*El estado de referencia para la entalpía es el líquido puro a 273 K o 0 °C.

Referencia: Datos tomados de L. W. Come11 y R. E. Montonna, *Ind. Eng. Chem.,* 25, (1933); y W.A. Noyes y R. R. Warfel, *J. Am. Chem. Soc., 23, 463* (1901), publicados por G. G. Brown, *Unit Operations,* Nueva York: John Wiley & Sons, Inc., 1950. Con autorización.

A.3-24 Datos de equilibrio líquido-líquido para el sistema ácido achico-agua-éter isopropílico a 293 K o 20 °C

Capa de agua (% en peso)			*Capa de Éter isopropílico (Yo en peso)*		
Ácido acético	*Agua*	*Éter isopropílico*	*Ácido acético*	*Agua*	*Eter isopropílico*
0	**98.8**	1.2	**0**	0.6	**99.4**
0.69	98.1	1.2	0.18	0.5	**99.3**
1.41	97.1	1.5	0.37	0.7	**98.9**
2.89	95.5	1.6	0.79	0.8	**98.4**
6.42	91.7	1.9	1.93	1.0	97.1
13.30	84.4	2.3	4.82	1.9	93.3
25.50	71.1	3.4	11.40	3.9	84.7
36.70	58.9	4.4	21.60	6.9	71.5
44.30	45.1	10.6	31.10	10.8	58.1
46.40	37.1	16.5	36.20	15.1	48.7

Referencia. Trans. A.I.Ch.E., 36, 601, 628 (1940). Con autorización.

A.3-25. Datos de equilibrio líquido-líquido para el sistema acetona-agua-metil isobutil cetona (MIBK por sus siglas en inglés) a 298-299 K o 25-26 °C

Datos de composición (% en peso)			*Datos de la distribución de la acetona (% en peso)*	
MIBK	*Acetona*	*Agua*	*Fase acuosa*	*Fase de MIBK*
98.0	**0**	2.00	2.5	4.5
93.2	4.6	2.33	5.5	10.0
77.3	18.95	3.86	7.5	13.5
71.0	24.4	4.66	10.0	17.5
65.5	28.9	5.53	12.5	21.3
54.7	37.6	7.82	15.5	25.5
46.2	43.2	10.7	17.5	28.2
12.4	42.7	45.0	20.0	31.2
5.01	30.9	64.2	22.5	34.0
3.23	20.9	75.8	25.0	36.5
2.12	3.73	94.2	26.0	37.5
2.20	0	97.8		

Referencia: Reproducido con autorización de D. F. Othmer, R. E. White, y E. Trueger, *Ind. Eng. Chem.*, 33, 1240 (1941). Derechos Reservados por la American Chemical Society.

APÉNDICE A.4

Propiedades físicas de materiales alimenticios y biológicos

A.4-1 Capacidades caloríficas de alimentos (valores promedio de c_p a 273-373 K o O-100 °C)

Material	*H_2O (% en peso)*	*c_p (kJ/kg · K)*
Manzanas	75-85	3.73-4.02
Puré de manzana		4.02*
Espárragos		
Frescos	93	3.94†
Congelados	93	2.01‡
Tocino magro	51	3.43
Puré de plátano		3.66§
Carne de res	72	3.43
Pan blanco	44-45	2.72-2.85
Mantequilla	15	2.30¶
Melón	92.7	3.94†
Queso suizo	55	2.68†
Maíz dulce		
Fresco		3.32-f
Congelado		1.77‡
Crema con 45–60% de grasa	57-73	3.06-3.27
Pepino	97	4.10
Huevos		
Frescos		3.18†
Congelados		1.68‡
Bacalao		
Fresco	70	3.1811
Congelado	70	1.72‡
Harina	12-13.5	1.80-1.88
Hielo	100	1.95811

(*Continúa*)

A.4-1 *Continuación*

Material	H_2O *(% en peso)*	c_p *(kJ/kg · K)*
Helado		
Fresco	58-66	3.27†
Congelado	58-66	1.88‡
Cordero	70	3.18*
Macarrones	12.5-13.5	1.84-1.88
Leche de vaca		
Entera	87.5	3.85
Descremada	91	3.98402
Aceite de oliva		2.01**
Naranjas		
Frescas	87.2	3.77†
Congeladas	87.2	1.93‡
Guisantes, secos	14	1.84
Guisantes verdes		
Frescos	74.3	3.31†
Congelados	74.3	1.76‡
Sopa de guisantes		4.10
Ciruelas	75-78	3.52
Cerdo		
Fresco	60	2.85†
Congelado	60	1.34‡
Papas	75	3.52
Aves		
Frescas	74	3.31†
Congeladas	74	1.55‡
Salchichas alemanas		
Frescas	60	3.60†
Congeladas	60	2.35‡
Alubias		
Frescas	*88.9*	3.81†
Congeladas	*88.9*	1.97‡
Tomates	*95*	3.98†
Ternera	63	3.22
Agua	100	4.185**

* 32.8 °C;
† Por encima del punto de congelación
‡ Por debajo del punto de congelación
§ 24.4 °C.
¶ 4.4 °C.
‖ -20 °C.
** 20 °C.

Referencia: W. 0. Ordinanz, *Food Ind.*, **18**, 101 (1946); G. A. Reidy, Department of Food Science, Michigan State University, 1968; S. E. Charm, *The Fundamentals of Food Engineering,* 2a. ed., Westport Con. Avi Publishing Co., Inc., 1971; R. L. Earle, *Unit Operations in Food Processing.* Oxford: Pergamon Press, Inc., 1966; ASHRAE, *Handbook of Fundamentals.* Nueva York: ASHRAE, 1972, 1967; H. C. Mannheim. M. P. Steinberg, y A. I. Nelson, *Food Technol., 9, 556* (1955)

A.4-2 Conductividades térmicas, densidades y viscosidades de alimentos

Material	H_2O *(% en peso)*	*Temperatura (K)*	k *(W/m·k)*	ρ *(kg/m³)*	μ *[(Pa·s)10³, o cp]*
Puré de manzana		295.7	0.692		
Mantequilla	15	277.6	0.197	998	
Melón			0.571		
Pescado					
Fresco		273.2	0.43 1		
Congelado		263.2	1.22		
Harina de trigo	8.8		0.450		
Miel	12.6	275.4	0.50		
Hielo	100	273.2	2.25		
	100	253.2	2.42		
Cordero	71	278.8	0.415		
Leche					
Entera		293.2		1030	2.12
Descremada		274.7	0.538		
		298.2		1041	1.4
Aceite					
Hígado de bacalao		298.2		924	
Maíz		288.2		921	
Olivo		293.2	0.168	919	84
Cacahuate		277.1	0.168		
Frijol de soya		303.2		919	40
Naranjas	61.2	303.5	0.43 1		
Peras		281.9	0.595		
Carne de puerco magra					
Fresca	74	275.4	0.460		
Congelada		258.2	1.109		
Papas					
Crudas			0.554		
Congeladas		260.4	1.09	977	
Salmón					
Fresco	6 7	277.1	0.50		
Congelado	67	248.2	1.30		
Solución de sacarosa	80	294.3		1073	1.92
Pavo					
Fresco	74	276.0	0.502		
Congelado		248.2	1.675		
Ternera					
Fresca	75	335.4	0.485		
Congelada	75	263.6	1.30		
Agua	100	293.2	0.602		
	100	273.2	0.569		

Referencia: R. C. Weast, *Hundbook of Chemistry and Physics*, 48a. ed., Cleveland: Chemical Rubber Co., Inc. 1967; C. P. Lentz, *Food Technol.*, 15, 243 (1962); G. A. Reidy, Department of Food Science, Michigan State University, *1968;* S. E. Charm, *The Fundamentals of Food Engineering,* 2a. ed., Westport Con. Avi Publishing Co., Inc., 1971; R. Earle, *Unit Operations in Food Processing,* Oxford: Pergamon Press, 1966; R. H. Perry y C. H. Chilton, *Chemical Engineers'* Handbook, 5a. ed., Nueva York: McGraw-Hill, Book Company, 1973; V. E. Sweat, *J. Food Sci., 39, 1080* (1974)

APÉNDICE A.5

Propiedades de tuberías, ductos y tamices

A.5-1 Dimensiones de tubería estándar de acero

Tamaño nominal de la tubería (*pulg.*)	*Diámetro externo*			*Espesor de la pared*		*Diámetro interno*		*Área de corte transversal interno*	
	pulg.	*mm*	*Cédula*	*pulg.*	*mm*	*pulg.*	*mm*	pie^2	$m^2 \times 10^4$
$\frac{1}{8}$	0.405	10.29	40	0.068	1.73	**0.269**	6.83	0.00040	0.3664
			80	0.095	2.41	0.215	5.46	0.00025	0.234 1
$\frac{1}{4}$	0.540	13.72	40	0.088	2.24	0.364	9.25	0.00072	0.6720
			80	0.119	3.02	0.302	7.67	0.00050	0.4620
$\frac{3}{8}$	0.675	17.15	40	0.091	2.31	0.493	12.52	0.00133	1.231
			80	0.126	3.20	0.423	10.74	0.00098	0.9059
$\frac{1}{2}$	0.840	21.34	40	0.109	2.77	0.622	15.80	0.00211	1.961
			80	0.147	3.73	0.546	13.87	0.00163	1.511
$\frac{3}{4}$	1.050	26.67	40	0.113	2.87	0.824	20.93	0.00371	3.441
			80	0.154	3.91	0.742	18.85	0.00300	2.791
1	1.315	33.40	40	0.133	3.38	1.049	26.64	0.00600	5.574
			80	0.179	4.45	0.957	24.31	0.00499	4.641
$1\frac{1}{4}$	1.660	42.16	40	0.140	3.56	1.380	35.05	0.01040	9.648
			80	0.191	4.85	1.278	32.46	0.00891	8.275
$1\frac{1}{2}$	1.900	48.26	40	0.145	3.68	1.610	40.89	0.01414	13.13
			80	0.200	5.08	1.500	38.10	0.01225	11.40
2	2.375	60.33	40	0.154	3.91	2.067	52.50	0.02330	21.65
			80	0.218	5.54	1.939	49.25	0.02050	19.05
$2\frac{1}{2}$	2.875	73.03	40	0.203	5.16	2.469	62.71	0.03322	30.89
			80	0.276	7.01	2.323	59.00	0.02942	27.30
3	3.500	88.90	40	0.216	5.49	3.068	77.92	0.05130	47.69
				0.300	7.62	2.900	73.66	0.04587	42.61
$3\frac{1}{2}$	4.000	101.6	40	0.226	5.74	3.548	90.12	0.06870	63.79
			80	0.318	8.08	3.364	85.45	0.06170	57.35
4	4.500	114.3	40	0.237	6.02	4.026	102.3	0.08840	82.19
			80	0.337	8.56	3.826	97.18	0.07986	74.17
5	5.563	141.3	40	0.258	6.55	5.047	128.2	0.1390	129.1
			80	0.375	9.53	4.813	122.3	0.1263	117.5
6	6.625	168.3	40	0.280	7.11	6.065	154.1	0.2006	186.5
			80	0.432	10.97	5.761	146.3	0.1810	168.1
8	8.625	219.1	40	0.322	8.18	7.981	202.7	0.3474	322.7
			80	0.500	12.70	7.625	193.7	0.3171	294.7

A.5-2 Dimensiones de tubería para intercambio de calor

Diámetro externo		Número	Espesor de la pared		Diámetro interno		Area de corte tranversal interno	
pulg	m m	BWG	pulg	mm	pulg.	mm	pie^2	$m^2 \times 10^4$
$\frac{5}{8}$	15.88	12	0.109	2.77	0.407	10.33	**0.000903**	0.8381
		14	0.083	2.11	0.459	ll.66	0.00115	1.068
		16	0.065	1.65	0.495	12.57	0.00134	1.241
		18	0.049	1.25	0.527	13.39	0.00151	1.408
$\frac{3}{4}$	19.05	12	0.109	2.77	0.532	13.51	0.00154	1.434
		14	0.083	2.11	0.584	14.83	0.00186	1.727
		16	0.065	1.65	0.620	15.75	0.00210	1.948
		18	0.049	1.25	0.652	16.56	0.00232	2.514
$\frac{7}{8}$	22.33	12	0.109	2.77	0.657	16.69	0.00235	2.188
		14	0.083	2.11	0.709	18.01	0.00274	2.548
		16	0.065	1.65	0.745	18.92	0.00303	2.811
		18	0.049	1.25	0.777	19.74	0.00329	3.060
1	25.40	10	0.134	3.40	0.732	18.59	0.00292	2.714
		12	0.109	2.77	0.782	19.86	0.00334	3.098
		14	0.083	2.11	0.834	21.18	0.00379	3.523
		16	0.065	1.65	0.870	22.10	0.00413	3.836
$1\frac{1}{4}$	31.75	10	0.134	3.40	0.982	24.94	0.00526	4.885
		12	0.109	2.77	1.032	26.21	0.00581	5.395
		14	0.083	2.11	1.084	27.53	0.00641	5.953
		16	0.065	1.65	1.120	28.45	0.00684	6.357
$1\frac{1}{2}$	38.10	10	0.134	3.40	1.232	31.29	0.00828	7.690
		12	0.109	2.77	1.282	32.56	0.00896	8.326
		14	0.083	2.11	1.334	33.88	0.00971	9.015
2	50.80	10	0.134	3.40	1.732	43.99	0.0164	15.20
		12	0.109	2.77	1.782	45.26	0.0173	16.09

AS.3 Escala de tamices Tyler estándar

Abertura del tamiz		*Diámetro nominal del alambre*		
mm	*pulg. (equivalentes aproximados)*	*mm*	*pulg. (equivalentes aproximados)*	*Designación Tayler equivalente*
26.9	1.06	*3.90*	0.1535	1.050 pulg
25.4	1.00	3.80	0.1496	
22.6	0.875	3.50	0.1378	0.883 pulg
19.0	0.750	3.30	0.1299	0.742 pulg
16.0	0.625	3.00	0.1181	0.624 pulg
13.5	0.530	2.75	0.1083	0.525 pulg
12.7	0.500	2.67	0.1051	
11.2	0.438	2.45	0.0965	0.441 plg.
9.51	0.375	2.27	0.0894	0.371 plg.
8.00	0.312	2.07	0.0815	23 mallas
6.73	0.265	1.87	0.0736	3 mallas
6.35	0.250	1.82	0.0717	
5.66	0.223	1.68	0.066 1	33 mallas
4.76	0.187	1.54	0.0606	4 mallas
4.00	0.157	1.37	0.0539	5 mallas
3.36	0.132	1.23	0.0484	6 mallas
2.83	0.111	1.10	0.0430	7 mallas
2.38	0.0937	1.00	0.0394	8 mallas
2.00	0.0787	0.900	0.0354	9 mallas
1.68	0.0661	0.810	0.03 19	10 mallas
1.41	0.0555	0.725	0.0285	12 mallas
1.19	0.0469	0.650	0.0256	14 mallas
1.00	0.0394	0.580	0.0228	16 mallas
0.841	0.033 1	0.510	0.020 1	20 mallas
0.707	0.0278	0.450	0.0177	24 mallas
0.595	0.0234	0.390	0.0154	28 mallas
0.500	0.0197	0.340	0.0134	32 mallas
0.420	0.0165	0.290	0.0114	35 mallas
0.354	0.0139	0.247	0.0097	42 mallas
0.297	0.0117	0.215	0.0085	48 mallas
0.250	0.0098	0.180	0.0071	60 mallas
0.210	0.0083	0.152	0.0060	65 mallas
0.177	0.0070	0.131	0.0052	80 mallas
0.149	0.0059	0.110	0.0043	100 mallas
0.125	0.0049	0.091	0.0036	ll 5 mallas
0.105	0.0041	0.076	0.0030	150 mallas
0.088	0.0035	0.064	0.0025	170 mallas
0.074	0.0029	0.053	0.0021	200 mallas
0.063	0.0025	0.044	0.0017	250 mallas
0.053	0.0021	0.037	0.0015	270 mallas
0.044	0.0017	0.030	0.0012	325 mallas
0.037	0.0015	0.025	0.0010	400 mallas

Notación

Se indican primero las unidades SI (seguidas por unidades inglesas o cgs).

a	radio de una partícula, m (pie)
a	área, m^2 (pie^2) también m^2 de área/m^3 de volumen de lecho o empaque (pie^2/pie^3)
a_e	aceleración de fuerza centrifuga m/s^2 (pie/s^2)
a_v	área superficieal específica de la partícula, m/s^2 (pie/s^2)
A	área de sección transversal, m^2 (pie^2, cm^2); también área, m^2 (pie^2)
A	factor de absorción = L/mV, adimensional; también área de filtro, m^2 (pie^2)
A_m	área de la membrana, cm^2, m^2 (pie^2)
A_w	constante de permeabilidad al disolvente, kg/s · m^2 · atm
A_s	constante de permeabilidad al soluto, m/s (pie/h)
b	longitud, m (pie, cm)
B	flujo de sólido seco, kg/h (lb_m/h); también constante de filtración, s/m^3 (s/pie^3)
B	propiedad física de la membrana, atm^{-1}
c	concentración, kg/m^3, kg mol/m^3 (lb_m/pie^3, lb mol/pie^3, g mol/cm^3)
c	concentración del absorbato en el fluido, kg/m^3 (lbm/pie^3)
c_A	concentración de A, kg mol/m^3 (lb mol/pie^3, g mol/cm^3)
c_b	concentración en el punto de ruptura, kg/m^3, (lb_m/pie^3)
c_g	concentración de soluto en el gel, kg de soluto/m^3 (lb_m/pie^3, g/cm^3)
c_s	concentración de soluto en la superficie de la membrana, kg de soluto/m^3 (lb_m/pie^3, g/cm^3)
c_S	concentración de A en el sólido, kg mol A/m^3, (lb_m/pie^3, g mol/cm^3)
c_s	concentración de sólidos en una suspensión, kg/m^3, (lb_m/pie^3)
cs	calor húmedo, kJ/kg de aire seco · K (btu/lbm aire seco · °F)
c_x	concentración de sólidos en una suspensión, frac masa
c_p	capacidad calorífica a presión constante, J/kg . K, kJ/kg · K, kJ/kg mol . K (btu/lb_m · °F, cal/g · °C)
$\bar{c}_w$	concentración media de disolvente en la membrana, kg/m^3, (lb_m/pie^3)
c_A	desviación de la concentración respecto a la concentración media ($\bar{c}_A$, kg mol/m^3
c_P	concentración de P, kg de P/m^3
c_v	capacidad calorífica a volumen constante, J/kg · K
C	constante de filtración, N/m^2, (lb_f/pie^2); también, número de componentes
C	capacidad calorífica del fluido W/K (btu/h · "F)
C	altura de la base del agitador sobre el fondo del tanque, m (pie)
C_p	coeficiente del tubo pitot, adimensional
C_D	coeficiente de resistencia al flujo, adimensional

C_v, C_0	coeficiente de Venturi, coeficiente de orificio, adimensionales
D	difusividad molecular, m^2/s (pie^2/h, cm^2/s); también, diámetro, m (pie)
D	tiempo de reducción decimal, min; también, gasto de destilado, kg/h, (lb_m/h)
D_{AB}	difusividad molecular, m^2/s (pie^2/h, cm^2/s)
D_p	diámetro de partícula, m (pie)
D_{KA}	difusividad de Knudsen, m^2/s (pie^2/h, cm^2/s)
D_{NA}	difusividad en la región de transición, m^2/s (pie^2/h, cm^2/s)
$D_{A\ eff}$	difüsividad efectiva, m^2/s (pie^2/h, cm^2/s)
$D_{p,m}$	diámetro medio efectivo para la mezcla, m (pie)
D_a	diámetro del agitador, m (pie)
D_t	diámetro del tanque, m (pie)
D_{pc}	diámetro crítico, m (pie)
D_{AP}	difusividad de A en la solución de proteína, m^2/s.
E	energía de activación, J/kg mol (cal/g mol)
E	energía para reducción de tamaño, kW . h/ton; además, eficiencia de platos, adimensional
E	energía total, J/kg (pie · lb_f/lb_m)
E	fracción en la que aún no se verifica un cambio, adimensional
E	energía de radiación emitida, W/m^2(btu/h · pie^2)
E	coeficiente de dispersión axial, m^2/s (pie^2/h)
$E_{B\lambda}$	potencia emisiva monocromática, W/m^3 (btu/h . pie^3)
f	fracción de la alimentación vaporizada; también fracción del ciclo, adimensional
f	factor de fricción de Fanning, adimensional;.
f_t	factor de mezcla, adimensional
F	número de grados de libertad
F	pérdida por fricción, J/kg (pie · lb_f/lb_m)
F	gasto, kg/h, mol kg/h (lb_m/h)
F	fuerza, N (lb_f, dina)
F_T	factor de corrección por diferencias de temperatura, adimensional
F_0	tiempo de proceso a 121.1 °C (250 °F), min
$\Im_{12}$	factor de vista geométrico para superficies grises, adimensional
F_{12}	factor de vista geométrico adimensional
g	aceleración normal de la gravedad (véase el Apéndice A. 1)
g_c	factor de conversión gravitatoria (véase el Apéndice A. 1)
G	velocidad de masa = $v\rho$, kg/s · m^2, kgk · m^2 (lb_m/h · pie^2)
G	constante de crecimiento, mm/h.
G'	velocidad de masa = v'p, kg/s · m^2, kg/h . m^2 (lb_m/h · pie^2)
G	irradiación sobre un cuerpo, W/m^2 (btu/h · pie^2)
h	separación constante en x para la regla de Simpson
h	carga, J/kg (pie · $lb_f/(lb_m)$; también altura de un fluido, m (pie)
h	coeficiente de transferencia de calor, W/m^2 · K (btu/h · pie^2 · °F)
h	entalpía de un líquido, J/kg, kJ/kg (btu/lb_m)
h_{fg}	calor latente de vaporización, J/kg, kJ/kg (btu/lb_m)
h_c	coeficiente de resistencia de contacto, W/m^2 · K (btu/h . pie^2 . °F)
H	distancia, m (pie)
H	constante de la ley de Henry, atm/frac mol
H	carga, J/kg (pie . $lb_f/(lb_m)$; también altura de un fluido, m (pie)
H	entalpía, J/kg, kJ/kg, kJ/mol kg (btu/lb_m); también, entalpía kJ/kg aire seco (btu/lb_m aire seco)

H	humedad, kg vapor agua/kg aire seco (lb vapor agua/lb aire seco)
H	entalpía del vapor, J/kg, kJ/kg, kJ/kg mol (btu/lb_m)
H	relación de equilibrio, kg mol/m^3 . atm
H	longitud del lecho, m (pie); también longitud efectiva de la aguja, m (pie)
H'	entalpía, kJ/kg sólido seco (btu/lb_m); también, kJ/kg aire seco (btu/lb_m aire seco) .
H_B	longitud del lecho usada hasta el punto de ruptura, m (pie)
H_G, H_L	altura de unidad de transferencia, m (pie)
H_{OG}, H_{OL}	
H_P, H_R	porcentaje de humedad, porcentaje de humedad relativa, respectivamente
H_T	longitud total del lecho, m (pie)
H_{UNB}	longitud del lecho no usado, m (pie)
i	vector unitario a lo largo del eje x
I	intensidad de turbulencia, adimensional; también corriente amp.
I_B	intensidad de la radiación del cuerpo negro, W/m^2 · sr (btu/h . pie^2 · sr)
I_λ	intensidad de la radiación, W/m^2 (btu h · pie^2)
j	vector unitario a lo largo del eje y
J	anchura de deflector, m (pie);
j_A	flujo específico de masa de A con respecto a la velocidad de masa promedio, kg/s · m^2
j_A^*	flujo específico de masa de A con respecto a la velocidad promedio, kg/s . m^2
J_A	flujo específico molar de A con respecto a la velocidad de masa promedio, mol kg/s · m^2
$\mathbf{J}_A^*$	vector de flujo específico molar de A con respecto a la velocidad o molar promedio, kg mol/s . m^2 (Ib mol/h · pie^2, g mol/s · cm^2)
J_D, J_H	factores de transferencia de masa y de transferencia de calor, adimensionales
k	vector unitario a lo largo del eje z
k, k'	constante de velocidad de reacción, h^{-1}, min^{-1}, o s^{-1}
k	conductividad térmica, W/m . K (btu/h . pie . °F)
k	constante de velocidad de reacción, h^{-1}, min^{-1}, o s^{-1}
k_1'	constante de velocidad de reacción heterogénea de primer orden, m/s (cm/s)
k_c', k_c, k_G, k_x,	coeficiente de transferencia de masa, kg mol/s . m^2 · dif conc (lb mol/h . pie^2 · dif conc, g mol/s · cm^2 · dif conc) kg mol/s · m^2 · Pa, kg mol/s . m^2 . atm (lb mol/h · pie^2 · atm). (Véase la Tabla 7.2-l)
k_c	coeficiente de transferencia de masa, m/s (pie/h, cm/s)
k_Ga, k_xa, k_ya,	coeficiente volumétrico de transferencia de masa, mol kg/s . m^3 . dif conc (mol lb/h · pie^3 · dif conc, mol g/s · cm^3 · dif conc); mol kg/s . m^3 . Pa
k_s	coeficiente de reacción superficial, kg mol/s · m^2 · frac mol
k_w, k_w'	constantes de pared, adimensionales
K_y', K_x'	coeficiente total de transferencia de masa, mol kg/s · m^2 · frac mol (lb mol/h · pie^2 . frac mol, lb g/s · cm^2 · frac mol)
K	índice de consistencia, N . s^n/m^2 (lbr · s^n/pie^2)
K_1	constante de la Ecuación (3.1-39), m/s (pie/s)
K_y', K_s	coeficiente de distribución de equilibrio, adimensional
K'	índice de consistencia, N · s^n/m^2 (lb_f . s^n/pie^2)
K	coeficiente de distribución de equilibrio, adimensional
K_p	constante de filtración, s/m^6 (s/pie^6)
K_V	constante de filtración, N/m^5 (lb/pie^5)

K_c, K_{ex}, K_f coeficientes de pérdida por contracción, expansión y accesorios, adimensionales
L longitud, m (pie); también cantidad, kg.mol kg (Ib,); también kg/h . m^2
L gasto de líquido, kg/h, kg mol/h (lb_m/h)
L longitud de mezcla de Prandtl, m (pie)
L longitud media de viga, m (pie)
L_S peso de sólido seco, kg sólido seco (lb_m sólido seco)
L' gasto de líquido, kg/h, kg mol/h (lb_m inertes/h)
m, m'', m'' pendiente de línea de equilibrio, adimensional
m gasto kg/s, kg/h (lb_m/s)
m relación adimensional = k/hx_1; también posición m
m parámetro de la Tabla 7.1-1, adimensional; también parámetro de posición
m relación kg torta húmeda/kg torta seca (lb torta húmeda/lb torta seca)
M peso molecular, kg/kg mol (lb_m/lb mol)
M masa total, kg (Ib,); también parámetro = $(\Delta x)^2/\alpha\Delta t$ adimensional
M módulo = $(\Delta x)^2/D_{AB}\Delta t$, adimensional
M gasto, kg/h, mol kg/h (lb_m/h)
M cantidad de adsorbente, kg(lb_m)
n exponente, adimensional; también índice de comportamiento de flujo, adimensional
n' pendiente de la línea de un fluido que obedece la ley exponencial, adimensional
n parámetro de posición; también relación adimensional = x/x_1
n cantidad total, kg mol (lb mol, g mol)
n_A flujo específico de A con respecto a coordenadas estacionarias, kg/s · m^2
N rpm o rps; también número de placas para calor radiante
N parámetro = h $\Delta x/k$, adimensional; también, número de organismos viables, adimensional
N flujo específico total con respecto a coordenadas estacionarias, kg mol/s . m^2 (lb mol/h · pie^2, g mol/s . cm^2)
N módulo = $k_c\ \Delta x/D_{AB}$, adimensional; también, número de etapas
N concentración de sólido B, kg sólido B/kg solución (lb sólido B/lb solución)
N número de subdivisiones iguales de temperatura, adimensional
N_s flujo específico de soluto, kg/s · m^2 (lbm/h . pie^2)
N_w flujo específico de disolvente, kg de disolvente/s . m^2 (lb_m/h · pie^2)
$N_{n,m}$ residuo definido por la Ecuación (6.6-3), mol kg/m^3 (mol lb/pie^3)
N_A vector de flujo específico molar de A con respecto a coordenadas estacionarias, kg/s · m^2 (mol lb/h · pie^2 mol g/s · cm^2)
$\bar{N}_A$ transferencia de masa de A con respecto a coordenadas estacionarias, kg mol/s (lb mol/h, g mol/s)
N_G, N_L, N_{OG}, N_{OL} número de unidades de transferencia, adimensional
N_{Gr} número de Grashof, definido por la Ecuación (4.7-4), adimensional
N_{Bi} número de Biot = hx_1/k, adimensional
N_{Gz} número de Graetz, definido por la Ecuación (4.12-3), adimensional
$N_{Gr,\delta}$ número de Grashof definido en la Ecuación (4.7-5), adimensional
N_{Ma} número de Mach definido por la Ecuación (2.1 l-l 5), adimensional
N_{Pe} número de Peclet = $N_{Re}N_{Pr}$, adimensional
$N_{Nu,\delta}$ número de Nusselt = $h\delta/k$, adimensional
N_{Fr} número de Froude = v^2/gL, adimensional
N_{Kn} número de Knudsen = $\lambda/2\bar{r}$, adimensional
N_{Nu} número de Nusselt = hL/k, adimensional
$N_{NU,x}$ número de Nusselt = $h_x x/k$, adimensional
N_{Pr} número de Prandtl = $c_p\mu/k$, adimensional

N_{Re} número de Reynolds = $Dv\rho/\mu$, adimensional
N'_{Re} número de Reynolds = $D_a^2 N\rho/\mu$, adimensional
$N_{Re,gen}$ número de Reynolds definido por la Ecuación (3.5-l 1), adimensional
$N_{Re,L}$ número de Reynolds = $Lv_\infty\rho/\mu$, adimensional
$N_{Re,x}$ número de Reynolds = $xv_\infty\rho/\mu$, adimensional
$N'_{Re,n}$ número de Reynolds definido por la Ecuación (3.5-20), adimensional
$N_{Re,p}$ número de Reynolds definido por la Ecuación (3.1-15), adimensional
$N_{Re,mf}$ número de Reynolds en la fluidización mínima definido por la Ecuación (3.1-35), adimensional
NE" número de Euler = $p/\rho v^2$, adimensional
N_{Se} número de Schmidt = $\mu/\rho D_{AB}$, adimensional
N_{Sh} número Sherwood $k'_c D/D_{AB}$, adimensional
N_P número de potencia definido por la Ecuación (3.4-2), adimensional
N_Q número de flujo, adimensional
N_{St} número de Stanton = k'_c/v, adimensional
NTU número de unidades de transferencia, adimensional
0 gasto kg/h, kg mol/h (lb_m/h)
P presión, N/m^2, Pa (lb_f/pie^2, atm, lb/plg^2 abs, mm Hg)
PA presión parcial de A, N/m^2, Pa (lb_f/pie^2, atm, lb/plg^2 abs, mm Hg)
P_{BM} media logarítmica de las presiones parciales de la fase inerte B en la Ecuación (6.2-21), N/m^2, Pa (lb_f/pie^2, atm, lb/plg^2 abs mm Hg)
Ph presión total en el lado de alta presión (alimentación), cm Hg, Pa (atm)
PI presión total en el lado de baja presión (sustancia permeada), cm Hg, Pa (atm)
PM permeabilidad en el sólido, m/s (pie/h)
P parámetro de la Ecuación (5.5-12), adimensional
P presión total, N/m^2, Pa (lb_f/pie^2, atm, lb/plg^2 abs mm H)
P potencia, W (pie · lb_f/s, hp)
P gasto, kg/h, kg/min; también número de fases en equilibrio
P vector de momento, kg · m/s (lb_m · pie/s)
P_A presión de vapor de A puro; N/m^2, Pa (lb_f/pie^2, atm, lb/plg^2 abs, mm Hg)
P'_A permeabilidad de A, cm^3 (TPE) · cm/s · cm^2 · cmHg
P_w permeabilidad de la membrana al disolvente, kg de disolvente/s · m . atm (lb_m/h · pie . atm)
P_m permeabilidad, kg mol/s · m · atm (lb mol/h · pie . atm)
P_M permeabilidad, m^3(TPE)/(s . m^2 C.S. . atm/m)
P'_M permeabilidad cm^3(TPE)/(s · cm^2 C.S. · atm/cm)
P''_M permeabilidad cm^3(TPE)/(s · cm^2 C.S. · cm Hg/mm)
4 velocidad de transferencia de calor, W (btu/h); también, energía añadida a un sistema, W(btu/h); también J (btu)
4 gasto, m^3/s (pie^3/s)
q vector de flujo específico de calor, W/m^3 (btu/h · pie^2)
4 velocidad de generación de calor, W/m^2 (btu/h . pie^3)
4 condición de allimentación definida por la Ecuación (ll .4-1 2)
q' gasto en la ley de Darcy, cm^3/s
4 kg de absorbatoikg de absorbente (lb_m/lb_m)
41 gasto del residuo, m^3/s (pie^3h, cm^3/s)
92 gasto de sustancia permeada, m^3/s (pie^3/h, cm^3/s)
q_A gasto de A en la sustancia permeada, cm^3 (TPE)/s, m^3/s (pie^3/h)
q_c carga del condensador, kJ/h, kW (btuih)
q_f gasto de la alimentación, cm^3(TPE)/s,m^3/s (pie^3/h)

$\bar{q}_{n,m}$ residuo definido por la Ecuación (4.5-l 1), K (_F)
q_o gasto de desechos, cm^3 (TPE)/s, m^3/s (pie^3/h)
q_p gasto de sustancia per-meada, cm^3 (TPE)/s, m^3/s (pie^3/h)
q_R carga del hervidor, kJ/h, kW (btu/h)
Q velocidad de circulación, m^3/s (pie^3/h)
Q cantidad absorbida, mol kg/m^2; también, pérdida de calor, W (btu/h); también, calor absorbido, J/kg (btu/lb_m, pie . lb_f/lb_m)
r radio, m (pie)
r_A velocidad de generación, kg $A/s \cdot m^3$ (lbm $A/h \cdot pie^3$)
r_H radio hidráulico, m (pie)
$(r_2)_{cr}$ valor crítico del radio, m (ft)
R velocidad de secado, $kg/h \cdot m^2$ ($lb_m/h \cdot pie^2$)
R desecho de soluto, adimensional
R razón de aumento de escala, adimensional
R radio, m (pie); también resistencia, K/W (h . °F/btu)
R parámetro en la Ecuación (5.5- 12), adimensional; también resistencia, ohms
R constante de los gases (véase el Apéndice A.l); también relación de reflujo = L_n/D, adimensional
R_A velocidad de generación, kg mol $A/s \cdot m^3$ (lb mol $A/h \cdot pie^3$)
R_b radio de la aguja, m (pie)
R_c radio del cilindro exterior, m (pie)
R_c resistencia de contacto, K/W (h . °F/btu)
R_g resistencia de la capa de gel, $s \cdot m^2$. atm/kg
R_m resistencia de medio filtrante, m^{-1} (pie^{-1})
R_i tasa de generación de i, kg/s (lb_m/h)
R_x componente x de la fuerza, N(lb_f , dina)
s constante de compresibilidad, adimensional
s factor de renovación de la superficie media, s^{-1}
S factor de forma de conducción, m (pie)
S solubilidad de un gas, m^3 soluto (TPE) m^3 sólido · atm [CC soluto (TPE)/cc sólido · atm]
S distancia entre centros, m (pie); también, velocidad de flujo de vapor, kg/h, kg molk (lb_m/h)
S volumen de la solución de alimentación, m^3 (pie^3)
S área de sección transversal de una torre, m^2 (pie^2); también factor de empobrecimiento, $1/A$
S_0 superficie específica, m^2/m^3 volumen (pie^2/pie^3 volumen)
S_p área superficial de la partícula, m^2 (pie^2)
t espesor de la aleta, m (pie)
t tiempo, s, min, h
t temperatura, K, °C(°F)
t grosor de la membrana, cm m (pie)
t_b tiempo de punto de ruptura, h
t_t equivalente de tiempo a capacidad total, h
t_T tiempo de mezcla, s
T_u equivalente de tiempo a la capacidad usable hasta el tiempo de punto de ruptura, h
T momento de torsión, $kg \cdot m^2/s^2$
T temperatura, K, °C (°F, °R); también velocidad de alimentación, ton/min
T' desviación de la temperatura respecto a la temperatura media ($\bar{T}$, K (“F)

$\bar{u}$ velocidad promedio, **m/s (pie/s)**

U coeficiente total de transferencia de calor, **W/m^2 · K (btu/h · pie^2 · °F)**

U energía interna, **J/kg (btu/lb$_m$)**

v velocidad, **m/s (pie/s)**

v vector de velocidad, **m/s (pie/s)**

v_A velocidad de A con respecto a coordenadas estacionarias, **m/s (pie/s, cm/s)**

v_{Ad} velocidad de difusión de A con respecto a la velocidad molar promedio, **m/s (pie/s, cm/s)**

v_M velocidad molar promedio de una corriente con respecto a coordenadas estacionarias, **m/s (pie/s, cm/s)**

v_H volumen húmedo, **m^3/kg** aire seco **(pie^3/lb$_m$** aire seco)

v_t velocidad terminal de sedimentación, **m/s (pie/s)**

v^+ velocidad adimensional definida por la Ecuación (3.10-34)

v^* velocidad definida por la Ecuación **(3.10.42),** adimensional

v'_x desviación de la velocidad en la dirección x respecto a la velocidad media $\bar{v}_x$, **m/s (pie/s)**

v' velocidad **supeficial** basada en la sección transversal del tubo vacío, **m/s** (pie/s, **cm/s)**

v'_{mf} velocidad de fluidización mínima, **m/s (pie/s)**

v'_t velocidad terminal de asentamiento, **m/s (pie/s)**

V_A volumen molar del soluto, **m^3/kg** mol

V gasto, **kg/h,** mol **kg/h, m^3/s (lb$_m$/h, pie^3/s)**

V volumen, **m^3 (pie^3, cm^3);** también, volumen específico, **m^3/kg (pie^3/lb$_m$)**

V velocidad, **m/s, (pie/s);** también, cantidad total, kg, mol kg (Ib,)

V' **gaso** de inertes, **kg/h, kg/s,** kg **mol/h (lb$_m$/s)**

w_A fracción de masa de A

W trabajo efectuado sobre los alrededores, W (pie . **lb$_f$/s)**

W agua libre, kg (Ib,)

$\dot{W}_s$ trabajo mecánico axial efectuado sobre los alrededores, W **(pie · lb$_f$/s)**

W gasto, **kg/h,** kg **mol/h (lb$_m$/h)**

W trabajo efectuado sobre los alrededores, **J/kg** (pie · **lb$_f$/lb$_m$)**

W peso de sólido húmedo, kg **(lb$_m$)**

W altura o anchura, m (pie); también, potencia, W (hp); también, masa de torta seca, kg **(lb$_m$)**

W ancho de la pala, m (pie)

W_S trabajo mecánico axial efectuado sobre los alrededores, **J/kg** (pie · **lb$_f$/lb$_m$)**

W_p trabajo axial desarrollado sobre una bomba, **J/kg** (pie · **lb$_f$/lb$_m$)**

x distancia en la dirección, x, m (pie)

x fracción de masa o fracción mol; también, fracción remanente de humedad **original**

x_A fracción mol de A, adimensional

x'_B razón de fracción mol de inertes, mol B**/mol** inertes

x_f fracción molar de A en la alimentación, adimensional

x_o fracción molar de A en el desecho, adimensional

x_{oM} fracción molar de la concentración mínima de desecho, adimensional

x_{BM} media logarítmica de las fracciones mol de la fase B, inerte o estacionaria, definida por la Ecuación (6.3-4)

$(1- x_A)_{*M}$ media logarítmica de las fracciones mol de inertes, definida por la Ecuación (10.4-27)

$(1-x_A)_{iM}$ media logarítmica de las fracciones mol de inertes, definida por la Ecuación (10.4-7)

X tamaño de partícula, m (pie); también, parámetro = $\alpha t/x_1^2$, adimensional

x parámetro = Dt/x^2, adimensional; también, humedad libre, kg agua/kg sólido seco (lb agua/lb sólido seco)

Y distancia en la dirección y, m (pie); también fracción mol

y_A fracción de masa de *A* o fracción mol de A; también, kg *A*/kg solución (lb *A*/lb solución)

y_{BM} media logarítmica de las fracciones mol de la fase *B*, inerte o estacionaria, definida por la Ecuación (7.2-l 1)

y^+ número de Reynolds adimensional definido por la Ecuación (3.10-35)

y_i fracción molar de *A* en la sustancia permeada a la salida de la corriente de residuo, adimensional

y_p fracción molar de *A* en la sustancia permeada, adimensional

$(y-y_i)_M$ media logarítmica de la fuerza impulsora, definida por la Ecuación (10.6-24)

$(1-y_A)_{iM}$ media logarítmica delas fracciones mol de inertes, definida por la Ecuación (10.4-6)

Y relación de temperaturas definida por la Ecuación (4.10-2), adimensional

Y fracción de cambio sin verificarse en la Tabla 5.3-l o en la Ecuación (7. 1-12)

Y factor de corrección por expansión definido en las Ecuaciones (3.2-9) y (3.2-l 1)

Z distancia en la dirección z, m (pie); también, altura de torre, m (pie)

Z intervalo de temperaturas para el cambio 10:1 de D_T, °C ("F)

Z Altura, m (pie); también, relación de temperaturas en la Ecuación (4.10-2)

Letras griegas

a factor de corrección = 1.0 para flujo turbulento y $\frac{1}{2}$ para flujo laminar

a absortividad, adimensional; también, relación de flujos específicos = 1 + N_B/N_A

a difusividad térmica = $k/\rho c_p$, m^2/s (pie^2/h, cm^2/s)

α, α_{AB} volatilidad relativa de *A* con respecto a *B*, adimensional

a resistencia específica de torta, m/kg (pie/lb_m)

a ángulo, rad

a factor de corrección de velocidad de la energía cinética, adimensional

*a** factor de separación ideal = P'_A/P'_B, adimensional

α_G absortividad del gas, adimensional

α_T difusividad térmica de remolino, m^2/s (pie^2/h)

β polarización de la concentración, razón de la concentración de sal en la superficie de la membrana a la concentración de sal en la corriente de alimentación general, adimensional

β factor de corrección de la velocidad de momento, adimensional

β coeficiente volumétrico de expansión, $1/K$ (1/°R)

γ coeficiente de viscosidad, N . $s^{n'}/m^2$ ($lb_m/pie \cdot s^{2-n'}$)

γ relación de capacidades caloríficas = c_p/c_v, adimensional

Γ gasto, kg/s . m ($lb_m/h \cdot pie$)

Γ concentración de propiedad, cantidad de propiedad/m^3

δ difusividad molecular, m^2/s

δ espesor de capa límite, m (pie); también, distancia, m (pie)

δ constante en la Ecuación (4.12-2), adimensional

A	diferencia; también diferencia de flujo en el punto de operación, kg/h (lb_m/h)
ΔT_a	disminución aritmética de temperatura, K, °C (°F)
ΔT_{lm}	media logarítmica de temperaturas como fuerza impulsora, K, °C (°F)
AH	cambio de entalpía, J/kg, kJ/kg, kJ/kg mol (btu/lb_m, btu/lb mol)
V	criterio de diseño para esterilización, adimensional
AP	disminución o caída de presión, N/m^2, Pa (lbf/pie^2)
ε	parámetro de rugosidad, m (pie); o fracción de espacios vacíos, adimensional
ε	emisividad, adimensional; también, fracción de volumen, adimensional
ε_M	difusividad de masa de remolinos, m^2/s (pie^2/h, cm^2/s)
E	eficiencia del intercambiador de calor, adimensional emisividad del gas, adimensional
ε_G	emisividad del gas, adimensional
ε_t	difusividad de remolino de momento, m^2/s (pie^2/s)
ε_{mf}	fracción de espacios vacíos en la fluidización mínima, adimensional
η_f	eficiencia del álabe, adimensional
η_t	viscosidad de remolino turbulento, Pa . s, kg/m · s (lb_m/pie · s)
η	eficiencia, adimensional
θ	ángulo, rad
θ	parámetro de la Ecuación (11.7-19)
θ	corte o fracción de alimentación permeada, adimensional
θ*	fracción permeada hasta un valor de $x = 1 - q/q_f$, adimensional
λ	longitud de onda, m (pie)
λ	calor latente, J/kg, kJ/kg (btu/lb_m); también, trayectoria libre media, m (pie)
λ_{Ab}	calor latente de A en el punto de ebullición normal, j/kg, kJ/kg mol (btu/lb_m)
μ	viscosidad, Pa · s, kg/m . s, N . s/m^2 (lb_m/pie . s, lb_m/pie . h, cp)
μ_a	viscosidad aparente, Pa · s, kg/m · s (lb_m/pie · s)
ν	difusividad del momento lineal μ/ρ, m^2/s (pie^2/s, cm^2/s)
π_1	grupo adimensional, adimensional
π	presión osmótica, Pa, N/m^2 (lb_f/pie^2, atm)
ρ	densidad, kg/m^3 (lb_m/pie^3); también, reflectividad, adimensional
σ	constante, 5.676×10^{-8} W/m^2 . K^4 (0.1714×10^{-8} btu/h . pie^2 · $°R^4$); también, diámetro de colisión, Å
Σ	valor sigma para centrífuga, m^2 (pie^2)
τ_{zx}	flujo específico del momento lineal dirigido a x en la dirección z, (kg . m/s)/s · m^2 o N/m^2 (lb_f/pie^2, dyn/cm^2)
τ	esfuerzo cortante, N/m^2 (lb_f/pie^2, $dina/cm^2$)
τ	sinuosidad, adimensional
ϕ	potencial de velocidad, m^2/s (pie^2/h)
ϕ	ángulo rad; también, parámetro de asociación, adimensional
ϕ	coeficiente osmótico, adimensional
ϕ_S	factor de forma de la partícula, adimensional
Ψ_z	flujo específico de propiedad, cantidad de propiedad/s · m^2
ψ	factor de corrección, adimensional
ψ	función de corriente, m^2/s (pie^2/h)
ψ_p	parámetro defmido por la Ecuación (14.3-13), adimensional
ω	velocidad angular, rad/s
ω	ángulo sólido,
$\Omega_{D,AB}$	integral de colisión, adimensional

Índice

A

Absorción(véase *también* Humidificación, procesos de; Etapas, procesos por)
coeficientes de transferencia de masa en empaque: 662-64,686-88,703-5
cálculo por etapas, 653-60
de película, 662-64,686-88,703-5
empobrecimiento, 686-88
generales, 667-70,687
composiciones en la interfase, 662-65
ecuaciones analíticas de Kremser, 659-60
equilibrio gas-líquido, 652-53
equipo para, 679-82
factores de, 660
introducción, 650-51
líneas de operación, 682-87
media logarítmica de la fuerza impulsora, 69 1
métodos de diseño de torres empacadas:
método general, 685-89
método por unidades de transferencia, 695-96
para mezclas gaseosas concentradas, 698-99
para mezclas gaseosas diluidas, 689-91
número de platos teóricos, 683
relación mínima líquido-gas, 686-687
relación óptima líquido-gas, 686-87
transferencia de masa en la interfase, 661-70
Absortividad, 310-l 1,317-18
Adiabática, temperatura de saturación, 590-9 1
Adiabático, flujo compresible, 119
Adsorbentes *(véase* Adsorción)
Adsorción:
adsorbentes:
aplicación de, 773
propiedades fisicas, 773-74
tipos, 774
equilibrio en:
isoterma de Freundlich, 774-75
isoterma de Langmuir, 774-75
isoterma lineal, 774-75
por proceso en lotes, 776
por procesos de lecho fijo:
ciclos de adsorción, 783-84
curvas de ruptura o rompimiento, 778-79
métodos de diseño, 779-82
modelo básico, 782-83
perfiles de concentración, 777-78
intercambio de iones *(véase* Procesos de intercambio de iones)
Agitación *(véase también* Mezclado):
agitadores sin movimiento, 173
consumo de potencia, 164-67
de fluidos no newtonianos, 185-86
deflectores para, 163-64
diseño estándar de agitación, 164
equipo para, 16 1-65
escalamiento en la, 167-70
número de flujo en, 172
objetivo de la, 161
patrones de flujo, 163-64
sistemas especiales para agitación, 172-73
tasa de circulación en la, 172
tiempo de mezclado en la, 170-72
tipos de agitadores, 161-65
transferencia de calor en la, 336-39
Aire, propiedades fisicas del, 955
Agua:
estados físicos del, 584-85
propiedades del, 943-52
Alimentos, propiedades físicas de, 978-80
Análisis de capacidad global, 371-72

Capacidad calorífica:
datos para alimentos, 978-79
datos para gases, 20, 955, 958, 962-63
datos para líquidos, 964, 968
datos para sólidos, 970, 972
datos para el agua, 945, 946
discusión, 18- 19
Capas límite *(véase también* Flujo turbulento):
ecuación de continuidad para, 217
ecuación de energía para, 414-15
ecuación de momento lineal, 225-28
ecuación de transferencia de masa para, 532-34
estelas en, 131, 216-17
flujo laminar en,217-19
separación de, 13 1, 2 16
teoría para transferencia de masa en, 535-36
Capilares (véase Sólidos porosos),
Centrífugas (véase también Sedimentación; Separación por centrifugación):
de tazón de discos, 924-25
escalamiento, 92 1
tubular, 924
valor sigma, 922
Cgs, sistema de unidades, 6
Chapman-Enskog, teoría de, 440-42
Chilton-Colbum, analogías de, 490
Ciclones:
cilindros horizontales externos, 300-l
equipo, 927-28
superficies verticales externas, 296-99
teoría de los, 927-28
Cilindros:
coeficiente de resistencia al flujo para los, 132, 33
coeficientes de tranferencia de calor, 281-83, 622
coeficientes de transferencia de masa, 503
flujo a través de baterías, 282-83
Cinética, energía:
definición de, 66
factor de corrección de velocidad para, 69-70, 180
Clasificador Spitzkasten, 9 14
Clasificadores *(véase también* Precipitación y sedimentación):
centrífugos, 9 18-2 1
por sedimentación diferencia1,907-9,912-14
Coeficiente de distribución en transferencia de masa, 478-79,527
Coeficiente de resistencia al flujo:
definición, 13 l-32,227
en la superficie, 130-32
para cilindms largos, 132-34
para discos, 132-34
para placas planas,131-32,217-19
para una esfera, 131-34,215,901-5,908-9
por la forma, 13 l-32,2 15
Coeficientes de calor por convección (véase Coeficientes de transferencia de calor)
Coeficientes de transferencia de masa por convección *(véase* Coeficientes de transferencia de masa)
Compresores:
ecuaciones para, 158-60
equipo para, 158
Condensación:
deducción de la ecuación para la, 296-301
mecanismos de, 296
Condensadores para evaporación:
métodos de cálculo, 571
tipo de contacto directo, 570-71
tipo superfícial, 296-99
Conducción bidimensional, 263-66
Conductividad térmica:
definición, 244-46
de alimentos, 980
de gases, 244-45,955,957,964
de líquidos, 246,969
de sólidos, 245-46,971-72
del agua, 945,95 l-52
Congelamiento de alimentos y materiales biológicos, 404-7
Constante gravitacional, 940
Constante *R* de la ley de los gases, 10, 939
Constantes fundamentales, 939-42
Contenido crítico de humedad, 599
Continuidad, ecuación de:
para mezclas binarias, 508- 10
para capas limitantes, 2 17-l 8
para fluidos puros, 50-54,164-l 65,167- 169,176
Convección, transferencia de calor por *(véase también* Coeficientes de transferencia de calor; Convección natural):
discusión general, 243,246-47,255-56
mecanismo físico de la, 265-67
Coordenadas cilíndricas, 192, 198,410
Coordenadas esféricas, 192, 411
Coordenadas triangulares, 786-87
Coriolis, fuerza de, 199

Cristales *(véase también* Cristalización):
distribución del tamaño de las partículas, 82425
tipos, 816
velocidad de crecimiento, 823-24
Cristalización *(véase también* Cristalizadores):
balances de calor, 819
balances de materiales, 817
calor de la solución, 819
distribución del los cristales por el tamaño de sus partículas, 824-25
efecto del tamaño de los cristales en su solubilidad, 823
geometría de los cristales, 815-16
Mc Cabe AL, ley de, 824
Miers, teoría cualitativa de, 822-23
modelos para, 825
objetivo, 815
sobresaturación, 820
solubilidad (equilibrios de fase), 546, 8 16- 17
teorías de la nucleación, 822, 825
transferencia de masa en, 824
velocidad de crecimiento de los cristales, 822-24
Cristalizadores *(véase también* Cristalización):
al vacío con circulación de magma, 821
clasificación, 820-2 1
con raspadores de superficie, 820-21
cristalizador-evaporador con circulación de líquido, 821
de tanque, 820
Cuadrados curvilineales, método de los, 263-64
Cubos, transferencia de masa a, 500
Cuerpo de línea fluida (aerodinámico), 13 1

D

Dalton, ley de, 12
Darcy, ley de, 140-41
Densidad:
de alimentos, 980
de metales, 972
de sólidos, 971
del **agua, 944**
Deshumidificación, 284,670-71
Destilación *(véase también* Destilación por componentes múltiples; Equilibrio vapor-líquido):
condensadores parciales, 740
condiciones de alimentación y localización, 726-29,763-64
corriente lateral, 738-39
corriente simple, 72 l-22
de contacto en una sola etapa, 715
de equilibrio o instantánea, 757-58
derrame mola1 constante, 724-25
diferencial o por lote simple, 718-20
eficiencia de platos:
de Murphree, 74 l-43
de punto, 742
general, 74 l-43
introducción, 740-41
tipos de platos, 680-82
Fenske, ecuación de, 73 l-33,758
introducción y flujo del proceso, 716,722-23
inyección directa de vapor, 737-38
línea de operación de empobrecimiento, 726-27
línea de operación de enriquecimiento, 724-26
McCabe-Thiele, método de, 723-40
método de entalpía-concentración:
datos benceno-tolueno, 747
datos de equilibrio, 746, 976
diseño de diagrama para, 743-46
ecuaciones de empobrecimiento, 748
ecuaciones de enriquecimiento, 746-48
ejemplo, 749-50
número de etapas, 75 1, 753
Ponchon-Savarit, método de, 753
relación de reflujo:
de operación, 733
mínimo, 732-34,762-63
total, 73 l-33,758
torre de empobrecimiento, 735-36
torres de enriquecimiento, 737
torres empacadas, 68 l-82
volatilidad relativa, 7 17- 18,755
Destilación de multicomponentes:
componentes clave, 758
datos de equilibrio para, 755-56
destilación instantánea, 757-58
distribución de otros componentes, 758-59
introducción, 753-55
número de etapas:
método corto, 763-64
ubicación del plato de alimentación, 763
número de torres, 753-54
punto de ebullición, 755-57
punto de rocío, 756
reflujo mínimo (ecuación de Underwood), 762
reflujo total (ecuación de Fenske), 758
Destilación en lotes, 719-20
Destilación por lote simple o diferencial, 7 19-20
Diálisis:
equipo para, 837

hemodiálisis, 837-38
teoría para la, 834-36
uso de, 833-34,837
Diámetro crítico, 919-20
Diámetro equivalente en:
en flujo de fluidos, 113
en transferencia de calor, 270
Difusión *(véase también* Estado estacionario, difusión en; Estado no estacionario, difusión en):
a una esfera, 436-37
caso general para A y B, 432-33
con área variable de sección transversal, 436-39,45556
con reacción química, 5 10- 14
contradifusión equimolar, 430-3 1,510
de Knudsen, 518-19
del gas A a través de B en reposo, 433-36,510-l 1
ecuaciones de permeabilidad, 457-59
en capilares, 5 17-24
en gases, 430-43
en geles biológicos, 453-55
en líquidos, 444-46
en lixiviación, 802-3
en multicomponentes:
gases, 5 16- 17
líquidos, 448
en secado, 599,614-15
en sólidos porosos, 459-61,517-l 8,523-24
en sólidos:
clasificación, 455
Fick, ley de, 455-57
en solutos biológicos, 450-53
estado estacionario, en dos dimensiones, 461-65
Fick, ley de, 5 1,427-28,506-8,520
introducción a la, 50-52,425-27
molecular, 5 19
momento lineal, 47-52,425-27
similitud en la transferencia de masa, calor y transición, 520-21
velocidades en la, 432
y bloqueo por proteínas, 452-53
y convección, 432-33
y ecuación de continuidad, 508-10
Difusión biológica
en geles, 453-55
en soluciones, 450-53
Difusión en estado estacionario *(véase también* Difusión; Difusividad; Métodos numéricos):
bidimensional, 461-65
en gases, 430-39
en líquidos, 444
en sólidos, 455-61
en soluciones biológicas y geles, 450-55
Difusión en estado no estacionario *(véase también* Métodos numéricos):
condiciones límite para, 476-79
ecuación básica para, 474-76
ecuaciones analíticas para platos planos, 476-77
en lixiviación, 801-3
en tres direcciones, 481
gráfica para diversas geometrías,479
parámetros para transferencia de calor y masa, 479
y reacción química, 5 14- 15
Difusión en muhicomponentes, 448,5 16- 17
Difusión en región de transición, 520-22
Difusividad (masa):
de Knudsen, 518-19
determinación experimental:
en gases, 436,439-40
en geles biológicos, 453-54
en líquidos, 446-48
en soluciones biológicas, 451
efectiva:
en capilares, 520-2 1
en sólidos porosos, 459-60, 523-24
en geles biológicos, 453-55
en solutos biológicos, 45 l-53
estimación de la:
en gases, 440-42
en líquidos, 446-48
para solutos biológicos, 453
molecular y remolino, 4 17- 18
transición, 5 19-2 1
valores experimentales:
para gases, 440-42
para geles biológicos, 453-55
para líquidos, 448
para solidos, 458-59
para solutos biológicos, 45 l-53
Difusividad (momento lineal), 4 17- 18
Difusividad (térmica), 369,406-7,417-l 8
Dilatantes, fluidos, 175
Discos, coeficiente de arrastre para, 132-33
Dodge, triturador de, 932
Dühring, líneas de, 556-57

E

Ebullición, diagramas de punto de, 712-14
Ebullición, elevación del punto de, 556-57
Ebullición:
  de película, 294
  mecanismos físicos, 292-93
  nucleada, 293-94
  por convección natural, 292-93
  temperatura de, 12,755-58
Ecuación general del transporte molecular:
  para estado estacionario, 47-48
  para estado no estacionario, 49-50
  para transferencia de calor, 241-43
  similitud entre momento lineal, calor y masa, 47-52,425-27
Emisividad:
  definición, 3 ll - 12,3 17-l 8
  valores de, 973
Empaque, 68 l-82
Empobrecimiento (véase Absorción)
Energía interna, 2 1, 67
Energía potencial, 66-67
Energía total, 66
Energía, balances de:
  diferencial, 407-l 1
  en capa límite, 413-16
  en flujos comprimibles, 115- 19
  mecánica, 73-78
  total, 66-70
Enfriamiento de alimentos y materiales biológicos, 401-3
Enfriamiento por agua (véase Humidificación, procesos de)
Entalpía de mezclas aire-vapor de agua, 588,675-77
Entalpía, 19,67
Entalpía-concentración, diagrama de:
  en destilación, 743-44
  en evaporación, 557-58
Entalpía-concentración, método de la (véase destilación),
Equilibrio gas-líquido:
  acetona-agua, 975
  amoniaco-agua,975
  dióxido de azufre-agua, 652-53,974
  entalpía-temperatura, 675-77
  Henry, ley de, 652-53,973
  metanol-agua, 974
  regla de las fases, 652
Equilibrio gas-sólido, 455-59
Equilibrio líquido-líquido:
  acetona-agua-metil isobutil cetona, 787-88,977
  ácido acético-agua-isopropil éter, 977
Equilibrio líquido-sólido, 807- 18
Equilibrio o destilación instantánea, 7 18- 19
Equilibrio sólido-líquido, 807-9
Equilibrio vapor-líquido:
  agua-benceno, 766
  agua-etilanilina, 766
  benceno-tolueno, 7 13- 14
  cálculos utilizando la ley de Raoult, 712- 13
  componentes múltiples, 755-57
  diagramas de punto de ebullición, 712-14
  entalpía-concentración, 743-46
  etanol-agua, 976
  gráficasxy,713-16
  mezclas azeotrópicas, 7 14
  n-heptano-etilbenceno, 766
  n-heptano-n-octano, 768
  n-hexano-n-octano, 765
  n-pentano-n-heptano, 720
  regla de las fases, 712, 720
Erbar-Maddox, correlación de, 762-63
Esferas:
  coeficiente de resistencia al flujo para, 130-33, 214
  difusión a, 436-37
  ley de Newton para, 902
  ley de Stoke para, 133,215,902
  transferencia de calor a, 281
  transferencia de masa a, 497-98, 503-6
  velocidad de sedimentación de, 902
Esfuerzo cortante *(véase también* Balance del momento lineal):
  componentes, 195-97
  definición, 52-53
  ecuaciones de Euler, 210
  en flujo laminar en placa plana, 2 18
  en flujo laminar en tuberías, 91
  fluidos ideales, 2 10
  flujo potencial, 2 ll - 14
  función de chorro, 209-l 0
  normal, 193
Espasante, 794-95
Espesadores, 805-6,9 ll - 15 *(véase también* Asentamiento y sedimentación)
Espesor crítico de aislamiento, 260-61
Estática en los fluidos, 39-47
Esterilización de materiales biológicos:
  cinética de la tasa de exterminio térmico, *635-37,641*
  efectos en los alimentos, 642
  introducción, 634-35
  pasteurización, 64 l-42
  tiempos de proceso térmico, 637-39
Etapas, procesos por *(véase también* Absorción;

Destilación;
Extracción liquido-líquido; Lixiviación):
a contracorriente con etapas múltiples, 655-57
absorción, 683-95
destilación, 72 l-63
ecuaciones analíticas para, 659-60
en una sola etapa, 653-54,715,789-91, 809
extracción líquido-líquido, 792-99
lixiviación, 809-I 2
Euler:
ecuaciones de, 210
número de, 229
Evaporación *(véase también* Evaporadores):
caídas de temperatura en, 560-61
cálculos para efecto múltiple, 560-63
cálculos para efecto simple, 553-54
capacidad en efecto múltiple, 561-62
coeficientes de transferencia de calor para, 551-52
de materiales biológicos, 57 l-72
Diihring, líneas de, 556-57
economía de vapor, 550
efecto simple, 549-50
efectos de las variables de proceso en, *545-46,555-56*
elevación del punto de ebullición en la, 556-57
gráficas entalpía-concentración, 557-58
métodos de operación:
efecto múltiple con alimentación en retroceso, 550-51
efecto múltiple con alimentación hacia adelante, *550*
efecto múltiple con alimentación paralela, 551
recompresión de vapor:
mecánica, 573-74
térmica, 574
Evaporadores *(véase también* Evaporación):
condensadores para, 570-71
de circulación forzada, 548-49
de marmita abierta, 547
de película con agitación, 549
de película descendente, 548-49
de tubos cortos, 547
de tubos horizontales con circulación natural, *547*
de tubos verticales largos, 448
tipo vertical con circulación natural, 547
Extracción *(véase* Extracción líquido-líquido; Lixiviación)
Extracción de solventes *(véase* Extracción líquido-líquido
Extracción líquido-líquido:
a contracorriente en etapas múltiples:
balance general de materiales, 795
líquidos inmiscibles, 799
número de etapas, 796-98
velocidad mínima de disolución, 789-99
de contacto con equilibrio en una sola etapa, 791
equipo para:
columna de Kan-, 792
mezclador-sedimentador, 791-92
torres con agitación, 792
torres de platos, 792-93
torres de rociado, 792-93
torres empacadas, 792-93
objetivo, 785-86
regla del brazo de palanca 789
relaciones de equilibrio:
acetona-agua-metil isobutil cetona, 977
ácido acético-agua-isopropil éter, 787-88,918, 977
coordenadas rectangulares, 787
coordenadas triangulares, 786-87
regla de las fases, 786
tipos de diagramas de fase, 786-88
tipos y clases de operación, 791-92
Coeficientes de transferencia de calor líquido-metal, 273-74
Extractor de lecho fijo, 805-6

F

Factores de conversión, 850-853
Fenske, ecuación de, 732-33,758
Fermentación, transferencia de masa en la, 503-6
Fick, ley de *(véase también* Difusión):
formas, 507-8
'para estado estacionario, 427-28
para estado no estacionario, 474-76
Filtración *(véase también* Filtración centrífuga; Filtros):
a presión constante, 894-95
a velocidad constante, 899-900
ayudas de, 890-91
caídas de presión, 891-92
contínua, 898-99
lavado, 887-89,896-97
medios, 890
objetivo, 885
resistencia específica de la torta, 892-93
teoría básica, 894-95
tiempo del ciclo de, 896-97
torta comprimible, 893
Filtración centrífuga:
equipo para, 926

teoría para, 925-26
Filtrar, ayudas para, 890-9 1
Filtrar, medios para, 890
Filtros *(véase también* Filtración)
clasificación, 886
de hoja, 887-90
de lecho, 886
de marcos y placas, 887
rotatorios continuos, 889-90
Fluidos ideales, 209-l 4
Fluidos newtonianos, 55-56, 174
Fluidos no newtonianos:
agitación de, 185-86
constantes de flujo-propiedad, 177-78
flujo laminar para, 176-8 1
flujo turbulento para, 18 1-82
pérdidas por fricción en los accesorios, 180-8 1
perfiles de velocidad para, 182-83
tipos de, 174-76
transferencia de calor en, 334-36
viscómetro rotatorio, 183-85
Flujo capilar, en secado, 60 1,6 15- 18
Flujo compresible de gases:
ecuación diferencial básica, 116
en condiciones adiabáticas, 119
en condiciones de flujo máximo, ll 8- 19
en condiciones isotérmicas, 116- 18
número Mach para, 119
Flujo deslizante, 2 14- 15
Flujo específico (masa):
factores de conversión para, 942
relaciones, 5 19,52 1
tipos de, 506-8
Flujo laminar:
caída de presión en, 96-100
capa límite para, 2 17-l 8,225-28
definición, 56-58
en placa plana, 2 15- 19
factor de corrección de energía cinética, 68-70, 180
factor de corrección del momento lineal para, 83-84
fluidos no newtonianos en, 176-81
Hagen-Poiseuille, ecuación para, 92, 1 OO, 204
número de Reynolds para, 57-58, 99
perfil de velocidad en tuberías para, 92, 96-97
transferencia de masa en, 49 l-953
Flujo no viscoso (véase Flujos ideales)
Flujo potencial, 2 1 O-l 1
Flujo turbulento *(véase también* capas límite):
desviación por las velocidades en, 219-20
discusión, 56-57,2 19-20
en placas planas, 215-16,226-28
Prandtl, longitud de mezclado:
difusión turbulenta en, 427
perfil de velocidad en, 96-97,223-25
en transferencia de calor, 4 17- 18
en transferencia de masa, 534-35
en transferencia de momento lineal, 22 l-22, 417-18
en tuberías, 58,96,97, 100-l
esfuerzo cortante turbulento en, 220-2 l
Reynolds, número de, 58
separación en capas límite, 216
teoría para capas límite:
transferencia de calor, 4 17
transferencia de masa, 532-34
transferencia de momento lineal, 2 17- 19,225-27
velocidad máxima en, 96-97
Flujómetros (véase medidores de orificio; medidor de tubos Pitot; medidor Venturi; Vertederos),
Flujos específicos de transferencia de masa, 506-7
Flujos, separación de, 216
Forma, factores de la, en conducción, 265-66
Forma, factores de la, en partículas, 139-40
Fourier, ley de, 5 1,24 1,243-44,411,426 (véase también Transferencia de calor por conducción)
Fracción de huecos (lechos empacados y fluidizados), 134-35,141,500
Fraccionación (véase Destilación),
Freundlich, isoterma de (véase Adsorción),
Fricción de los fluidos:
efecto de la rugosidad en, 101
efecto de la transferencia de calor en la, 105-6
en accesorios y válvulas, 106-8
en el flujo de gases, 105
en la entrada de un tubo, 114- 15
factor de la fricción en tuberías, 99- 106
gráfica para fluidos newtonianos, 102
gráfica para fluidos no newtonianos, 18 l-82
para canales no circulares, 113
para fluidos no newtonianos, 174-83
por contracción repentina, 107
por expansión repentina, 87-88, 106-7
Fricción en la superficie, 130-3 1,490-g 1
Fricción, factor de *(véase* Fricción de fluidos)
Froude, número de, 229
Fuller *et* al., ecuación de, 442
Función de chorro, 209-10

G

Gas ideal, volumen de, 939
Gas, procesos por permeación de membrana, concentración de rechazo mínimo, 849

equipo para, 840-4 1
factor de separación, 845
permeabilidad en, 839-40
resistencias en serie en los, 838-39
teoría de:
introducción a, 843
mezcla de componentes múltiples, 850-52
modelo de contra-corriente, 860-63
modelo de flujo cruzado, 853-57
modelo de mezclado completo, 844-49
modelo paralelo, 863
tipos de membranas, 839-40
variables de proceso para, 863-65
Gas-líquido, procesos de separación (véase Absorción; Etapas procesos por; Humiclificación, procesos de)
Gases, radiación de, 330-33
Gases:
ecuaciones para, 10- 12
propiedades físicas de los,953-64,973-75
Grashof, número de, 286
Gravedad, separador por, 46-47
Gumey-Lurie, gráficas de, 379,382,385

H

Hagen-Poiseuille, ecuación de, 92, 1 OO, 204
Heisler, gráficas de, 380,383,386
Hemodiálisis, 837-38
Henry, ley de:
datos para gases, 973
ecuación, 652-53
Hielo, propiedades del, 945-46,978
Hildebrandt, extractor de, 806
Homogeneidad dimensional, 7
Humedad *(véase también* Humidificación, procesos de,)
calor húmedo, 587
definición, 585
ecuaciones, 585-86
entalpía total, 588
gráficapara, 588-89
porcentaje, 586
relativa, 586
saturada, 586
temperatura adiabática de saturación, 590-592
temperatura de bulbo húmedo, 591-93
temperatura de punto de rocío, 587
volumen húmedo, 587
Humedad *(véase también* Secado)
combinada y sin combinar, 595-96
difusión de, 600-1,613-18
equilibrio para aire-sólidos, 595-96
flujo capilar de, 600- 1,6 15- 18
libre, 596
Humedad combinada, 595-96
Humedad de equilibrio, 594-96
Humedad libre, 596
Humedad sin combinar, 595-96
Húmedo, volumen, 587-88
Humidificación, procesos de *(véase también* Humedad):
definición, 584
deshumidificación, 584,657-58,670-71
enfriamiento por agua:
altura de una torre empacada, 676, 678-92
flujo mínimo de aire, 678
líneas de operación, 672-73
métodos de cálculo para, 67 l-79
equipo para, 670-7 1
relaciones de equilibrio, 675-76
temperatura adiabática de saturación, 590-591

I

Incrustación, factores de, 309- 10
Intercambiadores *de* calor *(véase también Coefi*cientes de transferencia de calor):
de flujo cruzado, 302-3,305
de superficie extendida, 340-45
de superficie rugosa, 339-40
de tubería doble, 301
de tubo y coraza, 301-2
diferencia logarítmica de temperatura media, *275-76,303-5*
efectividad de, 306-T
factores de corrección de temperatura, 303-5
factores de incrustamiento, 309- 10
Intercambiadores de calor con raspadores de superficie, 339-40
Intercambiadores de superficie aletada:
coeficientes totales para, 344-45
eficiencia de, 34 l-43
tipos, 340-4 1
Iones, procesos de intercambio *de (véase también* Adsorción):
diseño de, 785
introducción, 784
relaciones de equilibrio, 784-85
tipos, 81
Isotérmico, flujo comprimible, 116- 18

J

J, factor, 478,488,490

K

K, factores (destilación), 755-56
Kick, ley de la trituración de, 930-31
Kirchhoff, ley de, 3 11-l 2,3 18
Kirkbride, método de, 763
Knudsen, difusión de, 518-19
Knudsen, número de, 5 19
Kremer, ecuaciones de, para procesos por etapas, 659-60

L

Langmuir, isoterma de (véase Adsorción),
Laplace, ecuación de:
  en transferencia de calor, 348-49
  para flujo potencial, 212
  para función de chorro, 23
Lavado (véase Filtración; Lixiviación)
Le Bas, volúmenes molares, 448
Lechos empacados:
  área superficial en, 135, 501,622
  caídas de presión en :
    flujo laminar, 134-37,
    flujo turbulento, 137-38
  coeficientes de tranferencia de calor para, *284-85,500,621-22*
  coeficientes de transferencia de masa para, 500
  factores de forma para partículas, 139
  ley de Darcy para el flujo en, 140-41
  secado en, 6 19-22
  sinuosidad en, 459, 523-24
  transferencia de masa en, 500-2
Lechos fluidizados:
  expansión de, 145
  porosidad mínima en, 141
  transferencia de calor en, 285-86
  transferencia de masa en, 500
  velocidad mínima de fluidización, 14 1-43
Lennard-Jones, función de, 440-42
Ley de los gases, ideal, 10-12
Lixiviación líquido-sólido (véase Lixiviación),
Lixiviación:
  a contracorriente por etapas:
    flujo inferior constante, 815
    flujo inferior variable, 8 12- 13
    línea de operación, 8 lo- ll
    número de etapas, 812-13
  de contacto en una sola etapa, 809
  equipo para:
    espesadores, 806
    extractor de Bollman, 805
    extractor de Hildebrandt, 805
    lechos fijos (Shanks), 804
    tanques con agitación, 806
  lavado, 800
  métodos de procesamiento, 804
  objetivo, 800
  preparación de sólidos, 80 l-3
  relaciones de equilibrio, 807-8
  velocidad de:
    cuando controla la difusión en un sólido, 803
    cuando se disuelve un sólido, 802-3
    introducción, 802

M

Mach, número, 119
Manómetros, 44-45
Masa velocidad, 59
Masa, balance total, 59-60
Masa, coeficientes de transferencia de:
  analogías para, 488-91
  de película y generales, 662-64,667-69, 675-79,703-5
  definición, 478,483
  determinación experimental, 487,703-4
  en el interior de tuberías, 491-94
  introducción, 430,48 l-82
  modelos para, 535-36
  números adimensionales, 487-88
  para A a través de B sin movimiento, 485-86
  para cilindros en lechos empacados, 500
  para cilindros, 503
  para contradifusión equimolar, 483-84
  para cristalización, 823-24
  para cubos en lechos empacados, 501
  para esferas, 497-98
  para lechos empacados, 500-2, 6 19-20
  para lechos fluidizados, 501
  para metales líquidos, 503
  para película descendente, 492-93
  para placas planas, 495-96
  para suspensiones de partículas pequeñas, *503-7*
  para torres de paredes mojadas, 492-94
  para torres empacadas, 703-5
  tipos de, 483-86
Masa, condiciones límite en transferencia de, 510
Masa, unidades de, 8
Materiales biológicos:

calor de la respiración, 258
congelamiento de, 405-7
difusión de, 450-55
enfriamiento de, 402-4
equilibrio del contenido de humedad, 593-95
esterilización de, 634-42
evaporación de:
jugos de fruta, 572
licores de pulpa de papel, 572
soluciones de azúcar, 572
lixiviación, 800-6
propiedades físicas de, 0x0 889-891
secado por congelamiento de, 630-34
secadores de granos, 584
McCabe, Ley AL para el crecimiento de cristales, 824-25
McCabe-Thiele, método de, 723-40
Medidor de orificio, 150-5 1
Membranas, procesos de *(véase también* Diálisis; Gas, procesos de permeación de membrana; Osmosis inversa; Ultrafiltración):
equipo para, 837,840-42,873,975-76
permeabilidad en, 457-59,835,867-69,873
resistencias en serie, 834-35, 838-39
tipos, 650,833-34
Metales, propiedades de los, 972-73
Métodos gráficos:
conducción bidimensional, 263-64
integración por, 29-30
Métodos numéricos:
para conducción en estado estacionario:
bidimensionales, 348-55
con otras condiciones límite, 354-55
para difusión en estado estacionario:
bidimensionales, 461-62
con otras condiciones límite, 462-64
para integración por el método de Simpson, 30
para transferencia de calor en estado no estacionario:
en condiciones límite, 392-93
en un cilíndro, 399-400
en una placa, 390-93
método de Schmidt, 391
método implícito, 400-l
para transferencia de masa en estado no estacionario:
en condiciones límite, 527
en una placa, 524-27
método de Schmidt, 525-26
Mezclado *(véase también* Agitación):
con pastas, 173-74
con polvos, 173
discusión, 16 1, 173-74
equipo para, 173-74
Mezclado, tiempo de *(véase* Agitación),
Mezcladores sin movimiento *(véase* Agitación)
Mezcladores-sedimentadores, 792, 806-7
Miers, teoría de, 822-23
Mol, unidades, 8
Molecular, difusión *(véase* Difusión),
Molecular, transporte *(véase* Difusión),
Molienda (véase Reducción mecánica de tamaño),
Momento lineal, balance del,
aplicaciones, 199-208
coraza, 90-95
ecuación de Laplace, 211
ecuaciones de Euler, 2 10
ecuaciones diferenciales, 186-87, 193-99
en cilindros rotatorios, 205-8
en tuberías circulares, 203-5
entre placas paralelas, 199-202
fluidos ideales, 210
flujo potencial, 2 ll - 14
fuerza Coriolis, 199
función en chorro, 209-10
general, 80-90
para capa límite, 217-l 9,225-28
para fluidos newtonianos, 195-99
para golpear un aspa con chorros, 88-90
transferencia del momento lineal, 54-55, 88
Momento lineal:
definición, 54-55,80-81
factor de corrección de velocidad, 83-85
introducción, 38

N

Navier-Stokes, ecuaciones de, 197-99
Newton, ley de,
para la sedimentación, 902
para la transferencia de momento lineal, 5 l-53
para la viscosidad, 51-53
segunda ley (balance del momento lineal), 80-81
Notación, 984-92
Nucleación *(véase* Cristalización):
primaria, 822
secundaria, 823
Número de unidades de transferencia:
para humidificación, 678-79
para intercambiadores de calor, 309
para transferencia de masa, 695-96
Nusselt, ecuación de, 296-99
Nusselt, número de, 268

O

Operación, líneas de *(véase* Absorción; Destilación; Humidificación; Lixiviación)

Operaciones diferenciales:
con escalares, 188-89
con vectores, 188-89
derivadas de tiempo, 187-88
ósmosis inversa:
introducción, 865
membranas, 866
modelo de mezclado completo, 873-75
polarización de la concentración en, 872-73
presión osmótica, 865-66
rechazo del soluto, 868-69
teoría, 867-68,872-75
variables de operación, 871

P

Partículas, medición del tamaño:
en la cristalización, 824-25
en la reducción mecánica de tamaño, 928-29
tamices estándar, 983
Pasteurización, 64 l-42
Película descendente:
balance de momento lineal en un recinto, 93-94
difusión en, 492-93
perfil de velocidad, 95
Penetración, teoría de la, 493, 596
Permeabilidad de sólidos, 458-59,835,839-40, 844-45,867-68,873
Pitot, medidor de tubos de, 145-47
Placa planas:
coeficiente de arrastre para, 130-33, 218
ecuaciones de la capa límite para:
resistencia al flujo total, 215-19,225-28
transferencia de calor, 4 13- 16
transferencia de masa, 532-34
transferencia de calor a, 279, 603
transferencia de masa a, 495-96
Planck, ley de, 3 16
Platos de burbujeo:
eficiencia, 740-43
tipos de, 680
Platos ideales (véase platos de burbujeo)
Platos, eficiencia de:
de Murphree, 741-43
de punto, 742
introducción, 740-41
total, 74 l-43
Platos, torre de, 680, 792
Pohlhausen, relación de capa límite de, 416
Poiseuille, ecuación de (véase Hagen-Poiseuille, ecuación de),
Prandtl, analogía de, 490
Prandtl, longitud de mezclado (véase Flujo turbulento),
Prandtl, número de:
definición, 267
en gases, 955-59
Precipitación y sedimentación por centrifugación (véase *también* Ciclones; Filtración centrífuga; Centrífugas),
diámetro crítico, 919-20
ecuación para la fuerza centrífuga, 9 16- 18
objetivo, 915
precipitación de partículas, 9 18-22
separación de líquidos, 922-23
Presión osmótica, 865-67
Presión, caída de *(véase también* Fricción en fluidos):
en flujo comprimible, 104,115-l 9
en flujo laminar, 96-98
en flujo turbulento, 1 OO-3
en lechos empacados, 134-38
en tuberías, 96- 108
Presión:
carga y, 43
dispositivos de medición, 44-47
factores de conversión para, 940-41
unidades de, 10, 39-41
Procesos a contracorriente *(véase también* Absorción;
Destilación; Lixiviación; Extracción líquido-líquido; Etapas, procesos por,):
ecuaciones analíticas, 659-60
en transferencia de calor, 275-76
etapas múltiples, 655-56
Procesos de Separación,
tipos de, 650-5 1
Propiedades de los sólidos, 970-73
Propiedades fisicas de los compuestos, 943-80
Pseudoplásticos, fluidos, 175-76
Psicométrica, relación, 592-93

R

Radiación, factores de vista en, 3 18-30
Radiación, transferencia de calor por:
absortividad, 3 ll
capas, 321
coeficiente de transferencia de calor, 3 14
cuerpogris, 312-13,318
cuerpo negro, 3 ll - 12
emisividad,311-12,317,973
en gases absorbentes, 330-33
factores de vista:
ecuación general, 32 l-24
entre cuerpos grises, 328-30
entre cuerpos negros, 3 18-27

introducción, 243,310-12,316
ley de Kirchhoff, 3 ll, 3 17- 18
ley de Planck para la potencia emisiva 3 16
ley de Stefan-Boltzmann, 3 12-I 3
para objetos pequeños, 3 12-I 3
radiación y convección combinadas, 3 13-l 5
Raoult, ley de, 712- 13,755
Reacción química y difusión, 5 10- 14
Reducción de tamaño (véase reducción mecánica de tamaño)
Reducción mecánica de tamaño,:
equipo para:
molino triturador revolvente, 933
triturador de Blake, 932
triturador de Dodge, 932
triturador de quijadas, 932
triturador de rodillos, 933
triturador giratorio, 933
medición del tamaño de las partículas, 929-30
objetivo, 928-29
potencia requerida:
ley de Bond, 931
ley de Kick, 93 1
ley de Rittinger, 930
teoría general, 929-3 1
Reflujo, relación de, 73 l-33,762-63
Regla de las fases, 652, 712, 721, 786
Regla del brazo de palanca inverso, 789
Reopécticos, fluidos, 176
Resistencia al flujo debido a la forma, 130-33,215
Resistencia de contacto en interface, 262-63
Reynolds, analogía de, 489-90
Reynolds, esfuerzos de, 220-2 1
Reynolds, número de:
definición, 57-58,229,487
para agitación, 164-65
para condensación, 299
para fluidos no newtonianos, 178
para flujo en tubos, 57, 268,487
para placas planas, 216, 2 18
Rittinger, ley para la trituración de, 930
Rugosidad en tuberías, 100-l

S

Schmidt, método de:
para transferencia de calor, 391
para transferencia de masa, 525-26
Schmidt, número de, 443,488
Secado *(véase también* Secadores)
balance de calor en secadores continuos, 625-26
circulación cruzada, 6 19-20
condiciones de secado constante:
curva de la velocidad de secado, 597-99
efecto de la humedad, 606
efecto de la temperatura, 606
efecto de la velocidad del aire, 606
efecto del espesor de los sólidos, 606
periodo de la velocidad decreciente, 599-601, 606-9
periodo de velocidad constante, 599, 601-6
predicción del periodo de velocidad constante, 602-6
tiempo de, 601-5
uso de la curva de secado, 601-2
contracorriente continua, 628-30
de materiales biológicos, 594-95, 601
efecto de contracción, 601
en bandejas con condiciones variables del aire, 625
en lechos empacados, 6 19-20
humedad combinada, 595-96
humedad crítica, 599
humedad de equilibrio, 594-96
humedad libre, 596
humedad sin combinar, 595-96
introducción, 579-80
métodos experimentales, 596-97
por congelación, 63 l-34
recirculación de aire en, 627-28
teoría de la difusión de líquidos, 600-601,613-14
teoría del movimiento capilar, 600,615- 16
Secado por congelación, 63 l-34
Secadores *(véase también* Secado)
continuos de túnel, 582
de anaqueles al vacío, 58 l-82
de bandejas, 580, 624
de grano, 584
de lecho fijo, 619-23
de rociado, 583-84
de tambor, 582
rotatorio, 582
Sedimentación:
Asentamiento y sedimentación por centrífugación, *(véase también:* Ciclones; Filtración centrífuga; Centrífugas),
asentamiento diferencial, 907-14
clasificación, 907-9,9 13-l 4
coeficiente de resistencia al flujo para una esfera, 90 l-4,908-9
efecto de pared, 907
ley de Newton, 902

ley de Stoke, 132,214-15,902
movimiento browniano, 903
objetivo, 900-l
precipitación retardada, 906, 908
sedimentación y espesamiento, 9 ll - 15
teoría para esferas rígidas, 901-5
velocidad terminal de asentamiento en una esfera, 902
Separación *(véase también* asentamiento y sedimentación
de dos líquidos
de partículas de los gases
de partículas de los líquidos
por asentamiento diferencial, 907-9
Separación liquido-sólido *(véase* Cristalización; Asentamiento y sedimentación)
Separación mecanice-física:
clasificación, 884-85
métodos de separación, 884-85
procesos *(véase también* Asentamiento y sedimentación
centrifugas; Ciclones; Filtración;Filtración centrífuga; Reducción mecánica de tamaño; Sedimentación)
Sherwood, número de, 488
SI, sistema de unidades, 5-6
Simpson, método de la integración numérica de, 30
Sinuosidad, factor de, 459-60, 524
Sistema inglés de unidades, 6-7
Sistema internacional (SI):
sistema de unidades básicas, 5-7
tabla de valores y factores de conversión, 93942
Sobresaturación, 820-24 (véase también Cristalización)
Sólidos porosos:
difusión de Knudsen en, 518-19
difusión de transición en, 520-21
difusión molecular en, 459-60,5 19-20
difusividad efectiva de, 459-60,523-24
introducción, 455,459-60,5 17-l 8
Solubilidad de las sales:
Solubilidad de los gases:
en líquidos, 652-53,973-5
en sólidos, 456-59
Sopladores turbo, 158
Spitzkasten, clasificador de, 914
Stanton, número de, 488
Stefan-Boltzmann, ley de la radiación de, 3 12,3 17
Stoke, ley de, 132,215,902
Suspensiones, transferencia de masa a, 503-6

T

Tamices estándar, dimensiones, 983
Tamizado, análisis por:
en cristalización, 824-25
medición del tamaño de las partículas, 824-25
tabla de tamices de Tyler, 983
Temperatura de bulbo húmedo:
relación con la temperatura adiabática de saturación, 593
teoria, 593
Temperatura de película, 280
Temperatura de punto de rocío, 587, 756
Temperatura, escalas de, 7-8
Temperatura, media aritmética de descenso de, 268
Teorla de película, 535-36
Termodinámica, primera ley de la, 66-67
curvas típicas de solubilidad, 546
tiosulfato de sodio, 817
Tixotrópicos, fluidos, 176
Torre de rociado, 792-93
Torre de tamices (de placa perforada), 680, 741-42,793-94
Sigma, valor (centrifugo), 92 l-22
Torres de enfriamiento *(véase* Procesos de humidilicación),
Torres de platos, 680, 682-83, 792
Torres empacadas, 671,681-82,792-93
Trabajo perdido, 73
Trabajo, 66-67,73
Trabajo, índice para trituración, 93 1
Transferencia de calor en estado estacionario *(véase* Métodos numéricos; Transferencia de calor por conducción; Transferencia de calor por convección)
Transferencia de calor en estado no estacionario (conducción)(véase *también* Métodos numéricos):
aplacas planas, 373-75,377-80
deducción de la ecuación para, 24 l-42, 368-70
ecuación analítica para, 373-75
en materiales biológicos, 40 l-7
en tres direcciones, 384, 387-89
en un cilindro, 38 l-83
en una esfera, 383,384-86

método de capacidad global, 370-73
método para la resistencia interna despreciable, 370-373
parámetros de transferencia de calor y masa para, 38 1,479
temperatura promedio para, 389-90
Transferencia de calor por conducción *(véase también* Estado no estacionario, transferencia de calor en):
a través de materiales en paralelo, 255
a través de paredes en serie, 25 1-53
a través de una pared, 247-48
combinación de conducción y convección, 255-57
con generación de calor, 258-60
ecuaciones para:
en coordenadas cilíndricas, 411
en coordenadas esféricas, 411
en coordenadas rectangulares, 4 11
efecto de conductividad térmica variable, 247
en cilindros, 248,253-54
en una esfera hueca, 250-51
espesor critico de aislamiento, 260-62
estado estable en dos dimensiones:
ecuación de Laplace, 349
en otras condiciones límite, 354-55
método numérico, 349-55
factores de forma en la, 265-66
Fourier, ley de, 5 1,241,243-44,411
mecanismos de, 242
método gráfico del cuadrado multilineal, 263-64
resistencia al contacto en la interface, 262-63
Transferencia de calor por convección natural:
deducción de la ecuación (placa vertical), 286
ecuaciones para diversas geometrias, 286-92
introducción, 285-86
Transferencia de masa entre fases:
composiciones en la interfase, 662-65
introducción, 66 1-63
uso de coeficientes de película, 662-65,674-75, 687-9 1
uso de coeficientes totales, 667-69, 676, 679
Transferencia de masa entre fases:
coeficientes de película, 66 l-62
coeficientes totales, 667-69,676-77,679,687
perfiles de concentración, 661-62
Transferencia de masa líquido-metal, 503
Transferencia de masa, modelos de, 535-36
Transferencia de unidades, método de, 678-79, 695-96
Transporte, procesos de,
clasificación, 4
en capas límite, 4 13- 16
similitud de, 47-52,425-27,474,478,488-91
Trayectoria libre media, 5 17
Trituración y molienda *(véase* Reducción mecánica de tamaño
Triturador giratorio, 933
Tuberías, dimensiones, 982 *(véase también* Tubos y ductos circulares)
Tuberías:
cédula, 96,98 1
dimensiones, 98 1-82
selección de dimensiones, 115
Tubos y ductos circulares:
coeficientes de transferencia de calor en, 268-74
dimensiones, 981-82
distribución universal de la velocidad en, 223-25
factores de fricción, 99- 105
flujo comprimible en, 115-l 9
flujo laminar en, 90-92,96-100
flujo turbulento en, 96-97, 1 OO-4
transferencia de masa en, 49 l-95
Turbulencia, 2 19-20
Turbulencia, intensidad de, 2 19-20
Tyler, tamices estándar de, 983

U

Ultrafiltración:
comparación con la ósmosis inversa, 875
equipo para, 875-76
introducción, 875
membranas para, 875-76
polarización de la concentración en, 872-75
teoria de, 875-78
variables de proceso, 878-79
Undenvood, relación de reflujo mínimo, 762-63
Unidad de transferencia, altura de, 678-79, 695-96,703-4
Unidades de concentración, 10
Unidades:
sistema cgs, 6
sistema inglés, 6-7
sistema SI, 5-6
tabla de, 939-42
y dimensiones, 7
Unitarias, clasificación de operaciones, 3-4

V

Valor medio logarítmico de:
área, 253
correcciones para intercambiadores de calor, 303-S
diferencia de concentración, 501-2, 690
diferencia de temperatura, 275-76,303~4
Válvula, platos de, 680
Vapor, destilación con, 72 l-22
Vapor, presión de:
datos para agua, 584-86,943,945-48
datos para compuestos orgánicos, 714, 765-68
discusión, 12
Vapor, recompresión de (véase Evaporación)
Vapor, tabla de, 2 1,946-950
Vapor-líquido, procesos de separación (véase Destilación)
Vectores, 187-89
Velocidad, distribución universal de, 223-25
Velocidad:
intersticial, 488
máxima, 96-97
perfil en flujo laminar, 92,95-97
perfil en flujo turbulento, 96-97
promedio, 65,92,95
relación entre velocidades, 96-97
superficial, 135,468
tipos de, en transferencia de masa, 432,483-86
universal en tuberías, 223-25
valores representativos en tuberías, 115
Velocidades de irrigación, 681
Ventiladores, 158-59
Ventiladores, 17
Venturi, medidor de, 148-50
Vertederos, 15 l-52
Viscoelásticos, fluidos, 176
Viscosidad,
de alimentos, 980
de gases, 955,956,960-61
de líquidos, 965-67
del agua, 944,952
discusión, 52-56
ley de Newton de la, 52-53,426-27
Volatilidad relativa, 7 17- 18,755
Volumen de control, 62-63
Volúmenes molares, 448-49
Von Kármán, analogía de, 490-9 1

W

Wilke-Chang, correlación de, 448

Esta obra se terminó de imprimir en diciembre de 1998
en los talleres de Programas Educativos, S.A. de C.V.
Calz. Chabacano No. 65, Col. Asturias
C.P. 06850, México, D.F.

Empresa Certificada por el Instituto Mexicano de Normalización
y Certificación A.C. bajo la Norma ISO-9002:
1994/NMX-CC-004:1995 con el Núm. de Registro RSC-048

Procesos de transporte y operaciones unitarias

Esta tercera edición de un texto bien establecido, incorpora cambios que responden al desarrollo reciente del campo de la ingeniería, caracterizado por una creciente imbricación entre la ingeniería química y otras ramas de la ingeniería de procesos (ingeniería sanitaria, bioingeniería, etcétera).

El libro se propone ofrecer una introducción unificada a los procesos de transporte de momento lineal (dinámica de fluidos), calor y transferencia de masa, por un lado, y por el otro a la aplicación de estos principios a las operaciones unitarias de evaporación, secado y procesos de separación en sus distintas modalidades.

La tercera edición conserva los objetivos y el formato de las anteriores. Se han ampliado las secciones sobre transferencia de momento lineal, especialmente el estudio de las ecuaciones diferenciales que la rigen, lo que permite cubrir por entero los procesos de transferencia de momento lineal, calor y masa. En la parte de operaciones unitarias, se han agregado secciones sobre adsorción y un capítulo ampliado sobre los procesos a través de membranas.

Se ha adoptado el sistema internacional de unidades (SI), aunque las ecuaciones más importantes, así como algunos ejemplos y problemas, se expresan también en unidades inglesas.

GRUPO PATRIA CULTURAL

ISBN 968-26-1316-7

9 789682 613166

COMPAÑÍA EDITORIAL CONTINENTAL, S.A.-DE C.V.